



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# **Modelamiento computacional en condiciones de hiperelasticidad para el diseño de una transmisión armónica de uso y condiciones generales**

**Ing. Dennis Edgardo Leon Becerra**

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de ingeniería, Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica

Bogotá, Colombia

2012



# **Modelamiento computacional en condiciones de hiperelasticidad para el diseño de una transmisión armónica de uso y condiciones generales**

**Ing. Dennis Edgardo Leon Becerra**

Tesis presentada como requisito para optar al título de:

**Magíster en Ingeniería - Ingeniería Mecánica**

Director:

Ph.D., Nelson Arzola de la Peña

Línea de Investigación:

Ingeniería de Diseño y Biomecánica

Grupo de Investigación:

Diseño Óptimo Multidisciplinario (OptimUN)

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de ingeniería, Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica

Bogotá, Colombia

2012



*Dedicatoria*

*A Dios y a esas dos mujeres que como  
custodias con amor guardan mi espalda.*



## **Agradecimientos**

A Dios por darnos el impulso diario y al que le debemos todo, a mi familia con la que trabajamos como uno solo, a todos mis amigos con los que hemos lidiado entre la dificultad en varios frentes, a la Universidad Nacional de Colombia por ser un bastión del conocimiento con puertas abiertas, a las facultades de ingeniería y matemáticas por su disposición e interés en que las cosas se hagan bien, y a Ategroup como representante de Solidworks por su energía e incondicional apoyo para con el proyecto.





## Resumen

Este proyecto de tesis presenta un estudio enfocado a la determinación de la influencia de parámetros geométricos relevantes en una transmisión flexondulatoria, orientada a aplicaciones generales de la industria. Se analiza el comportamiento cinemático, los esfuerzos y los mecanismos de falla a través de la aplicación del método de los elementos finitos. Se abordan diversos enfoques de modelamiento, según una metodología de desarrollo que favorece el refinado de modelos analítico-numéricos. Para tal efecto, se parte inicialmente de una simplificación donde se analiza un modelo carente de dentado que funciona gracias a la incidencia de la fricción. Luego se implementa un modelo paramétrico dentado que es utilizado para la ejecución de un diseño experimental factorial completo, simulado o virtual, que tiene el propósito de determinar la influencia de los factores geométricos considerados en el desempeño de la transmisión. Por último, con los resultados de este diseño experimental se encuentra el modelo que presenta mayor robustez, y el mismo se implementa y simula empleando un modelo en 3D hiperelástico, utilizando el modelo de hiperelasticidad de Blatz-Ko. Como resultado del presente trabajo se obtiene un análisis sobre la influencia que poseen los factores geométricos fundamentales en la vida a fatiga, picadura y error cinemático de transmisión. Se encuentra que la mejor solución de diseño es aquella que posee un módulo de 0,1 mm; un factor de corrección dental de +0,5 y un ángulo de presión de 20 grados.

**Palabras clave:** transmisión armónica, engranaje flexible, método de los elementos finitos, fatiga, picadura, error cinemático de transmisión.

## Abstract

This work presents a determination oriented study regarding the influence of relevant geometric parameters of a harmonic drive aimed at industry general applications. Kinematic behavior, effort and failure mechanisms are analyzed through the application of the finite element method. Various modeling approaches are tackled, according to a development methodology that benefits the fine-tuning of analytical and numerical models. To this end, we initially part from a simplification of the system is initially used where a gearless model is analyzed while working due to friction incidence. Then, a parametric strain waive gear model is used to execute a full factorial experimental design, simulated or virtual, intended to determine the influence of geometric factors considered in the transmission performance. Finally, using the results of this experimental design, the most robust model is determined, implemented and simulated by means of a static 3D hyperelastic model, using the Blatz-Ko hyperelasticity model. As a result of this paper, an analysis on the influence the fundamental geometric factors have on fatigue-life, cracks and transmission kinematic error is obtained. It is then possible to establish that the best design solution is the one with a module of 0,1 mm; a gear correction factor of +0,5 and 20 degrees pressure angle.

**Keywords:** harmonic drive, flexible gear, finite elements method, fatigue, pitting, cinematic transmission error.



# Contenido

## Contenido

<b>1. Introducción .....</b>	<b>21</b>
1.1 Motivación del trabajo .....	21
1.2 Planteamiento de problema .....	21
1.3 Objetivos.....	22
1.3.1 General .....	22
1.3.2 Específicos .....	22
1.4 Organización del documento .....	23
<b>2. Revisión del estado del arte.....</b>	<b>25</b>
2.1 Tipos de transmisiones por engranajes.....	25
2.2 Consideraciones fundamentales para el diseño de las transmisiones por engranajes.....	27
2.3 Transmisiones armónicas, tipos y características.....	29
2.4 Consideraciones geométricas.....	35
2.5 Consideraciones cinemáticas .....	38
2.6 Consideraciones de resistencia .....	40
2.7 Consideraciones Tribológicas.....	45
2.8 Técnicas de modelamiento y diseño de transmisiones por engranajes .....	46
<b>3. Desarrollo de los métodos de modelamiento matemático.....</b>	<b>49</b>
3.1 Consideraciones generales de diseño.....	49
3.2 Planteamiento del modelo geométrico parametrizado.....	50
3.3 Modelo analítico cinemático.....	54
3.4 Modelo numérico cinemático .....	55
3.5 Modelo numérico-analítico constitutivo y expectativa de vida .....	59
3.5.1 Planteamiento del error cinemático.....	60
3.5.2 Planteamiento del método numérico .....	60
3.5.3 Planteamiento del modelo de fatiga en la base del diente.....	61

3.5.4	Planteamiento del modelo de picadura.....	64
3.5.5	Planteamiento del modelo tribológico y modelo de capacidad portante.....	65
3.6	Definición del diseño experimental virtual .....	67
3.7	Modelos de análisis en tres dimensiones de la transmisión armónica .....	68
3.8	Modelo hiperelástico .....	72
3.9	Metodología de diseño y articulación de los programas .....	73
<b>4.</b>	<b>Análisis de resultados .....</b>	<b>79</b>
4.1	Comportamiento cinemático .....	79
4.2	Análisis de esfuerzos .....	88
4.3	Resultados del diseño experimental virtual .....	97
4.3.1	Superficie de respuesta para el error cinemático de transmisión .....	100
4.3.2	Superficie de respuesta para la vida de fatiga volumétrica.....	102
4.3.3	Superficie de respuesta para la vida de picadura .....	104
4.3.4	Superficie de respuesta para la capacidad portante. ....	106
4.4	Análisis de esfuerzos para la copa flexible.....	108
4.5	Análisis hiperelástico.....	114
<b>5.</b>	<b>Propuesta de diseño para una transmisión armónica.....</b>	<b>121</b>
5.1	Arquitectura de la transmisión .....	121
5.2	Diseño para fabricación .....	123
5.3	Diseño para ensamble .....	126
5.4	Diseño orientado al medio ambiente .....	127
5.5	Transmisión: Prototipo logrado transmisión armónica.....	128
<b>6.</b>	<b>Conclusiones y trabajo futuro .....</b>	<b>131</b>
6.1	Consideraciones finales .....	131
6.2	Trabajo futuro y perspectiva .....	132
6.3	Conclusiones finales .....	133

## Lista de figuras

	<b>Pág.</b>
<b>Figura 2-1:</b> Tipos de engranajes .....	26
<b>Figura 2-2:</b> Contacto entre dientes [1].....	28
<b>Figura 2-3:</b> Parámetros de los dientes de engranajes [2] .....	28
<b>Figura 2-4:</b> Harmonic Drive AG [5].....	30
<b>Figura 2-5:</b> Posiciones de las piezas de la transmisión en rotación [8] .....	31
<b>Figura 2-6:</b> Configuraciones cinemáticas para la transmisión armónica [9].....	32
<b>Figura 2-7:</b> Configuraciones geométricas de las transmisiones armónicas [9].....	33
<b>Figura 2-8:</b> Descripción del proceso de análisis por MEF [18].....	44
<b>Figura 3-1:</b> Posición de un punto <i>P</i> sobre el engranaje flexible en posición deformada [9] .....	55
<b>Figura 3-2:</b> Esquema de distribución de esfuerzos.....	62
<b>Figura 3-3:</b> Fluctuación de los esfuerzos en la transmisión armónica .....	62
<b>Figura 3-4:</b> Fluctuación de los esfuerzos en la transmisión número 16.....	63
<b>Figura 3-5:</b> Esquema dimensional para el engranaje flexible .....	69
<b>Figura 3-6:</b> Modelo de transmisión generado para la simplificación 2D .....	71
<b>Figura 3-7:</b> Modelo generado para el análisis de la flexión de la copa .....	72
<b>Figura 3-8:</b> Metodología de diseño para una transmisión armónica .....	74
<b>Figura 3-9:</b> Aplicación para el diseño de transmisiones armónicas.....	77
<b>Figura 4-1:</b> Mallado y esfuerzos equivalentes que aparecen en el modelo preliminar .....	80
<b>Figura 4-2:</b> Trayectoria descrita por un punto en el engranaje flexible.....	80
<b>Figura 4-3:</b> Trayectoria de un punto para el modelo analítico.....	81
<b>Figura 4-4:</b> Trayectoria de un punto para el modelo dentado.....	81
<b>Figura 4-5:</b> Trayectoria de un punto para el modelo sin dentado.....	81
<b>Figura 4-6:</b> Comparación de la cinemática de un punto .....	82
<b>Figura 4-7:</b> Gráfica de los residuos del error de transmisión para el modelo 19 .....	83
<b>Figura 4-8:</b> Comparación de la cinemática del radio de un punto.....	85
<b>Figura 4-9:</b> Curvas de velocidades para el modelo analítico .....	86
<b>Figura 4-10:</b> Curvas de velocidades modelo sin dientes .....	86
<b>Figura 4-11:</b> Gráfico de aceleraciones en el modelo dinámico .....	87
<b>Figura 4-12:</b> Gráfico de aceleraciones en el modelo sin dientes.....	87
<b>Figura 4-13:</b> Gráfico del esfuerzo principal máximo para el modelo número 22.....	90
<b>Figura 4-14:</b> Gráfico del esfuerzo principal mínimo para el modelo número 22 .....	91
<b>Figura 4-15:</b> Gráfico de Goodman para el modelo 22.....	91
<b>Figura 4-16:</b> Gráfico del esfuerzo principal máximo para el modelo número 3.....	92
<b>Figura 4-17:</b> Gráfico del esfuerzo principal mínimo para el modelo número 3 .....	92
<b>Figura 4-18:</b> Gráfico de Goodman para el modelo 3.....	93
<b>Figura 4-19:</b> Gráfico de esfuerzo principal máximo para el modelo número 19 .....	93
<b>Figura 4-20:</b> Gráfico de esfuerzo principal mínimo para el modelo número 19 .....	94
<b>Figura 4-21:</b> Gráfico de Goodman para el modelo 19.....	94
<b>Figura 4-22:</b> Zona de incidencia máxima de esfuerzos para el modelo 22.....	95
<b>Figura 4-23:</b> Gráfico de esfuerzos de Von Mises para el modelo 22.....	95
<b>Figura 4-24:</b> Posición característica de los nodos analizados sobre el perfil del diente .....	96
<b>Figura 4-25:</b> Respuesta no lineal .....	97
<b>Figura 4-26:</b> Superposición geométrica de los perfiles dentales evaluados para un módulo de 0,1 mm .....	97
<b>Figura 4-27:</b> Efectos principales para error de transmisión promedio .....	101
<b>Figura 4-28:</b> Superficie de respuesta estimada para un factor de corrección de 0.25.....	101
<b>Figura 4-29:</b> Superficie de respuesta estimada para un ángulo de presión de 25 grados .....	101
<b>Figura 4-30:</b> Gráfica de efectos principales para factor de seguridad a la fatiga.....	102
<b>Figura 4-31:</b> Superficie de respuesta para el factor de seguridad a fatiga para una corrección de 0,25 .....	103

## XIV Modelamiento computacional en condiciones de hiperelasticidad para el diseño de una transmisión armónica de uso y condiciones generales

---

<b>Figura 4-32:</b>	Superficie de respuesta para el factor de seguridad a fatiga para un ángulo de presión de 25 grados 103
<b>Figura 4-33:</b>	Gráfica de efectos principales para vida a picadura ..... 104
<b>Figura 4-34:</b>	Superficie de respuesta estimada para vida a picadura con factor de corrección de 0,25 ..... 105
<b>Figura 4-35:</b>	Superficie de respuesta estimada para picadura con ángulo de presión de 25 grados ..... 105
<b>Figura 4-36:</b>	Gráfica de efectos principales para capacidad portante ..... 106
<b>Figura 4-37:</b>	Superficie de respuesta estimada para la capacidad portante con factor de corrección de 0,25 ..... 106
<b>Figura 4-38:</b>	Superficie de respuesta estimada para la capacidad portante con ángulo de presión de 25 grados 106
<b>Figura 4-39:</b>	Engranaje flexible de copa larga ..... 108
<b>Figura 4-40:</b>	Engranaje flexible de copa media ..... 109
<b>Figura 4-41:</b>	Engranaje flexible de copa corta ..... 109
<b>Figura 4-42:</b>	Respuesta en el semi-eje menor de los esfuerzos Von Mises para el engranaje flexible de copa corta 110
<b>Figura 4-43:</b>	Respuesta en el semi-eje mayor de los esfuerzos Von Mises para el engranaje flexible de copa corta 110
<b>Figura 4-44:</b> media	Respuesta en el semi-eje menor de los esfuerzos Von Mises para el engranaje flexible de copa 111
<b>Figura 4-45:</b> media	Respuesta en el semi-eje mayor de los esfuerzos Von Mises para el engranaje flexible de copa 111
<b>Figura 4-46:</b>	Respuesta en el semi-eje menor de los esfuerzos Von Mises para el engranaje flexible de copa larga 111
<b>Figura 4-47:</b>	Respuesta en el semi-eje mayor de los esfuerzos Von Mises para el engranaje flexible de copa larga 112
<b>Figura 4-48:</b>	Efecto de los esfuerzos de Von Mises en el semi-eje mayor..... 112
<b>Figura 4-49:</b>	Efecto de los esfuerzos de Von Mises en el semi-eje menor ..... 113
<b>Figura 4-50:</b>	Deformaciones y esfuerzos equivalentes en el engranaje flexible de copa corta..... 113
<b>Figura 4-51:</b>	Deformaciones y esfuerzos equivalentes en el engranaje flexible de copa media..... 114
<b>Figura 4-52:</b>	Deformaciones y esfuerzos equivalentes en el engranaje flexible de copa larga..... 114
<b>Figura 4-53:</b>	Curva de comportamiento para módulo de elasticidad contra temperatura para distintos materiales 116
<b>Figura 4-54:</b>	Comparación entre las trayectorias de los métodos empleados ..... 117
<b>Figura 4-55:</b> análisis	Comparación del esfuerzo principal máximo para distintos materiales y modelos constitutivo de 118
<b>Figura 4-56:</b>	Comparación esfuerzo principal mínimo para distintos materiales y modelos constitutivo de análisis 118
<b>Figura 4-57:</b>	Esfuerzos equivalente Von Mises para el material Ni steel 2%-9%..... 119
<b>Figura 4-58:</b>	Esfuerzos equivalente Von Mises para el material Cr -Mo 5%-9%..... 119
<b>Figura 4-59:</b>	Esfuerzos equivalente Von Mises para el material ASISI SAE 4340 utilizando el modelo hiperelástico 120
<b>Figura 4-60:</b>	Esfuerzos equivalente Von Mises para el material ASISI SAE 4340 utilizando el modelo isotrópico 120
<b>Figura 5-1:</b>	Ensamble de la transmisión armónica desarrollada..... 121
<b>Figura 5-2:</b>	Engranaje flexible, modelo 19 ..... 123
<b>Figura 5-3:</b>	Modelos de copa de longitud variable ..... 124
<b>Figura 5-4:</b>	Agujeros de sujeción para el modelo de transmisión..... 126
<b>Figura 5-5:</b>	Ensamble de conjunto para el modelo 19 ..... 127
<b>Figura 5-6:</b>	Conjunto modelo transmisión disposición transversal ..... 129

## Lista de tablas

	<b>Pág.</b>
<b>Tabla 3-1:</b> Valores de los niveles de los factores experimentales. ....	68
<b>Tabla 3-2:</b> Datos bibliográficos sobre la geometría dimensional. ....	70
<b>Tabla 3-3:</b> Datos extrapolados de la bibliografía. ....	70
<b>Tabla 4-1:</b> Coeficientes. ....	84
<b>Tabla 4-2:</b> Análisis de Varianza. ....	84
<b>Tabla 4-3:</b> Errores sección de curva numeradas de izquierda a derecha Figura 4-8...	85
<b>Tabla 4-4:</b> Modelos analizados en el diseño experimental. ....	88
<b>Tabla 4-5:</b> Factor de seguridad según el diseño experimental. ....	98
<b>Tabla 4-6:</b> Error de transmisión según el diseño experimental.....	99
<b>Tabla 4-7:</b> Capacidad portante según e diseño experimental.....	100
<b>Tabla 4-8:</b> Resultado análisis de Varianza para Error de transmisión promedio .....	102
<b>Tabla 4-9:</b> Análisis de Varianza para Factor seguridad fatiga .....	103
<b>Tabla 4-10:</b> Resultados de optimalidad para factor seguridad fatiga .....	104
<b>Tabla 4-11:</b> Resultados de optimalidad para vida a picadura .....	105
<b>Tabla 4-12:</b> Análisis de Varianza para Capacidad portante .....	107
<b>Tabla 4-13:</b> Resultados de optimalidad para Capacidad portante .....	107
<b>Tabla 4-14:</b> Temperatura versus módulo de elasticidad.....	115
<b>Tabla 5-1:</b> Variables de diseño para la transmisión modelo 19 .....	125

## Lista de símbolos y abreviaturas

### Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Ver
$2h$	Espesor del cascarón	Ecuación 2.23
$A$	Condición de borde	Ecuación 2.22
$An_c$	Ángulo de la simetría de las curvas para la corona	Ecuación 3.14
$An_e$	Ángulo de la simetría de las curvas (engranaje)	Ecuación 3.13
$aw$	Distancia entre centros	Ecuación 3.10
$a_n$	Constante de Fourier	Ecuación 2.16
$B$	Condición de borde	Ecuación 2.22
$B$	Ángulo de la hélice en el cilindro de referencia	Ecuación 3.1
$b$	Contacto mecánico ideal con el cascaron	Ecuación 2.23
$b_n$	Constante de Fourier	Ecuación 2.17
$C$	Condición de borde	Ecuación 2.23
$C_{de}$	Diámetro exterior del diente engranaje flexible corregido	Ecuación 3.6
$C_{Dec}$	Diámetro externo del diente corona corregido	Ecuación 3.8
$C_{df}$	Diámetro fondo del diente engranaje flexible corregido	Ecuación 3.5
$C_{Dfc}$	Diámetro fondo del diente corona corregido	Ecuación 3.7
$Cocel$	Cociente de crecimiento del tamaño del elemento	
$c$	Factor de holgura radial	Ecuación 3.3
$D$	Fuerzas no conservativas, representada por la función de Rayleigh	Ecuación 2.14
$D_e$	Diámetro exterior del diente engranaje flexible	Ecuación 3.6
$D_{ec}$	Diámetro externo del diente para la corona	Ecuación 3.8
$D_{fc}$	Diámetro fondo del diente para la corona	Ecuación 3.4
$D_{fe}$	Diámetro fondo del diente engranaje flexible	Ecuación 3.3
$D_{pc}$	Diámetro primitivo para la corona	Ecuación 3.2



$D_{pe}$	Diámetro primitivo engranaje flexible	Ecuación 3.1
$d$	Diámetro	Ecuación 2.3
$E$	Módulo de elasticidad	Ecuación 2.22
$Esp_{AX}$	Espesor axial piezas	Ecuación 3.18
$EspA$	Espesor del anillo del engranaje flexible sin los dientes	Ecuación 3.18
$g_c$	Radio circulo base para la corona	Ecuación 3.12
$g_e$	Radio circulo base engranaje	Ecuación 3.11
$h_1$	Capa mínima de lubricante	Ecuación 3.41
$h_a$	Factor de altura del diente	Ecuación 3.3
$K$	Factores de modificación de la tensión	Ecuación 3.37
$m$	Módulo de los engranajes	Ecuación 3.1
$m_a$	Razón de par de torsión	Ecuación 2.2
$m_v$	Razón de velocidad	Ecuación 2.1
$N$	Relación de transmisión	Ecuación 2.10
$Nu_{min}$	Número mínimo de elementos en un círculo como parámetro de malla.	
$o$	Coordenada angular	Ecuación 2.21
$P_c$	Paso circular	Ecuación 2.3
$P_d$	Paso diametral	Ecuación 2.4
$q_i$	Representa las coordenadas generalizadas del sistema o grados de libertad	Ecuación 2.14
$R$	Es el radio medio tomado en la superficie del cascaron	Ecuación 2.21
$Ratio$	Cociente del tamaño de elemento de una capa en el tamaño de elemento de la capa anterior.	
$R_b$	Radio de las aristas del diente engranaje flexible y corona.	
$RMS$		Ecuación 4.1
$r$	Radio de contacto mecánico con el cascaron	Ecuación 2.23
$r_{entrada}$	Radio	Ecuación 2.1
$r_{salida}$	Radio	Ecuación 2.1
$T$	Energía cinética del sistema	Ecuación 2.14
$Tele_m$	Tamaño de los elementos en el control de mallado	
$T_{max}$	Tamaño máximo de elemento de la malla	
$T_{min}$	Tamaño mínimo de elemento de la malla	
${}^{t+\Delta t}\{\mathbf{F}\}$	Vector de fuerzas nodales generadas internamente.	Ecuación 3.24
${}^{t+\Delta t}\{\mathbf{F}\}^{(i-1)}$	Vector de fuerzas nodales generadas internamente en la iteración(i)	Ecuación 3.24
${}^{t+\Delta t}[\mathbf{K}]^{(i)}$	Matriz jacobiana (rigidez tangente) en la iteración (i).	
${}^{t+\Delta t}\{\mathbf{R}\}$	Vector de cargas nodales de aplicación	Ecuación 3.24

	externa	
$t+\Delta t \{U\}^{(i)}$	Vector de los desplazamientos totales en la iteración (i)	Ecuación 3.23
$u(t)$	Vector de entrada	Ecuación 2.20
$v_d$	Velocidad de deslizamiento	Ecuación 3.41
$V$	Fuerzas conservativas	Ecuación 2.14
$\nu$	Razón de Poisson	Ecuación 2.22
$\omega_c$	Velocidad angular corona	Ecuación 2.12
$\omega_{GO}$	Velocidad angular generador	Ecuación 2.12
$w^*$	Desviación radial del flexible	Ecuación 2.22
$\omega_{Salida}$	Velocidad angular de salida	Ecuación 2.1
$\omega_{entrada}$	Velocidad angular de entrada	Ecuación 2.1
$X$	Coefficiente global de corrección de los dientes.	
$X_{involuta_i}$	Coordenada X involuta	Ecuación 3.16
$X_0$	Coordenada fija X modelo analítico	Ecuación 3.21
$x$	Variable adimensional que engloba varios términos geométricos	Ecuación 2.21
$x_c$	Coefficiente de corrección del diente para la corona	Ecuación 3.7
$x_e$	Coefficiente de corrección del diente engranaje.	Ecuación 3.5
$x(t)$	Vector de variables de estado	Ecuación 2.19
$\dot{x}(t)$	Vector de variación temporal	Ecuación 2.19
$Y$	Variable dependiente	
$Y_0$	Coordenada fija Y modelo analítico	Ecuación 3.22
$Y_{involuta_i}$	Coordenada Y involuta	Ecuación 3.17
$y(t)$	Vector de salida del sistema	Ecuación 2.20
$Z$	Número de dientes para la corona	Ecuación 3.2
$Z_0$	Número de dientes del engranaje.	Ecuación 3.1
$z$	Es la coordenada que describe el borde libre deformado por el generador	Ecuación 2.21
$\{\Delta U\}^{(i)}$	Vector de desplazamientos nodales incrementales en la iteración (i)	Ecuación 3.23
$\{\Delta R\}^{(i-1)}$	Vector de cargas no equilibradas en la iteración (i)	Ecuación 3.27

## Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Ver
$\gamma$	Deformación angular	
$\varepsilon_d$	Tolerancia de desplazamiento	Ecuación 3.23
$\varepsilon_e$	Tolerancia de energía	Ecuación 3.25
$\varepsilon_f$	Tolerancia de carga residual	Ecuación 3.24
$\theta_C$	Ángulo corona	Ecuación 2.8
$\theta_{EF}$	Ángulo engranaje flexible	Ecuación 2.7
$\theta_{Err}$	Ángulo error de transmisión	Ecuación 2.13
$\theta_{GO}$	Ángulo generador de onda	Ecuación 2.8
$\theta_p$	Ángulo de operación	Ecuación 2.15
$\tau_C$	Esfuerzo corona	Ecuación 2.18
$\tau_{EF}$	Esfuerzo engranaje flexible	Ecuación 2.18
$\tau_{GO}$	Esfuerzo engranaje de onda	Ecuación 2.18
$\sigma_{1a}$	Esfuerzo principal 1 alternante	Ecuación 3.33
$\sigma_{2a}$	Esfuerzo principal 2 alternante	Ecuación 3.33
$\sigma_{3a}$	Esfuerzo principal 3 alternante	Ecuación 3.33
$\sigma_{1m}$	Esfuerzo principal 1 medio	Ecuación 3.34
$\sigma_{2m}$	Esfuerzo principal 2 medio	Ecuación 3.34
$\sigma_{3m}$	Esfuerzo principal 3 medio	Ecuación 3.34
$\sigma_a$	Esfuerzo alternante	Ecuación 3.31
$\sigma_e$	Esfuerzo límite resistencia a la fatiga	Ecuación 3.35
$\sigma'_e$	Esfuerzo límite resistencia a la fatiga corregido	Ecuación 3.35
$\sigma_m$	Esfuerzo medio	Ecuación 3.32
$\sigma_{max}$	Esfuerzo máximo	Ecuación 3.31
$\sigma_{min}$	Esfuerzo mínimo	Ecuación 3.31
$\sigma_{ut}$	Esfuerzo límite de resistencia a la tensión	
$\sigma_{VMa}$	Esfuerzos de Von Mises alternante	Ecuación 3.33
$\sigma_{VMm}$	Esfuerzos de Von Mises medio	Ecuación 3.34

## Abreviaturas

Abreviatura	Término
C	Corona Rígida
EF	Engranaje Flexible
GO	Generador de Onda
CP	Capacidad Portante



# **1.Introducción**

## **1.1 Motivación del trabajo**

El presente proyecto se ha inspirado en las necesidades apremiantes que se tienen en el área de desarrollo e innovación de transmisiones mecánicas por engranajes en el país, para los cuales no se ha presentado una respuesta alternativa a modelos convencionales. Es por tal razón, que las transmisiones armónicas son descritas como una salida práctica a diversos problemas de la ingeniería en la transmisión eficiente de potencia mecánica; además de las consecuencias favorables sobre las variables que su transformación implica.

Las transmisiones armónicas constituyen una tecnología en expansión que aplica en muchos sectores industriales; sin embargo la difusión de la información técnica y de diseño asociada se torna escasa. En donde sea posible adaptar el desarrollo a favor de la mejora continua; por el contrario, la información disponible se limita en muchos casos a parámetros repetitivos entre las fuentes, de manera que se hace necesario generar investigación partiendo de los modelos difundidos.

La determinación de implementar una transmisión armónica debería depender de la necesidad del modelo de diseño que se adopte dentro de la sollicitación de los diversos proyectos y no de la posibilidad de adquirirla en otro país como es el caso de varios elementos mecánicos. No obstante esto podría ser posible si se tratase de un mecanismo en una etapa más avanzada de desarrollo y difusión en nuestro entorno, esto no ha sido visible debido a la limitada propagación de los desarrollos generados para estos en otras latitudes. Por dicho motivo es momento de recapitular acerca de lo que se está haciendo en nuestro entorno para abordar dicha problemática, es claro que lo primero es ser conscientes de las posibilidades que se tienen con esta transmisión, las necesidades que se presentan a la hora de abordar el problema, y naturalmente el estado del arte, entre otras.

## **1.2 Planteamiento de problema**

En el presente proyecto se describe una metodología de diseño para una transmisión flexo-ondulatoria, donde el principal cometido es favorecer el avance de este tipo de mecanismos en el país, y donde se propone la aplicación de algunos modelos tecnológicos recientes sobre mecanismos a través de un enfoque original. Se emplea el

método de los elementos finitos como herramienta para obtener parámetros de gran incidencia, además de la ejecución de un ensayo factorial experimental virtual.

Comúnmente una transmisión flexo-ondulatoria está constituida por tres elementos; el primero es un generador de onda, el segundo un engranaje flexible, y el último una corona rígida, el movimiento de entrada se induce a través del generador que en sí tiene un perímetro elíptico, en éste mecanismo la restricción que supone la corona rígida condiciona el movimiento del flexible dando como consecuencia una reducción rotacional considerable que es aprovechada en éste mismo eslabón.

Como resultado de incidir en un modelo de transmisión tan específico como el descrito, se ha optado por una metodología donde se formula un objetivo que es el de definir el comportamiento del engranaje flexible planteando simplificaciones que progresivamente lleven a un diseño que bajo los criterios determinados presenta el comportamiento operativo más favorable, a través del refinamiento de modelos.

Para la consecución de los objetivos se parte de un modelo analítico de comportamiento que valida de forma teórica los primeros diseños. Conforme avanza el desarrollo se obtienen los factores que influyen en el mecanismo, y se van realizando progresivamente los refinamientos hasta llegar a una propuesta para ser desarrollada en aplicaciones reales futuras.

## **1.3 Objetivos**

### **1.3.1 General**

Realizar de forma estructurada los análisis teóricos, síntesis de modelos de comportamiento mecánico, y generación de una aplicación computacional orientados hacia el diseño de transmisiones armónicas; tomando en consideración las particularidades que la misma presenta y garantizando un diseño preponderante sobre los analizados, robusto, manufacturable y confiable, que posibilite la producción de este tipo de transmisiones mecánicas a nivel nacional.

### **1.3.2 Específicos**

1. Generar el diseño de una transmisión armónica que pueda ser implementada en aplicaciones comunes, y que sea un elemento de desarrollo a lo largo de la evolución del proyecto producto de los diversos análisis.
2. Articular las variables generadas por los algoritmos y modelos matemáticos junto con un software de diseño en el cual se tendrá un modelo paramétrico que se

modificará de acuerdo al requerimiento de las mismas y de ésta forma generar las piezas virtuales.

3. Describir el comportamiento mecánico de diversos materiales frente a esfuerzos alternantes que generan fatiga dentro del desarrollo de cada una de las partes estudiadas de la transmisión armónica.
4. Estudiar teóricamente el efecto de la elasticidad en el engranaje flexible para minimizar las consecuencias de las cargas teniendo en cuenta características de diseño y fabricación.
5. Generar una nueva forma de solucionar problemas tecnológicos en el área de la ingeniería de diseño mecánico brindando una herramienta que pueda ser implementada en aplicaciones tecnológicas.

## 1.4 Organización del documento

El presente documento se estructura de acuerdo a una metodología de diseño que se sigue en pos del desarrollo del mecanismo descrito, es así como los primeros capítulos contextualizan la información necesaria, adaptando la misma a un proceso consecuente en el que en capítulos posteriores se trabajan las ideas estructuradas para lograr los objetivos propuestos, de esta forma, esta Tesis está organizada de la siguiente manera:

### ▪ **Capítulo 1**

#### **Introducción.**

En el capítulo número uno se especifica qué se pretende lograr con el proyecto, además de cuáles son las principales iniciativas que motivaron la consecución del mismo, también se exponen los objetivos planteados y la forma en la que se estructura el documento de tesis.

### ▪ **Capítulo 2**

#### **Revisión del Estado del Arte.**

En el capítulo número dos se conceptualiza el tema de las transmisiones de engranajes, específicamente las que tienen condiciones afines con la transmisión armónica, se definen las consideraciones más relevantes en el diseño de éstas, además, se expone una forma viable para el diseño empleando un software de modelación y la relación con programas de cálculo numérico.

### ▪ **Capítulo 3**

#### **Desarrollo de los métodos de modelamiento matemático.**

En el capítulo número tres se sintetizan los conceptos cinemáticos de diseño de transmisiones armónicas. Se plantea un modelo analítico que será comparado con el

modelo numérico. De esta etapa surgen una serie de modelos del mecanismo que nutren el diseño experimental; además, una estimación de la expectativa de vida de los diseños viables generados.

▪ **Capítulo 4**

**Análisis de resultados.**

En el capítulo número cuatro se desarrolla el diseño experimental virtual sobre los modelos planteados. En estos se estudian las consecuencias de las variables identificadas como esenciales, a saber: el ángulo de presión, el módulo y el factor de corrección. En una etapa posterior se realiza una modelación más rigurosa para el diseño que presenta una mayor viabilidad, sobre éste se realiza el modelado definitivo que cuenta con la aplicación de una teoría de hiperelasticidad además de realizarse análisis con tres materiales diferentes.

▪ **Capítulo 5**

**Diseño detallado de la transmisión armónica.**

En el capítulo número cinco se realiza el planteamiento del diseño de la transmisión armónica, utilizando para ello el modelo paramétrico más robusto obtenido con base al desarrollo experimental simulado del capítulo anterior. La finalidad de este capítulo es brindar una propuesta de diseño viable para el sector industrial, tomando en consideración factores como la fabricación, el ensamble, la arquitectura de la transmisión, y el impacto que genera en distintos frentes.

▪ **Capítulo 6**

**Conclusiones y trabajo futuro.**

En el capítulo número seis se exponen las conclusiones del proyecto y se plantean nuevos objetivos de acuerdo con la investigación para trabajos futuros.



## 2. Revisión del estado del arte

### 2.1 Tipos de transmisiones por engranajes

Los engranajes han sido implementados históricamente en la transmisión y transformación de torsión y velocidad; donde el objetivo ha sido aprovechar de la manera más eficiente las ventajas mecánicas que sus diversas configuraciones presentan.

Es así como del principio esencial, (donde para transferir de la forma más simple movimiento de una flecha a otra se emplean dos cilindros en giro, y donde en un principio las fuerzas máximas de fricción presentes en la unión no superan las necesidades de transferencia de torsión), parte una idea que evoluciona desde tallar rugosidades con el objetivo de maximizar el efecto de contacto hasta definir un dentado que converge en la pieza mecánica que se conoce como engranaje.

