intervalo de tiempo de cero a T (el momento del encuentro). Luego el número de puntos del recorrido de ambos se corresponde con el número de instantes de este intervalo de tiempo y deberá ser igual, lo cual es un absurdo, razonaba Zenón, ya que el número de puntos recorridos por la tortuga es sólo una parte propia del número de puntos recorridos por Aquiles.

Tercera aporía del movimiento: espacio finitamente divisible y tiempo infinitamente divisible.

Zenón considera ahora que el espacio que recorre la flecha es un espacio discreto, es decir, que éste se encuentra dividido en pequeños trozos minimales, o quanta de espacio. Durante el movimiento, el móvil tendría que saltar de una unidad a la siguiente, sin ocupar posiciones intermedias. Veamos ahora qué ocurre durante un intervalo de tiempo menor que el tiempo que demora la flecha en saltar de un punto cualquiera de su recorrido al punto espacial que le sigue. Transcurrido este intervalo de tiempo, Zenón dice que ésta pasaría a ocupar un "punto intermedio" que no existiría, y por lo tanto no estaría realmente en ningún lugar y ¡no existiría en absoluto!

Cuarta aporía del movimiento: espacio y tiempo finitamente divisibles.

Supone ahora Zenón que tanto el espacio como el tiempo son discretos y que existen por lo tanto unidades mínimas de tiempo y espacio, quanta de espacio y tiempo. Zenón también supone que un móvil se desplaza por el espacio recorriendo cada uno de sus puntos, sin omitir ninguno de ellos. Esto evidentemente obliga a que la velocidad de cualquier móvil, si ésta es constante, sea de un quantum de espacio por quantum de tiempo (ya que el móvil está obligado a pasar por cada uno de los puntos del espacio) y así todos los móviles tendrían la misma velocidad, lo cual es absurdo. A no ser que para algunos valores del tiempo, el móvil no esté en ninguna parte.

Discusión

En la primera de las aporías, la hipótesis de un tiempo discreto lleva a una contradicción sólo si se supone que la flecha esté obligada a recorrer todos los puntos del continuo. Es posible pensar que la flecha pueda omitir en su recorrido ciertos puntos del continuo espacial, pero de ser así, sería razonable, por cuestiones de simetría, esperar que omitiera un mismo intervalo de espacio, sin importar en qué punto de su trayectoria se encontrase. El movimiento de un cuerpo ocurriría entonces "a saltos", a lo cual Zenón probablemente no llamaría un movimiento en el continuo. Aquí nos vemos enfrentados a un problema de tipo epistemológico. ¿ A qué llamamos un espacio continuo? Por un lado, un espacio infinitamente divisible (que como veremos más adelante no es equivalente al concepto de un espacio continuo) es un objeto ideal que viene a la mente producto de una extrapolación, del acto mental de dividir un segmento en dos mitades, cada mitad en dos, y así sucesivamente hasta el infinito. Si el movimiento ocurriera "a saltos", es decir, si ningún experimento imaginable permitiera discernir ciertos intervalos espacio-temporales, entonces estos intervalos simplemente no tendrían ninguna realidad física, y adoptar como modelo el continuo matemático, o aceptar en su lugar un modelo discreto, sería una simple cuestión de gusto. Vale la pena mencionar en este punto, que, aunque no se hayan medido intervalos de tiempo menores a 10^{-43} segundos, tanto la física relativista, como la mecánica cuántica y la física moderna, adoptan como modelos del mundo espacios finito e infinito dimensionales construidos sobre los números reales, es decir, sobre el continuo matemático, y hasta donde conozco la discusión sobre la divisibilidad del tiempo y el espacio no parece importar demasiado. Posiblemente esto se deba al carácter metafísico de estos problemas y al hecho de que resulte imposible descartar o preferir un modelo sobre otro, basándose en hechos experimentales. Sin embargo, los físicos han conjeturado que posiblemente no tenga sentido hablar de distancias menores a la distancia de Planck, 10^{-35} metros, ni tiempos menores al llamado tiempo de Planck, 10^{-43} segundos. Un móvil que recorriera un quantum de espacio en un quantum de tiempo viajaría a una velocidad de 10^{8} metros por segundos, un tercio de la velocidad de la luz aproximadamente (véase la conferencia del profesor Lorenzo de la Torre, El tiempo en la física).

En la segunda de las aporías, Zenón argumenta en forma errónea (a diferencia de la primera, en la cual el razonamiento es correcto) y la refutación de este argumento es bien conocida: la suma de una serie infinita de términos puede ser perfectamente un número finito. La flecha, por ejemplo, alcanzará el punto medio de su trayectoria, p_1, al cabo de 1/2 segundo, el punto p_2, al cabo de 1/2+1/4 de segundo, el siguiente punto al cabo de 1/2+1/4+1/8, y así sucesivamente. A pesar de que la flecha esté obligada a atravesar un número infinito de puntos espaciales, ello no implica que tarde un tiempo infinito en hacerlo. En efecto, demorará un tiempo igual a la suma de la serie geométrica infinita, de razón 1/2

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots = 1/(1-1/2) - 1 = 1 \text{ segundo.}$$

Detrás de esta explicación, en apariencia muy simple, se ocultan casi dos siglos de esfuerzos de las mejores mentes. ¿Qué significa sumar un número infinito de términos? En el cálculo de Newton y Leibniz, el proceso de paso al límite, y en particular la noción de suma infinita de una serie, nunca es aclarado y aparece siempre rodeado de un aura metafísica. No deja de ser sorprendente que estos grandes hombres y otros que les siguieron lograran construir el gran edificio del cálculo sobre un terreno tan movedizo y pantanoso. En palabras de Christoph Lichtenberg, "el gran artificio que consiste en considerar ciertas pequeñas desviaciones de la verdad como la verdad misma, sobre la cual se ha edificado todo el cálculo diferencial, es a la vez la base de nuestras ideas ingeniosas, y a menudo todo fallaría si tomásemos esas desviaciones con un estricto rigor filosófico". Tomó más de siglo y medio para que finalmente Weierstrass, Cuachy y Dedekind lograran despejar este concepto de todas sus vaguedades y prepararan el terreno sobre el cual Cantor elaboraría su maravillosa teoría del infinito.

El segundo argumento de la segunda aporía es en mi opinión el más sutil, y su refutación está asociada al nombre de Cantor. Es este argumento el que impresionó profundamente a Russell, y el cual lleva a un análisis tan sutil como difícil de las propiedades del continuo matemático, estudio que fue iniciado por Cantor en sus "Fundamentos de la Teoría de Transfinita de Conjuntos", sin duda una de las joyas más preciosas del pensamiento humano. El gran mérito de Cantor consistió en dar por primera vez una definición precisa de la noción de "tamaño de un conjunto infinito" y a la vez establecer en forma clara una manera de comparar los tamaños, o como técnicamente se le denomina, de determinar y comparar la cardinalidad de los conjuntos infinitos. Este trabajo es un perfecto ejemplo de cómo la introducción de un lenguaje formal preciso resulta ser el elemento clave en la solución de un problema milenario. El uso que hacemos en el lenguaje ordinario de palabras como infinito, dimensión, existencia, y de conceptos como más grande, superior, etc., nos lleva con frecuencia a discusiones interminables que suelen empantanarse desde el comienzo debido precisamente a que cada interlocutor le atribuye a estos conceptos un significado que depende de sus gustos e inclinaciones intelectuales, y que por lo general resulta ser una extrapolación laxa del significado que les damos a estas palabras en el lenguaje