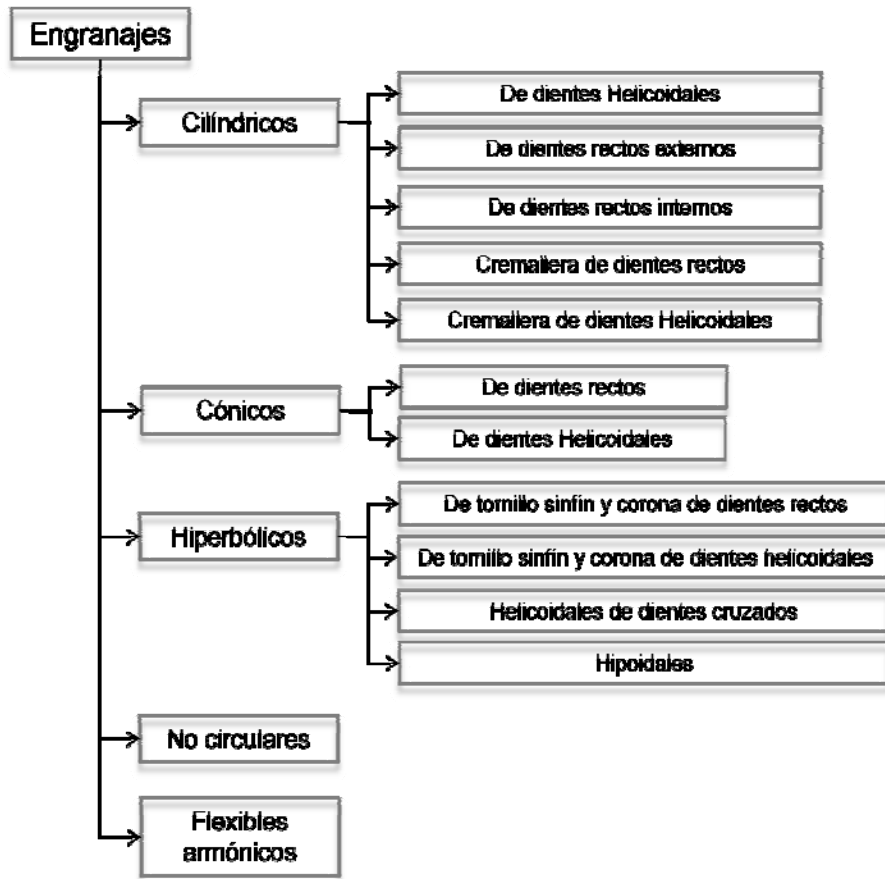
Bajo la idea previa se marcan unas directrices que se mantienen y son constantes en el diseño de engranajes pero que son tan flexibles que posibilitan la diversificación del mecanismo. Estas son esenciales a la hora de probar una nueva configuración, muchas veces son inherentes y consecuencia del modelo.

Los tipos existentes de engranajes se pueden clasificar de acuerdo a su cinemática según los axoides de movimiento. Un axoide básicamente es una curva trazada por un punto que gira alrededor de un centro que se mueve.

Producto de inducir una velocidad angular sobre los engranajes, que sea igual a la magnitud a la que originalmente tiene alguno, uno de estos se mantendrá fijo mientras que el otro tendrá una velocidad angular equivalente a la suma de ambas. El desplazamiento del engranaje que se mueve producto de éste procedimiento generará los axoides fijo y móvil. Los ejes, denominados, centros instantáneos de rotación para los que se describen los axoides determinaran la clasificación de la transmisión. Además, al tratarse de perfiles conjugados donde los puntos de interés se encuentran en la tangente de las curvas en rodadura denotan que los axoides corresponden a los diámetros primitivos. El hecho de que estos ejes de los axoides sean paralelos, se corten o se crucen determinará de forma correspondiente si los engranajes son cilíndricos, cónicos o hiperbólicos. Ésta es una clasificación muy común y se emplea junto con las características geométricas del dentado.

En consecuencia, los engranajes se pueden clasificar de acuerdo a la Figura 2-1.

Figura 2-1: Tipos de engranajes



Dos clasificaciones particulares del caso en el que los ejes de los axoides son paralelos se dan con las transmisiones de engranajes no circulares y las transmisiones flexo-ondulatorias, estas se pueden considerar gamas derivadas por su sin número de configuraciones.

En conclusión, de acuerdo a las fuentes consultadas y el albor común en la sociedad que maneja investigación en el área, es evidente y habitual discriminar las transmisiones según su geometría y su disposición cinemática, debido a que si existen modificaciones funcionales en las piezas se obtendrán resultados notablemente distintos, por tal motivo se habla de mecanismos; reductores multiplicadores y diferenciales. Ahora, si se habla de la configuración de los elementos que constituyen la transmisión se logra alterar considerablemente su cinemática; un ejemplo clásico son las transmisiones entre engranajes helicoidales y las transmisiones entre engranajes planetarios.

## 2.2 Consideraciones fundamentales para el diseño de las transmisiones por engranajes

La principal consideración es garantizar la denominada ley fundamental de engranamiento; donde la razón de la velocidad angular entre estos debe mantenerse constante a través del acoplamiento,

$$m_v = \frac{w_{salida}}{w_{entrada}} = \pm \frac{r_{entrada}}{r_{salida}} \quad (2.1)$$

Ésta a su vez mantiene una correspondencia directa con los radios de entrada y salida. Donde el signo puede cambiar si se tratase de una transmisión con dentado externo o interno, esto se da debido por ejemplo a que en un engranamiento de dentado externo se invierten los sentidos de rotación. En asociación se declara la denominada ventaja mecánica o razón de par de torsión que es recíproca a la razón de velocidades angulares.

$$m_a = \frac{1}{m_v} = \frac{w_{entrada}}{w_{salida}} = \pm \frac{r_{salida}}{r_{entrada}} \quad (2.2)$$

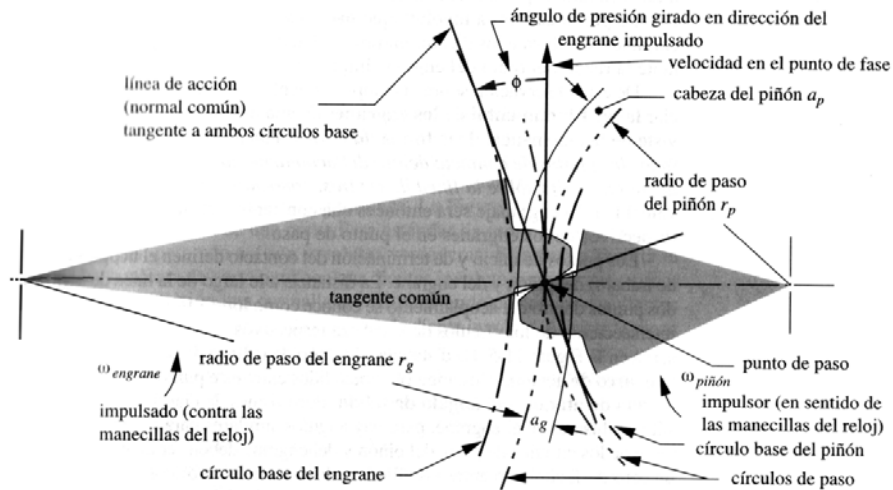
Por tal razón, las transmisiones son mecanismos encargados de intercambiar torsión por velocidad y viceversa. Cuando la relación de transmisión es mayor a uno, se habla de un mecanismo multiplicador; mientras que cuando ésta es menor a uno, se trata de un mecanismo reductor.

Ahora que se ha definido cómo tiene que operar un engranaje respecto del otro, es necesario condicionar los parámetros geométricos en consecuencia con lo planteado, lo principal es tener en cuenta que se deben minimizar las pérdidas energéticas, en las transmisiones por engranajes el efecto mencionado se da cuando las piezas trabajan en cadena y una por efecto de la otra a través de contactos. Para garantizar una alta eficiencia, las cargas y velocidades del engranaje de entrada se deben transmitir sobre el siguiente eslabón y así aprovechar la ventaja mecánica. Para esto, cuando dos superficies de los dientes se encuentran deben hacerlo teóricamente en su respectiva tangencia y no debe existir deslizamiento entre estos sino rodadura, a este efecto se le denomina acción conjugada.

Para que la transmisión trabaje bajo acción conjugada, los dientes en los engranajes se diseñan con curvas que favorecen el efecto mencionado, la más empleada es la curva involuta. Cuando los engranajes operan de ésta forma se les suele asociar con las levas que manejan una relación de velocidad angular constante donde las fuerzas transmitidas se propagan sobre una línea normal a la línea tangente, a ésta línea se le denomina línea de acción y está descrita por la rodadura del punto en el ciclo de engranamiento, a este punto se le conoce comúnmente como punto de paso. Una vez definido el punto de paso, se observan un par de círculos tangentes generados desde éste hasta los respectivos centros de cada engranaje a estos se les denomina círculos de paso o círculos primitivos, ahora, como ambos engranajes tienen la misma velocidad lineal y cuando ésta se toma

como una tangente común al círculo primitivo, el ángulo que se forma entre éste vector y la línea de acción se denomina ángulo de presión (ver Figura 2-2).

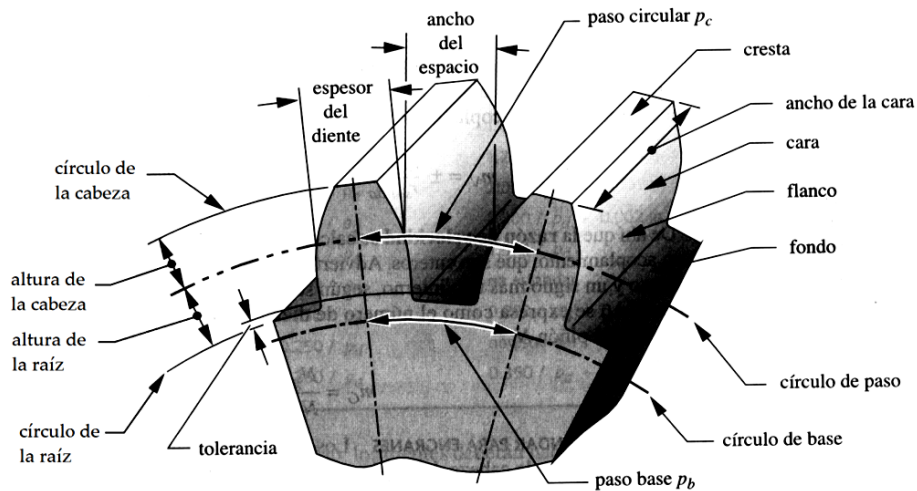
**Figura 2-2:** Contacto entre dientes [1]



En conclusión esto se sintetiza en la ley fundamental de engranamiento, la cual plantea que, la normal común de los perfiles de los dientes en todos los puntos de contacto dentro del acoplamiento siempre deberá pasar a través de un punto fijo sobre la línea de centros, conocido como punto de paso.

Con frecuencia, los parámetros que describen la geometría de los dientes se muestra en un gráfico de un par de estos y se detalla en la nomenclatura. Estos parámetros son mostrados en la Figura 2-3.

**Figura 2-3:** Parámetros de los dientes de engranajes [2]



Los parámetros enunciados en la imagen se relacionan para definir la geometría completa. Es así como el diámetro de paso  $d$  y el número de dientes  $N$  generan el paso circular a partir de la siguiente relación,

$$P_c = \frac{\pi d}{N} \quad (2.3)$$

Ésta magnitud define la distancia entre los dientes tomada desde el círculo de paso. Una relación más diciente relaciona la medida del diámetro primitivo y el número de dientes. Esta se conoce como paso diametral, y está definido para el sistema inglés de unidades, para el sistema internacional se toma el módulo como parámetro y es inversamente proporcional a este,

$$P_d = \frac{N}{d} \quad (2.4)$$

$$m = \frac{d}{N} \quad (2.5)$$

Por último, para tener los parámetros fundamentales más relevantes en el diseño de engranajes se enuncia la razón de velocidad  $m_v$  y teniendo en cuenta que el módulo en engranajes acoplados debe ser el mismo, se muestra la siguiente relación,

$$m_v = \pm \frac{r_{entrada}}{r_{salida}} = \pm \frac{d_{entrada}}{d_{salida}} = \pm \frac{w_{entrada}}{w_{salida}} \quad (2.6)$$

De la expresión anterior se determina que la relación de velocidad se calcula a partir del número de dientes.

En una etapa posterior del proyecto se enuncian las ecuaciones necesarias para diseñar una transmisión de corona de dentado interno y engranaje planetario, en ésta etapa se mostrarán en su totalidad los parámetros de diseño complementarios a los descritos previamente y su formulación análoga para el diseño de transmisiones flexo-ondulatorias. En ella se podrán observar con más detalle los demás parámetros constitutivos.

## 2.3 Transmisiones armónicas, tipos y características

En primera instancia ésta transmisión fue adaptada como un mecanismo aplicable en Estados Unidos en 1959 por Walt Musser [9]; y pensada como innovación para los aviones de combate entre varias posibles aplicaciones. Tuvo un primer impulso importante durante los 70 y 80 en la masificación de la robótica; y se consolida como una gran herramienta en los 90 por sus precisas aplicaciones en los equipos de medición y en el instrumental quirúrgico.

Las partes constituyentes de una transmisión tipo Harmonic-drive, flexo-ondulatoria o armónica son básicamente tres (ver Figura 2-4); la primera es la rueda circular, la segunda el engranaje flexible y la tercera el generador de onda. La descripción de su

funcionamiento es simple, el engranaje flexible embona con la rueda circular donde por efectos de la flexión hace contacto en dos puntos simultáneamente, ésta flexión es producida por el generador de onda que básicamente es un eje elíptico que somete al engranaje flexible. La condición más común con la que se trabaja el diseño del mecanismo se da cuando se determina que el engranaje flexible debe contar con dos dientes menos que el engranaje externo. Por tanto para una sección de revolución equivalente a 180 grados del eje, dicha pieza se moverá un diente en sentido contrario al del giro de entrada [3,4]. Es así como modificando las condiciones geométricas del dentado, es posible ampliar o reducir la relación de transmisión obteniendo relaciones de velocidad que pueden ir desde 50:1 hasta 320:1 de ésta manera.

**Figura 2-4:** Harmonic Drive AG [5]

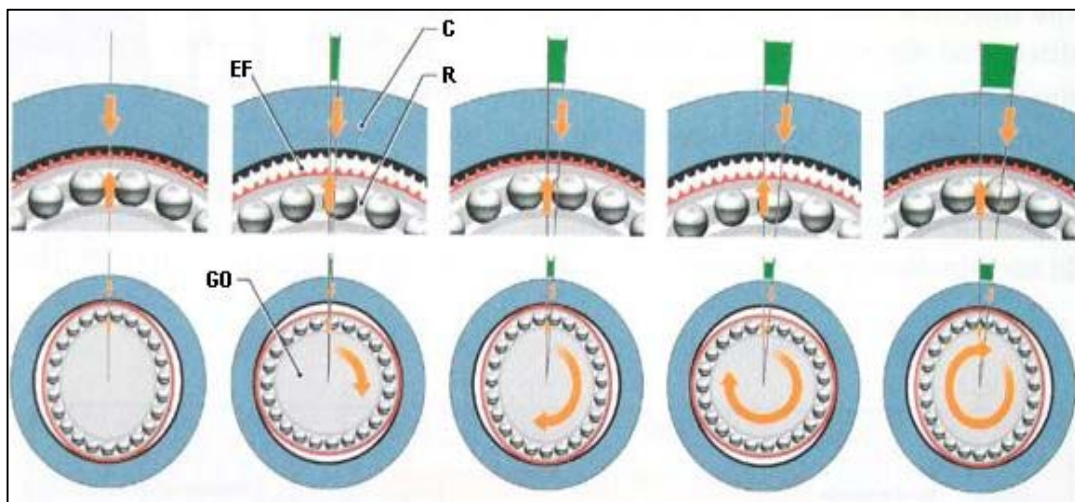


Las transmisiones flexo-ondulatorias son los únicos mecanismos que transmiten un alto esfuerzo de torsión a través de un componente elástico deformable. Como se ha mencionado, este tipo de engranaje es comúnmente implementado en áreas como la manufactura de precisión, en los equipos médicos y la aviación, y se constituye específicamente de acuerdo a los siguientes parámetros:

La transmisión tiene tres elementos concéntricos: Primero, el Engrane Rígido (C), determinado por un anillo cilíndrico sólido con dientes de engranaje internos, segundo, el Flexspline o engranaje flexible (EF), es una copa cilíndrica flexible, fina con dientes externos que proporciona una conexión en el reborde con el engranaje rígido, y por último. Un generador de onda (GO) el cual abarca un rodamiento de bolas y una disposición elíptica a manera de eje de transmisión, sirve como un convertidor de esfuerzo de torsión de alta eficacia [4, 6, 7].

Los elementos funcionan de la siguiente forma (ver Figura 2-5): El engranaje flexible es levemente más pequeño que el engranaje rígido y tiene generalmente dos dientes menos que éste. La forma elíptica del generador de onda hace que el engranaje flexible embone en dos extremos con el engranaje rígido, precisamente en los extremos contrarios del eje principal de la elipse. Mientras que el GO (entrada) gira, la zona del contacto del diente viaja con el eje principal de la elipse. Para cada movimiento a la derecha de 180 grados del GO, el EF (salida) se mueve a la izquierda en un diente de acuerdo con un punto de referencia que se puede tomar respecto del C. Cada rotación completa hacia la derecha del GO da lugar al desplazamiento del EF a la izquierda en dos dientes respecto de su posición anterior relacionada al C.

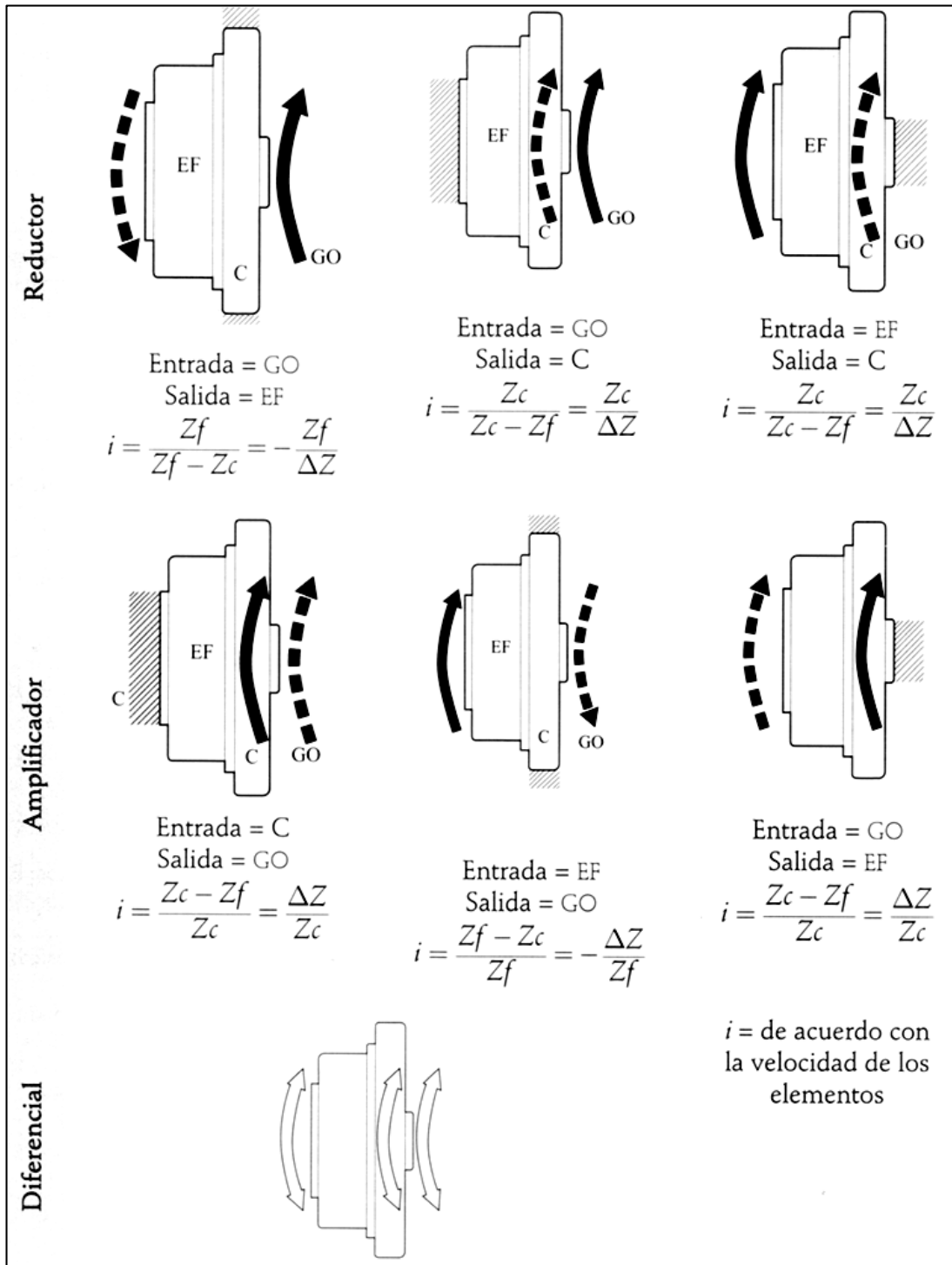
**Figura 2-5:** Posiciones de las piezas de la transmisión en rotación [8]



Al comparar este tipo de engranaje con el engranaje convencional, se puede determinar que el engranaje impulsor armónico ofrece a los usuarios grandes ventajas ya que al constituir una transmisión flexondulatoria se está creando un mecanismo compacto con una cantidad reducida de partes que en consecuencia reduce el número de fallos que se presentan por la interacción de las piezas.

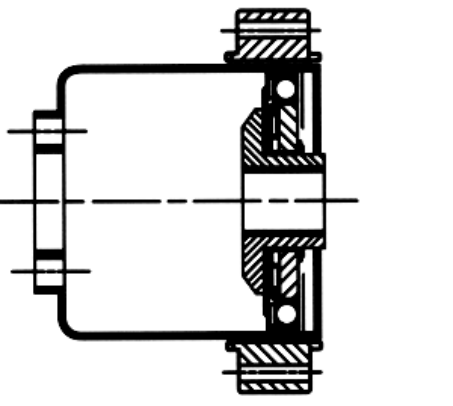
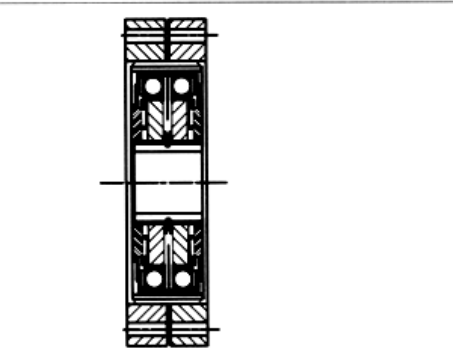
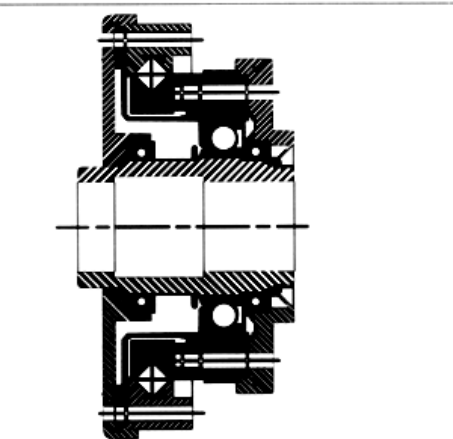
Ahora, la transmisión armónica se puede categorizar tomando en cuenta cuál de las piezas se considera como eslabón de entrada y en consecuencia cual es bastidor. Esto determina si se trata de una transmisión que opera como reductor, como amplificador o como un mecanismo diferencial. En la Figura 2-6 se observan las configuraciones mencionadas para el mecanismo, donde las diferentes condiciones modifican naturalmente la relación  $i$  de transmisión, estas se encuentran relacionadas con el número de dientes  $Z$ .

Figura 2-6: Configuraciones cinemáticas para la transmisión armónica [9]





**Figura 2-7:** Configuraciones geométricas de las transmisiones armónicas [9]

Configuración	Características
 <p data-bbox="391 851 630 884">Tipo copa o vaso</p>	<p data-bbox="813 392 1029 425"><b>Características</b></p> <p data-bbox="813 436 1420 884">Se caracteriza por la configuración del engranaje flexible, similar a una copa. En esta transmisión, el acople de salida viene integrado a este elemento. Normalmente, la corona fija va sujeta al bastidor de la máquina o sistema y la entrada del motor se efectúa por el generador de ondas. Debido a su configuración en el acople, presenta menor cantidad de pérdidas por fricción; pero ya que el acople rigidiza el conjunto, es necesario aumentar la capacidad de carga de los elementos del generador de onda, con el fin de ejercer mayores cargas para el efecto de la deformación del engranaje flexible. Por esta misma razón, las transmisiones tipo copa son de mayor longitud para compensar los esfuerzos de deformación.</p>
 <p data-bbox="391 1355 630 1388">Tipo eje pasante</p>	<p data-bbox="813 907 1420 1400">Está compuesta por un engranaje flexible fijo a la estructura, un generador de ondas, por el cual se realiza la entrada de potencia, y una corona conectada con un flanche de salida por donde se toma la potencia a la velocidad de salida. El engranaje flexible tiene una configuración sin tapa, pero con un conformado especial en forma de "L" en revolución; permite fijar el engranaje a la carcasa fija por medio de tornillos y así, minimiza los esfuerzos por deformación que se dan por el generador de onda. Esta transmisión es de eje pasante, lo que brinda una ventaja importante, ya que permite pasar cableado o conexiones por su eje. El costo de estas transmisiones, dadas sus ventajas, es más alto en relación con las tipo copa, inclusive se diseñan para mayores cargas que los demás tipos.</p>
 <p data-bbox="375 1859 662 1892">Tipo <i>pancake</i> o torta</p>	<p data-bbox="813 1411 1420 1892">Son de tipo compacto y poseen un elemento adicional llamado corona dinámica, que tiene por objeto garantizar la salida uniforme del torque. Este tipo de transmisiones son las de mayor desarrollo, ya que su configuración brinda unas excelentes ventajas en cuanto a montaje, peso y dimensiones. La corona fija tendrá el número de dientes requerido para realizar la reducción; por otra parte, la corona dinámica cuenta con un tallado interno y con un número igual de dientes al engranaje flexible, sirviendo así de acople para tomar la potencia a la salida. La dimensión del engranaje flexible se reduce sustancialmente, ya que se permite un desplazamiento en dirección axial entre los dientes, con lo que se minimizan los esfuerzos debidos a la deformación.</p>

Actualmente existen transmisiones flexo-ondulatorias de diversas configuraciones. No obstante, las más comunes se describen en la Figura 2-7, y de acuerdo a éstas se opta por definir las directrices de diseño.

Según los requerimientos del proyecto se ha seleccionado una transmisión tipo reductor de velocidad por su potencial demanda nacional, su difusión en equipos que las requieren, por la viabilidad de manufactura en conjunto, por la disposición de los bancos de prueba con los que se cuenta y porque ésta configuración expone un rendimiento que se encuentran en el orden de los 80% y 90%, frente al multiplicador que cuenta con rendimientos de entre un 60% y un 70%. Además, se selecciona el generador de onda como el elemento de entrada de potencia, de la misma forma, se emplea la corona rígida como elemento fijo y naturalmente al engranaje flexible como el elemento generador.

El acoplamiento estudiado para la transmisión será el acoplamiento integral, ya que tiene una amplia difusión. Dicho acoplamiento obedece a la siguiente descripción: El acople del engranaje flexible tiene la forma de copa con los dientes tallados cerca del extremo de la boca del engranaje flexible. El control de la deflexión se aplica en la copa en el extremo de la boca, la base permanece esencialmente circular. La tapa de salida o el eje pueden ser fabricados en una sola pieza con el elemento flexible o bien puede hacerse un ensamble permanente o desmontable. Este tipo de acople tiene gran rigidez a la torsión, gran duración y no hay pérdida de potencia dentro de éste [10].

En cuanto al generador de onda, se habla de simplificar los parámetros de diseño y fabricación que conlleva disponer de un rodamiento elíptico tipo leva elipsoidal o bolas planetarias con la implementación de un sistema planetario. En esta configuración se tienen dos rodamientos dispuestos de forma equidistante ensamblados sobre una estructura que además tiene un eje donde se aplica la potencia de entrada y naturalmente el engranaje flexible es forzado a adoptar su posición de embonamiento. No obstante para el modelo se opta por emplear el diseño usual de los generadores comerciales. Lo anterior debido a que al modificar la forma elíptica pura, que da un solo rodamiento, por otra que tiende a someter la forma del flexible a los radios de dos rodamientos circulares, se obtendrían parámetros de operación singulares; y la presente investigación no está encaminada en tal sentido.

El estudio de generadores de onda creados a partir de un solo rodamiento de forma elíptica consiste en sí un gran proyecto. Por tal motivo, ésta será una simplificación de diseño en los modelos del presente trabajo. No obstante se considerará como si existiese y funcionase de manera óptima para así priorizar el trabajo sobre la relación de los engranes y no tener mayores dificultades relacionadas con esta pieza. La transmisión objeto de estudio tiene la configuración tipo copa ya que son las más usadas comercialmente y tienen un costo inferior al de las demás. Estas cualidades las hacen una gran opción porque dan una idea de cómo podría ser su potencial difusión en el entorno nacional.

Este tipo de transmisión se caracteriza por que la configuración del engranaje flexible es similar a la de una tasa donde el acople de salida viene integrado al elemento. Además cuenta con una corona la cual suele fijarse a la carcasa de la máquina dejando como elemento de entrada al generador de onda [10]. El engranaje flexible está en contacto con tres piezas del conjunto; embona con la corona rígida, se acopla con el generador de onda de acuerdo a la deformación prevista, y con el eje en el extremo opuesto al generador. Este último se da por el apoyo que tiene esta pieza con el eje a través de un rodamiento adicional. Esta disposición aprovecha la cavidad interna del engranaje flexible y deja un espacio para poder realizar de forma fácil el ensamble de la transmisión según las perforaciones que tiene esta pieza.

La pieza en la que se hace especial énfasis es el engranaje flexible, ya que la durabilidad del conjunto depende de cómo se comporte ésta frente a la constante fluctuación de esfuerzos que se da en zonas específicas en cada una de las fases de operación. El engranaje flexible tiene una condición de deformación muy importante que favorece el efecto armónico a través de su constante variación geométrica. Este efecto converge en fallas por fatiga entre otras; también tiene que afrontar la condición de torque característica de una transmisión por engranajes, que se traduce en la necesidad de seleccionar correctamente el perfil de embonamiento.

Por otro lado, al contar con una superficie alargada con un espesor relativamente pequeño se da una vulnerabilidad a lo largo del maquinado de los dientes en su base. Esta se puede generar a partir de una descarbonización o simplemente una marca, esto lleva a una sensibilidad a la falla en la más mínima fisura. Adicional a esto, la transmisión tiene una condición de engrane permanente lo que supone una constante incidencia de carga que fluctúa en las diferentes zonas.

## 2.4 Consideraciones geométricas

Para establecer consideraciones geométricas se deben tener presente los alcances del modelo, según los trabajos llevados en el área de diseño de este tipo de mecanismos. Es natural que se sigan las consideraciones de los fabricantes y de la limitada investigación publicada. En términos geométricos y físicos la transmisión cuenta con una masa menor y menores dimensiones exteriores frente a transmisiones convencionales de desempeños equiparables favoreciendo la precisión cinemática. Otro factor determinante se da al entender que varios de los dientes se encuentran en contacto simultáneamente en los semi-ejes mayores de la elipse del generador de onda. Lo anterior ofrece un alto grado de amortiguación (de entre cuatro y cinco veces más que en transmisiones comunes) y favorece la condición de retroceso o backlash, hasta casi eliminarlo por completo, minimizando el margen de diseño y dejando únicamente el margen de ensamble y fabricación [11].

Por su condición cinemática favorecen relaciones de velocidad y torque muy altas frente a su reducido tamaño en comparación con una transmisión equivalente de diseño tradicional, además la rigidez torsional que maneja es menor que en estas últimas. No obstante, este mecanismo maneja velocidades reducidas del árbol conductor del

generador elíptico debido a que se presentan dificultades cuando los diámetros de las ruedas son muy grandes. Para controlar la velocidad circunferencial de dicha pieza se recomienda trabajar con módulos considerablemente pequeños (de entre 0.15mm a 2mm), esto converge en la necesidad de implementar herramental poco convencional para su fabricación [11]. Hay que entender que conforme se disminuye el módulo, aumenta la capacidad específica de asumir un mayor par de torsión, en una proporción que depende de la capacidad portante.

Cuando el conjunto se ha de montar, primero se debe realizar el ensamble del flexible sobre el generador; una vez deformado el flexible se monta este conjunto en la corona. Así como en las transmisiones de engranajes convencionales los diámetros primitivos son tangentes pero en ésta oportunidad lo hace en dos puntos opuestos que corresponden al semi-eje mayor de la elipse del generador, en el semi-eje menor no hay contacto.

Cuando el mecanismo comienza a rotar según un desplazamiento inducido sobre el generador, el flexible se desplaza en sentido contrario a una velocidad angular considerablemente inferior, los desplazamientos radiales presentan dos máximos y dos mínimos es decir las ondas de deformación [11]. Una derivación del mecanismo presenta un número mayor de ondas pero las tensiones sobre el flexible también aumentan. La diferencia de los números de dientes debe ser igual o múltiplo al número de ondas de deformación.

Los engranajes se diseñan de acuerdo con la teoría clásica para transmisiones de engranajes planetarios, naturalmente se mantiene constante la magnitud del módulo. Se asume un número de dientes para cada uno de los engranajes que sea consecuente con lo mencionado acerca del número de ondas de deformación, se define un ángulo de presión, el factor de altura del diente y el factor de holgura radial. Si para este último no se manejan holguras laterales se debe considerar igual a la semidiferencia de los diámetros de las circunferencias iniciales.

El procedimiento se complementa al hacer al radio primitivo igual al semi-eje primitivo mayor de la elipse del flexible y, al perímetro primitivo circular del flexible sin deformar igual al perímetro elíptico del generador. Lo anterior considerando los espesores del anillo y una elongación que no supone deformaciones de cambio de sección y son elásticas ya que de no ser así se alcanzaría muy pronto la falla por fatiga [12].

Como parámetros complementarios se sugiere tener en cuenta los siguientes casos, no obstante no se presentan en todos los mecanismos y son conclusiones que se han obtenido de forma experimental [11]:

1. Es necesario realizar un desbaste sobre los dientes en una proporción equitativa e igual a la magnitud de la interferencia que se da previamente a la deformación

en la altura correspondiente al semi-eje menor de la elipse para el engranaje flexible.

2. Es necesario tener en cuenta el control de temperatura ya que aumenta debido a una disminución inadmisibles en la holgura que hay entre el generador y el flexible; además de una interferencia en los vértices de los dientes causada por la deformación.
3. Se presentan deslizamientos del generador de onda debido a un gran momento de torsión, esto se genera por deformaciones no deseadas de cualquiera de las piezas producto de una limitada rigidez radial.
4. Se puede presentar rotura del engranaje flexible debido a grietas generadas en la raíz de los dientes producto de la propagación de una falla superficial o al presentarse tensiones que superan la resistencia a fatiga.
5. Es normal que al aumentar el espesor del anillo que se toma para el engranaje flexible (sin contar la altura del diente), se puede asumir de una forma mejor el par de torsión transmitido; claro que esto conlleva a mayores esfuerzos de deformación provocados por el generador de onda. Para asumir este efecto se ha tomado como magnitud del espesor del anillo a la altura de adendo del diente sin ningún tipo de corrección o desbaste.
6. La literatura afirma que la longevidad del flexible es óptima si la relación de transmisión se mantiene por encima de 120 y no se puede garantizar para relaciones inferiores a 80 debido a que la deformación radial requerida aumenta conforme se reduce el número de dientes [11]. No obstante, si los parámetros geométricos y físicos solventan estas deformaciones, este umbral no debería ser determinante.
7. Los dientes presentan desgaste superficial debido a las grandes presiones sobre las caras en contacto, no solo por la transmisión de torsión sino por la deformación de los dientes debida a la deformación del flexible. Lo anterior puede conducir a la fluencia del material. Para asumir este efecto es recomendable tener en cuenta que la transmisión ensamblada antes de someterse a carga, debe contar con entre un 15% y 20% de los dientes en contacto y holgura en algunos otros más que se asumirá con la deformación producida una vez cargada la transmisión.

## 2.5 Consideraciones cinemáticas

La cinemática de la transmisión se aborda desde dos frentes. El primero es el relacionado con las variables que entran y salen del mecanismo en un enfoque macro donde se consideran sencillamente los parámetros de entrada y salida y su concordancia mutua. El segundo expone la dinámica particular de nodos específicos y como son los desplazamientos generados producto de la interacción de las piezas. Este modelo es necesario cuando se desea estimar parámetros como las velocidades de deslizamiento de contacto, las aceleraciones a lo largo del engranamiento y los grados de rotación en los dientes producto de la flexión inducida por el generador.

Para abordar el primer planteamiento se ha mencionado que la transmisión opera de tres formas diferentes dependiendo de la pieza de entre las tres que se encuentre anclada. Para el modelo de estudio se ha bloqueado la corona dentada, en consecuencia se emplea el generador de onda como elemento de entrada y el engranaje flexible como elemento de salida.

La transmisión flexo-ondulatoria fue tratada como una transmisión epicicloidal para asociar la participación de Robert Willis (1800 - 1875) en la relación de transmisión y encontrar la relación de los desplazamientos angulares. Para describir la cinemática de una transmisión de este tipo se toma como ejemplo una transmisión que cuente con un número de dientes en el engranaje flexible  $z_1=98$  y un número de dientes  $z_2=100$  para la corona.

Si se es consecuente con el planteamiento y se estima teóricamente en qué posición se encuentra el flexible al cabo de una rotación de 360 grados de giro del generador se tiene lo siguiente,

$$\theta_{EF} = -\frac{\theta_{GO}}{z_2} \times 2 \quad (2.7)$$

Para estos valores, al cabo de una revolución del generador naturalmente se tiene un desplazamiento angular del flexible de -7.2 grados, esto equivale al desplazamiento de dos dientes con relación a la corona. Este planteamiento se enuncia de manera general en (2.8) y sirve para todas las disposiciones de la transmisión armónica, se puede encontrar en la mayoría de catálogos de fabricantes y también es común en las fuentes consultadas.

$$\theta_{GO} = (N + 1)\theta_C - N\theta_{EF} \quad (2.8)$$

De aquí que al bloquear el desplazamiento angular de la corona la ecuación se reduzca a,

$$\theta_{EF} = -\frac{\theta_{GO}}{N} \quad (2.9)$$

Ahora asociando la relación de transmisión  $N$  descrita por Robert Willis pero adaptándola a la transmisión flexo-ondulatoria se tiene que,

$$N = \frac{z_2}{(z_2 - z_1)} \quad (2.10)$$

Reemplazando en (2.9),

$$\theta_{EF} = -\frac{\theta_{GO} \cdot (z_2 - z_1)}{z_2} \quad (2.11)$$

Naturalmente si se reemplazan los valores enunciados para el ejemplo propuesto previamente, se da el mismo resultado y si se asume que la relación de transmisión se mantiene constante a lo largo de un engranamiento ideal, se puede estimar la razón de las velocidades angulares partiendo de (2.8) generando a (2.9).

$$w_{GO} = (N + 1)w_C - Nw_{EF} \quad (2.12)$$

Lo planteado anteriormente se da en condiciones en las que el generador tiene la capacidad de transferir todo su movimiento de forma ideal, no obstante esto no sucede y es natural que por defectos de diferentes tipos no se logre. Para estimar la incidencia de este efecto se ha formulado el error de transmisión cinemático, el cual es igual a,

$$\theta_{Err} = \frac{\theta_{GO}}{N} - \theta_{EF} \quad (2.13)$$

Otras apreciaciones exponen errores de transmisión inherentes a la geometría del generador de onda marginando los posibles errores de manufactura [13]; algunas otras demuestran cómo la señal del error cinemático típico varía periódicamente el doble de la frecuencia rotacional del generador de ondas [11].

De acuerdo al segundo enfoque se plantea inicialmente un modelo analítico donde en función de los desplazamientos del generador y la relación ideal de desplazamiento del flexible, se define una curva armónica que representa la trayectoria de un punto en el engranaje flexible. Este planteamiento se confrontará con un resultado homólogo en elementos finitos que se presenta en el tercer capítulo de este trabajo.

Otro planteamiento propone el formalismo de Lagrange a través del cual se generan las ecuaciones dinámicas para un sistema mecánico en coordenadas generalizadas [18, 80]. La formulación de Lagrange engloba tres parámetros; las variables que condicionan los órdenes de desplazamiento de los elementos del mecanismo o grados de libertad, la energía cinética y un parámetro que contiene cada una de las fuerzas a las que se ve sometido el mecanismo. En la transmisión flexo-ondulatoria se manejan fuerzas de interacción entre los elementos, fuerzas exteriores que puedan alterar el mecanismo y las fuerzas que se dan debido a la fricción, éstas se pueden dividir en fuerzas conservativas y no conservativas.

La siguiente expresión de Lagrange define el comportamiento de la transmisión;

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (2.14)$$

Producto del desarrollo de la ecuación de Lagrange se logra una que define en términos de los ángulos de entrada y salida las condiciones de operación de la transmisión,

$$\theta_p = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k [a_n \cos(n\theta_m) + b_n \text{sen}(n\theta_m)] \quad (2.15)$$

Donde a y b son las constantes de la serie de Fourier y  $\theta_p$  y  $\theta_m$  son; el error cinemático puro y el ángulo de desplazamiento del generador elíptico respectivamente,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta\theta(\theta_m) \cos(n\theta_m) d\theta_m \quad (2.16)$$

$$b_n = \int_0^{2\pi} \Delta\theta(\theta_m) \text{sen}(n\theta_m) d\theta_m \quad (2.17)$$

## 2.6 Consideraciones de resistencia

De la misma forma en que se han definido los parámetros cinemáticos ideales, también por extensión se pueden hacer consideraciones de carga a través de la forma en la que se transmite el par de torsión. Recurriendo a criterios de conservación de energía para los elementos del mecanismo se formula la siguiente ecuación,

$$\tau_{GO} = \frac{1}{N+1} \cdot \tau_C = - \left( \frac{1}{N} \right) \cdot \tau_{EF} \quad (2.18)$$

En ésta ecuación se ve claramente en qué orden cambian los pares de torsión entre los elementos.

Otros modelos plantean formulaciones diferentes para el estado de cargas, por ejemplo las relaciones de estado, donde formulando ecuaciones diferenciales de primer orden se describen las condiciones en las que se encuentra el mecanismo antes de darse cualquier tipo de entrada y después de la operación. Para esto se emplea el siguiente planteamiento,

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t)] \quad (2.19)$$

$$y(t) = g[x(t), u(t)] \quad (2.20)$$

En general las variables de entrada son; el par motor y la posición angular del eje motor. Las variables de salida son; la posición angular del eje de salida y el par transmitido, y las variables de estado son; la posición angular del eje de salida, la velocidad angular del eje de salida, el componente puro de error cinemático y la velocidad angular del motor.

Un planteamiento que se enfoca en la respuesta de esfuerzos fue desarrollado por el Institute of Machine Design Fundamentals de Polonia en su publicación [13]. Este aborda el tema del diseño del rodamiento elástico deformable desde el punto de vista de las



solicitaciones del engranaje flexible. Para el análisis de resistencia mencionado se ha realizado de forma analítica un modelo matemático que describe el estado de tensión del engranaje flexible en función de la deformación radial teniendo en cuenta sus parámetros geométricos generales.

Debido a la complejidad del tema del diseño del dentado se simplificó el modelo. No solo para solventar el hecho de no tener plenamente caracterizado un perfil, sino para reducir las variables incidentes. Para tal efecto se define una línea flexible y se modela la estructura según la hipótesis de Kirchhoff-Love para placas y láminas cilíndricas. El modelo de Kirchhoff-Love es el equivalente de la viga de Euler-Bernoulli y de la mano con otras hipótesis es capaz de proporcionar un modelo cinemático de deformación para placas delgadas. Por este motivo es razonable pensar que tanto el engranaje flexible, por su relación de altura del dentado y su espesor del anillo, como la pista exterior del generador elíptico se comportan de tal manera.

En el modelo se analiza la línea flexible y se complementa con una placa anular para el anillo del engranaje, la deformación es solamente inducida por el generador que se encuentra simplemente apoyado y el contacto entre las superficies es ideal. Además es claro que entre las piezas debe existir un margen de tolerancia geométrica ya que de mantener una excesiva interferencia se agregan tensiones normales sobre el engranaje y de manejar una holgura exagerada se disminuye la capacidad de transmitir par de torsión.

Los planteamientos se trabajan de forma simultánea pero separada. Es decir, se encontraran dos resultados de esfuerzos según cada uno de los métodos, y serán magnitudes totales para un par de componentes en coordenadas polares [13].

Del primer planteamiento salen las siguientes ecuaciones de esfuerzos máximos y mínimos,

$$\sigma_z^\pm = \pm \frac{3ER}{a^2h} \left( Achx \sin x - Bshx \cos x - \frac{w^*}{2R} e^{-x} \sin x \right) \quad (2.21)$$

$$\sigma_\theta^\pm = E \left[ 2Ashx \cos x + 2Bchx \sin x + \frac{w^*}{R} e^{-x} \cos x \right] + \nu \sigma_z^\pm \quad (2.22)$$

Y del segundo con  $\gamma = \pm h$ ,

$$\sigma_r^\pm = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left\{ C_1 \left[ 1 + \nu + \frac{b^2}{r^2} (1 - \nu) \right] \right\} \mp C_3 \left( \frac{\nu-1}{r^2} + \frac{1-\nu}{b^2} \right) \quad (2.23)$$

$$\sigma_\phi^\pm = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left\{ C_1 \left[ 1 + \nu + \frac{b^2}{r^2} (\nu - 1) \right] \right\} \mp C_3 \left( \frac{1-\nu}{r^2} + \frac{1-\nu}{b^2} \right) \quad (2.24)$$

Es claro que al no tener una directriz concreta en ésta área sobre el diseño de transmisiones flexo-ondulatorias y que día a día nacen formas nuevas de sobre llevar los problemas, se enuncian los planteamientos previos y se opta por otro que será expuesto a continuación.

Para hacer una aproximación fiable se habla de trabajar condiciones particulares como la no linealidad del material. Esto trae como consecuencia que el módulo de elasticidad dependa del nivel de tensiones en zonas específicas, casi como si se tratara de puntos o nodos dentro de un dominio. Lo anterior y las condiciones que se pueden presentar en la frontera hacen pensar en la implementación de métodos iterativos para abordar el problema [16]. En definitiva se opta por emplear el método de elementos finitos, en consecuencia, se trabaja mediante el desarrollo de modelos, para esto se tuvo en cuenta una serie de simplificaciones que se han refinado conforme evolucionaron. Naturalmente el hecho de asumir ésta técnica plantea dificultades inherentes que se presentan en multitud de frentes como es el caso de refinar mallas en zonas específicas, o simplemente al interpretar los resultados que arroja el programa.

Como es de esperar, la principal limitante del modelo mismo radica en la capacidad del planteamiento matemático que se escoja y las simplificaciones que se aborden en el problema. No siempre es posible trabajar bajo los parámetros de un ensayo experimental donde es necesario realizar varios ensayos que respondan de manera efectiva con la capacidad óptima disponible, debido a limitantes como el tiempo computacional. Pero si es posible plantear buenos modelos simplificados que den paso a otros más refinados. Esto es tan importante que en todas las aplicaciones donde se implementa el método de los elementos finitos se debe hacer una asociación con métodos tradicionales, esta recomendación se da tanto en el aula como a la hora de compra de una licencia. El método se expone en detalle en el siguiente capítulo de este trabajo, pero por asociación se plantea un caso sencillo particular referente al tema a manera introductoria.

Para la aproximación al método se evalúa un diente de engranaje convencional según la primera aproximación de Wilfred Lewis con un análisis por elementos finitos en dos dimensiones. Son importantes los siguientes aspectos,

1. Es esencial determinar el dominio objeto de estudio. Sobre este aspecto se enfocan las primeras simplificaciones; para el ejemplo se puede pensar en un diente de engranaje como una viga empotrada. El perfil considerado es sencillamente recto y se somete a una carga distribuida a lo largo del borde.
2. El siguiente aspecto es la discretización del dominio definido, para métodos numéricos como a los que se hace referencia se manejan muchos planteamientos, diferentes formas y maneras de llevar esto a cabo. La idea básica es subdividir el objeto de estudio en pequeñas partes que interactúan.
3. Para el ejercicio se podría optar por una malla de elementos triangulares. Naturalmente cuanto más pequeños sean estos elementos se obtiene un

comportamiento más detallado. Además, por lo general las condiciones se toman sobre los nodos o interceptos de los elementos, en consecuencia debido a la flexibilidad que aporta al poder manejar cargas particulares sobre cada uno de los nodos que se tienen en la frontera y al hecho de variar su magnitud según la rigurosidad del mallado, se pueden dar diversas configuraciones de carga o condiciones de borde.

Para concebir el análisis en forma concreta y pensar en una metodología previa al desarrollo del método numérico se pueden tomar consideraciones como las siguientes, entre otras, dependiendo del caso particular,

1. Se puede tomar para la interpretación del problema un prisma infinitesimal.
2. Se puede considerar un cuerpo con apoyos y vínculos tales que son capaces de evitar el desplazamiento en un cuerpo rígido, tal como en obras civiles.
3. Se puede asumir que el cuerpo sufre deformaciones notables en concordancia con la hipótesis de no linealidad.
4. Se puede analizar el efecto de las deformaciones para luego integrar el esquema de esfuerzos y de esta forma obtener la matriz constitutiva elástica.
5. Se debería plantear una disposición tensorial de las ecuaciones de esfuerzo y deformación.
6. Finalmente aplicar el método de los elementos finitos.

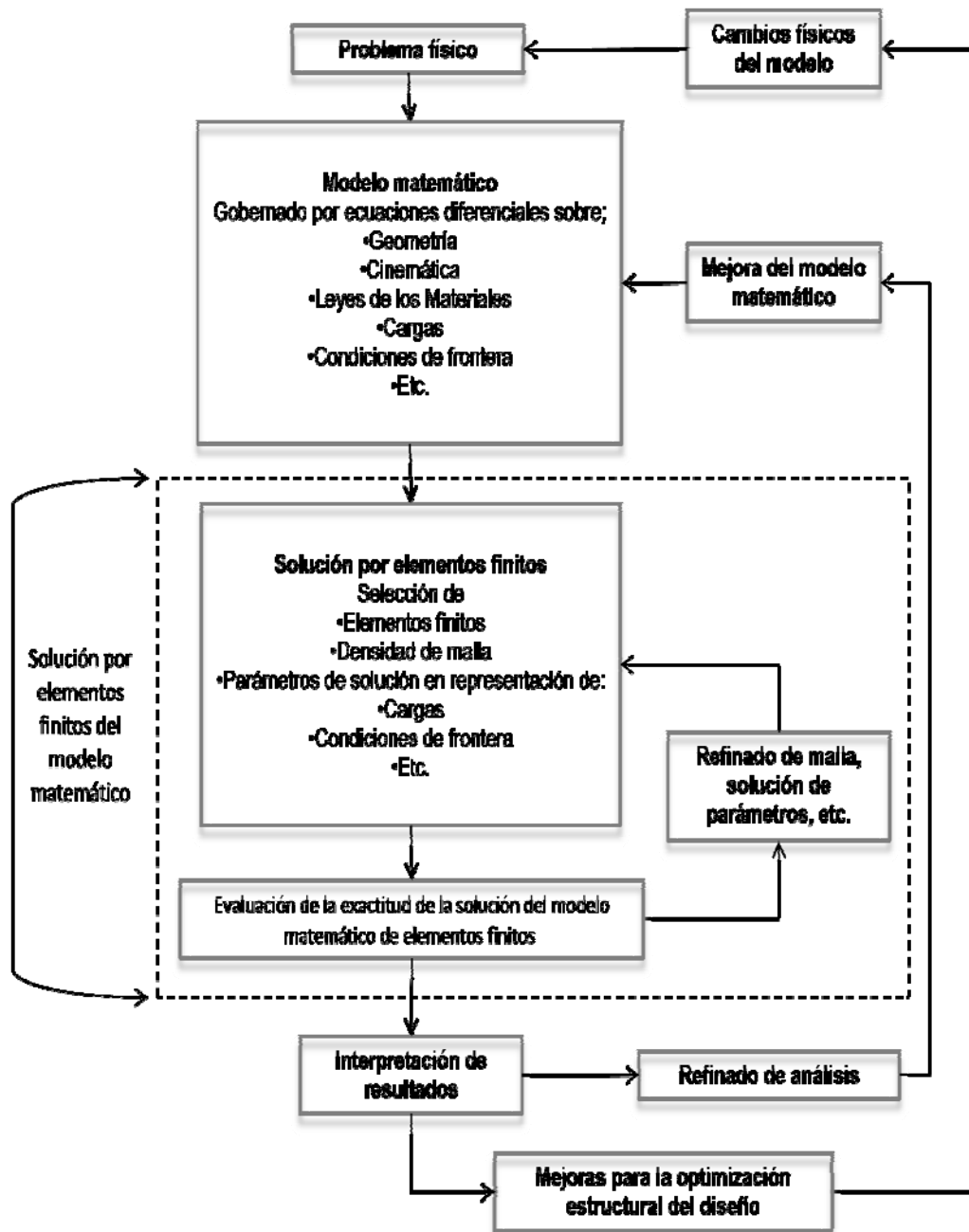
El principal cometido de describir en una forma básica el dominio a través de un prisma infinitesimal naturalmente es el de conseguir la matriz constitutiva elástica bidimensional isotrópica en términos de desplazamientos diferenciales. Optar por un modelo iterativo y diferencial radica en la ventaja que ofrece al analizar punto a punto las posibles implicaciones que se presentan en el funcionamiento; como por ejemplo, el efecto de la fricción y no desplazamiento conjunto entre los nodos a lo largo del perfil; el posible desgaste que se puede presentar en los flancos; los efectos de fatiga que se pueden generar tanto en la base del diente como en otros puntos críticos entre otros. Esto último da cabida a la etapa de análisis bajo criterios de falla.

En esencia las consideraciones mencionadas previamente son parámetros comunes y hacen parte de otras que se deben asumir cuando se opta aplicar en un diseño el método de los elementos finitos, estas son comunes e independientes de las herramientas empleadas. En la Figura 2-8 se muestra un gráfico que sintetiza los parámetros mencionados.

Como es sabido, el avance de los sistemas computacionales simplifica substancialmente la aplicación de modelos matemáticos. Décadas atrás se presentaban dificultades propias de precisión debida al empleo reiterativo de los mismos en pasos que podían

fallar. La difusión y la generación de asociaciones entre teorías matemáticas y sistemas computacionales presentan un ambiente propicio para la aplicación de estos en problemas clásicos en áreas como la ingeniería [17]. Ahora bien, es claro que partir de una clara interpretación del problema facilita alcanzar la solución cuando se esté implementando el método.

**Figura 2-8:** Descripción del proceso de análisis por MEF [18]



## 2.7 Consideraciones Tribológicas

Es natural que la idea principal a la hora de diseñar un mecanismo sea que éste cumpla sus objetivos operativos y en consecuencia se mantenga bajo un régimen regular de trabajo durante un largo tiempo. Bajo estos preceptos se ha trabajado a lo largo de la investigación y es normal mantener en la integridad y en condiciones óptimas cada una de las superficies en contacto. Para esto se debe atacar el problema del desgaste ya que es el fenómeno mediante el cual el material se desprende de las superficies de trabajo de los dientes de los engranes.

El objetivo de un buen diseño es el mantener el proceso de desgaste en un régimen tan bajo como sea posible. Es necesario considerar que los materiales de ingeniería no son completamente homogéneos en su microestructura; además que las condiciones de operación de los mecanismos nunca son constantes, y siempre se van a tener diferencias cinemáticas como las previstas en este mecanismo a través de los errores de transmisión. Por otro lado, es muy complejo caracterizar los tipos de desgaste que se podrían presentar, ya que para el caso particular de la metodología implementada aún no se piensa en manejar un software con modelos matemáticos que abarquen parámetros multifísicos; esto también se da en diseños "reales" debido a que el desgaste o la resistencia al desgaste no es una propiedad intrínseca de los materiales como si lo son de alguna forma la dureza y el comportamiento frente a esfuerzos.

Naturalmente a pesar de la naturaleza compleja del fenómeno de desgaste, existe y se da una clasificación del mismo a través de la observación de las causas o consecuencias del problema. Por ejemplo, a través de cómo ocurre según condiciones operativas si se dan fenómenos como la degradación, la estricción o la presencia de picadura; o también, a través de la denominada acción tribológica al observar los parámetros de trabajo del mecanismo como se da en casos como el seguidor y su leva.

Para minimizar el efecto de los factores mencionados se han sintetizado parámetros comunes en la mayoría de los mecanismos y se toman muchas veces como consideraciones. Por ejemplo, parámetros cinemáticos como reducir al máximo las velocidades de deslizamiento, parámetros de carga como reducir al máximo las presiones de las superficies en contacto, parámetros físicos como la implementación de materiales en los que se estudie de la interacción de las durezas en piezas en contacto o que tengan coeficientes de fricción adecuados, parámetros geométricos como la correcta elaboración tanto de diseños como de manufactura de las piezas, como en el caso de los engranajes convencionales en los que se desea mantener la acción conjugada o algunos otros parámetros geométricos como lo es manejar una correcta calidad superficial. De forma complementaria y básica siempre se recomienda elegir el lubricante adecuado para minimizar efectos como los producidos no solamente por el desgaste en seco sino para atenuar efectos térmicos o de un tercer cuerpo.

Otras recomendaciones que se espera tener en cuenta cuando se aborde el diseño de una transmisión armónica en este aspecto en particular son casi consecuencia de un buen diseño. Por ejemplo, manejar materiales idóneos para las condiciones operativas, si

se realiza algún tipo de tratamiento térmico para endurecer las capas superficiales, homogenizar el campo de tensiones, evitar la presencia de partículas abrasivas que puedan deteriorar las piezas o disminuir su tamaño permitiendo su evacuación y por último escoger de forma adecuada los parámetros de ataque entre las partes.

En definitiva, tratar de minimizar los efectos de todas las incidencias que recaen sobre los dispositivos plantea la necesidad de atender de manera simultánea dos frentes. El primero es el de entender y cuantificar de alguna forma cada uno de los parámetros que podrían generar fallas o pérdidas substanciales en cuanto a capacidad de vida. Y el segundo, recae directamente sobre las soluciones a estos comportamientos indeseables. En consecuencia, al obtener cada uno de los comportamientos cinemáticos y de carga, se hace evidente que se ha de generar un modelo de comportamiento que pueda responder a ambos factores, relacionando sus conceptos.

Para dar solvencia en estos aspectos se cuentan con la tribología. La misma posibilita la resolución de problemas teniendo consideraciones como las presiones de contacto y las velocidades de deslizamiento, además en el trabajo con mecanismos como las transmisiones de engranajes permite estimar y dar solución a problemas de contacto superficial entre los perfiles en deslizamiento, contacto o en rodadura sean deseables o no.

Es posible implementar varios modelos de evaluación de los criterios de falla por contacto y estimar un rango de operación. Pero cuando se habla de mecanismos como el trabajado en el proyecto, en la literatura disponible no se ha optado por definir uno en particular, y tampoco se ha hecho con el rigor necesario. Por esta razón es la intención de este trabajo proponer un modelo implementado en el diseño de transmisiones de engranajes que genera rangos de operación admisibles y ha sido dado bajo criterios de experimentación haciéndose acorde con los ensayos realizados.

En este modelo se plantea exponer la incidencia del desgaste superficial producto de los valores trabajados según las presiones de contacto y las velocidades de deslizamiento que han sido obtenidas. Además, se propone la hipótesis de implementar en el mecanismo, la formulación para el modelado de contacto en condiciones elastohidrodinámicas en engranajes con el objeto de definir un espesor de capa mínima de lubricante [19, 20, 21].

## **2.8 Técnicas de modelamiento y diseño de transmisiones por engranajes**

En la práctica se han empleado diversas formas de representar las transmisiones de engranajes; las cuales han sido consecuentes a través del tiempo con la tecnología que se tiene a disposición. Es así como en la literatura más usual referente al tema de la concepción de dichos mecanismos se plantean métodos como la generación de la involuta para la posterior utilización de una plantilla de copiado. Obviamente los procedimientos de cálculo se han mantenido con modificaciones no tan significativas

como las que se dan en el campo de la representación. De ésta forma, los conocimientos se han adaptado desde emplear el dibujo técnico tradicional hasta el empleo de software de diseño. Este último también se ha visto alterado con el paso del tiempo y cada día se generan nuevas alternativas con diversos propósitos

Cada solicitud de diseño plantea necesidades particulares. Por ejemplo, si se necesita definir una transmisión de engranajes fabricados a pedido, lo más seguro es que se entregue un modelo en dos dimensiones en formato de plano que contenga información referente a la geometría; junto con datos como el módulo, número de dientes, entre otros parámetros, y se realice una representación que podría estar en escala real para tener una visualización por parte de los encargados de la manufactura sobre la complejidad del proyecto. Además ésta contaría con detalles y datos adicionales suficientes para acometer el proceso de fabricación.

No obstante, si se habla de nuevos procesos de manufactura no solamente es necesario un esquema como el previamente explicado; sino también generar un modelo en tres dimensiones que pueda transmitir a través de un lenguaje de máquina una serie de condiciones de fabricación, para que el equipo que cuenta con el denominado control numérico computarizado pueda interpretar condiciones de operación de mecanizado. Esta forma de representar el dominio del engranaje da información adicional como la totalidad de los parámetros de mecanizado. Algunos son, el tipo de herramienta que se emplea para determinado procedimiento o las velocidades de avance de las mismas entre otros.

Otro tipo de solicitud para la modelación aparece cuando se habla de análisis computacional, como el tratado en este proyecto. En este caso, es muy similar a los procedimientos mencionados porque se emplean en su gran mayoría las mismas herramientas de diseño, pero al verse alterado el propósito del objeto naturalmente algunos elementos adicionales deberán tenerse en cuenta. En el modelado que se trabaja en proyectos como este, es de vital importancia diseñar partiendo de bocetos. Dichos bocetos enmarcan una gran cantidad de parámetros que deben estar claros, no ser redundantes y estar en capacidad de ofrecer la flexibilidad necesaria para poder realizar las modificaciones sin alterar de una manera fuerte el modelo generado. Lo anterior con el propósito de facilitar la realización de una cantidad de pruebas y modificaciones al modelo que un diseño experimental virtual demanda. Para tal efecto se propone enmarcar metódicamente los procedimientos mediante los cuales se generan cada una de las piezas. Es decir, estandarizar la generación de las piezas para que ésta no sea una variable representativa a la hora de inducir los parámetros de análisis por elementos finitos. Adicionalmente, estandarizar y diferenciar las fuentes externas al programa como pueden ser las tablas de puntos para la generación de las involutas, y todo lo relacionado con las salidas del programa como la representación y renderizado.

Es también esencial determinar qué tipo de programas se han de emplear para la generación de los modelos, la generación de los dominios mallados y el programa encargado de la evaluación matemática del diseño. Durante la investigación se dio prioridad a la necesidad de un software de generación de piezas que tuviese la

capacidad o fuese concebido para trabajar con elementos mecánicos por tratarse de un mecanismo que requiere un alto rigor en este aspecto, en el que se viabilizará el trabajo con engranajes y elementos de transmisión. El segundo aspecto fue el de emplear un software de análisis matemático que emplease modelos complejos de análisis, en los que se solicitase trabajar partiendo de simplificaciones como las condiciones de un ensayo lineal estático, hasta uno que pueda favorecer un análisis dinámico no lineal con condiciones de hiperelasticidad. El tercer aspecto fue el de encontrar la herramienta necesaria para concatenar la implementación de todos los programas que se iban a emplear y hacer esto de la forma más simple posible para evitar problemas en las fases de intercambio de información. Es así como se opta por emplear el software Solidworks para la generación de los diseños en tres dimensiones; la utilización del software de modelación de elementos finitos Cosmos por que al haber sido integrado con la interfaz del programa anterior favorece el intercambio de información y porque fue pensado como solución a problemas estructurales, además de contar con los modelos de análisis solicitados y con las credenciales que lo avalan a nivel internacional.

Por su parte, se emplea Ms Excel para el manejo de las tablas de diseño de los engranajes y la generación de los puntos de los perfiles de curva de involuta, además de la recepción de los resultados generados por Cosmos. Se emplea Matlab para toda la interpretación de los resultados del análisis. Es natural que el Solver no abarque modelos de resultados que vayan más allá de las condiciones de carga y posición en cada uno de sus nodos. Por tal motivo, es necesario programar los modelos matemáticos complementarios como son los análisis cinemáticos, los análisis de falla, los análisis tribológicos y los análisis de los errores cinemáticos. Por último se opta por emplear un software de análisis estadístico para la interpretación de la formulación del diseño experimental; así como para obtención de los residuos de los errores cinemáticos de transmisión.



## **3.Desarrollo de los métodos de modelamiento matemático**

### **3.1 Consideraciones generales de diseño**

Para la consecución global del diseño del mecanismo se plantea una metodología en la que se utiliza el refinamiento de modelos. Luego de escoger un tipo particular de transmisión como el sustentado en el capítulo dos (donde se toma al engranaje corona como bastidor del mecanismo, al generador de onda como elemento de entrada de carga, y en consecuencia al engranaje flexible como elemento de salida), se plantea una primera aproximación al modelo de transmisión, donde no se considera dentado y por principio de fricción se ha de mostrar cómo se realiza la operación. Además, esta aproximación fue planteada como modelo físico por investigaciones previas realizadas en la Universidad, lo que favorece la asociación con el modelo matemático. Además, porque este modelo brinda una aproximación a los parámetros que se necesitan para implementar el modelo dentado.

Para poder llegar a un modelo de ensamble completo de la transmisión fue necesario realizar un paso esencial que consistió en solucionar el ajuste entre el generador de ondas y el engranaje flexible. Para este caso también se definió un ensayo que consiste en ensamblar solamente el engranaje flexible y la corona, y hacer que el software asimile que en asociación se trata de un ajuste por contracción. Para el modelo utilizado se emplearon los parámetros geométricos del modelo dentado denominado como prototipo experimental número 3 del diseño trabajado en una investigación previa [10], el cual consiste en una transmisión de 113 y 115 dientes para el flexible y la corona respectivamente. La solución del ajuste por contracción del engrane flexible es fundamental para que se cumplan las condiciones de ensamble de los modelos; la misma deberá ser realizada para cada uno de los desarrollos.

Para el modelo de transmisión mencionado y para el primer análisis por elementos finitos se determinan las principales características de simulación. Entre las cuales se puede mencionar la necesidad de restringir el giro del generador de ondas a un número pequeño para ahorrar recurso computacional y tiempo. Lo anterior, debido que en un paso posterior se necesita evaluar 27 modelos para el diseño experimental, que incluye para cada uno de los tratamientos tres tipos distintos de simulación.

Por este motivo se opta por asumir los criterios tomados en los desarrollos llevados a cabo en las transmisiones logradas en la universidad como fueron, la selección de un

torque inducido de 1,77 N-m y una velocidad de 60 rad/min. Los resultados obtenidos fueron consecuentes en las etapas de validación en cuanto a tendencias, pero no se cumplen a cabalidad debido a otros criterios previstos como el uso de un generador elíptico en lugar de dos rodamientos circulares, o la simplificación que se ha tomado al trabajar con modelos de dos dimensiones donde no se considera el aumento de rigidez torsional al prescindir del brazo de flexión inherente al modelo en tres dimensiones de engranaje de copa para los primeros ensayos. Otro parámetro de modelado ha sido el de dejar que las restricciones cinemáticas estén dadas por las fricciones impuestas por el software y el modelo geométrico. Es decir, ningún parámetro adicional se ha inducido como pudo haber sido el limitar la capacidad de rotación del flexible. A favor de la flexibilidad de los ensayos, se eligió un modelo en dos dimensiones, tomando la cara más representativa del modelo debido a la dificultad mencionada del peso del procesamiento. Esto último posibilita la implementación de mallas generales rigurosas y controles de mallado particulares en zonas de interés como fueron los flancos y los cantos de los dientes.

Como se ha mencionado, el modelo de elementos finitos requiere un dominio paramétrico que tenga una flexibilidad superior comparable con los modelos físicos. Para éste se determina una metodología de diseño y se destacan variables que en esencia son el objeto de modificación; donde el hecho de cambiar una de éstas no obligue a tiempos perdidos de modelado. En primer lugar se ha modelado una sección del ensamble del mecanismo donde no se ha tenido en consideración la magnitud del espesor ni la geometría a lo largo del eje transversal debido a que se realiza la simplificación mencionada de trabajar en dos dimensiones, además se toma a modo de simplificación adicional una proyección axial regular de la geometría. Los parámetros mencionados previamente se complementan con el diseño tradicional más algunas otras consideraciones tenidas en cuenta que se resaltan a continuación cuando se aborden temas particulares.

Por último, es necesario plantear que luego de concluir los estudios realizados teniendo en cuenta parámetros como la capacidad portante, las fallas por fatiga en la base del diente, las consecuencias por desgaste frente a picadura entre otros; se selecciona el diseño que brinde la mejor respuesta y se realiza la etapa de modelado en tres dimensiones. Para éste se ha implementado el modelo de análisis de elementos finitos que se ha llevado a cabo hasta ésta instancia, uno aun más riguroso que maneja una cantidad de revoluciones mayores, y el modelo definitivo que contempla la teoría de análisis de hiperelasticidad [18, 22, 23].

### **3.2 Planteamiento del modelo geométrico parametrizado**

Como punto de inicio se establecen los parámetros particulares en la transmisión armónica y los planteamientos a tener en cuenta en el diseño de una transmisión de engranajes. El diseño geométrico del mecanismo se basa en el modelo tradicional empleado para obtener una transmisión de dentado interno. Aunque, para poder asociar los conceptos hay que comprender varias directrices; en primera instancia el engranaje interno en condiciones de operación es elíptico y flexible. También, es primordial

entender que el diámetro primitivo de la corona rígida deberá ser tangente en dos puntos simétricamente opuestos al diámetro primitivo modificado según la elipse impuesta por el generador en el engranaje flexible. Entonces el semieje mayor de la elipse será equivalente al radio primitivo de la corona rígida, y el semieje menor se obtiene al entender que el flexible opera dentro de la zona elástica. Por tanto el anillo que genera el perímetro primitivo de éste al cargarse no presentará deformaciones permanentes. Es decir, el perímetro del engranaje no cambia al deformarse, y se cuenta con los valores de este último y del semieje mayor.

En definitiva, el diámetro interno del flexible deformado debe ser igual al diámetro externo del generador de onda.

Al obtener la geometría definitiva del generador y al definir un espesor de anillo para el caso particular del modelo sin dentado, que a su vez ha sido tomado según la emulación del modelo físico; para el que se maneja un espesor de 0,6 mm y diámetros de 100 mm para la corona y 90 mm para el engranaje previa deformación, se han de dibujar los bocetos resultantes y se emplean en una extrusión individualmente para obtener los contornos que definen tanto el generador de onda como la corona flexible. En una primera etapa de análisis se superponen el engranaje flexible en su forma circunferencial y el generador recientemente dibujado. Y se ensamblan sin tener en cuenta que se solapan, posteriormente se someten a un ajuste por interferencia o contracción. Una vez obtenida la geometría deformada se corrobora el diámetro de la corona rígida con el que se trabaja el modelo de análisis completo, naturalmente las superficies denotan tangencia. Cuando los dominios se encuentran definidos previa deformación se realiza un ensamble de los tres elementos y sobre sí se inducen dos análisis simultáneos, el análisis de deformación del flexible y la rotación de éste.

Cuando se lleva al modelo el comportamiento del rodamiento elíptico se entiende que la fricción entre las superficies en contacto debe ser muy pequeña. De igual forma, si se pretende emular el contacto que se logra en una transmisión dentada a través de dos de las caras, en una escala normalizada la fricción deberá ser máxima. Es decir cercana a uno, por último la condición de la corona rígida será la de eslabón fijo [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30]. Una vez definidas las condiciones geométricas globales se particulariza el proceso hacia las transmisiones armónicas. Para tal efecto, se plantea el diseño de la transmisión tal y como se aborda el problema de diseño de transmisiones de engranajes planetarios con corona rígida de dentado interno. A continuación se enuncian las variables y ecuaciones implementadas en el diseño donde destaca la inclusión de los parámetros necesarios para la corrección.

#### Geometría de la transmisión

$A$	Ángulo de empuje usualmente constante
$B$	Ángulo de la hélice en el cilindro de referencia
$h_a$	Factor de altura del diente
$c$	Factor de holgura radial
$m$	Módulo de los engranajes
$R_b$	Radio de las aristas del diente engranaje flexible y corona

$X$	Coeficiente global de corrección de los dientes
$aw$	Distancia entre centros
$C_{de}$	Diámetro exterior del diente engranaje flexible corregido
$C_{df}$	Diámetro fondo del diente engranaje flexible corregido
$C_{Dec}$	Diámetro externo del diente corona corregido
$C_{Dfc}$	Diámetro fondo del diente corona corregido
$Esp_{AX}$	Espesor axial piezas
$EspA$	Espesor del anillo del engranaje flexible sin los dientes

#### Geometría del engranaje flexible

$Z_0$	Número de dientes del engranaje
$x_e$	Coeficiente de corrección del diente engranaje
$D_{pe}$	Diámetro primitivo engranaje flexible
$D_e$	Diámetro exterior del diente engranaje flexible
$D_{fe}$	Diámetro fondo del diente engranaje flexible
$An_e$	Ángulo de la simetría de las curvas (engranaje)
$g_e$	Radio círculo base engranaje

#### Geometría de la corona rígida

$Z$	Número de dientes para la corona
$x_c$	Coeficiente de corrección del diente para la corona
$D_{pc}$	Diámetro primitivo para la corona
$D_{fc}$	Diámetro fondo del diente para la corona
$D_{ec}$	Diámetro externo del diente para la corona
$An_c$	Ángulo de la simetría de las curvas para la corona
$g_c$	Radio círculo base para la corona

#### Geometría general de los mallados

$T_{max}$	Tamaño máximo de elemento de la malla
$T_{min}$	Tamaño mínimo de elemento de la malla
$Nu_{min}$	Número mínimo de elementos en un círculo como parámetro de malla
$Cocel$	Cociente de crecimiento del tamaño del elemento
$Tele_m$	Tamaño de los elementos en el control de mallado
$Ratio$	Cociente del tamaño de elemento de una capa en el tamaño de elemento de la capa anterior

$$D_{pe} = \frac{(mZ_0)}{B} \quad (3.1)$$

$$D_{pc} = \frac{(mZ)}{B} \quad (3.2)$$

$$D_{fe} = D_{pe} - (2m(h_a + c)) \quad (3.3)$$

$$D_{fc} = D_{pc} - (2m(h_a + c)) \quad (3.4)$$

$$C_{df} = D_{pe} - (2m(h_a + c - x_e)) \quad (3.5)$$

$$C_{de} = D_e \quad (3.6)$$

$$C_{Dfc} = D_{pc} - (2m(h_a + c - x_c)) \quad (3.7)$$

$$C_{Dec} = D_{ec} \quad (3.8)$$

$$D_e = (2aw) + D_{fc} - (2cm) \quad (3.9)$$

$$D_{ec} = (2aw) + D_{fe} - (2cm) \quad (3.10)$$

$$g_e = \left(\frac{D_{pe}}{2}\right) \cos A \quad (3.11)$$

$$g_c = \left(\frac{D_{pc}}{2}\right) \cos A \quad (3.12)$$

$$An_e = \frac{360^\circ}{(4Z_0)} \quad (3.13)$$

$$An_c = \frac{360^\circ}{(4Z)} \quad (3.14)$$

$$aw = \left(\frac{D_{pc}}{2}\right) - \left(\frac{D_{pe}}{2}\right) \quad (3.15)$$

La curva involuta se genera en uno de los planos y es exportada a Solidworks previa tabulación realizada en Excel. Las expresiones para obtener esta curva son,

$$X_{involuta_i} = g[(\cos\theta_i) + \theta_i \text{sen}\theta_i] \quad (3.16)$$

$$Y_{involuta_i} = g[(\text{sen}\theta_i) - \theta_i \cos\theta_i] \quad (3.17)$$

Otros parámetros son ajustados de forma empírica por tratarse de las condiciones de operación del modelo por elementos finitos a los que el software respondía a satisfacción; y según los cuales se tenía una respuesta efectiva para la solicitud prevista, el propósito fue encontrar las condiciones más favorables para realizar una cantidad generosa de ensayos. Además, los niveles escogidos para realizar el diseño experimental hacían fluctuar en un rango muy amplio las variables de diseño, no obstante consideraciones como el número de nodos tenían que mantenerse semejantes en todas las pruebas para descartarlos como parámetros incidentes. Por último, queda enunciar dos parámetros para los cuales no se ha encontrado ningún referente formal y sobre los cuales se tomaron consideraciones que también son objeto de estudio del proyecto. El primero es el espesor del anillo flexible acotado desde la base del diente. El segundo se

provoca debido a una interferencia notable al realizar todo el proceso de diseño que imposibilita el ensamble de forma correcta.

Para solventar el primer parámetro, se tomó la magnitud del espesor del anillo de la medición de la transmisión de una investigación previa [10]; y se escaló según las relaciones existentes entre los diámetros que conforman el resto de la geometría del flexible quedando enunciado de forma general de la siguiente forma,

$$EspA = \left[ \left( \frac{D_{pe}}{2} \right) - \left( \frac{C_{Df}}{2} \right) \right] + \left[ \left( \frac{C_{Df}}{2} \right) - \left( \frac{D_f}{2} \right) \right] \quad (3.18)$$

El segundo parámetro ha sido estudiado y se han publicado conclusiones el respecto [12]. Por tanto, ha sido necesario valerse de la modelación geométrica y de la deformación obtenida para determinar una condición donde no se presenten interferencias.

El problema se observa al superponer las geometrías tanto de la corona rígida como del engranaje flexible previa deformación. Al realizar este procedimiento se puede apreciar una magnitud de interferencia, entonces, al rebajar ambos dientes en la misma proporción y en una magnitud igual a la interferencia medida, se logra que sea geoméricamente imposible una interferencia aun al trabajar con diversas correcciones [31], en algunos casos puede parecer un tratamiento excesivo pero da solución a los casos más extremos del ensayo, donde los desplazamientos no se lograrían de no haber aplicado dicha modificación debido a interferencias que se pueden dar en las aristas de los adensos.

$$D_{modificado\ engranaje} = \left[ C_{Dec} - \left( \frac{C_{De} - C_{Dec}}{2} \right) \right] \quad (3.19)$$

$$D_{modificado\ corona} = \left[ C_{Dec} + \left( \frac{C_{De} - C_{Dec}}{2} \right) \right] \quad (3.20)$$

Se puede demostrar que éste tratamiento no es determinante en la capacidad de los dientes de asumir cargas bajo parámetros de falla por fatiga en la base; además de no incidir de forma determinante en la cinemática de la transmisión.

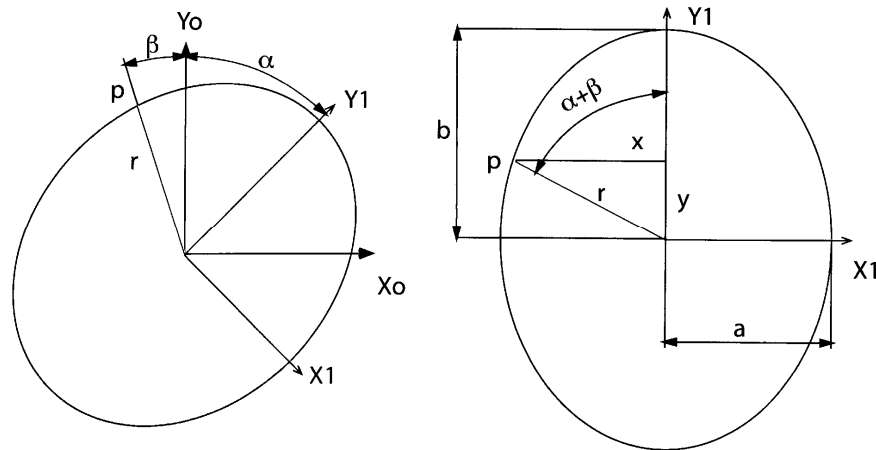
### 3.3 Modelo analítico cinemático

Este modelo es usado para describir el desplazamiento ideal de la transmisión, a pesar de que no caracteriza la cinemática a cabalidad si expone las posiciones características con una aproximación apropiada. Gracias a esta cualidad se ha implementado para confrontar el resultado obtenido por el modelo cinemático numérico y de ésta forma observar los desfases que se puedan dar fuera del comportamiento ideal. Aunque, en este modelo ideal no se percibe error de transmisión alguno ni algún retazo en la cinemática debida al deslizamiento entre el flexible y el generador de onda, como normalmente se da en modelos físicos o aplicando el método de los elementos finitos. Éste modelo describe la trayectoria de un punto en el engranaje flexible y tiene presente las relaciones que existen con el generador de onda para formular un planteamiento

teórico de funcionamiento. Para lograrlo, se define la intersección de una línea recta que parte del centro de la elipse con el perímetro de ésta como punto  $P$ , el ángulo descrito por la línea mencionada respecto del sistema de referencia se denomina ángulo  $\beta$ , y el ángulo formado entre ésta misma línea y un sistema que rota en razón del generador de onda se denomina  $\alpha$  [9].

En un sistema de referencia generalizado el desplazamiento total del punto  $P$  está definido por la variación entre  $\beta$  y  $\alpha$ . Si se considera que existe una relación de transmisión constante entre los desplazamientos del generador y el flexible, una de éstas variables debe modificarse en razón de la otra, por tanto  $\beta = i\alpha$ .

**Figura 3-1:** Posición de un punto  $P$  sobre el engranaje flexible en posición deformada [9]



Tras haber obtenido las relaciones de las coordenadas  $x$  y  $y$  expresadas en términos de la ecuación de la elipse de semiejes y llevar el planteamiento previo a un sistema de coordenadas fijo  $X_0 Y_0$ , se obtienen las siguientes ecuaciones,

$$X_0 = -r \operatorname{sen}(\beta) = -\frac{y}{\cos(\alpha(i+1))} \operatorname{sen}(i\alpha) \quad (3.21)$$

$$Y_0 = r \operatorname{sen}(\beta) = -\frac{y}{\cos(\alpha(i+1))} \cos(i\alpha) \quad (3.22)$$

Con éstas ecuaciones se pueden obtener las velocidades y aceleraciones del punto  $P$ , así como la posición relativa del flexible respecto al generador de onda.

### 3.4 Modelo numérico cinemático

Cuando se plantea la implementación de un método de análisis por elementos finitos se deben tener en cuenta las implicaciones del modelo. Si el diseño está enmarcado funcionalmente de acuerdo a determinados parámetros, podría emplearse un método más o menos riguroso, en esencia cuando es asociado un comportamiento estructural sin un requerimiento particular existen dos formas de abordar los problemas: a través de un modelo lineal o uno no lineal. En el presente estudio se ha optado por emplear un

método no lineal debido a las pretensiones del diseño mismo, el cual podría exponer alguno de los siguientes comportamientos que descartan el uso del método lineal:

- Las tensiones pueden no ser directamente proporcionales a las deformaciones unitarias debido a que éstas serían relativamente grandes y al tratarse de un modelo que cambia en el tiempo se pueden presentar variaciones no regulares.
- Los desplazamientos que se han de inducir en el modelo tendrían que ser pequeños para poder ignorar el cambio de rigidez causado por las cargas. Además el modelo no lineal permite controlar la frecuencia de la repetición del cálculo de la matriz de rigidez.
- Las condiciones de borde pueden variar durante la aplicación de las cargas. En este modelo esta condición se va a presentar producto a que la frontera es alterada por efecto del ajuste por contracción y además se tiene un problema de contacto en el cual los nodos interactúan según la posición armónica del generador.

El método de modelamiento considerado es dinámico, aunque no se consideran significativos los efectos de inercia que se presentan, y más cuando se está trabajando bajo régimen estable debido a condiciones inherentes en la transmisión que posibilitan hacer este tipo de consideraciones como son los efectos de retroceso. Otra consideración que se toma para prescindir de un método completamente dinámico se da por la poca incidencia que tiene la amortiguación en sistemas de perfiles conjugados o con tendencias cíclicas de deslizamiento. En conclusión, el método de elementos finitos implementado responde a la sollicitación de carga inducida y favorece a cabalidad la cinemática de operación en los diseños evaluados.

Cuando se trabajan sobre la suposición de no linealidad cabe la posibilidad de incidir a través de los desplazamientos sobre la evolución del sistema durante el análisis. Por tanto, el equilibrio de la deformación progresiva debe suponerse, ya que no se conoce y en cada estado de equilibrio que se logra se obtiene un conjunto de ecuaciones que no es lineal, debido a esto se da la necesidad de aplicar un método iterativo. Usualmente los problemas de análisis no lineal son complicados de manejar. Por ésta razón, todos los programas de ingeniería de diseño en éste campo cuentan con varias estrategias que son más o menos favorables y dependen de la aplicación sobre las que se va a implementar. Por ejemplo, no es igual trabajar una estructura rígida empotrada que un problema de pandeo debido a la enorme diferencia en la pérdida violenta de estabilidad geométrica.

El problema tratado en el presente trabajo requiere que se asuman criterios aparte de la hipótesis de no linealidad. Por ello, se ha complementado el paradigma tradicional de trabajar tan solo con control de fuerzas para dar paso a controles adicionales basados en los desplazamientos, pero solamente como criterios de entrada en el generador de ondas. El efecto conseguido de desplazamiento en el flexible se da de forma natural por efectos del modelo matemático.



Otras directrices que se han tenido en cuenta para condicionar el Software y solventar otras posibles no linealidades en el modelado de la transmisión armónica tienen que ver con tres parámetros intrínsecos y se describen a continuación:

- Las no linealidades de contacto, que se presentan cuando se modifican las condiciones de contorno del ensayo, es decir cuando son alternantes como en el caso del embonamiento cíclico en la transmisión. Este problema se solventa al determinar cual comportamiento prima en cada situación. Por ejemplo, para los flancos de los dientes se determinó implementar un contacto de nodo a superficie mientras que entre la cara interna del flexible y el generador de onda se implementó un modelo de superficie a superficie.
- Las no linealidades geométricas que se pueden presentar debido a cambios significativos del dominio debido al efecto de incidencia de las cargas aplicadas (el engranaje flexible pueden someterse a ésta condición).
- Y por último las no linealidades del material, que se presentan debido a la sensibilidad de la relación que existe entre la deformación unitaria y la tensión. En el caso de la transmisión armónica se debe prever cualquier comportamiento anormal que se pueda presentar en alguno de los modelos evaluados. Por ejemplo, cuando se ha diseñado bajo la premisa de un comportamiento completamente elástico algunos de los conjuntos bajo condiciones de carga pueden ser tan sensible como para generar plasticidad, o en el caso en el que alguno de los modelos sea proclive a acumular energía al punto de tener una carga capaz de generar fluencia, o que las pérdidas por fricción sean tan grandes que se dé el caso de termoplasticidad en pequeño grado.

Otro aspecto importante en la definición correcta de un modelo para análisis por elementos finitos, es el de establecer de forma correcta la administración del tiempo de solución. Este caso no es simple debido a que en la gran mayoría de situaciones no se puede hablar de un incremento lineal de esta variable. Además es imperativo comprender que el tiempo de evaluación será diferente al representado en las simulaciones, es el caso por ejemplo en el que la evaluación de un segundo del modelo se puede tardar más de un minuto en la representación del fenómeno.

Estas curvas de tiempo muestran la forma en la que varían las restricciones impuestas a lo largo de los pasos de solución. La mayoría de los programas de modelación por elementos finitos cuentan con una aplicación que posibilita un escalonamiento automático adaptativo. Para el caso de la aplicación se realizan análisis de un segundo en estado de operación estable en el que la primera etapa de deformación del flexible se realiza de forma instantánea y apreciable en las curvas de desplazamiento como ruido en la señal. Se observa que el paso incremental de tiempo varía dependiendo de los pasos de iteración que el programa toma para encontrar convergencia. Es decir, el solver plantea modelos que soluciona producto de extrapolar condiciones que se vienen dando, pero al no encontrar un modelo válido retoma desde el último punto de convergencia reduciendo el paso de solución en la proporción que se le ha indicado al estructurar el

análisis. Obviamente, un modelo que tenga una buena tasa de convergencia va a contar con menos datos en su solución pero va a representar comportamientos notablemente más precisos.

Al lograr establecer los parámetros más favorables particulares para cada diseño y conseguir homogeneidad en las curvas de tiempo de evaluación se ha de definir la técnica a implementar como solución numérica. Para tal fin, en primer lugar se deben escoger de entre tres posibles técnicas de control las más idóneas, con éstas se administra el proceso de cálculo a lo largo de las rutas de equilibrio. Existe el método de control de carga incremental, el método de control de desplazamiento incremental y el método arco incremental. El método de carga incremental se ha aplicado para dar estabilidad al sistema, es decir, se ha indicado de forma redundante una "curva" de carga que tiene una magnitud constante, con ella se logra independizar la consecuencia de variación de la magnitud de entrada de torque al sistema debido a que el programa no toma ésta variable como resultado de la solución del método, sino como un dato en la curva impuesta. Esto es lo que realmente sucede debido a que el torque de entrada se mantiene constante gracias a que es independiente del mecanismo [22].

El método de arco incremental se descarta al no verse la necesidad de establecer una ecuación auxiliar adicional para complementar el equilibrio del sistema. Además, este método independiza los pasos de solución de las curvas de tiempo, no obstante se recomienda cuando se abordan análisis en condiciones de pandeo y para el análisis de anillos. Este método se denomina de esta forma porque en un sentido geométrico se trabaja con planteamientos que restringen la longitud de arco. Por último, el método de control de desplazamiento incremental se implemento de alguna forma debido a que se ha de inducir el desplazamiento del generador a través de un radio de revolución que cambia de forma angular en consecuencia de la rotación de un eje motriz, además la condición de deformación constante y progresiva es inherente en este modelo [22].

El último de los criterios es el de escoger un esquema de terminación, una vez finalizada la iteración se debe cumplir con un criterio de convergencia. Para garantizar el criterio se deben dar unos parámetros de tolerancias acordes con el modelo que son determinantes en cuanto a tiempo de proceso, ya que si se plantean muy amplios se tendrán resultados imprecisos, y si son muy estrictos puede darse el caso de aumento innecesario del costo de cálculo.

El Software aplica directamente tres criterios que han sido incluidos para terminar un proceso iterativo y se creen apropiados para los fines de la investigación. A continuación se explican cada uno de estos.

- **Convergencia de desplazamientos**

Este criterio se basa en los incrementos en el desplazamiento durante las iteraciones. El mismo está dado por,

$$|\{\Delta U\}^{(i)}| < \varepsilon_d |\{U\}^{(i)}| \quad (3.23)$$

Donde  $\|\{\alpha\}\|$  indica la norma Euclidiana de  $\{\alpha\}$  y  $\varepsilon_d$  es la tolerancia de desplazamiento.

#### ▪ **Convergencia de fuerzas**

Este criterio se basa en las cargas no equilibradas (residuales) durante las iteraciones. Es necesario que la norma del vector de carga residual esté dentro de una tolerancia  $\varepsilon_f$  del incremento de la carga aplicada, es decir,

$$\|{}^{t+\Delta t}\{\mathbf{R}\} - {}^{t+\Delta t}\{\mathbf{F}\}^{(i)}\| < \varepsilon_f \|{}^{t+\Delta t}\{\mathbf{R}\} - {}^t\{\mathbf{F}\}\| \quad (3.24)$$

#### ▪ **Convergencia de energía**

En este criterio, el incremento en la energía interna durante cada iteración, que es el trabajo que realizan las fuerzas residuales a través de los desplazamientos incrementales, se compara con el incremento de energía inicial. Se supone que la convergencia se ha ejecutado cuando se cumple la siguiente condición,

$$(\{\Delta U\}^{(i)})^T ({}^{t+\Delta t}\{\mathbf{R}\} - {}^{t+\Delta t}\{\mathbf{F}\}^{(i-1)}) < \varepsilon_e (\{\Delta U\}^{(1)})^T ({}^{t+\Delta t}\{\mathbf{R}\} - {}^t\{\mathbf{F}\}) \quad (3.25)$$

Donde  $\varepsilon_e$  es la tolerancia de energía. Además, se utiliza una cantidad de esquemas como criterios de divergencia. Uno de estos esquemas se basa en la divergencia de las cargas residuales. Otro se basa en la divergencia de la energía incremental [22].

Una vez definidos la totalidad de los parámetros, el software está en la capacidad de realizar el ajuste por contracción con el que va a deformar el flexible llevándolo a su posición de engranamiento para posteriormente inducir una rotación progresiva y un torque constante. Para ello, cada parámetro debe definirse referente a las condiciones iniciales del modelo antes de empezar a solucionarlo. Algunos parámetros importantes aquí son; las restricciones de desplazamiento, las restricciones de contacto, los parámetros de mallado, los parámetros del material y otros sobre los que ya se ha hecho mención como; la configuración de la carga, la curva de desplazamientos, los parámetros del Solver, entre otros [22, 41].

En el capítulo 5 donde se trabaja la arquitectura de la transmisión se hará mención de los conceptos previos sobre el modelo que mejor respuesta brinda.

### **3.5 Modelo numérico-analítico constitutivo y expectativa de vida**

Para determinar las capacidades de la transmisión, se busca la manera de poner en perspectiva la información que genera el software de elementos finitos para encontrar parámetros de desempeño característicos. El programa está en capacidad de dar información referente al comportamiento posicional y de los estados de esfuerzos en cada uno de los nodos de forma semejante al prisma infinitesimal usualmente implementado en la mecánica de medios continuos. La administración de esa

información es responsabilidad del diseñador. Por tanto, se considera encontrar la cinemática de la transmisión de acuerdo a la posición nodal según el tiempo de trabajo y definir según criterios de falla el desempeño de la transmisión utilizando los resultados tomados de las matrices de esfuerzos nodales. Lo anterior se logra con la implementación de diversos algoritmos programados en Matlab (ver Anexo D) que permiten interpretar la información y generar otra nueva.

### 3.5.1 Planteamiento del error cinemático

Para el primer estudio se aborda el fenómeno del error cinemático de transmisión donde se toman los valores de posición extraídos del modelo de elementos finitos para el generador y el flexible. Éstas posiciones se toman sobre un nodo en particular, el cual ha sido escogido en una sección cercana al diámetro base del flexible pero tratando de ubicar la mitad de uno de los dientes. Dado que si se toma cerca a los vértices de adendo se puede ver alterada esta coordenada por posibles rotaciones de éste, y si se toma muy cerca de la tangencia con el generador el efecto de la interacción del dentado puede verse atenuado al tender al desplazamiento de ésta última pieza.

El desplazamiento está referenciado con un sistema de coordenadas globales que en definitiva se representan en un par de vectores. Por tanto, se puede obtener un sistema polar del que se extrae el radio que se modifica según la armónica, y los ángulos de desplazamiento. A pesar de que los desplazamientos del generador de onda se realizan a velocidad constante, este parámetro no ha sido generado en la aplicación de Matlab sino ha sido tomado también del análisis por elementos finitos, debido a que los pasos de tiempo son asumidos de acuerdo a las necesidades del solver como se ha explicado.

Una vez tomados los ángulos de entrada y salida en el modelo de transmisión se grafica la relación del ángulo de entrada contra el ángulo de salida sobre el módulo, lo que representa una curva de error cinemático de transmisión [32, 33]. A esta nueva curva se le realiza una regresión lineal para tener una tendencia ideal, posteriormente se realiza una evaluación de los residuos encontrados al superponer ambas curvas tomando la regresión como patrón. El error absoluto medio es el valor promedio de los residuos y la variable seleccionada para cuantificar estos desfases cinemáticos.

### 3.5.2 Planteamiento del método numérico

Para obtener cada uno de los parámetros necesario en los planteamientos posteriores se da claridad al modelo de evaluación del método numérico implementado por Solidworks.

El conjunto básico de ecuaciones que deben ser resueltas en cualquier paso de "tiempo",  $t+\Delta t$ , es:

$${}^{t+\Delta t}\{\mathbf{R}\} - {}^{t+\Delta t}\{\mathbf{F}\} = 0, \quad (3.26)$$

Donde:

${}^{t+\Delta t}\{\mathbf{R}\}$  = Vector de cargas nodales de aplicación externa

${}^{t+\Delta t}\{\mathbf{F}\}$  = Vector de fuerzas nodales generadas internamente.

Debido a que las fuerzas nodales internas  ${}^{t+\Delta t}\{\mathbf{F}\}$  dependen de los desplazamientos nodales en el tiempo  $t+\Delta t$ ,  ${}^{t+\Delta t}\{\mathbf{U}\}$ , se debe utilizar un método iterativo. Las siguientes ecuaciones representan el diseño básico de un esquema iterativo para solucionar las ecuaciones de equilibrio en un paso de tiempo determinado,  $t+\Delta t$ ,

$$\{\Delta\mathbf{R}\}^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t}\{\mathbf{R}\} - {}^{t+\Delta t}\{\mathbf{F}\}^{(i-1)} \quad (3.27)$$

$${}^{t+\Delta t}[\mathbf{K}]^{(i)} \{\Delta\mathbf{U}\}^{(i)} = \{\Delta\mathbf{R}\}^{(i-1)} \quad (3.28)$$

$${}^{t+\Delta t}\{\mathbf{U}\}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\{\mathbf{U}\}^{(i-1)} + \{\Delta\mathbf{U}\}^{(i)} \quad (3.29)$$

$${}^{t+\Delta t}\{\mathbf{U}\}^{(0)} = {}^t\{\mathbf{U}\}; \quad {}^{t+\Delta t}\{\mathbf{F}\}^{(0)} = {}^t\{\mathbf{F}\} \quad (3.30)$$

Donde:

${}^{t+\Delta t}\{\mathbf{R}\}$  = Vector de cargas nodales de aplicación externa

${}^{t+\Delta t}\{\mathbf{F}\}^{(i-1)}$  = Vector de fuerzas nodales generadas internamente en la iteración (i)

$\{\Delta\mathbf{R}\}^{(i-1)}$  = Vector de cargas no equilibradas en la iteración (i)

$\{\Delta\mathbf{U}\}^{(i)}$  = Vector de desplazamientos nodales incrementales en la iteración (i)

${}^{t+\Delta t}\{\mathbf{U}\}^{(i)}$  = Vector de los desplazamientos totales en la iteración (i)

${}^{t+\Delta t}[\mathbf{K}]^{(i)}$  = Matriz Jacobiana (rigidez tangente) en la iteración (i).

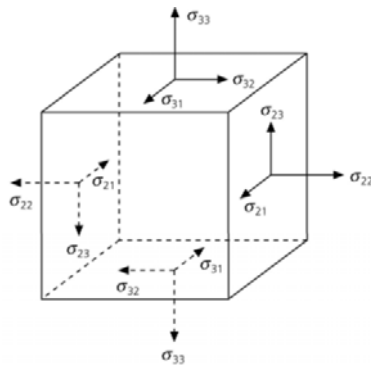
Existen diferentes esquemas para realizar las iteraciones mencionadas como el esquema Newton-Raphson. En este esquema, la matriz de rigidez tangencial se forma y se descompone en cada iteración dentro de un paso en particular. El método Newton-Raphson tiene un alto coeficiente de convergencia y es cuadrático. Sin embargo, la rigidez tangencial se forma y descompone en cada iteración, lo cual puede ser demasiado costoso para modelos grandes [22].

### 3.5.3 Planteamiento del modelo de fatiga en la base del diente

Es notable que cuando un mecanismo trabaja de acuerdo a ciclos de operación se encontrará daño acumulativo producto al efecto alternante de los esfuerzos presentes. Si

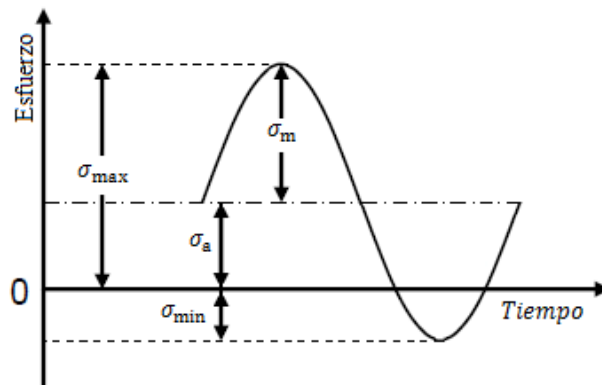
se hace una primera evaluación de los que podrían llegar a ser los desencadenantes de falla en un mecanismo como la transmisión flexo-ondulatoria, inmediatamente se podría afirmar que su principio armónico es un factor a tener en cuenta. A causa de éste efecto alternante al que se ve sometido el engranaje flexible, que en si es un anillo o copa estriada en su extremo y que cuenta con un espesor reducido en comparación con su diámetro mayor, se empiezan a considerar sus posibles puntos débiles. Por ejemplo, al requerir un mecanizado tan riguroso en el dentado, se puede dar que una pequeña fisura o ralladura generada por una manufactura deficiente se propague por efectos de la constante fluctuación de esfuerzos debida a la onda de desplazamiento. Debido a esto se ha pensado en formular un modelo de falla por fatiga y precisamente en la base del diente, donde los modelos de elementos finitos han mostrado que se encuentra el punto de mayor concentración de esfuerzos. El modelo por elementos finitos genera los esfuerzos normales y cortantes de acuerdo al esquema de distribución de esfuerzos (ver Figura 3-2), además, también muestra los esfuerzos principales.

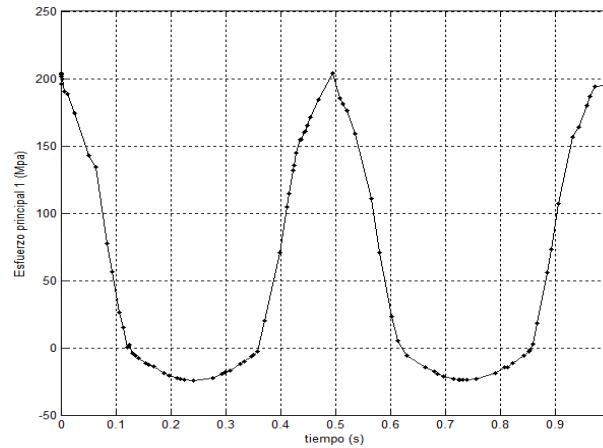
**Figura 3-2:** Esquema de distribución de esfuerzos



Primero se debe caracterizar el tipo de variación con la que cuentan los esfuerzos máximos y mínimos en la transmisión. En las transmisiones armónicas el esfuerzo mínimo tiende a ser menor que cero, pero en cero no se encuentra el esfuerzo medio, pese a esto, la onda se categoriza dentro de los esfuerzos fluctuantes [34,35] según la Figura 3-3 y en consecuencia de los resultados encontrados según la Figura 3-4, estos esfuerzos han sido obtenidos al tomar su magnitud a lo largo del tiempo de análisis sobre un nodo en el flexible.

**Figura 3-3:** Fluctuación de los esfuerzos en la transmisión armónica



**Figura 3-4:** Fluctuación de los esfuerzos en la transmisión número 16

En consecuencia, si se cuenta con las componentes mínima y máxima de los esfuerzos, se pueden obtener los componentes medios y alternantes de acuerdo a las expresiones siguientes [36].

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \quad (3.31)$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \quad (3.32)$$

Al obtener las componentes máxima y alternante para cada componente principal de esfuerzos sobre el nodo donde se presenta la concentración más grande, se puede formular la teoría de máxima energía de distorsión planteando las tensiones de Von Mises mediante la siguiente formulación,

$$\sigma_{VMa} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{1a} - \sigma_{2a})^2 + (\sigma_{2a} - \sigma_{3a})^2 + (\sigma_{3a} - \sigma_{1a})^2} \quad (3.33)$$

$$\sigma_{VMm} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{1m} - \sigma_{2m})^2 + (\sigma_{2m} - \sigma_{3m})^2 + (\sigma_{3m} - \sigma_{1m})^2} \quad (3.34)$$

Con estos esfuerzos se aplica el criterio de Goodman, cuya frontera de falla está delimitada por una línea trazada desde el límite de resistencia a la tensión del material ubicado en el eje de las abscisas, hasta el límite corregido de resistencia a la fatiga que está ubicado en el eje de las ordenadas, Anexo B. Este último se calcula partiendo del valor del límite de resistencia a la fatiga sin corrección, que es la mitad del límite de resistencia a la tensión por los factores de modificación pertinentes, para la transmisión tan solo se tienen en cuenta el factor por tamaño y el factor por superficie [34, 35, 37].

$$\sigma_e = \prod_i K_i \cdot \sigma'_e \quad (3.35)$$

Para cuantificar este efecto se define la siguiente expresión que relaciona los esfuerzos de trabajo junto con los umbrales teóricos para el material escogido en una variable que se denomina factor de seguridad a fatiga [35].

$$F_{sf} = \frac{\sigma_e \sigma_{ut}}{\sigma_{VMa} \sigma_{ut} + \sigma_{VMm} \sigma_e} > 1 \quad (3.36)$$

### 3.5.4 Planteamiento del modelo de picadura

Otro criterio de falla de incidencia significativa en las transmisiones de engranajes es el de resistencia a la fatiga superficial debido a que cargas que varían con el tiempo tienden a deteriorar las piezas a niveles de esfuerzo inferiores a los que normalmente fallarían en otras condiciones de esfuerzo. A diferencia de otros tipos de carga la falla por fatiga superficial no cuenta con un límite y es seguro que cualquier mecanismo de este tipo se deteriorara en determinada medida bajo este parámetro.

La fatiga superficial en la transmisión armónica puede ocurrir debido al complejo contacto que existe entre las superficies de los dientes, aún no es claro en qué proporción se manifiestan el contacto por rodamiento puro y el de deslizamiento. Pero es claro que se encuentran presentes, además también se cuenta con situaciones de deslizamiento puro, pero éstas no generan este tipo de falla. Para asumir cualquier tratamiento en este aspecto, lo primero es localizar la posible zona de falla. Aunque es necesario aclarar que la localización del punto de iniciación y propagación de grietas es un problema estocástico. En este trabajo se considera que las grietas de picadura surgirán en el punto de contacto donde se generan los esfuerzos Hertzianos más negativos.

Para una condición como la que se da en el engranamiento de una transmisión armónica este parámetro no es claro, por tanto se opta por tomar seis nodos repartidos a lo largo del perfil del diente y aprovechar que se cuenta con el perfil de esfuerzos en el tiempo para cada uno de estos, con el objeto de ubicar la zona de esfuerzo más significativa a lo largo de la operación. Los nodos seleccionados no deben quedar muy cerca de la zona comprendida en la base del diente, ya que como se sabe en estos nodos se da el máximo esfuerzo de falla por fatiga. Esto daría como resultado una magnitud errónea debido a que se estarían contemplando esfuerzos que no tienen que ver con el contacto superficial. El valor escogido será el esfuerzo pico de contacto principal a compresión, tomado sobre el nodo que exponga un comportamiento más crítico en este sentido.

Debido a que se manejan fricciones relativamente bajas, el componente cortante en el perfil de los dientes ha mostrado ser mínimo, por tanto se trabaja con esfuerzos principales muy cercanos a los esfuerzos normales. Por esta razón se toman estos últimos para el análisis.

La consecuencia de la sensibilidad a esfuerzos superficiales es la picadura. Esta es básicamente una fisura curva que se convierte en un pequeño hoyuelo. Estas fallas superficiales son muchas veces detectables por su ruido. Además, la propagación de



esta falla se da en forma de escamas que se desprenden cada vez con mayor frecuencia.

El parámetro que se prefiere para estimar la resistencia a picadura es la vida en ciclos de resistencia a la fatiga superficial, y se obtiene al desarrollar los planteamientos que se muestran a continuación.

Se ha de determinar el factor de carga experimental según la ecuación,

$$K = \pi(m_1 + m_2)\sigma_z^2 \quad (3.37)$$

Donde el esfuerzo indicado es el esfuerzo hertziano normal a compresión, y  $m_1$  y  $m_2$  son constantes del material,

$$m_1 = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} \quad (3.38)$$

$$m_2 = \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad (3.39)$$

Donde  $\nu$  y  $E$  son la razón de Poisson y el módulo de Young respectivamente. Estos factores se pueden emplear en la ecuación S-N que se ha ajustado experimentalmente para encontrar el ciclo de vida relacionado al nivel de esfuerzo aplicado,

$$\log_{10}K = \frac{\vartheta - \log_{10}N}{\gamma} \quad (3.40)$$

Donde  $\vartheta$  y  $\gamma$  son datos de resistencia a la fatiga superficial tabulados para diversos materiales. En el caso de la transmisión armónica se deben tomar los enunciados para rodamiento y el 9% de deslizamiento para el material seleccionado.

### 3.5.5 Planteamiento del modelo tribológico y modelo de capacidad portante

Tanto el modelo tribológico como el modelo de capacidad portante, enmarcan parámetros de operación o de sollicitación en sentidos semejantes, por tal motivo se ilustran en el mismo numeral pese a ser cuestiones independientes.

Básicamente el modelo tribológico ya se ha tocado parcialmente cuando se realizó el análisis de picadura, puesto que cuando se habla de modelos de este tipo se toman parámetros como el efecto cinemático de las partes móviles en contacto y su interacción superficial. Por esta razón, se aborda el problema desde el punto de vista de la lubricación, en este orden de ideas el modelo tribológico atiende la problemática de la falla superficial a través del estudio de varios frentes que abarcan los requerimientos más comunes en el diseño de equipos o mecanismos.

El objetivo de lubricar las piezas es el de conseguir la separación entre las superficies que se están relacionando de acuerdo a las diversas configuraciones de contacto con el propósito de minimizar el efecto de daño que pueda generar una sobre la otra [38]. En primera instancia se reconoce como parámetro de incidencia fundamental que para una combinación dada de superficies materiales que se encuentren en contacto y sujetas a un grado y tipo de lubricación determinado, los trabajos realizados por los efectos de fricción han de ser proporcionales al producto de la presión de contacto y la velocidad de deslizamiento. Éste criterio denominado intensidad de carga, se ha de evaluar de acuerdo a un rango admisible del producto formulado y se ha aplicado sobre el modelo de transmisión definido a partir del diseño experimental donde se tienen las presiones de contacto y las velocidades de deslizamiento para la zona más afectada por esfuerzos de este tipo. Una vez determinado el parámetro de intensidad de carga se determina uno de los cuatro frentes que aborda la lubricación para desarrollar la hipótesis de capa límite de lubricación.

Los cuatro conceptos generales son: La lubricación hidrodinámica, la lubricación marginal, la lubricación mixta y por último la lubricación elastohidrodinámica [19, 20, 39]. El tipo de lubricación que más se ajusta es la elastohidrodinámica que se da cuando una de las superficies en contacto presenta elevados índices de deformación elástica ya que proporciona una protección hidrodinámica microscópica que solventa el efecto generado por los desplazamientos a estos niveles. Las películas relacionadas con este método de lubricación suelen tener espesores inferiores a un micrómetro.

Este modelo de lubricación mantiene el esquema que se emplea para describir los modelos hidrodinámicos y formula la obtención de la capa mínima  $h_1$  de lubricante según la siguiente expresión empírica,

$$h_1 = 3.5(\gamma_d R^* v_d)^{1/2} \quad (3.41)$$

Donde  $v_d$  es la velocidad de deslizamiento,  $R^*$  es el radio en la superficie de contacto entre las caras de los engranajes y  $\gamma_d$  es la viscosidad del lubricante seleccionado en Poises [21]. Como dato adicional e irrelevante es interesante evaluar en qué proporción las transmisiones armónicas se pueden tratar como mecanismos de superficies concordantes al tener una semejanza tan grande entre las piezas en operación tal como se observa en los rodamientos; o si se asume el caso contrario, se tratan como superficies no concordantes como en el resto de la familia de transmisiones por engranajes. Es evidente que se da una configuración especial. El otro parámetro de evaluación es la estimación de las posibilidades inherentes que tiene el mecanismo para asumir determinadas necesidades de operación de acuerdo con su propio dimensionamiento [40].

Para tal efecto se determina un parámetro de capacidad denominado capacidad portante, es normal pensar en una diferenciación relacionada en este aspecto debido a que se manejaron rangos de módulo que hacían que los modelos implementados variaran significativamente en cuanto a tamaño, y como han sido cargados bajo las mismas

condiciones de esfuerzos y velocidad es correcto pensar que los mecanismos más pequeños no están en la capacidad de asumir de la misma forma las sollicitaciones de las más grandes. Para cuantificar el parámetro de capacidad portante, se ha tomado la relación entre la potencia transmitida y la masa de los engranajes.

### 3.6 Definición del diseño experimental virtual

Cuando se habla de implementar un diseño experimental se cuenta con un gran número de parámetros que se comportan según diversos tipos de regímenes, y además están condicionados uno del otro, usualmente esto se realiza para encontrar unas condiciones favorables dependiendo de algunos criterios y se emplea usualmente en la experimentación física. Debido a que se ha logrado a través de la experimentación un conjunto de variables que han estabilizado los ensayos del método de elementos finitos en pos de la fiabilidad y flexibilidad de su implementación, se ha optado por definir un diseño experimental virtual en el que se van a cuantificar las consecuencias de modificar algunos parámetros de diseño que se sospecha inciden en el desempeño y funcionamiento de la transmisión.

Para esto se va a estimar la incidencia de los mismos sobre los criterios mencionados en el numeral 3.5. Para empezar a determinar las condiciones del ensayo se debe realizar un condicionamiento general donde se aislen los efectos de otras variables que no estén relacionadas con las previstas y que se mantengan bajo parámetros regulares en todos los ensayos. En primer lugar se definen las simplificaciones del modelo, que como se ha mencionado tienen que ver con la forma en la que se plantea éste para que sea trabajado en el software; serán modelos estáticos (estáticos de acuerdo a lo que el programa enmarca en este sentido, es decir no cuentan con inercia por la operación en estado estable, ni fenómenos significativos de amortiguación) no lineales, con simplificación en dos dimensiones debido a que lo que se desea observar se puede lograr en estos términos, lo único sobre lo que no se ha dado claridad bajo esta premisa es a los efectos que puede tener una disminución de las fluctuaciones materiales producidas por el efecto del brazo generado de forma axial en la copa del flexible debido a que naturalmente no se considera la dimensión que contiene para éste efecto. Es claro que esto último si se ha observado en la implementación del modelo en tres dimensiones.

Se define el modelo bajo la condición de tensión plana donde naturalmente no se prevé analizar los efectos normales al plano del modelo en dos dimensiones. Se toma un espesor efectivo para el modelo pese a que sea en dos dimensiones, para dar una estabilidad en el mallado de un valor representativo común en todos los ensayos de un milímetro.

Se trabaja con un acero AISI/SAE 4340 normalizado [41, 42]. Las tres piezas han sido modeladas con este material por sus notables cualidades para el trabajo en transmisiones de engranajes (gracias a su composición y los tratamientos con los que cuenta). Algunas características que hacen que este material sea implementado comúnmente en la elaboración de engranajes son; la capacidad de asumir los cambios

de flexión, de torsión y tensión, conservar su dureza y resistencia bajo condiciones térmicas, tener un mejor comportamiento al desgaste superficial en relación a materiales más comunes, manejar un rango de templabilidad notable y tener una sensibilidad menor a la fragilización debido a tratamientos de revenido.

Una vez determinados los parámetros generales de los ensayos del análisis de elementos finitos y se ha estabilizado el régimen de convergencia, (esto último se realizó modelando el comportamiento de uno de los prototipos físicos descritos [9] y con la confrontación con los modelos analíticos). Se define el diseño experimental que se va a emplear. Para obtener la influencia que poseen el ángulo de presión, el módulo y el factor de corrección en la capacidad portante, el error cinemático de transmisión y la falla por fatiga y picadura de una transmisión armónica, se implementa un diseño experimental virtual factorial completo ( $N_p = 3^3$ ). En la Tabla 3-1 aparecen los valores de los niveles utilizados para los factores experimentales.

**Tabla 3-1:** Valores de los niveles de los factores experimentales.

Factores	Niveles		
	Inferior	Central	Superior
Ángulo de presión (grados)	20	25	30
Módulo (mm)	0,1	0,4	0,7
Factor de corrección (Adim.)	0	0,25	0,50

Las condiciones de funcionamiento de la transmisión se fijan en una velocidad de entrada de 60 rpm y un torque de entrada 1,77 Nm por cada milímetro de ancho de los engranes. El número de dientes de la corona rígida y el del engrane flexible son iguales a 115 y 113 respectivamente. Todas las superficies en contacto presentan fricción, considerando un coeficiente de fricción dinámico igual a 0,05.

El propósito de este diseño experimental es encontrar las superficies de respuesta de las características que definen el desempeño de la transmisión armónica (capacidad portante, error cinemático de transmisión, y factor de seguridad a fatiga por flexión), y valorar como incide la geometría del diente en sus comportamientos. Lo anterior permitirá definir la manera en que la geometría de los dientes afecta el funcionamiento y desempeño; y encontrar valores óptimos para la geometría básica de los engranes de la transmisión armónica.

### 3.7 Modelos de análisis en tres dimensiones de la transmisión armónica

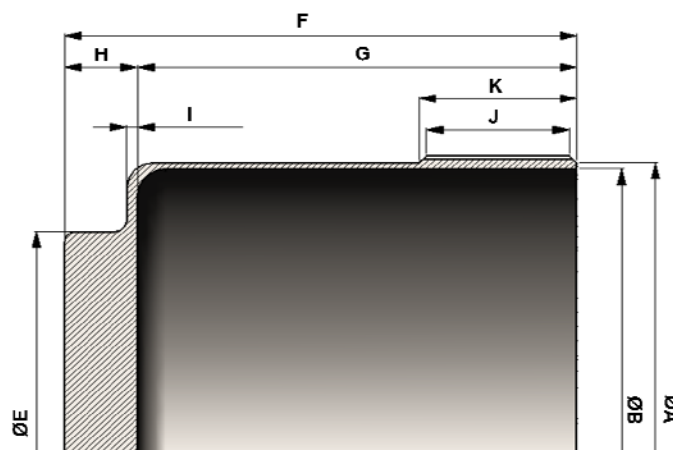
Para la determinación de los parámetros geométricos del modelo en tres dimensiones se ha acudido a la investigación realizada debido a que no se cuenta con un modelo físico real. Además, el diseño planteado no es extensible tanto a cálculos de espesor de la corona, cálculos para el rodamiento elíptico y geometría de la copa ya que una vez

solucionados otros parámetros cinemáticos de mayor relevancia los mencionados se consideran complementarios.

Para tomar ésta determinación se ha de dejar claro que el cometido inicial del proyecto es observar el comportamiento cinemático y estructural en un modelo de transmisión armónica en 2D, para sacar conclusiones sobre la influencia de los parámetros del dentado. Por esto, se ha comparado con la cinemática del punto en dos dimensiones y el desarrollo del ensayo experimental se ha llevado a cabo con la simplificación del método de los elementos finitos en dos dimensiones. Respecto de la definición de los parámetros para dimensionar las piezas, se comprende que al asumir un modelo en tres dimensiones se han de tener en cuenta los efectos más notables de la deformación de la copa. Estos efectos van claramente más allá de la simple modificación geométrica elíptica inducida por el generador, en las Figuras 4-50, 4-51, y 4-52 en el capítulo cuarto, donde el tema se trabaja con mas especificidad, es notable, y visible en una proporción exagerada como se ve modificada la forma del flexible en consecuencia del ensamble, previa etapa de operación y posterior a la aplicación del método.

Como referencia para este diseño se han consultado varias referencias bibliográficas [36, 43, 44, 45], que muestran la geometría que han implementado en sus diseños. Algunas de ellas son tomadas de la medición directa de transmisiones adquiridas en el mercado, otras son producto de la investigación que cada una de las fuentes ha realizado. En consecuencia se han definido una serie de parámetros comunes que son el punto de partida para generar un boceto de la geometría (ver Figura 3-5).

**Figura 3-5:** Esquema dimensional para el engranaje flexible



Solo se analiza con rigor la geometría del engranaje ya que la de la corona no pasa de tan solo determinar su espesor, que es el equivalente a la longitud del tallado del dentado del flexible, y su diámetro exterior, que si se considera lo suficientemente rígido para no verse afectado por las deformaciones radiales inducidas por el generador, y solo dependerá de la cantidad mínima de nodos para simplificar la geometría a mallarse. En el caso del rodamiento, éste es una investigación de gran envergadura tal y como se ha asumido ésta, por tanto no se enfatiza sobre las implicaciones axiales de esta pieza.

Los parámetros han sido condensados en la Tabla 3-2.

**Tabla 3-2:** Datos en milímetros tomados según referencias, sobre la geometría dimensional.

Transmisión	ØA	ØB	ØC	ØD	ØE	F	G	H	I	J	K
1	81.065	78.8	26	40	52	72	63.4	8.6	0.8	18.5	23.5
2	29.7	28.9	24	20	25	33	30	3	0.8	-	12
3	57.6	56	-	-	-	-	-	-	0.8	-	-
4	99.2	98.2	32	-	64	79.5	69.5	10	0.6	-	25
5.1	62	61.4	-	-	-	-	-	-	0.6	-	-
5.2	62	61.4	-	-	-	-	-	-	0.6	-	-
5.3	62	61.4	-	-	-	-	-	-	0.6	-	-
6	131.8	130.8	-	-	-	130	-	-	0.5	-	25
7.1	-	-	-	-	-	88	-	-	-	-	-
7.2	-	-	-	-	-	51	-	-	-	-	-
8	88	-	-	-	-	37	-	-	-	-	-

Como se observa el parámetro mostrado de forma más recurrente ha sido el diámetro base y al no contar con datos como el módulo, éste servirá como referente para formular la proporción con la que se estiman el resto de los datos. Como se observa hay una tendencia en el espesor del anillo en todos los modelos lo que no permite tomarlo dentro de la proporción ya que es claro que los datos no son reales. La tabla se complementa bajo las consideraciones previas (ver Tabla 3-3).

**Tabla 3-3:** Datos extrapolados de la bibliografía.

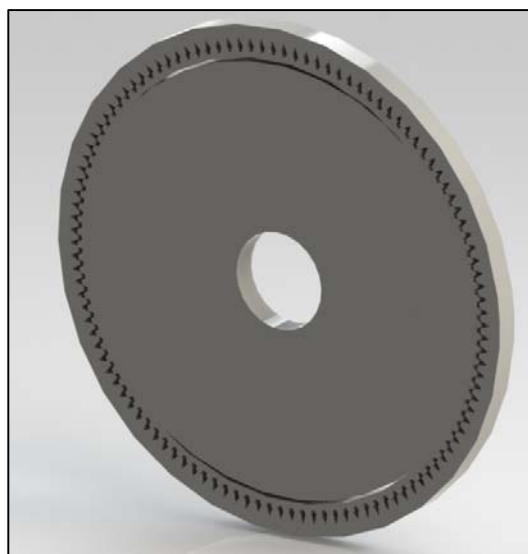
Transmisión	ØA	ØB	ØE	F	G	H	J	K
1	81.065	78.800	52.000	72.000	63.400	8.600	18.500	23.500
2	59.400	57.800	25.000	33.000	30.000	3.000	9.447	12.000
3	57.600	56.000	35.784	47.225	42.702	4.942	14.251	14.283

Transmisión	ØA	ØB	ØE	F	G	H	J	K
4	99.200	98.200	64.000	79.500	69.500	10.000	19.681	25.000
5.1	62.000	61.400	38.517	50.832	45.963	5.320	15.340	15.374
5.2	62.000	61.400	38.517	50.832	45.963	5.320	15.340	15.374
5.3	62.000	61.400	38.517	50.832	45.963	5.320	15.340	15.374
6	125.683	124.683	78.081	130.000	93.175	10.784	19.681	25.000
7	88.000	86.573	54.670	37.000	65.239	7.550	21.772	21.822
8	11.150	10.969	6.927	9.142	8.266	0.957	2.759	2.765

Con la influencia promedio de cada parámetro se puede estimar cada uno de estos partiendo del diámetro base, como se observa en la Tabla 3-3, el ensayo número 8 es el planteado como modelo objetivo, el diámetro B en los modelos del diseño experimental diverge del calculado con la tabla en una proporción inferior al 1%. Éste es el único comparable fuera del espesor que no se toma debido a lo expuesto. Esta tabla es apenas una guía que permite enmarcar algunos parámetros geométricos que sirven para la modelación pero no constituye una influencia certera sin un cálculo que lo soporte.

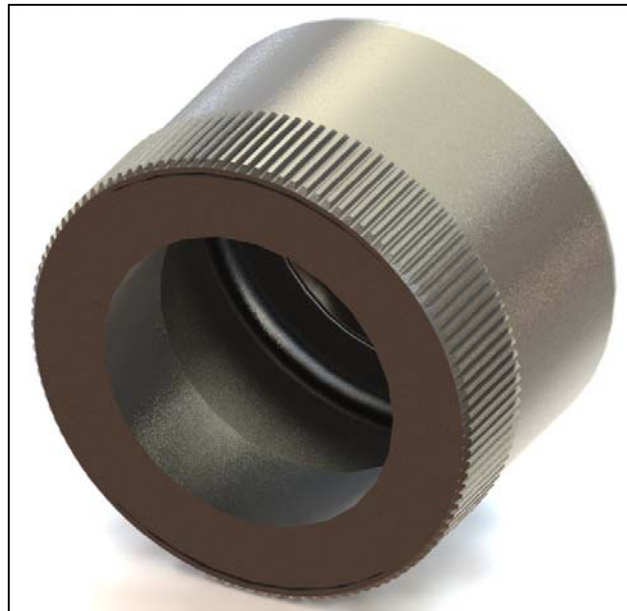
En general el modelo en tres dimensiones ha sido generado para la implementación del método de los elementos finitos de varias formas. La primera fue en los modelos de los ensayos realizados para el diseño experimental, donde tan solo se requería el análisis de la sección transversal de la transmisión (análisis en 2D).

**Figura 3-6:** Modelo de transmisión generado para la simplificación 2D



La segunda forma fue para analizar la incidencia de la geometría de la copa sobre los esfuerzos principales Figura 3-7.

**Figura 3-7:** Modelo generado para el análisis de la flexión de la copa



Una tercera forma que no requería del método de los elementos finitos pero si de un modelo en tres dimensiones, se ha necesitado al recrear las piezas, de acuerdo a los planos y al renderizado. En general los modelos en tres dimensiones, dependen de las conclusiones conseguidas, además, son consecuentes con la metodología aplicada en el capítulo 5 donde se define la arquitectura de la transmisión. El modelo en tres dimensiones se complementa en consecuencia de los resultados del ensayo, y se ilustra de manera formal en el Anexo F.

### 3.8 Modelo hiperelástico

El modelo hiperelástico implementado en este estudio tiene como objeto el estructurar un procedimiento que atienda las necesidades que puedan surgir al trabajar con materiales que presenten comportamientos tales que puedan cubrir las necesidades de resistencia a la fatiga por cargas alternantes sobre el engranaje flexible.

Pese a que el método no presenta una ventaja substancial en cuanto a la interpretación de los materiales que se han de probar, sí podría ser determinante al trabajar con sollicitaciones diferentes, así como el método responde de forma fiable con aceros podría ser inestable frente a grandes deformaciones e inestabilidades geométricas repentinas que se dan en materiales plásticos. Por lo anterior, validar el comportamiento de la transmisión de acuerdo al modelo de hiperelasticidad constituye un aporte.



El método de análisis hiperelástico implementado fue el descrito por Blatz - ko descrito según Solidworks de acuerdo con los siguientes criterios,

La función Blatz - Ko de densidad de energía correspondiente a la deformación unitaria resulta útil para modelar gomas o cauchos, como la espuma de poliuretano compresible, y puede expresarse de la siguiente manera:

$$W = \frac{1}{2} G \left( \frac{I_2}{I_3} + 2\sqrt{I_3 - 5} \right) \quad (3.42)$$

donde  $G$  es el módulo cortante sujeto a deformaciones infinitesimales  $= E/2(1 + \nu)$ ,  $E$  es el módulo de elasticidad de Young,  $\nu$  es el coeficiente de Poisson,  $I_K$  es la constante de  $C = I_K(C)$ ,  $C$  es el tensor de deformación de Cauchy-Green  $= 2\varepsilon + I$ ,  $\varepsilon$  es el tensor de deformación unitaria lagrangiano y  $I$  es la matriz de identidad.

La expresión anterior contiene sólo una constante de material  $G$ . Puesto que  $\nu = 0.25$  para el modelo de Blatz - Ko, la única propiedad de material que se considera es el módulo de Young. Por lo tanto,

$$G = \frac{E}{2.5} \quad (3.43)$$

El modelo de Blatz - Ko actualmente sólo es admitido por elementos sólidos. Este modelo es una forma simplificada de la expresión obtenida por Blatz y Ko (1962) [22] para modelar la deformación de una goma de espuma de poliuretano altamente compresible. La aproximación a la energía de deformación unitaria se realizó mediante la siguiente expresión:

$$W = \frac{1}{2} G \left[ I_1 + \frac{1}{\alpha} (I_3^{-\alpha} - 1) - 3 \right] + \frac{1}{2} G (1 - \beta) \left[ I_2 I_3^{-1} + \frac{1}{\alpha} (I_3^\alpha - 1) - 3 \right] \quad (3.44)$$

Donde,

$$\alpha = \frac{\gamma}{2G} = \frac{\nu}{1-2\nu} \quad (3.45)$$

Posteriormente se propuso una forma específica de esta familia de tres parámetros de potencial elástico en la que se supusieron los siguientes valores de las constantes  $\alpha$ ,  $\beta$ , y  $\nu$ :  $\beta = 0$ ,  $\nu = 0,25$  y  $\alpha = 0,5$ ".

### 3.9 Metodología de diseño y articulación de los programas

La respuesta metodológica presentada en éste proyecto articula una serie de estrategias que suelen implementarse comúnmente de forma separada en el desarrollo de proyectos, por ejemplo, es usual implementar un método de elementos finitos fiable y sencillo para encaminar el procedimiento de cálculo en una dirección viable y así tener claridad sobre la dirección del proyecto en éste sentido. Otra situación común se da al

implementar un diseño experimental para tener claridad sobre el desarrollo en pos de los objetivos. Aun así, integrar varias herramientas de desarrollo en un proceso estructurado converge en un proceso robusto, por tanto, como aporte de esquema de desarrollo se formula una forma de solucionar problemas tecnológicos en el área de la ingeniería de diseño de transmisiones armónicas extrapolable a otras áreas (ver Figura 3-8).

**Figura 3-8:** Metodología de diseño para una transmisión armónica



Se da pie a la formulación al entender que no existe un solo método de análisis de elementos finitos ni tampoco una sola forma de implementarlos, por tanto, empezar por una etapa de validación a través de la implementación de modelos estáticos en dos dimensiones sobre casos como los bastidores de los elementos mecánicos permite formular una aproximación geométrica de las piezas. En una etapa posterior se puede implementar un modelo de elementos finitos cinemático y un modelo analítico de cálculo para comprender cómo se da la evolución de los sistemas y si ambos métodos presentan una concordancia razonable.

Una vez se define la geometría y sus desplazamientos, se puede perfeccionar el análisis al trabajar sobre parámetros del modelo numérico, siendo lo más relevante implementar el refinamiento de los dominios en áreas específicas o expandirlos una dimensión adicional, ya sea espacial o temporal.

Como consecuencia de haber efectuado etapas en las que se implementa el método de elementos finitos de diferentes formas se ha tenido un seguimiento sobre los modelados de las piezas al haber realizado retroalimentaciones periódicas ganando fiabilidad en este sentido, los métodos que se validan uno tras otro según la metodología tratada suelen tener un alto grado de parametrización.

La característica mencionada posibilita la implementación de varios modelos con modificaciones sectorizadas que describen comportamientos diferentes, en el caso del presente proyecto se dan unas distribuciones diferentes de esfuerzos según la variación del ángulo de presión, del módulo o de la modificación dental producto de las correcciones. Por lo general las posibilidades que se logran son elevadas y dependen de la cobertura del método o de la capacidad computacional con la que se cuenta, para poder encontrar una tendencia de comportamiento óptimo se ha de implementar un diseño experimental que responda a las solicitudes particulares.

En la última etapa se propone retomar la información del diseño experimental para formular un diseño preliminar y encaminar el proyecto en dos sentidos, el primero, una etapa de desarrollo de un método alternativo que posibilite la implementación de estrategias no tenidas en cuenta como la búsqueda de nuevos materiales o geometrías

innovadoras, el segundo y más seguro camino es la formulación del diseño de ensamble, manufactura, sostenibilidad y prestaciones ambientales.

La implementación de la metodología formulada ha llevado la investigación a conclusiones como la certeza en cuanto a la magnitud de los desplazamientos nodales o a las tendencias de los esfuerzos principales. Naturalmente no existe un programa de diseño maestro en el que se puedan llevar a cabo cada una de las etapas expuestas en la metodología, por tanto para el caso particular se ha contado con: Un recurso para administrar los datos de los vectores de forma ordenada posibilitando el desarrollo de ecuaciones de forma versátil, y que permita una interfaz sencilla para compartir los datos obtenidos entre sí y el programa de diseño mecánico. Esto ha favorecido la flexibilidad paramétrica. También se ha requerido un software CAD que permita extraer datos geométricos y nutrir los modelos del paquete de análisis de elementos finitos. En sí, también se necesita un programa como el mencionado que cuente con criterios de discretización y solución para el trabajo sobre los nodos.

Estructurar los comportamientos a través de varias aplicaciones ha requerido la capacitación y el entrenamiento en el software seleccionado, para esto, se han adquirido los conocimientos pertinentes respaldados por las certificaciones en diseño, modelamiento y simulación (ver Anexo E).

Lo que queda es implementar un paquete de cálculo que permita programar los métodos complementarios, como son los análisis de falla. La idea es tener un flujo de información consecuente con el requerimiento particular. Al contar con todos los parámetros constitutivos se puede formular la implementación de una Api o Macro.

En principio, cuando las aplicaciones de diseño asistido por computador se estaban afianzando y estaban ampliando su cobertura en el entorno industrial, iniciaron un proceso de mejora progresiva al retroalimentarse con la solvencia de los requerimientos propuestos por los desarrolladores y diseñadores. Es así como se da cabida a la generación de paquetes de aplicaciones que simplificaron la implementación de los paquetes CAD y dieron cabida a los módulos de CAE.

Los ejemplos más comunes podrían ser los módulos para el diseño de chapas metálicas, diseños de transmisiones de engranajes, diseños de moldes y troqueles, y diseños de ensambles normalizados, entre muchos otros más que dependen del fabricante del software. Otro tipo de módulos conforman los aplicativos que asisten los diseños, como los módulos de renderizado, de análisis numérico, de manufactura o CAM, o estudios de movimiento, entre otros.

Estos módulos parten de la demanda generada por el usuario que solicita simplificación en sus procesos de diseño, cada requerimiento industrial es específico y no puede ser atendido de manera particular por la empresa distribuidora del software. Por tanto, se generan módulos que respondan de la forma más efectiva al entorno general. Para solventar este efecto, las herramientas necesarias para generar pequeñas aplicaciones

se ponen a disposición de desarrolladores que automatizan los procesos de diseño y lo adaptan a su necesidad particular, muchas veces éstas dan pie a nuevos módulos.

La programación de las aplicaciones mencionadas se realiza en el lenguaje Visual Basic Applications para el caso particular de Solidworks. Estas aplicaciones se denominan Macros y contienen las directrices de diseño compacto de algún proyecto, estos macros tiene la posibilidad de organizar en un entorno personalizado toda la información referente al diseño de algún mecanismo, pieza o procedimiento que se pueda dar en el programa.

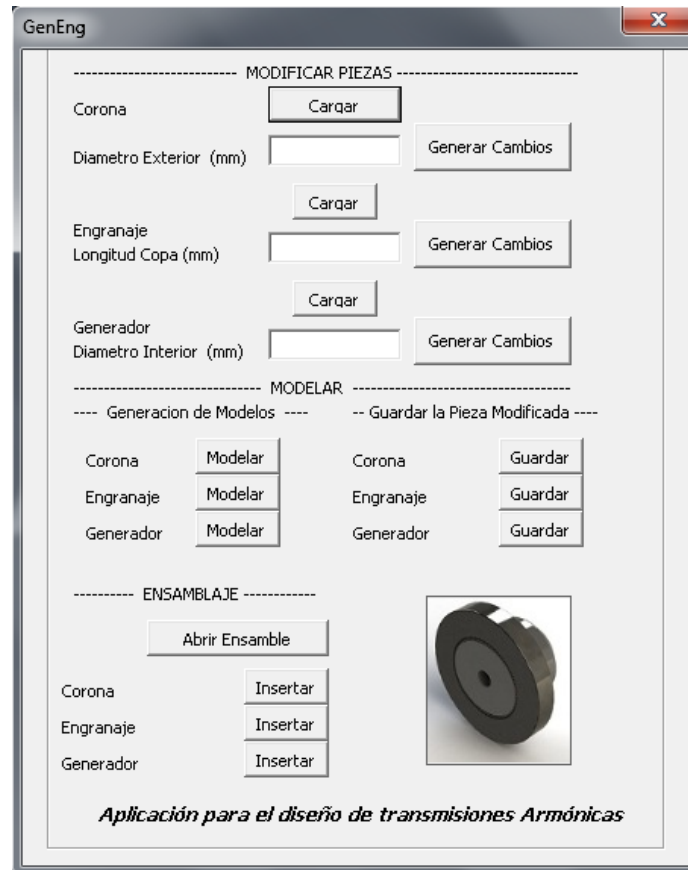
"La interfaz de programación de aplicación (API) de SolidWorks es una interfaz de programación COM para el software SolidWorks. La API contiene cientos de funciones que pueden invocarse desde Visual Basic (VB), Visual Basic for Applications (VBA), VB.NET, C++, C#, C o archivos de macros de SolidWorks. Estas funciones proporcionan al programador acceso directo a las funcionalidades de SolidWorks" [22].

Generar una Api o Macro completo para responder a las solicitudes de un mecanismo tan complejo como son las transmisiones armónicas, requiere de conocimientos avanzados de programación en Visual Basic y un conocimiento profundo de las tendencias de operación del mecanismo. Pese a que ya se ha logrado generar los algoritmos de cálculo para la evaluación de los criterios de falla en otro lenguaje de programación, articular un Macro completo es un proceso complejo.

Estructurar un macro requiere atender las siguientes consideraciones generales:

- Definir hasta qué punto las geometrías son modeladas, es decir, si se realiza un modelo maestro paramétrico que sea modificado una y otra vez por el macro, o si cada vez que la aplicación corra deberá realizar una pieza completamente nueva.
- Determinar los parámetros de ensamble, si se tratase de un mecanismo, establecer las posiciones de contacto inicial y todo lo referente con la validación de las interferencias que se puedan dar.
- Dar los parámetros de diseño de acuerdo a los cálculos correspondientes para cada necesidad, estableciendo límites materiales, geométricos, estructurales, o parámetros más complejos como limites de vida.
- Implementar procesos de validación como trayectorias de operación, o análisis dimensional.

En el caso particular de diseño de la transmisión armónica, se formula la implementación de un macro sencillo como ejemplo de aplicación de los criterios de diseño encontrados (ver Figura 3-9).

**Figura 3-9:** Aplicación para el diseño de transmisiones armónicas.

Para esto se determinó modelar tres patrones de piezas sobre los cuales se realizan modificaciones en dimensiones particulares, que al atender a la parametrización cambian y actualizan el conjunto. También se implementó un módulo de ensamble básico.

Implementar un macro completo para las transmisiones armónicas implica inducir análisis de elementos finitos en medio de los procesos. Por ejemplo, el ensamble de la transmisión no se da correctamente sin la etapa de ensamble por contracción entre el generador y el flexible, naturalmente por tratarse de un acoplamiento de acuerdo a una deformación. Esto en sí es un gran problema ya que a la fecha esta transición no se realiza de forma directa ya que la interacción entre los programas de modelamiento y simulación no cuentan con un grado tan amplio de articulación [46, 47]. En conclusión diseñar una aplicación completa requiere estructurar en un mismo algoritmo todas las directrices de diseño y evaluación que se han trabajado en el proyecto además de un manejo óptimo de la herramienta, por tanto se ha generado de forma didáctica para dilucidar su aplicación.

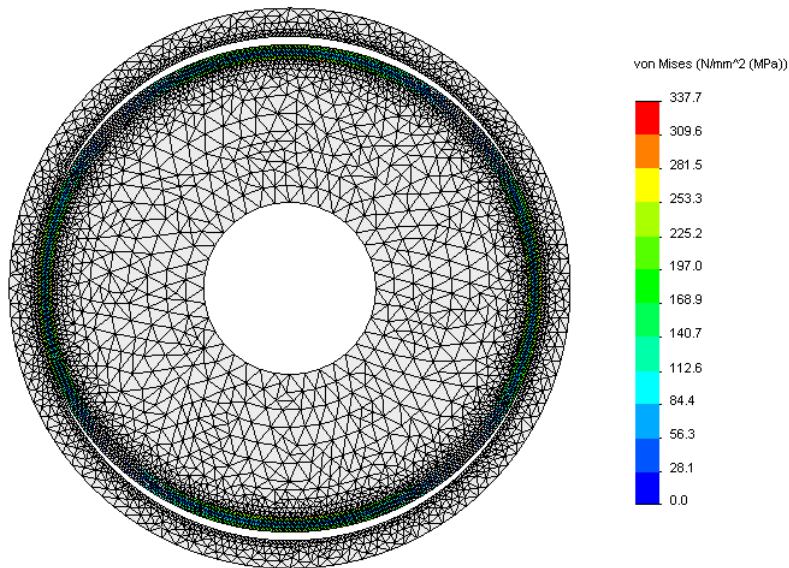


## 4. Análisis de resultados

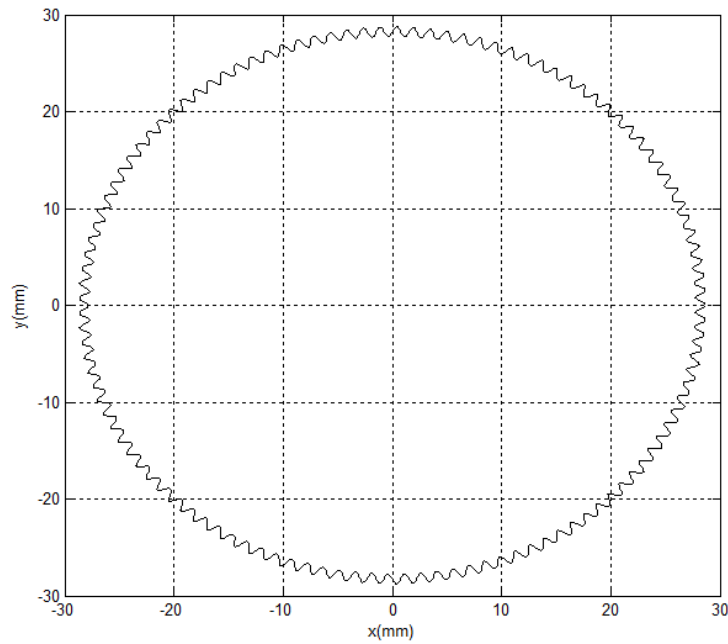
### 4.1 Comportamiento cinemático

Una meta fundamental durante el desarrollo de un mecanismo es estabilizar las condiciones de simulación del comportamiento cinemático. Para ello, deberá realizarse una primera aproximación del modelo de la transmisión simplificando considerablemente su geometría al prescindir del dentado. En estas condiciones es posible aplicar mallados más rigurosos en zonas que lo demanden, además de contemplar que los contactos se dan en esencia por una combinación de deslizamiento y rodadura. Para evaluar su condición cinemática se aplica el modelo de posicionamiento de un punto en el engranaje flexible [10]; siendo una buena aproximación para el modelamiento.

El modelo de elementos finitos empleado pretende emular una primera aproximación de una transmisión armónica que cuenta con un módulo de 0,5 mm; 113 dientes para el engranaje flexible y 115 dientes para la corona dentada, y un ángulo de presión de 30 grados sin ningún tipo de corrección de altura. Por otro lado, se considera como material para la totalidad de las piezas un acero aleado convencional que cuenta con un límite elástico de 620,42 MPa y un módulo de elasticidad de 210 GPa. La corona se deja fija, y se induce una velocidad de  $3 \text{ rad/s}$  y un torque de  $1.77 \text{ Nm}$  al generador de onda. Como condición de deslizamiento, se asume una fricción máxima entre el engranaje flexible y la corona y una fricción nula entre el generador y el engranaje flexible. Por último, se aplican controles de mallado para el engranaje y las caras tangentes. El modelo obtenido se aprecia en la Figura 4-1.

**Figura 4-1:** Mallado y esfuerzos equivalentes que aparecen en el modelo preliminar

Para obtener los resultados se emplean una serie de algoritmos elaborados en Matlab, en los que se implementa un modelo analítico y se interpretan los datos que arroja el análisis por elementos finitos. De ésta forma se han obtenido en primera instancia gráficas para el desplazamiento de un punto ubicado en el engranaje flexible empleando el método analítico.

**Figura 4-2:** Trayectoria descrita por un punto en el engranaje flexible.



En la imagen (ver Figura 4-2) se observa una revolución completa del engranaje flexible desde un punto en la periferia del mismo de acuerdo al modelo analítico. La gráfica anterior no se obtuvo con el modelo de elementos finitos, porque el diseño demanda 57,5 vueltas del generador para una del flexible, y esto demanda recursos computacionales importantes. Además, con una sola una vuelta en estado de operación estable es posible de hecho llegar a resultados pertinentes.

Los modelos analíticos presentan un comportamiento armónico [3, 48], en particular el desarrollado, en éste el desplazamiento radial del punto se relaciona de forma directa con el desplazamiento angular de un vector descrito por el generador. No obstante, este comportamiento no describe cabalmente la cinemática real ya que existen más fenómenos físicos que no se han tenido en consideración. Esto no descalifica la utilidad del modelo puesto que consigue aproximar la ubicación del engranaje en operación, y al ser sumamente versátil podría constituir una herramienta simplificada de diseño.

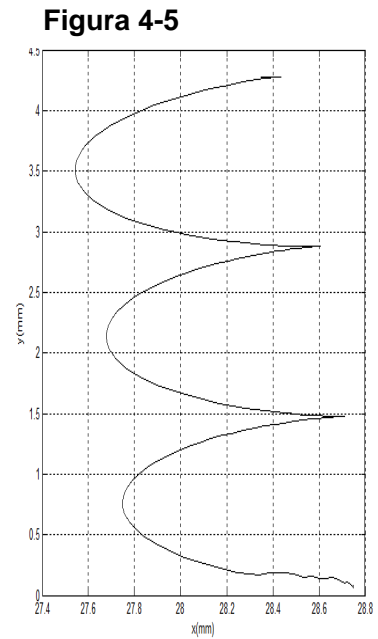
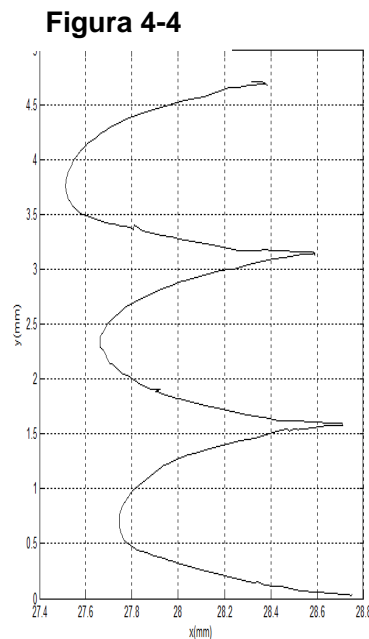
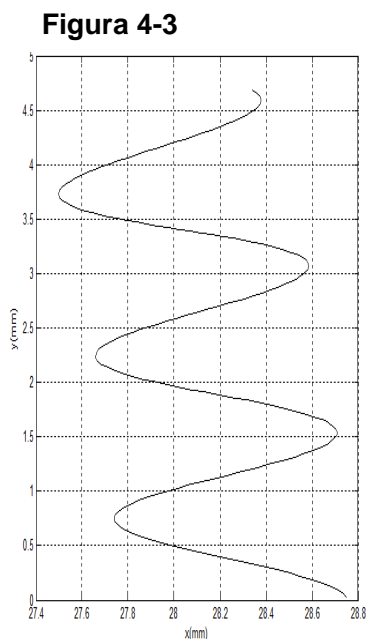
Para el modelo de elementos finitos no fue obtenida una revolución completa del flexible debido al costo computacional del ensayo. Aunque se calcularon los desplazamientos y demás variables para una revolución y media del generador de onda, con las cuales se pudo generar una muestra suficiente como para poder deducir el comportamiento y grado de aproximación del modelo.

Para ilustrar las trayectorias se graficaron los desplazamientos en el tiempo según las figuras, nombradas de izquierda a derecha según la siguiente denominación:

**Figura 4-3:** Trayectoria de un punto para el modelo analítico.

**Figura 4-4:** Trayectoria de un punto para el modelo dentado

**Figura 4-5:** Trayectoria de un punto para el modelo sin dentado.



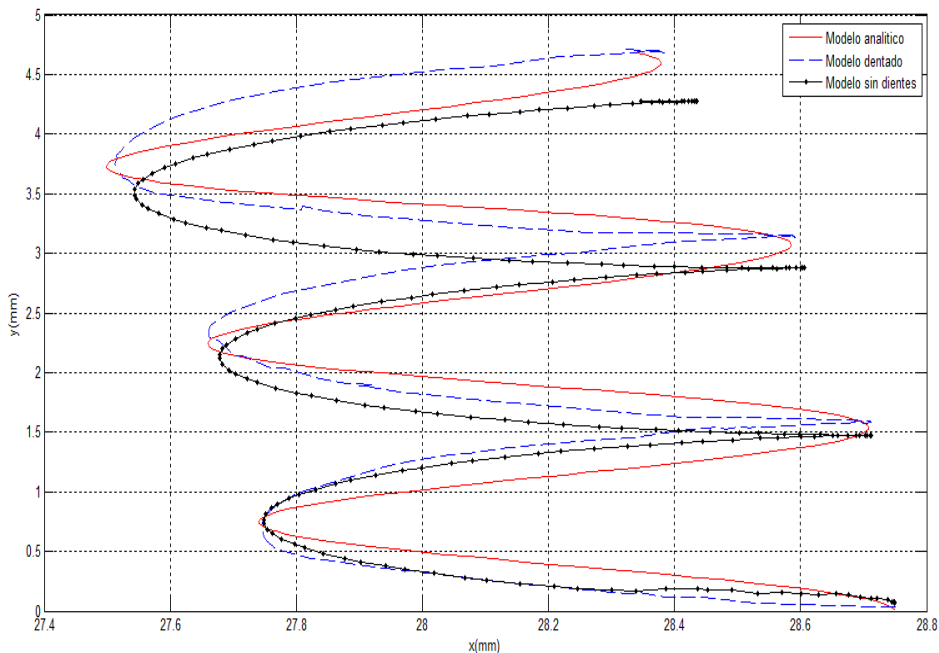
En el análisis cinemático fueron empleados los modelos, analítico, cinemático de elementos finitos sin dientes, y el cinemático de elementos finitos con dientes. Estos modelos han sido realizados en dos dimensiones para poder compararlos entre sí a través de un criterio común.

Se puede pensar que un modelo de deslizamiento puro como el modelo sin dientes podría no ser congruente para el análisis. Por tanto, se plantea colocar una primera aproximación del modelo dentado bajo las mismas consideraciones de diseño y de esta forma poder observar parámetros comunes entre estos.

Comparando los desplazamientos, se observa que en un montaje en el cual no se trabaja con engranajes, sino con discos no dentados, se sufre un retraso angular considerable. Para este caso geométrico particular cercano a un grado por cada tres revoluciones del generador; aunque la onda obtenida tiene una gran similitud a la correspondiente a una transmisión dentada, esto quiere decir que operativamente ambas son equiparables pero con rendimientos diferentes.

Si se superponen los desplazamientos encontrados en las transmisiones simuladas por elementos finitos sobre el modelo analítico (ver Figura 4-6), se pueden concluir con claridad dos aspectos. Primero, la confirmación de la forma de la onda que describe un punto en la transmisión al ser corroborado en ambos diseños [49]; y segundo, la fiabilidad de la onda obtenida en el modelo analítico en contraste con el modelo dentado.

**Figura 4-6:** Comparación de la cinemática de un punto



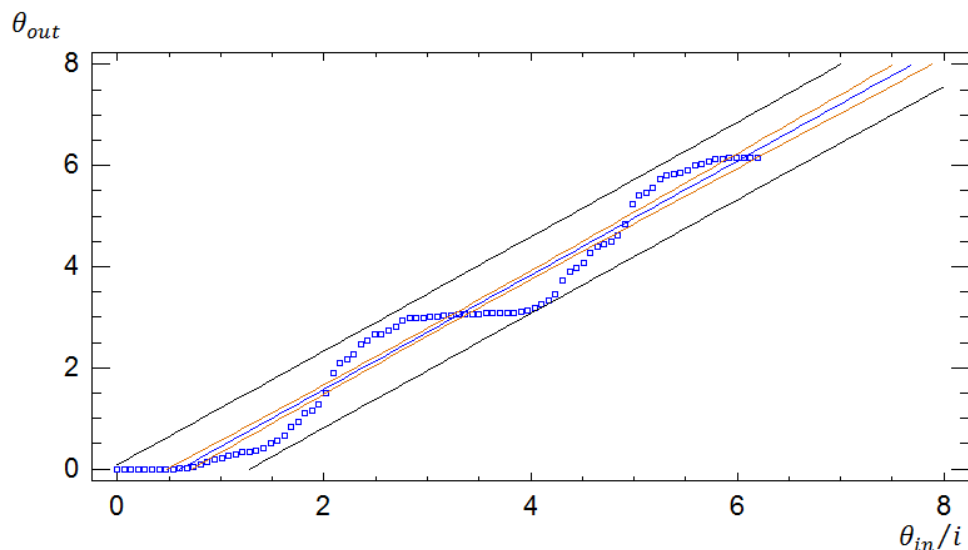
En las imágenes, se aprecia una distorsión de la onda debida a la primera etapa de la modelación en la que se ha calculado el ajuste por interferencia entre el engranaje y el generador. Esta distorsión claramente tiene un efecto extensible a los modelos cinemático que se generan a partir de él.

El modelo obtenido por elementos finitos sin dentado presenta un claro retraso producido por deslizamientos acumulados tras la rotación. Cabe reiterar que se ha inducido una fricción en una escala normalizada de uno, es decir máxima, para representar una condición equiparable al trabajo realizado en el dentado y a las tensiones de oposición que se generan al cargar un modelo real que carece de éste.

Con las trayectorias definidas para cualquier nodo en el dominio es posible obtener el error cinemático de transmisión [50, 51, 52]. Para tal efecto se grafica el ángulo de entrada dividido en la relación de transmisión, versus el ángulo de salida, a la curva obtenida se le aplica una regresión lineal simple, ésta ultima será tomada como función objetivo. De la comparación entre las dos curvas se genera el residuo y ésta es la variable que cuantifica el error cinemático de transmisión.

En la Figura 4-7 se ha graficado el ángulo de salida contra el ángulo de entrada sobre una regresión lineal de éstos puntos, los residuos tomados de la superposición denotan la magnitud del error para el modelo número 19, como se describe en el numeral 3.5.1, este diseño cuenta con 20 grados de ángulo de presión, una corrección positiva de 0,5 veces el módulo, y un módulo de 0,1 mm; implementado en un software de análisis estadístico, donde se analiza en detalle el modelo particular según las consideraciones previas.

**Figura 4-7:** Gráfica de los residuos del error de transmisión para el modelo 19



Los resultados del programa han sido las siguientes,  
 Regresión Simple - Y vs. X  
 Variable dependiente: Y  
 Variable independiente: X  
 Lineal:  $Y = a + b \cdot X$

**Tabla 4-1:** Coeficientes.

	<b>Mínimos Cuadrados</b>	<b>Estándar</b>	<b>Estadístico</b>	
<i>Parámetro</i>	<i>Estimado</i>	<i>Error</i>	<i>T</i>	<i>Valor-P</i>
Intercepto	-0.785574	0.0760326	-10.3321	0.0000
Pendiente	1.20267	0.0212497	56.5972	0.0000

**Tabla 4-2:** Análisis de Varianza.

<b>Fuente</b>	<b>Suma de Cuadrados</b>	<b>Gl</b>	<b>Cuadrado Medio</b>	<b>Razón-F</b>	<b>Valor-P</b>
Modelo	349.571	1	349.571	3203.24	0.0000
Residuo	7.85738	72	0.10913		
Total (Corr.)	357.428	73			

Coeficiente de Correlación = 0.988947  
 R-cuadrada = 97.8017 por ciento  
 R-cuadrado (ajustado para g.l.) = 97.7712 por ciento  
 Error estándar del est. = 0.330349  
 Error absoluto medio = 0.276554  
 Estadístico Durbin-Watson = 0.103399 (P=0.0000)  
 Autocorrelación de residuos en retraso 1 = 0.895481

La ecuación del modelo ajustado es;

$$Y = -0.785574 + 1.20267 \cdot X \quad (4.1)$$

Puesto que el valor-P en la tabla ANOVA (ver Tabla 4-2) es menor que 0,05, existe una relación estadísticamente significativa entre Y y X con un nivel de confianza del 95,0%. Los resultados obtenidos para todos los diseños evaluados con el diseño experimental se ilustran en el Anexo C.

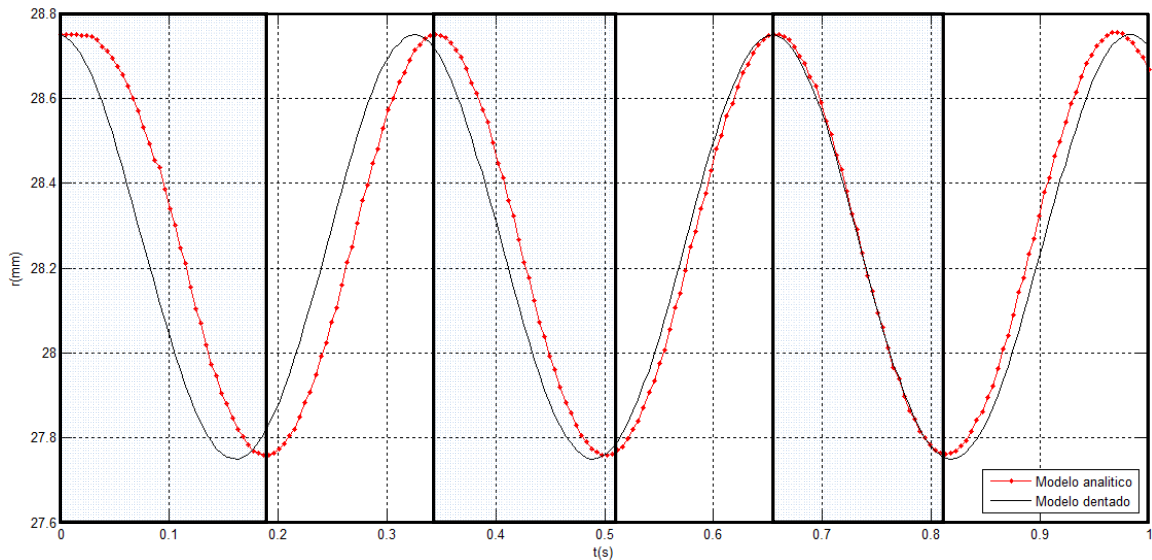
Ahora que se ha demostrado la tendencia del modelo sin dentado, se muestra en qué grado se aproximan las curvas del modelo analítico y el modelo de elementos finitos sin dientes. Se plantea el cálculo de la raíz del error cuadrático medio como método para cuantificar su aproximación,

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (I_i - J_i)^2} \quad (4.2)$$

Para poner en perspectiva los modelos analizados se han dejado atrás las consecuencias de la velocidad angular como parámetro constante y se ha tenido en

cuenta simplemente la fluctuación del radio de la armónica para los modelos, tanto analítico como dentado, superponiendo sus curvas obtenidas bajo el criterio previo, con el propósito de encontrar las diferencias entre ambos métodos.

**Figura 4-8:** Comparación de la cinemática del radio de un punto



A estas gráficas se les ha aplicado el análisis del error mencionado pero segmentando las curvas en partes iguales en sus crestas y valles, ya que como se observa, producto de parámetros intrínsecos a la mecánica de operación del mecanismo en el modelo de elementos finitos dentado y a la exclusión de la variación de posición angular [53], se presentan desfases que hacen que el error se incremente interfiriendo en la observación de la aproximación real entre ambas, en definitiva el error mínimo encontrado da cuenta de la aproximación entre los métodos según la Tabla 4-3.

**Tabla 4-3:** Errores sección de curva numeradas de izquierda a derecha Figura 4-8.

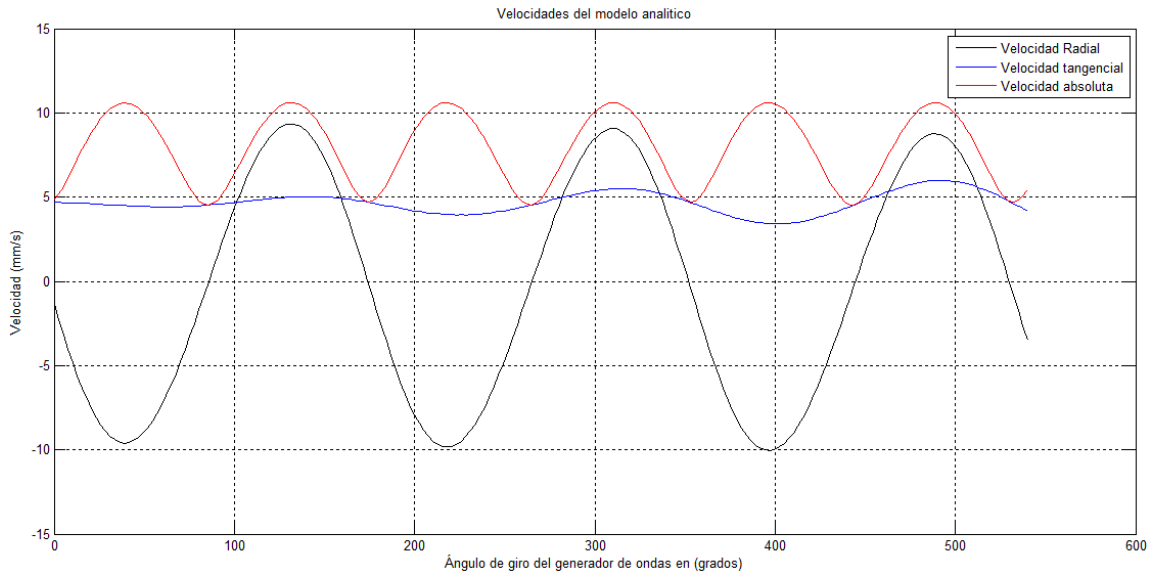
Zona	1	2	3	4	5	6
Error %	14.72	10.86	7.98	3.17	0.88	4.99

En conclusión el desfase entre los modelos es cercano al 1%, lo que deja claro el grado de aproximación de éstos, validando la correcta implementación del método de elementos finitos empleado como planteamiento cinemático base.

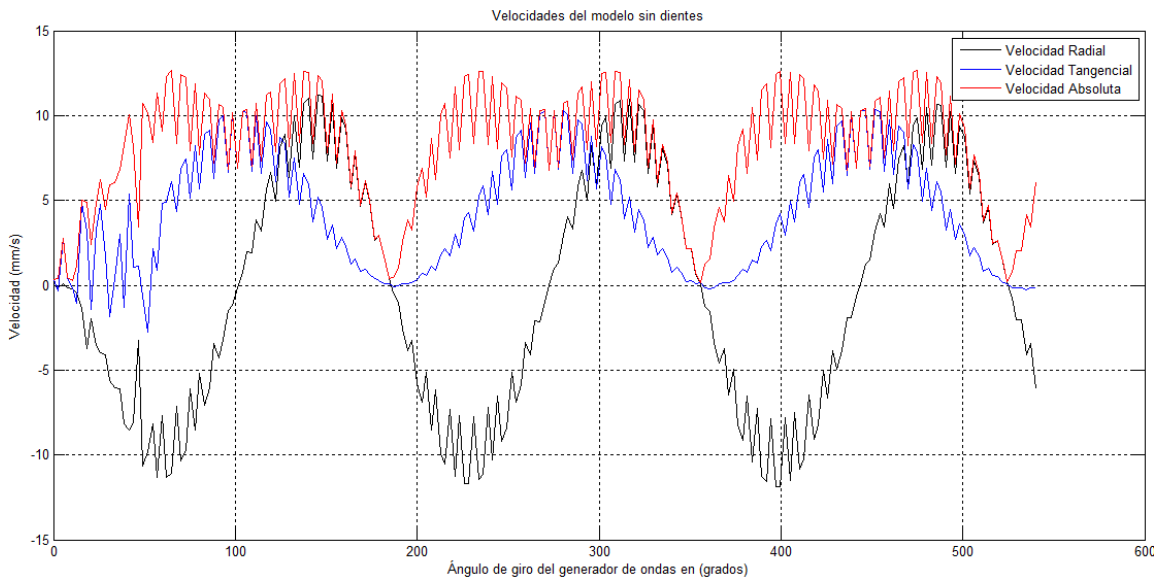
Partiendo de lo que se ha analizado, se han encontrado las curvas de velocidad para los modelos analítico Figura 4-9 y sin dentado Figura 4-10; lo anterior con el propósito de

realizar una comparación consecuente con el objetivo de validar la aplicación del método de elementos finitos.

**Figura 4-9:** Curvas de velocidades para el modelo analítico



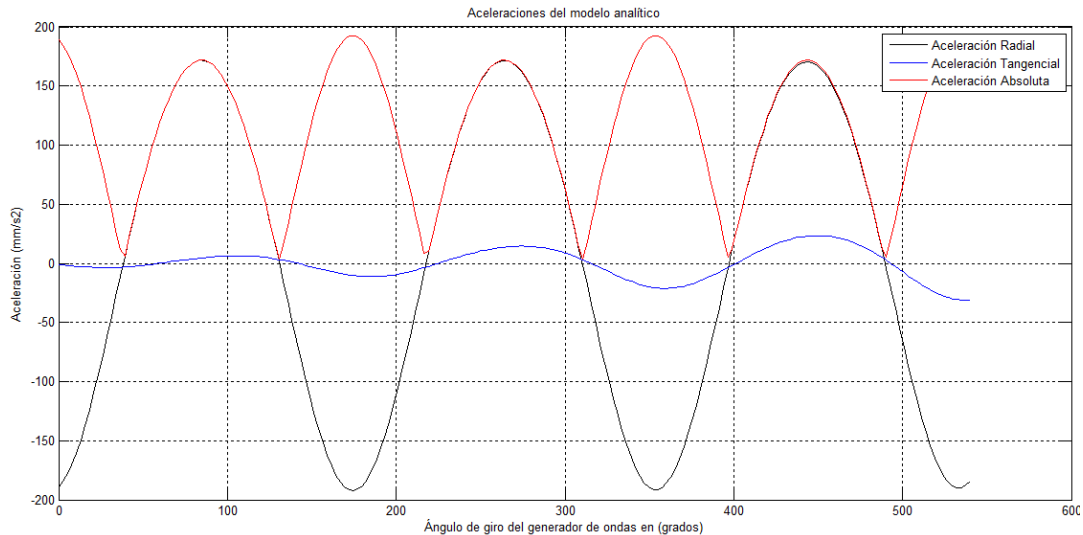
**Figura 4-10:** Curvas de velocidades modelo sin dientes



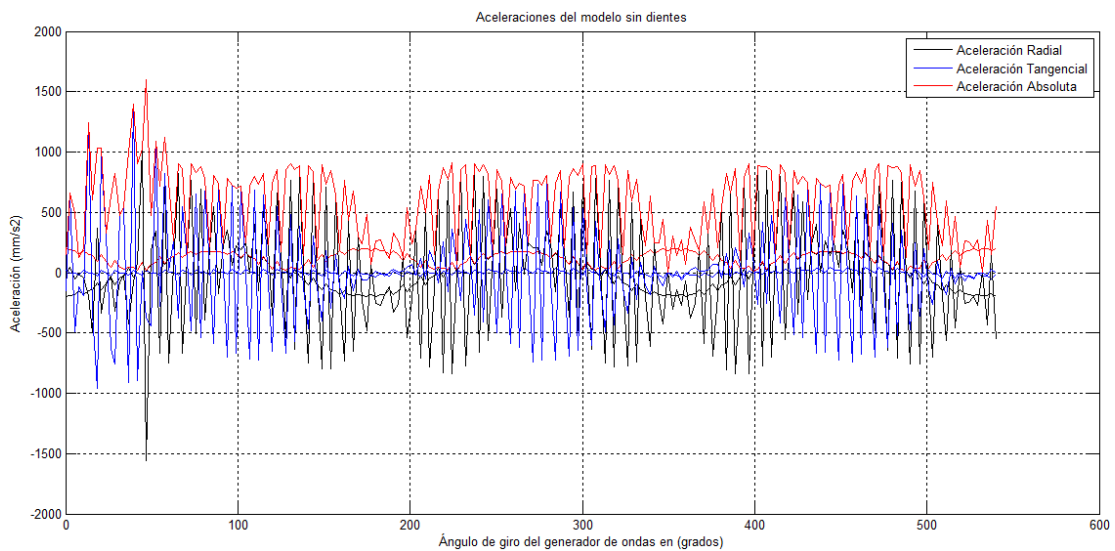
Como se observa, la gráfica de velocidad presenta una propagación de errores debida a la aleatoriedad de los valores obtenidos del modelo de elementos finitos en comparación con los resultados del modelo analítico para aceleración (ver Figura 4-11), si se tiene en

cuenta el número de datos que se puede solicitar en el modelo analítico, se entiende porque éste no presenta las fluctuaciones visibles en comparación con el modelo de elementos finitos, donde éste valor depende de los resultados arrojados por el solver. Estos datos dejan entre ver las tendencias de este parámetro. El comportamiento anterior también sucede con las aceleraciones (ver Figura 4-12) [23, 54, 55].

**Figura 4-11:** Gráfico de aceleraciones en el modelo dinámico



**Figura 4-12:** Gráfico de aceleraciones en el modelo sin dientes.



Retomando el análisis previo se han tomado las conclusiones necesarias para proseguir con el refinamiento al modelo dentado.

Por último se aplica el esquema del modelo tribológico, previo al análisis de contacto por falla de picadura. En tal sentido, para determinar un espesor adecuado de la capa de lubricante se emplean los datos generados por la curva de velocidad para el modelo sin dentado. A partir de éstos se toma el valor máximo de velocidad radial. Este modelo cuantifica la magnitud de la capa de lubricación para la transmisión en condiciones particulares; siendo un enfoque metodológico aplicable en estos mecanismos, y que complementa al modelo de fatiga superficial. El radio de deslizamiento del modelo sin dientes se toma como el concordante entre el generador elíptico y la corona, o diámetro primitivo para el modelo; en contraste con el que habría de tomarse en modelos dentados. Donde para estos últimos se requiere radio formado entre las superficies de tangencia determinado por la posición instantánea de las involutas. Para el ejemplo, la velocidad de deslizamiento es de 11.21 mm/s el radio primitivo es de 28.75 mm, y la viscosidad se estima para una gama de aceites lubricantes 140, 90, 80w, 75w según el estándar 2001-B88 de AGMA, a una temperatura de operación de entre 100 y 200 grados como parámetro habitual para el trabajo en engranajes; asignando espesores de  $12.5\mu m$ ,  $7.7\mu m$ ,  $4.3\mu m$ ,  $3.4\mu m$  respectivamente para la capa de lubricación.

## 4.2 Análisis de esfuerzos

Al plantear una serie de ensayos con el propósito de encontrar las variables más favorables de comportamiento de la transmisión, se definieron los niveles de los factores del diseño experimental virtual, sus noveles se muestran en la Tabla 4-4.

**Tabla 4-4:** Modelos analizados en el diseño experimental

ENSAYO	ÁNGULO	CORRECCIÓN	MÓDULO
1	20	0	0.1
2	25	0	0.1
3	30	0	0.1
4	20	0	0.4
5	25	0	0.4
6	30	0	0.4
7	20	0	0.7
8	25	0	0.7
9	30	0	0.7



ENSAYO	ÁNGULO	CORRECCIÓN	MÓDULO
10	20	0.25	0.1
11	25	0.25	0.1
12	30	0.25	0.1
13	20	0.25	0.4
14	25	0.25	0.4
15	30	0.25	0.4
16	20	0.25	0.7
17	25	0.25	0.7
18	30	0.25	0.7
19	20	0.5	0.1
20	25	0.5	0.1
21	30	0.5	0.1
22	20	0.5	0.4
23	25	0.5	0.4
24	30	0.5	0.4
25	20	0.5	0.7
26	25	0.5	0.7
27	30	0.5	0.7

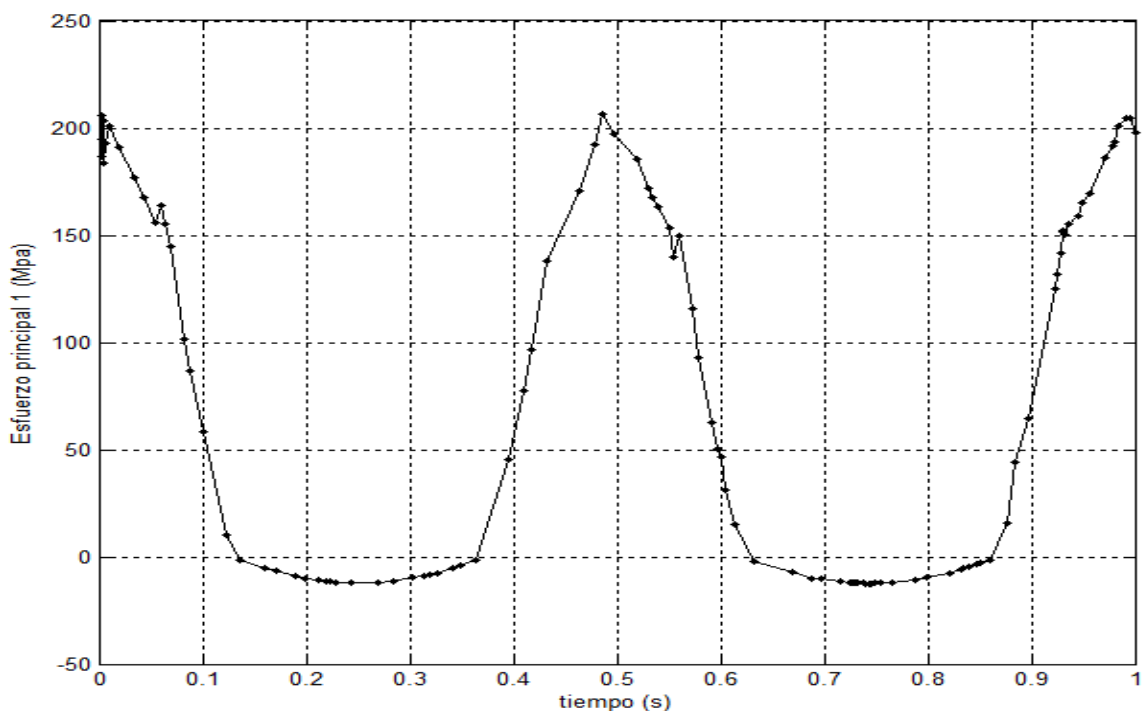
El análisis de esfuerzos realizado inicia en la sustracción de los datos generados por el programa en sus fases de resultados para su posterior interpretación. Se dispone, como se hace mención en capítulos previos, de los esfuerzos normales y cortantes en cada uno de los nodos, además de sus reformaciones. Los esfuerzos principales son la base para determinar si se producen fallas cuando la energía de distorsión sobrepasa ciertos límites. Para evaluar el desempeño mencionado se estructura la teoría de la energía de distorsión de Von Mises evaluando la incidencia de los esfuerzos fluctuantes según su mínimo y máximo, encontrando los esfuerzos de Von Mises medio y alternante respectivamente. Queda por establecer un criterio de falla, el valor medio de las

fluctuaciones de esfuerzos principales es distinto de cero [56], por tanto se asume una de las relaciones experimentales que calculan la influencia de la tensión media no nula según parámetros de vida a fatiga. El seleccionado fue el criterio de Goodman modificado.

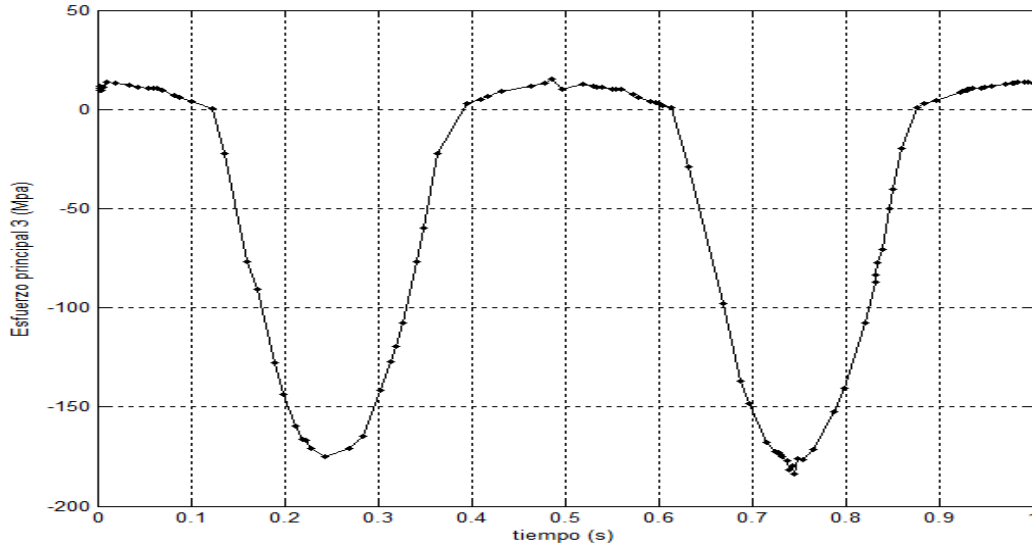
A continuación se presentan los resultados más relevantes dentro de los diseños realizados donde se observan los esfuerzos principales para los tres casos más interesantes; los cuales fueron, los resultados que presentan mayor y menor sensibilidad a la falla por fatiga en la base del diente, y el diseño de transmisión número 19 que ha presentado el mejor desempeño.

El primero de los citados (ver Figuras 4-13, 4-14) es el caso de diseño experimental número 22, donde se tiene un ángulo de presión de 20 grados, corrección positiva de 0.5 y módulo de 0,4 mm; este diseño ha presentado el factor de seguridad más alto de entre los 27 analizados y fue de 2,55.

**Figura 4-13:** Gráfico del esfuerzo principal máximo para el modelo número 22

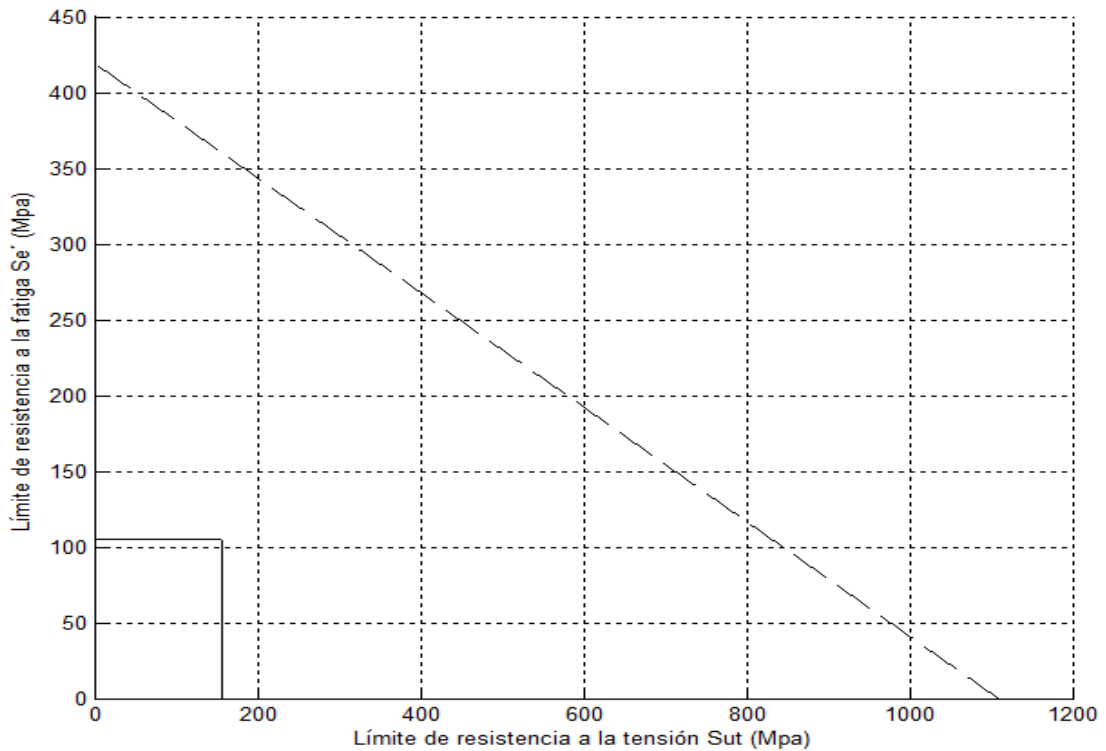


**Figura 4-14:** Gráfico del esfuerzo principal mínimo para el modelo número 22



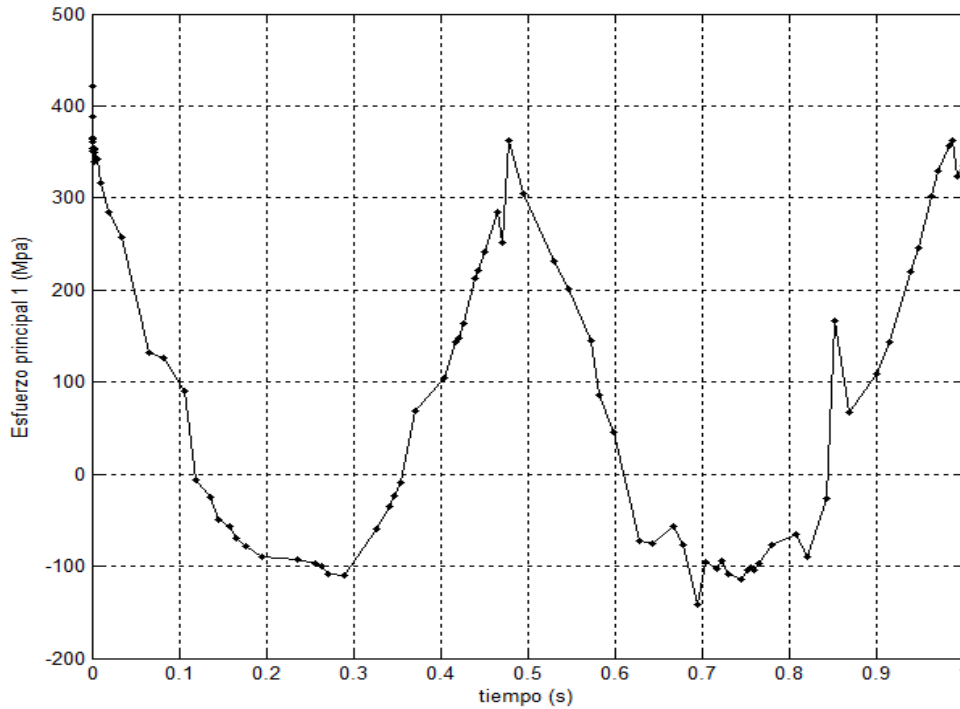
La Figura 4-15 muestra el diagrama de Goodman y se observa la frontera de falla y las coordenadas del esfuerzo de Von Mises en el modelo numero 22

**Figura 4-15:** Gráfico de Goodman para el modelo 22

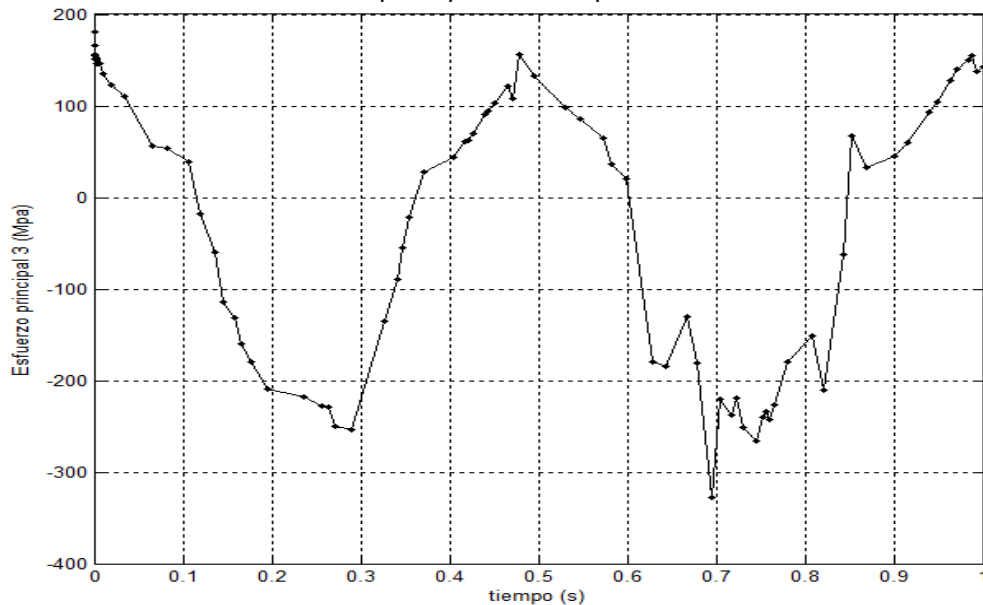


El segundo de los análisis citados es el caso de diseño experimental número tres, donde se tiene un ángulo de presión de 30 grados, sin corrección y módulo de 0.1 mm. Este diseño ha presentado el factor de seguridad más bajo de entre los 27 analizados y fue de 1.36., e ilustra los resultados de sus esfuerzos principales según las Figuras 4-16 y 4-17

**Figura 4-16:** Gráfico del esfuerzo principal máximo para el modelo número 3

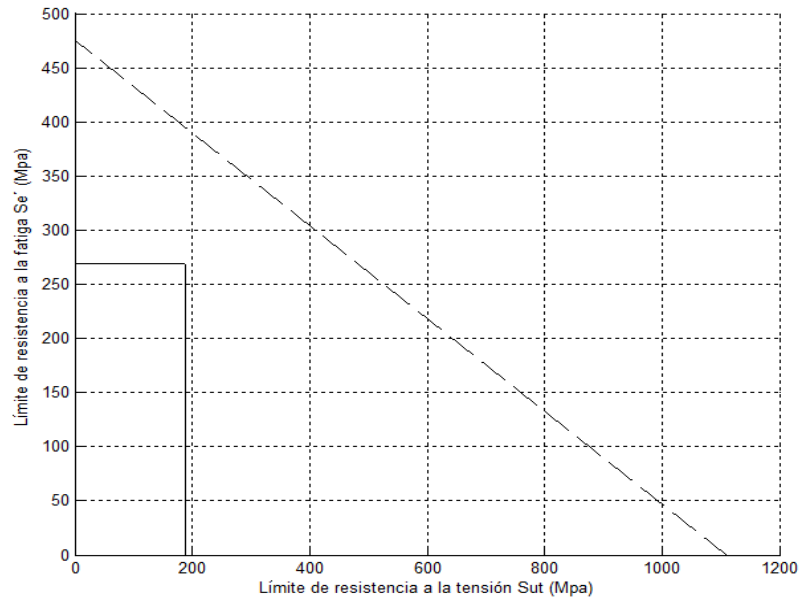


**Figura 4-17:** Gráfico del esfuerzo principal mínimo para el modelo número 3



La Figura 4-18 muestra el diagrama de Goodman y se observa la frontera de falla y las coordenadas del esfuerzo de Von Mises en el modelo numero 3.

**Figura 4-18:** Gráfico de Goodman para el modelo 3.



Por último, el diseño experimental número 19 ha sido el que ha mostrado un mejor desempeño en consecuencia de las tendencias descritas por los resultados del diseño experimental según los entre los analizados, el cual posee un ángulo de presión de 20 grados, corrección positiva de 0.5 y módulo de 0.1 mm. Este diseño posee un factor de seguridad de 2.18, e ilustra los resultados de sus esfuerzos principales según las Figuras 4-19 y 4-20.

**Figura 4-19:** Gráfico de esfuerzo principal máximo para el modelo número 19

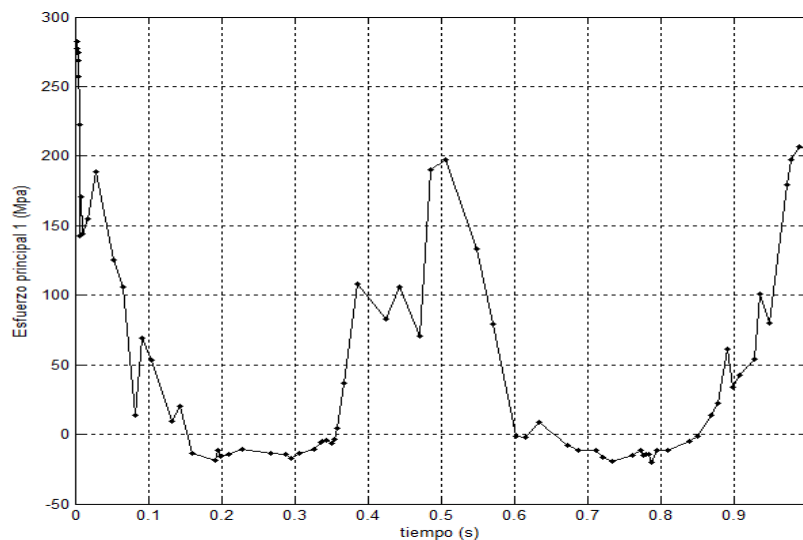


Figura 4-20: Gráfico de esfuerzo principal mínimo para el modelo número 19

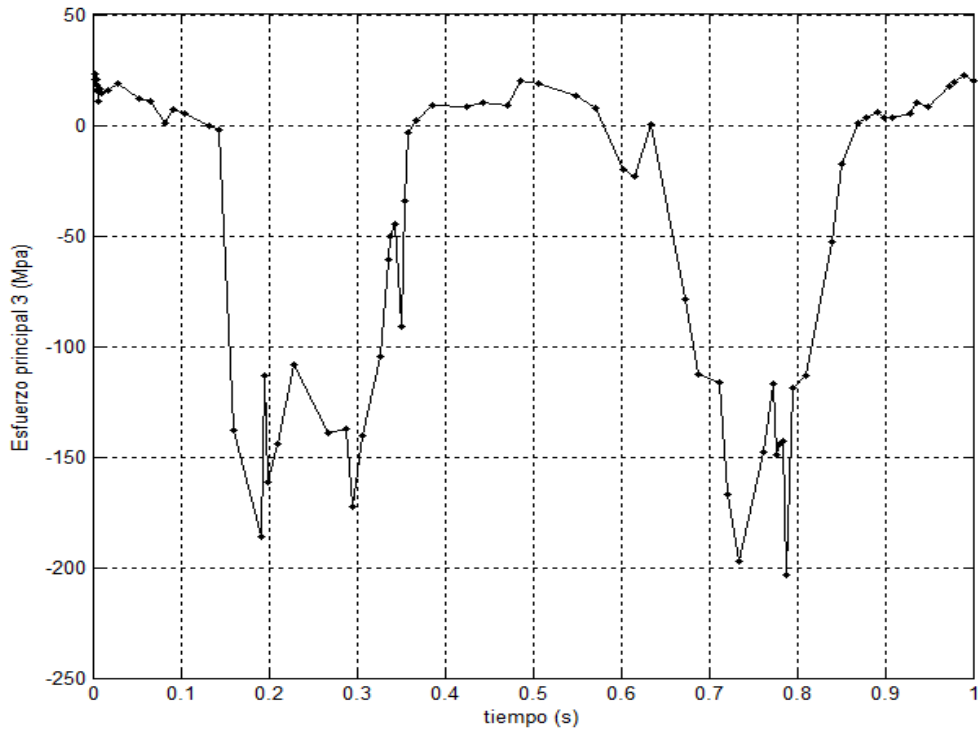
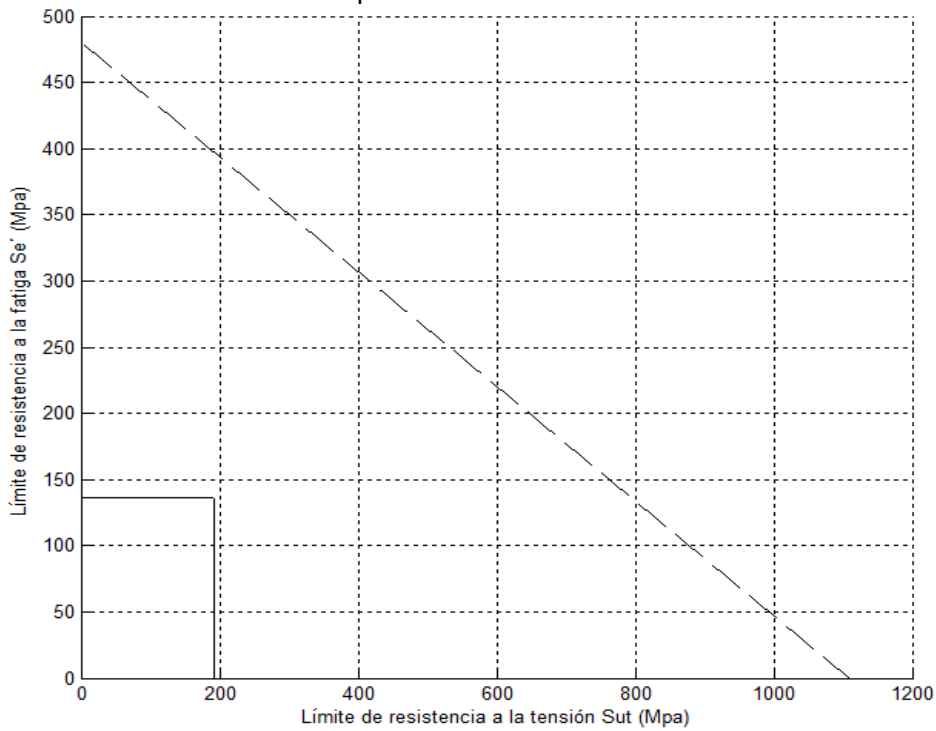
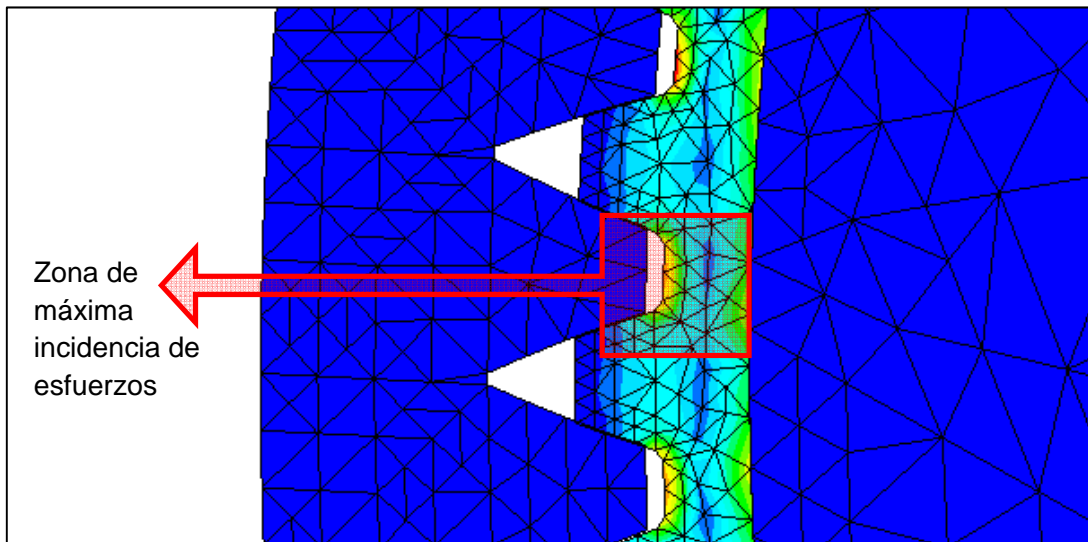


Figura 4-21: Gráfico de Goodman para el modelo 19.



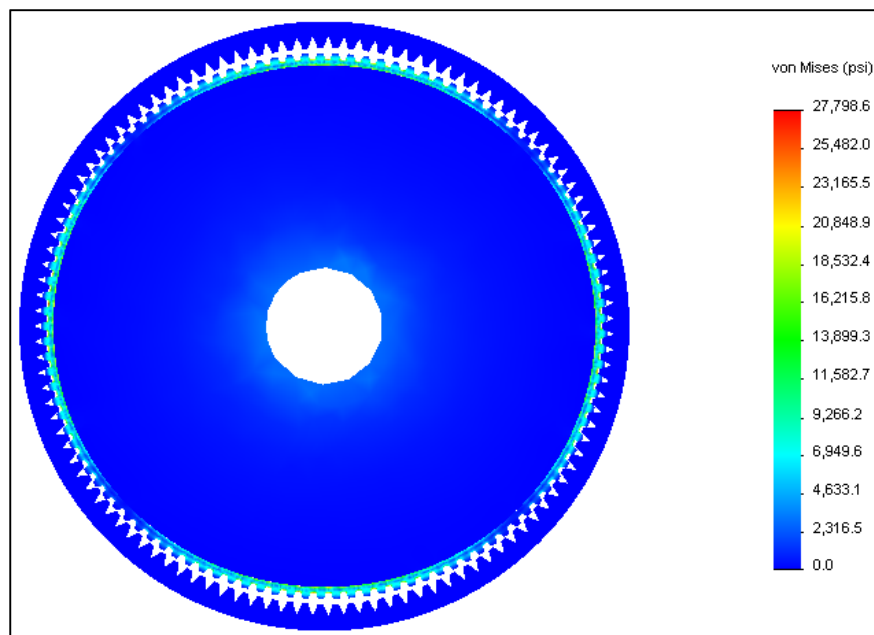
En la totalidad de los resultados se identifica exactamente la misma región de concentración de esfuerzos en operación, esta zona está ubicada en determinados nodos justamente en la base del diente y fue en ésta misma de donde se tomaron los resultados.

**Figura 4-22:** Zona de incidencia máxima de esfuerzos para el modelo 22



Esa distribución de esfuerzos de Von Mises es uniforme y naturalmente consecuente con la imposición del generador a lo largo de la geometría (ver Figura 4-23) [57].

**Figura 4-23:** Gráfico de esfuerzos de Von Mises para el modelo 22.



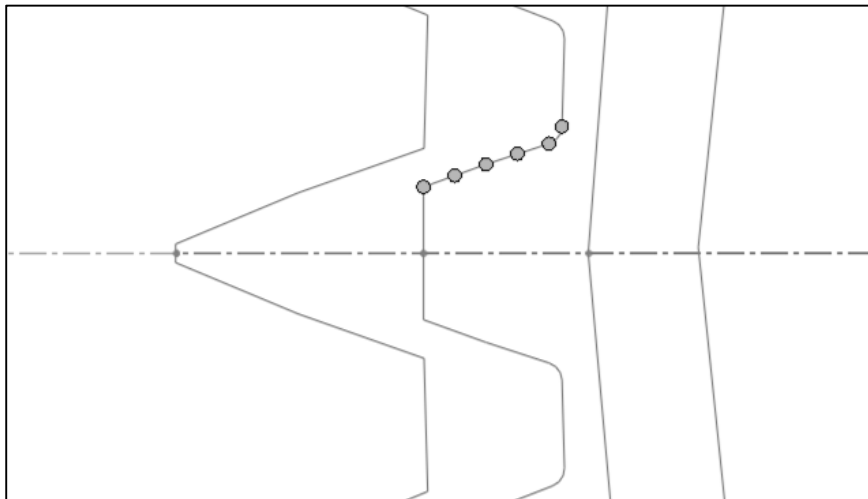
Además es extensible a cada perfil del dentado, de ahí que se tomen los nodos que constituyen el perfil para desarrollar el modelo de contacto y falla por picadura [58]. El esfuerzo máximo obtenido producto de comparar los nodos que conforman el flanco del diente constituye el esfuerzo de contacto Hertziano, ya que los reducidos efectos de fricción hacen que los componentes de esfuerzo cortante sean lo suficientemente pequeños como para considerarlo de ésta forma.

Para ilustrar lo descrito se toman los resultados del modelo número 22, que presenta una mejor respuesta de acuerdo con el análisis del factor de seguridad para el cual se encontraron los perfiles de esfuerzo que se muestran en la Figura 4-25.

De entre éstos se descartaron los resultados en los nodos mas cercanos a la base del diente para el analisis de picadura superficial (ver Figura 4-24) ya que en ningún momento existe contacto en esa zona, además al efecto de la flexión inducida por el generador es el factor mas relevante. Dentro de los nodos restantes se escoge el que presenta el esfuerzo principal mayor para realizar el analisis de falla por vida de picadura.

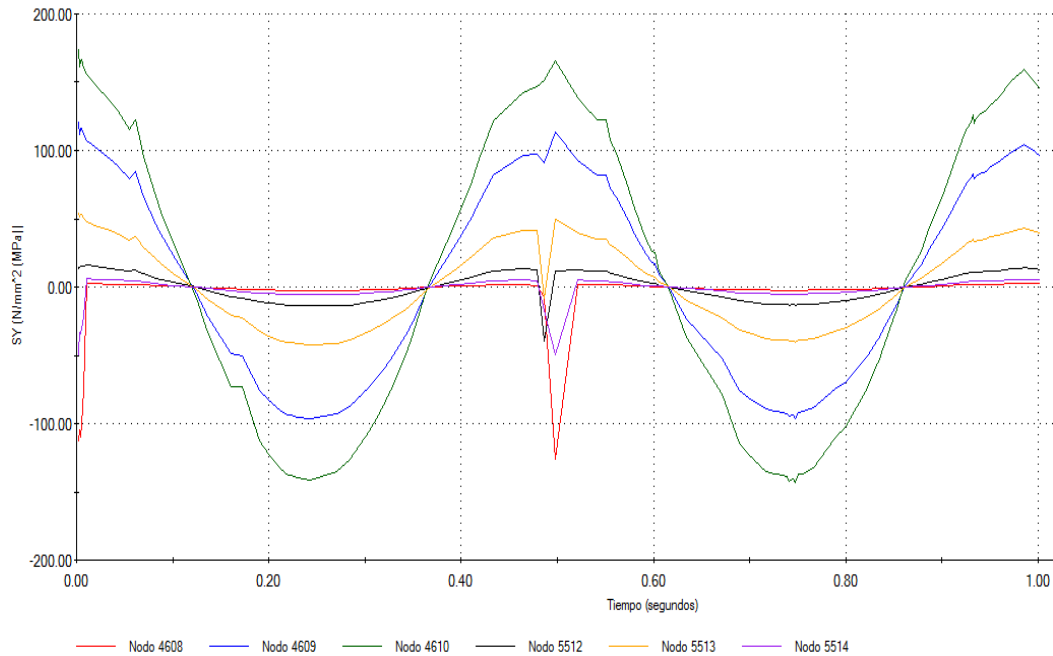
En conclusion los esfuerzos de contacto son reducidos en comparacion a las consecuencias de la flexión impuesta por el generador de onda, esto es evidencia de que la falla a picadura es un parámetro de menor relevancia en comparación con la falla que podría generarse por fatiga a flexión en el engrane flexible.

**Figura 4-24:** Posición característica de los nodos analizados sobre el perfil del diente



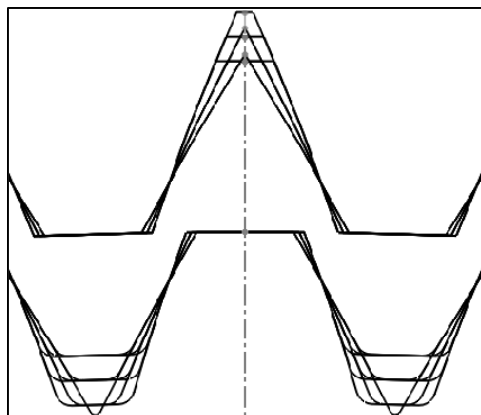
Las curvas generadas en el análisis por elementos finitos tienen ciertas discontinuidades producto de pequeñas divergencias producidas por la cinemática conjunta presente en la interacción de las piezas. La totalidad de los resultados son ilustrados en los Anexos A y B, y condensados en las Tablas 4-5, 4-6, y 4-7 donde se exponen los resultados de cada ensayo.



**Figura 4-25:** Respuesta no lineal

### 4.3 Resultados del diseño experimental virtual

Las variables geométricas que se toman para este estudio son el módulo (0,10 – 0,70 mm), ángulo de presión ( $20^\circ$  –  $30^\circ$ ) y factor de corrección dental (0,0 – 0,5). Según éstos se ha modificado la geometría dental ilustrando las configuraciones de la Figura 4-26.

**Figura 4-26:** Superposición geométrica de los perfiles dentales evaluados para un módulo de 0,1 mm

Para los análisis se toman características de entrada de una transmisión armónica con velocidad del generador de ondas de 60 rpm, torque de entrada 1,77 Nm/mm y número de dientes de la corona rígida / engrane flexible igual a 115/113 respectivamente. Con el

propósito de analizar los efectos de las variables geométricas consideradas sobre las respuestas de desempeño mencionadas se implementa un diseño experimental factorial completo, con tres niveles y un total de 27 experimentos virtuales. Para el diseño experimental se emplea un análisis dinámico no lineal; usando el método de los elementos finitos para obtener el comportamiento cinemático de la transmisión, y los esfuerzos de contacto y de flexión en la base de diente [59].

**Tabla 4-5:** Factor de seguridad según el diseño experimental.

No.	Corrección	m	fi	FATIGA POR FLEXIÓN		
				sigmaVMmax_bd (MPa)	sigmaVMmin_bd (MPa)	Factor de seguridad
1	-1	-1	-1	306.8	189.6	1.9
2	-1	-1	0	272.5	222.7	1.8
3	-1	-1	1	365.9	285	1.4
4	-1	0	-1	319.2	199	1.7
5	-1	0	0	235.8	197.3	2
6	-1	0	1	211.6	166.1	2.1
7	-1	1	-1	234.5	179	2.1
8	-1	1	0	232.1	197	2
9	-1	1	1	245.9	207.4	2
10	0	-1	-1	291.6	191.1	2
11	0	-1	0	260.3	177.7	2.1
12	0	-1	1	344.1	225.2	1.6
13	0	0	-1	221.1	190.4	2.3
14	0	0	0	217.1	177.5	2.3
15	0	0	1	345.4	302.2	1.5
16	0	1	-1	191.4	167.2	2.5
17	0	1	0	203.7	169.3	2.3
18	0	1	1	239.2	202.7	1.9
19	1	-1	-1	271.4	194.1	2.2
20	1	-1	0	228.4	184.4	2.4
21	1	-1	1	374.7	320.2	1.5
22	1	0	-1	199.2	177.7	2.6
23	1	0	0	235.9	207.9	2.3
24	1	0	1	196.5	174.9	2.5
25	1	1	-1	208.2	178.7	2.4
26	1	1	0	193.6	164.9	2.5
27	1	1	1	262.3	226.6	1.9

**Tabla 4-6:** Error de transmisión según el diseño experimental

No.	Corrección	m	fi	PICADURA		ERROR DE TRANSM
				ESFUERZO sigma3 (psi)	Vida en # de ciclos	THETA_OUTmin
1	-1	-1	-1	36982	6.9E+41	0.36
2	-1	-1	0	37720	2.5E+41	0.30
3	-1	-1	1	5233	2.1E+86	0.31
4	-1	0	-1	50618	5.1E+34	0.42
5	-1	0	0	3698	1.7E+94	0.52
6	-1	0	1	18861	1.4E+57	0.42
7	-1	1	-1	36443	1.5E+42	0.27
8	-1	1	0	3023	6.5E+98	0.32
9	-1	1	1	4125	5.2E+91	0.34
10	0	-1	-1	38203	1.3E+41	0.4
11	0	-1	0	38203	1.4E+41	0.31
12	0	-1	1	49125	2.2E+35	0.37
13	0	0	-1	25744	1.2E+50	0.32
14	0	0	0	31757	2.1E+45	0.34
15	0	0	1	9860	8.2E+71	0.356
16	0	1	-1	24783	8.9E+50	0.33
17	0	1	0	27514	3.7E+48	0.35
18	0	1	1	56779	1.2E+32	0.35
19	1	-1	-1	8904	1.7E+74	0.27
20	1	-1	0	30361	2.1E+46	0.38
21	1	-1	1	31739	2.1E+45	0.38
22	1	0	-1	24053	4.3E+51	0.3
23	1	0	0	25747	1.2E+50	0.28
24	1	0	1	27894	1.8E+48	0.37
25	1	1	-1	23391	1.8E+52	0.33
26	1	1	0	25688	1.4E+50	0.34
27	1	1	1	25774	1.1E+50	0.33

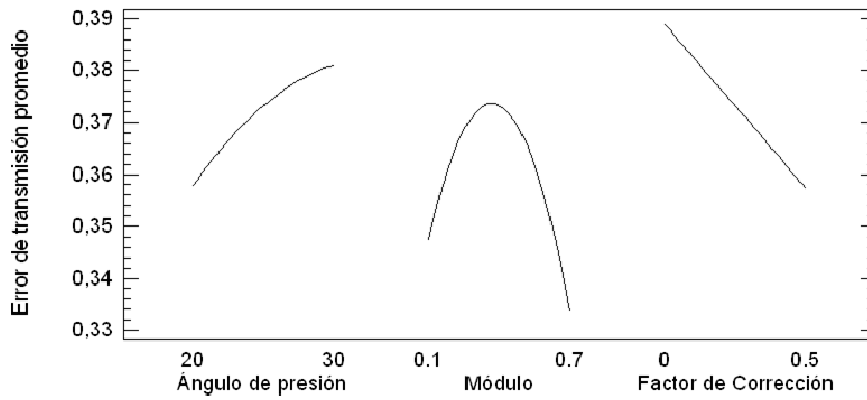
**Tabla 4-7:** Capacidad portante según el diseño experimental

No.	Corrección	m	fi	Volumen Engranaje mm3	Volumen Corona mm3	Masa Engranaje g	Masa Corona g	Capacidad Portante
1	-1	-1	-1	7.9	18.1	0.062	0.141	5.57
2	-1	-1	0	8.0	18.2	0.063	0.143	5.5
3	-1	-1	1	8.2	18.4	0.064	0.144	5.44
4	-1	0	-1	126	289	0.98	2.27	0.35
5	-1	0	0	128.5	291.4	1	2.29	0.34
6	-1	0	1	131.1	294	1.03	2.3	0.34
7	-1	1	-1	385.5	885.1	3.02	6.94	0.11
8	-1	1	0	393.4	892.4	3.08	7	0.11
9	-1	1	1	401.6	900.5	3.15	7.07	0.11
10	0	-1	-1	7.2	17.9	0.057	0.14	5.74
11	0	-1	0	7.3	18.1	0.058	0.142	5.66
12	0	-1	1	7.4	18.4	0.058	0.144	5.6
13	0	0	-1	116	286.7	0.91	2.25	0.36
14	0	0	0	117.4	290.3	0.92	2.28	0.35
15	0	0	1	118.9	294	0.93	2.31	0.35
16	0	1	-1	355.2	878	2.79	6.9	0.12
17	0	1	0	359.5	889	2.82	6.7	0.11
18	0	1	1	364.2	900.3	2.86	7.07	0.11
19	1	-1	-1	6.7	17.8	0.052	0.14	5.9
20	1	-1	0	6.7	18.1	0.052	0.142	5.8
21	1	-1	1	6.7	18.4	0.053	0.144	5.75
22	1	0	-1	106.6	285.4	0.84	2.24	0.37
23	1	0	0	107.2	290.3	0.84	2.28	0.36
24	1	0	1	107.8	294	0.85	2.31	0.36
25	1	1	-1	326.6	874.1	2.56	6.86	0.12
26	1	1	0	328.4	889	2.58	6.98	0.12
27	1	1	1	330.3	900.3	2.59	7.07	0.12

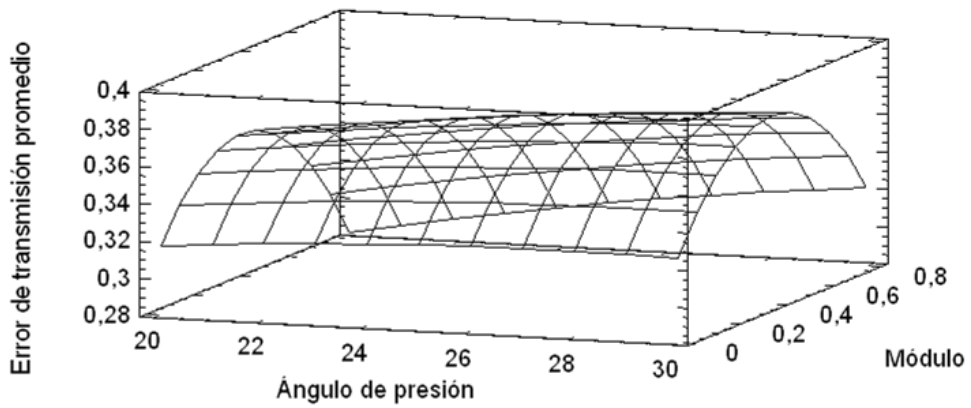
### 4.3.1 Superficie de respuesta para el error cinemático de transmisión

De acuerdo con el análisis de varianza para el error de transmisión promedio, no se ha identificado un efecto determinante que pueda aportar una tendencia sobre el comportamiento de la transmisión ante la variación de los factores geométricos considerados en este estudio. Pese a esto, en la Figuras 4-27, 4-28, y 4-29, y en la Tabla 4-8, se muestran los efectos principales para el error de transmisión promedio.

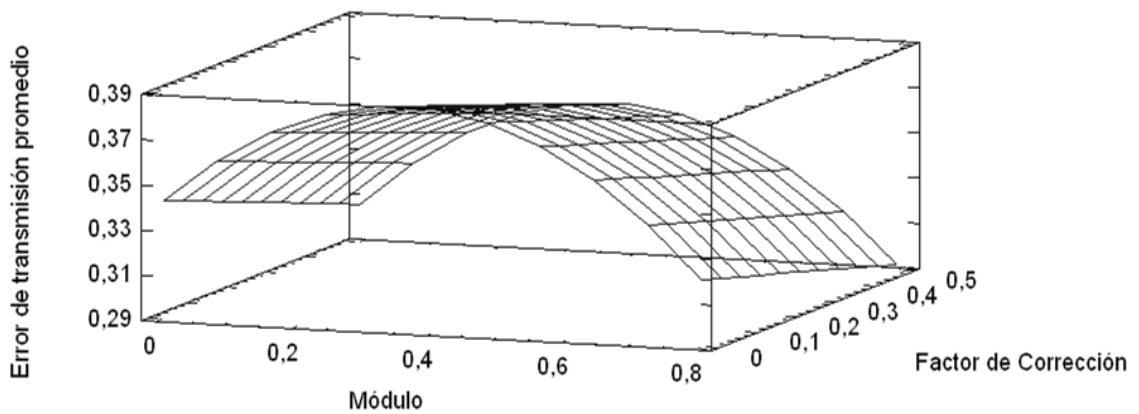
**Figura 4-27:** Efectos principales para error de transmisión promedio



**Figura 4-28:** Superficie de respuesta estimada para un factor de corrección de 0.25



**Figura 4-29:** Superficie de respuesta estimada para un ángulo de presión de 25 grados



**Tabla 4-8:** Mejor respuesta para el error de transmisión promedio

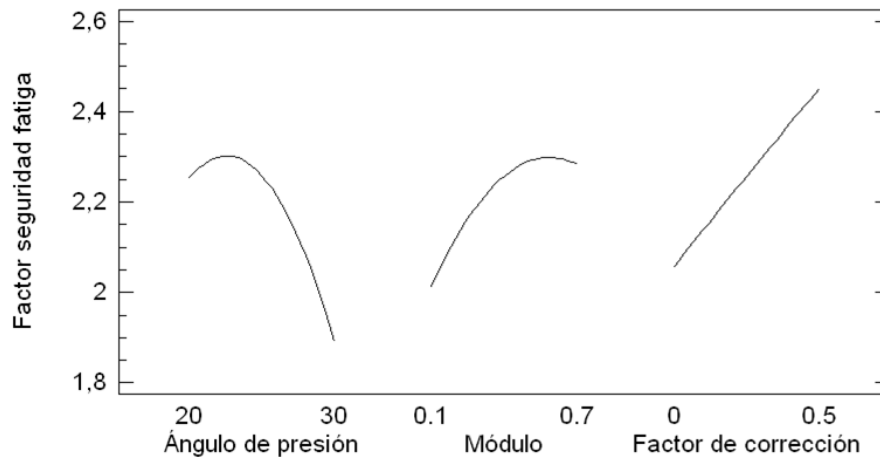
<i>Factor</i>	<i>Bajo</i>	<i>Alto</i>	<i>Mejor respuesta</i>
Ángulo de presión	20,0	30,0	20,0
Módulo	0,1	0,7	0,7
Factor de Corrección	0,0	0,5	0,5

Ésta respuesta se logra al tomar el comportamiento más favorable presentado por los niveles de los factores frente al error de transmisión de acuerdo con la figura 4-27.

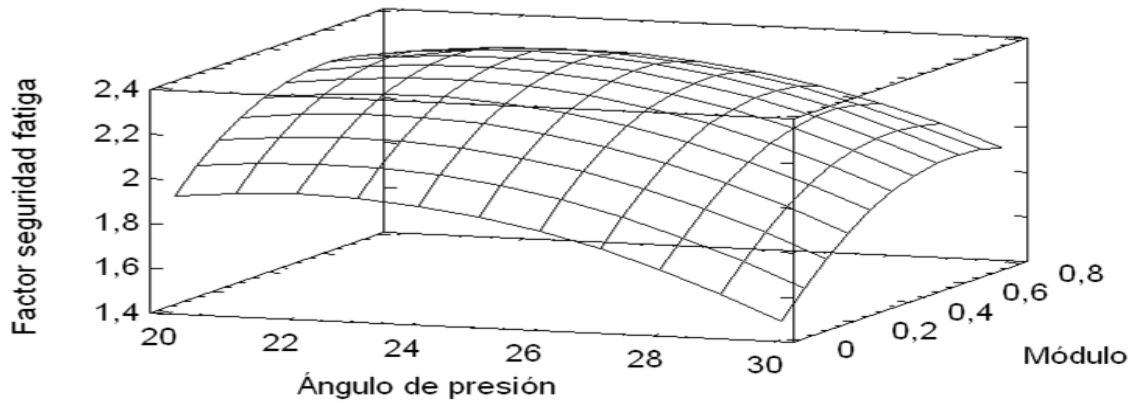
### 4.3.2 Superficie de respuesta para la vida de fatiga volumétrica.

En ésta sección se ilustra la incidencia del ángulo de presión, el módulo y el factor de corrección sobre la respuesta a la vida de fatiga volumétrica ( ver Figuras 4-30, 4-31, 4-32). Como la mayor influencia sobre el engranaje flexible se debe a la sensibilidad frente a éste último parámetro, se espera que el modelo más favorable tenga una fuerte correspondencia con el análisis presentado.

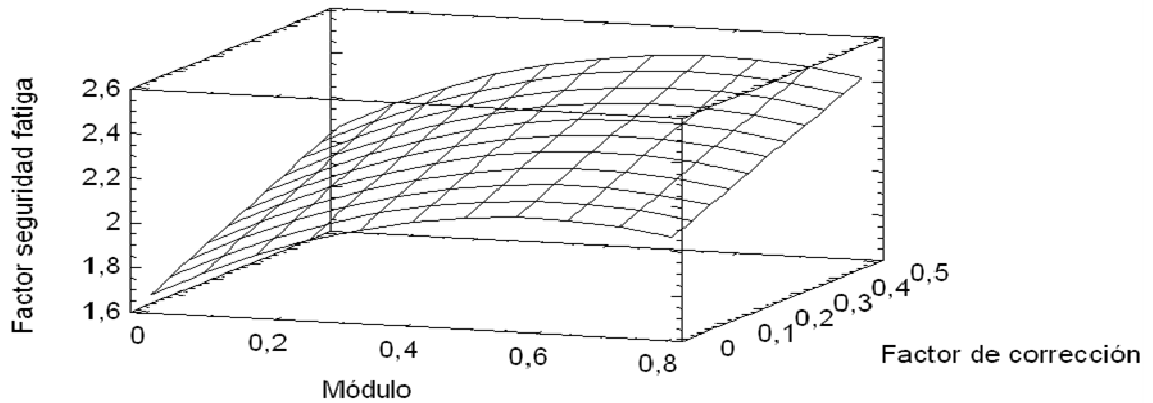
**Figura 4-30:** Gráfica de efectos principales para factor de seguridad a la fatiga



**Figura 4-31:** Superficie de respuesta para el factor de seguridad a fatiga para una corrección de 0,25



**Figura 4-32:** Superficie de respuesta para el factor de seguridad a fatiga para un ángulo de presión de 25 grados



**Tabla 4-9:** Análisis de Varianza para Factor seguridad fatiga

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
A:Ángulo de presión	0,591364	1	0,591364	11,88	0,0031
B:Módulo	0,323101	1	0,323101	6,49	0,0208
C:Factor de corrección	0,69868	1	0,69868	14,04	0,0016
AA	0,205794	1	0,205794	4,14	0,0579
AB	0,0102375	1	0,0102375	0,21	0,6559
AC	0,0673201	1	0,0673201	1,35	0,2609
BB	0,0716789	1	0,0716789	1,44	0,2465
BC	0,000936333	1	0,000936333	0,02	0,8925
CC	0,0000322017	1	0,0000322017	0,00	0,9800
Error total	0,845963	17	0,0497625		
Total (corr.)	2,81511	26			

R-cuadrada = 69,9492 %  
 R-cuadrada (ajustada por g.l.) = 54,0399 %  
 Error estándar del est. = 0,223075  
 Error absoluto medio = 0,135503  
 Estadístico Durbin-Watson = 2,60236 (P=0,7453)  
 Autocorrelación residual de Lag 1 = -0,315535

El modelo matemático de comportamiento es,

$$\text{Factor de seguridad a fatiga} = -2.23008 + 0.314134 * \text{Ángulo de presión} + 0.960787 * \text{Módulo} + 2.35171 * \text{Factor de corrección} - 0.007408 * \text{Ángulo de presión}^2 \quad (4.3)$$

**Optimizar Respuesta**

Meta: maximizar Factor seguridad fatiga  
 Valor óptimo = 2,57 de acuerdo a la superficie de respuesta generada por el modelo matemático de comportamiento.

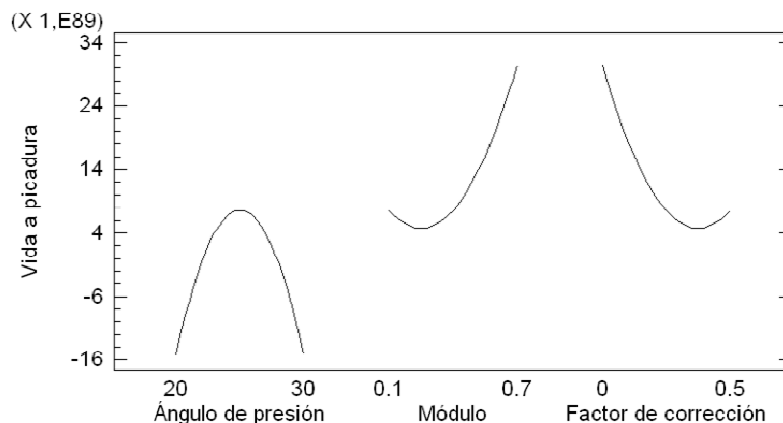
**Tabla 4-10:** Mejor respuesta para al factor seguridad a fatiga

Factor	Bajo	Alto	Mejor respuesta
Ángulo de presión	20,0	30,0	21,739
Módulo	0,1	0,7	0,547
Factor de corrección	0,0	0,5	0,5

**4.3.3 Superficie de respuesta para la vida de picadura**

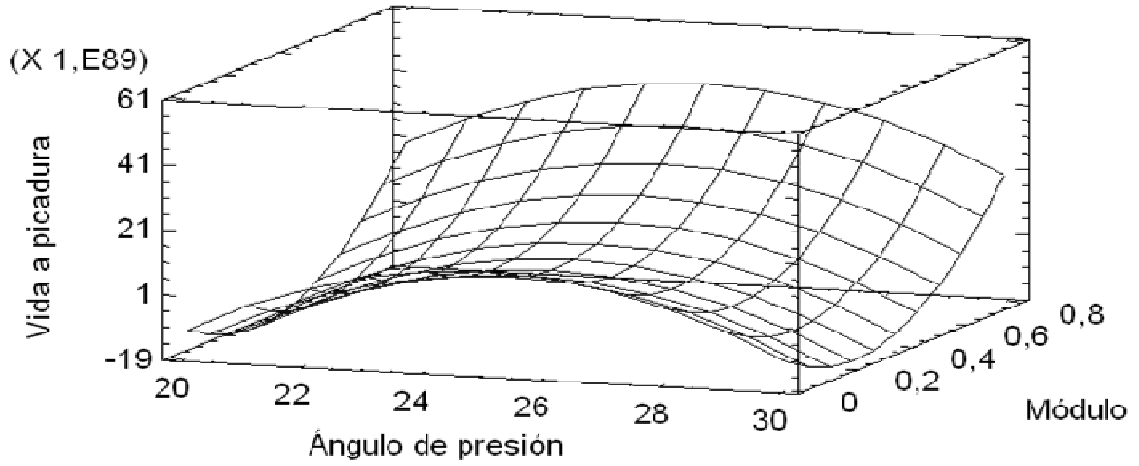
De acuerdo al análisis de varianza para la respuesta para la vida de picadura, no se ha identificado un comportamiento determinante que pueda aportar una tendencia a la investigación, pese a éste comportamiento se ilustran la Figuras 4-33, 4-34, y 4-35 para efectos principales.

**Figura 4-33:** Gráfica de efectos principales para vida a picadura

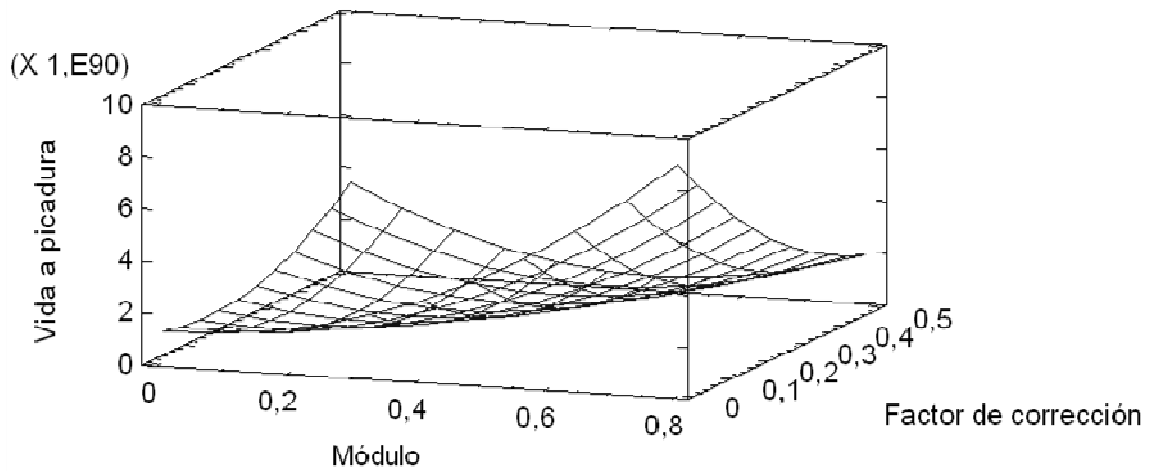




**Figura 4-34:** Superficie de respuesta estimada para vida a picadura con factor de corrección de 0,25



**Figura 4-35:** Superficie de respuesta estimada para picadura con ángulo de presión de 25 grados



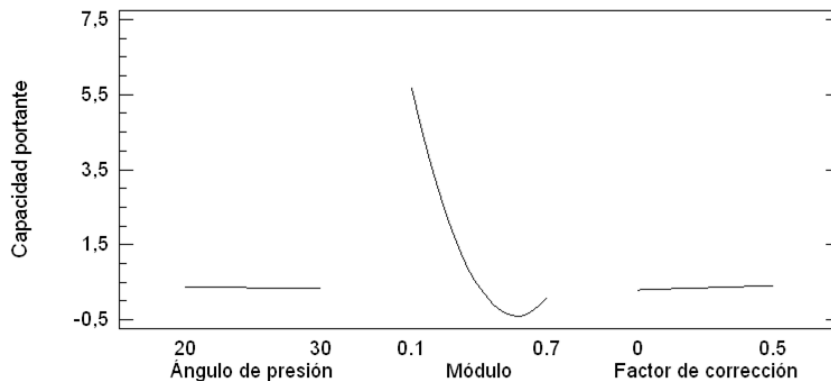
**Tabla 4-11:** Mejor respuesta para la vida a picadura

Factor	Bajo	Alto	Mejor respuesta
Ángulo de presión	20,0	30,0	25,0
Módulo	0,1	0,7	0,7
Factor de corrección	0,0	0,5	0,0

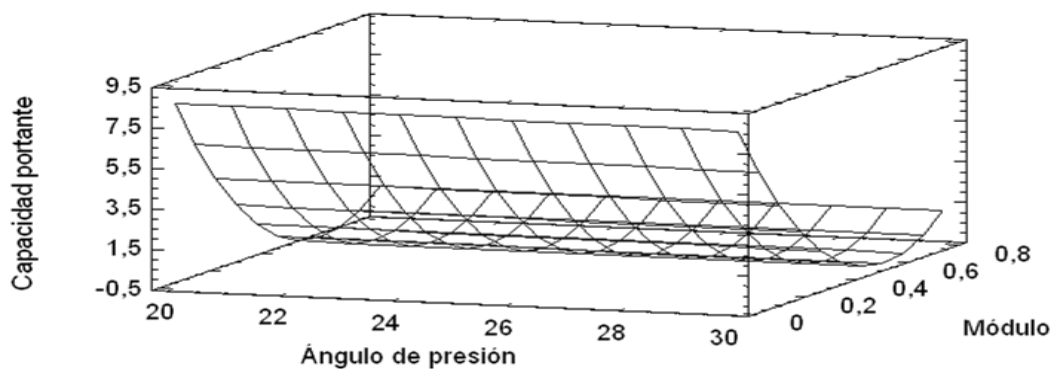
### 4.3.4 Superficie de respuesta para la capacidad portante

En esta sección se ilustran los resultados obtenidos al comparar los efectos del ángulo de presión, el modulo y el factor de corrección, frente a capacidad portante. Como se esperaba, el comportamiento de mayor incidencia será el que tenga mayor influencia geométrica en general.

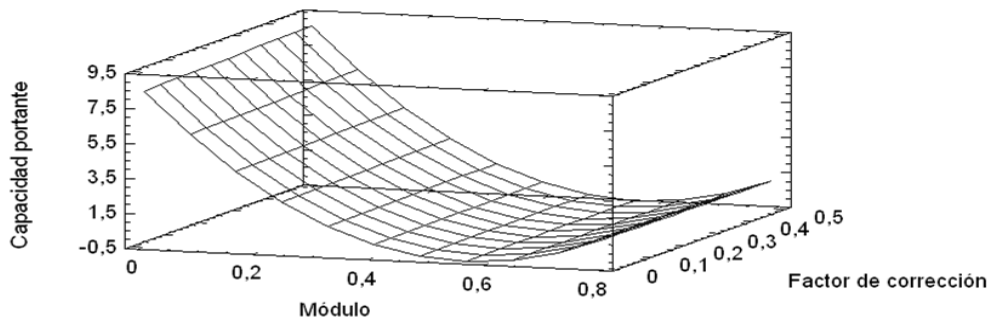
**Figura 4-36:** Gráfica de efectos principales para capacidad portante



**Figura 4-37:** Superficie de respuesta estimada para la capacidad portante con factor de corrección de 0,25



**Figura 4-38:** Superficie de respuesta estimada para la capacidad portante con ángulo de presión de 25 grados



**Tabla 4-12:** Análisis de Varianza para Capacidad portante

<i>Fuente</i>	<i>Suma de Cuadrados</i>	<i>Gl</i>	<i>Cuadrado Medio</i>	<i>Razón-F</i>	<i>Valor-P</i>
A:Ángulo de presión	0,0111379	1	0,0111379	7,95	0,0118
B:Módulo	138,483	1	138,483	98823,63	0,0000
C:Factor de corrección	0,0584357	1	0,0584357	41,70	0,0000
AA	0,00000771596	1	0,00000771596	0,01	0,9417
AB	0,01363	1	0,01363	9,73	0,0062
AC	0,00000746766	1	0,00000746766	0,01	0,9427
BB	38,5686	1	38,5686	27523,22	0,0000
BC	0,0716787	1	0,0716787	51,15	0,0000
CC	0,0000251853	1	0,0000251853	0,02	0,8949
Error total	0,0238223	17	0,00140131		
Total (corr.)	177,23	26			

R-cuadrada = 99,9866 por ciento  
R-cuadrada (ajustada por g.l.) = 99,9794 por ciento  
Error estándar del est. = 0,0374341  
Error absoluto medio = 0,0241476  
Estadístico Durbin-Watson = 1,21314 (P=0,0031)  
Autocorrelación residual de Lag 1 = 0,383088

Modelo:

$$\text{Capacidad Portante} = 8.77151 + 0.0160725 * \text{Ángulo de presión} - 32.0864 * \text{Módulo} + 0.672273 * \text{Factor de corrección} - 0.0000453607 * \text{Ángulo de presión}^2 + 0.0224681 * \text{ángulo de presión} * \text{Modulo} \quad (4.4)$$

Meta: maximizar Capacidad portante

Valor óptimo = 5,85632

**Tabla 4-13:** Mejor respuesta para la capacidad portante

<i>Factor</i>	<i>Bajo</i>	<i>Alto</i>	<i>Mejor respuesta</i>
Ángulo de presión	20,0	30,0	20,0
Módulo	0,1	0,7	0,1
Factor de corrección	0,0	0,5	0,5

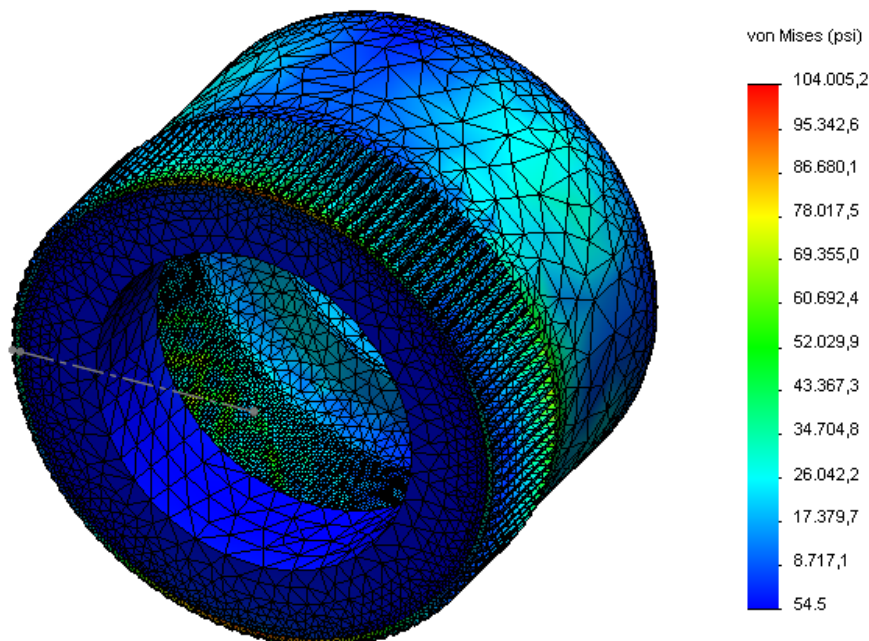
## 4.4 Análisis de esfuerzos para la copa flexible

El engranaje flexible se ha analizado desde dos perspectivas separadas debido a la imposibilidad de integrar ambos efectos por las limitaciones que se presentaron al momento de obtener un método convergente. La primera y más diciente fue la implementada en el diseño experimental, donde se analizan las consecuencias del trabajo sobre la cara más determinante como una superficie en dos dimensiones; y la segunda, planteada a continuación, donde se analizan parcialmente los efectos a lo largo de la longitud axial del engranaje flexible frente a la deformación producida por el generador de onda.

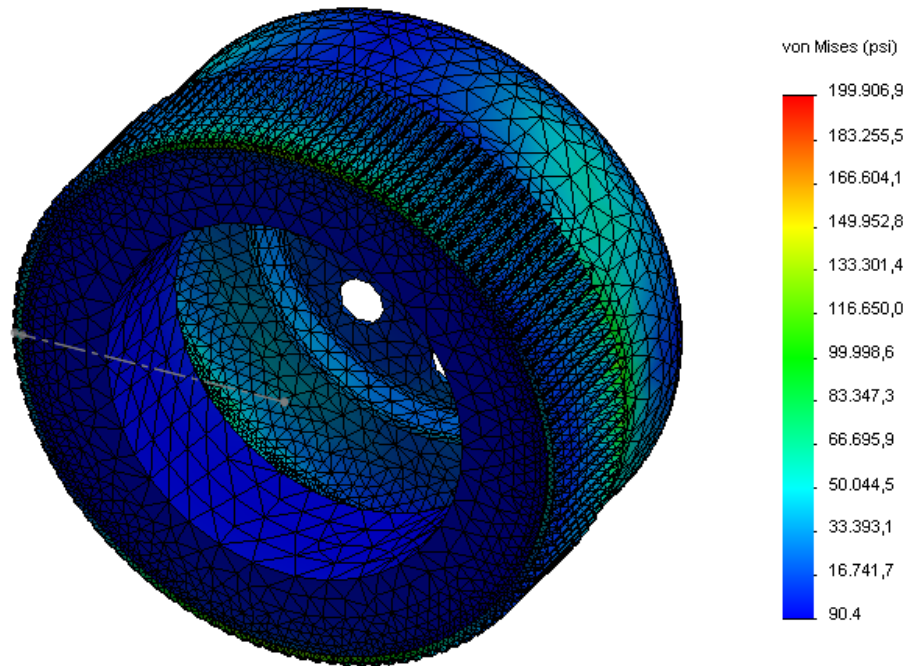
Para esto se ha tomado el modelo que ha dado la mejor respuesta de entre los desarrollados en el diseño experimental y tal y como se ha planteado en el numeral 3.7, se determinan las variables geométricas complementarias que definen la geometría de las piezas. Para el análisis de esfuerzos en la copa flexible es imperativo trabajar sobre la influencia de la longitud axial ya que ésta dimensión influye sobre la rigidez en el extremo dentado. Según esto se han definido tres longitudes de copa y se ha observado la resistencia que ofrecen cada una de las copas frente a la deformación.

El primero diseño de copa cuenta con una corona de longitud  $F$  de 36,4 mm, y se denomina engranaje de copa larga (ver Figura 4-37), la segunda y tercera con longitudes  $F$  de 27.4mm, y 18.4mm, y se denominan engranajes de copas media (ver Figura 4-38) y corta (ver Figura 4-39) respectivamente. Se han aplicado las mismas condiciones de mallado y el mismo método de solución, empleándose un planteamiento estático no lineal con acero AISI SAE 4340.

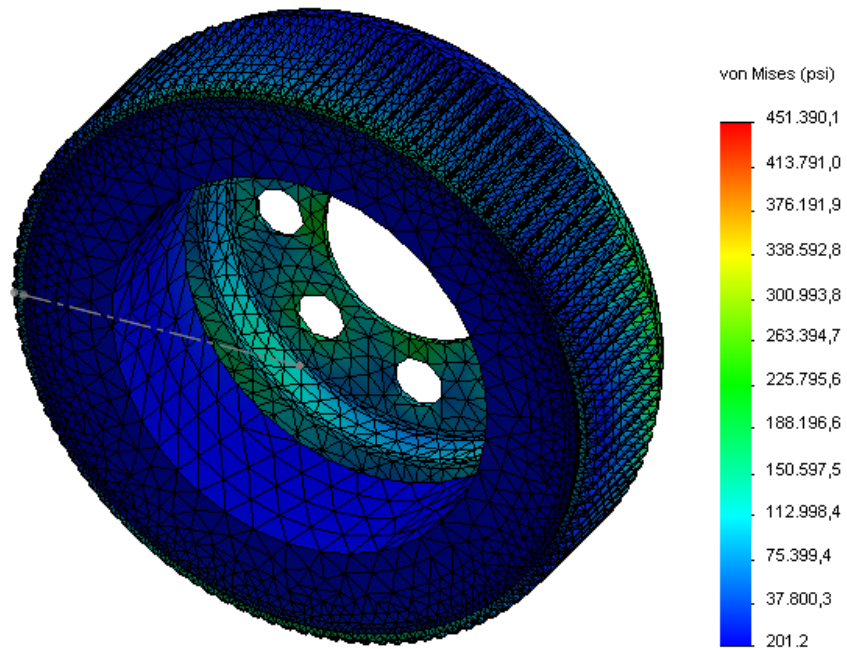
**Figura 4-39:** Engranaje flexible de copa larga



**Figura 4-40:** Engranaje flexible de copa media



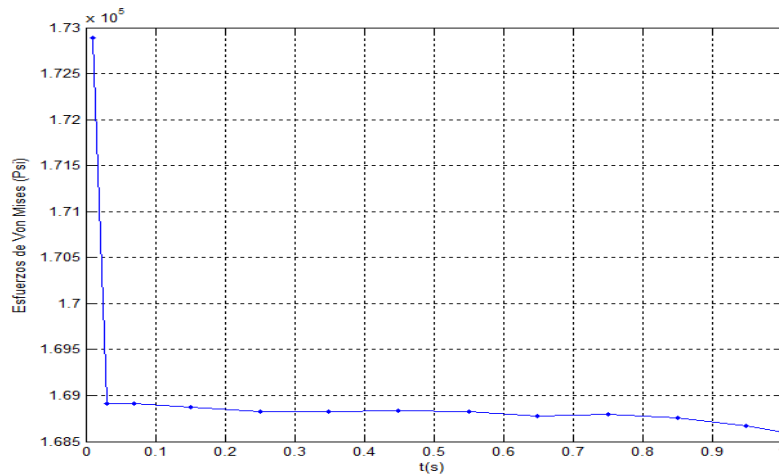
**Figura 4-41:** Engranaje flexible de copa corta



Para evaluar el modelo se han tomado dos nodos ubicados sobre una línea horizontal y una vertical en una zona media entre el diámetro interno del engranaje flexible y el diámetro exterior. Estos nodos se han seleccionado según esa ubicación para identificar el comportamiento frente a esfuerzos sobre los semiejes mayor y menor de la elipse inducida por generador sobre el engranaje flexible.

La respuesta obtenida para los esfuerzos de Von Mises fue ilustrada en las Figuras 4-42, a la 4-47; los resultados se han comparado superponiendo las curvas mencionadas previamente en las Figuras 4-48 y 4-49, donde se aprecia la influencia sobre los semiejes de la elipse.

**Figura 4-42:** Respuesta en el semi-eje menor de los esfuerzos Von Mises para el engranaje flexible de copa corta



**Figura 4-43:** Respuesta en el semi-eje mayor de los esfuerzos Von Mises para el engranaje flexible de copa corta

