$$\phi(\lambda, X) = \lambda\phi(X)$$
ó
$$\phi(X) = \lambda\phi\left(X/_{\lambda}\right) \tag{2}$$

La transformación ϕ es entonces invariante por homotecia. Aplicar ϕ a X es entonces igual a reducir X, aplicar ϕ y después dilatar el resultado (figura A.4).

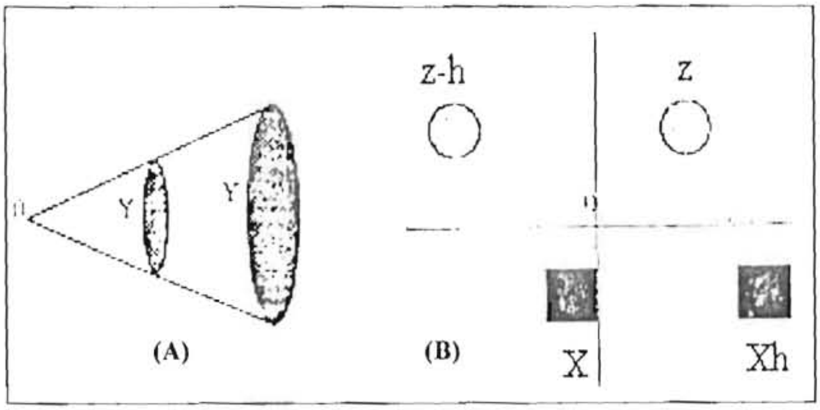


Figura A.3. (A) Homotecia y (B) Translación

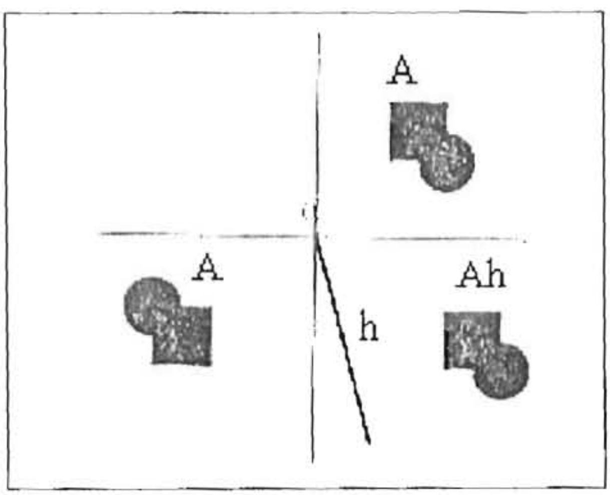


Figura A.4. Translación y simetría

A1.2.3. Conocimiento local

Esto representa el tercer principio de la morfología matemática.

En realidad, cuando se estudia un conjunto X, raramente se tiene la posibilidad de estudiar el conjunto X como un todo, probablemente una parte de ese conjunto que se denomina Z. Ejemplos de esto se pueden encontrar en imágenes aéreas o imágenes microscópicas. Más en realidad no conocemos el conjunto X, $X \cap Z$ (el conjunto Z). En estas condiciones, las transformaciones ϕ usadas, se aplican sobre una máscara Z' que depende solamente de Z y $X \cap Z$.

La transformación ϕ satisface la propiedad de conocimiento local si para cada conjunto restringido Z' en el cual X se conoce, podemos encontrar un conjunto restringido Z en el cual el conocimiento de X es suficiente para aplicar localmente (por medio de Z') la transformación ϕ.

$\forall Z' \, restringido, \exists Z$ restringido tal que :

$$[\phi(X \cap Z)] \cap Z' = \phi(X) \cap Z' \quad (3)$$

A1.2.4. Continuidad

La noción de borde es complicada, debido a las limitaciones de los sistemas de análisis de imagen. Los matemáticos crearon el concepto de borde a partir de la definición de dos conjuntos complementarios X y X^c. Esta definición puede entrar en contradicción con la de los físicos que consideran un borde como un contacto entre dos fases. En realidad, cuando estudiamos dos fases, la detección de bordes se realiza de otra manera.

Hallar bordes Δi consiste en obtener conjuntos que son infinitamente pequeños, pero no tienden al conjunto vacío en su límite (que puede tener un espesor nulo). Para realizar esto, Serra modeló los Δi como conjuntos topológicamente cerrados que contienen a sus bordes. Esta noción hace alusión a el cuarto principio de la morfología matemática :

Para cualquier secuencia de conjuntos cerrados que tienden a un límite Δ para cada transformación creciente ϕ, debe corresponder una secuencia de conjuntos transformados que tienden por la transformación al límite Δ.

Matheron demostró que las únicas transformaciones que son relevantes para la morfología matemática son aquellas semi-continuas de la topología Hit-miss.

A1.2.5. Clases principales de elementos estructurantes

Se sabe que el principio básico de la morfología matemática se da por una operación entre conjuntos a saber, el conjunto que se evalúa y el elemento estructurante conocido.

Por medio del elemento estructurante, es posible obtener la información relativa a la geometría y la topología de ese conjunto. La dificultad está en escoger un elemento estructurante adecuado para el resultado esperado. En la figura A.5 se presentan los tipos de elementos estructurantes.

Para facilitar la interpretación, los elementos estructurantes deben ser lo más simples posibles. En la mayoría de los casos, los elementos estructurantes se seleccionan en función de las propiedades de convexividad, no convexividad, isotropía y anisotropía [**Jianning, X., 1991**]. La erosión por el segmento de recta conduce a la anisotropía por medio de la noción de orientación. Las erosiones con el circulo y el segmento de recta son semejantes por el hecho de que esos elementos son convexos. El circulo sirve más particularmente en la determinación del tamaño de los objetos. El segmento de recta también convexo más anisotrópico sirve para estudiar las distribuciones de tamaño. La erosión por un par de puntos permite caracterizar el estado de dispersión de una estructura. El contorno se usa en una imagen para permitir definir el ambiente de un punto.

El resultado de la aplicación de un elemento estructurante depende también de la posición del punto central de éste [**Serra, J., 1972**]. De forma general se puede decir que un cambio de la posición del punto central en el mismo elemento estructurante resulta en una translación del resultado final (figura A.6).

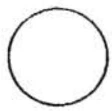
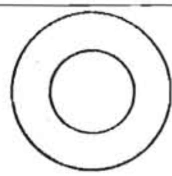
ELEMENTO ESTRUCTURANTE	CONVEXO	NO CONVEXO
ISÓTROPO		
NO ISÓTROPO		

Figura A.5. Ejemplos de elementos estructurantes

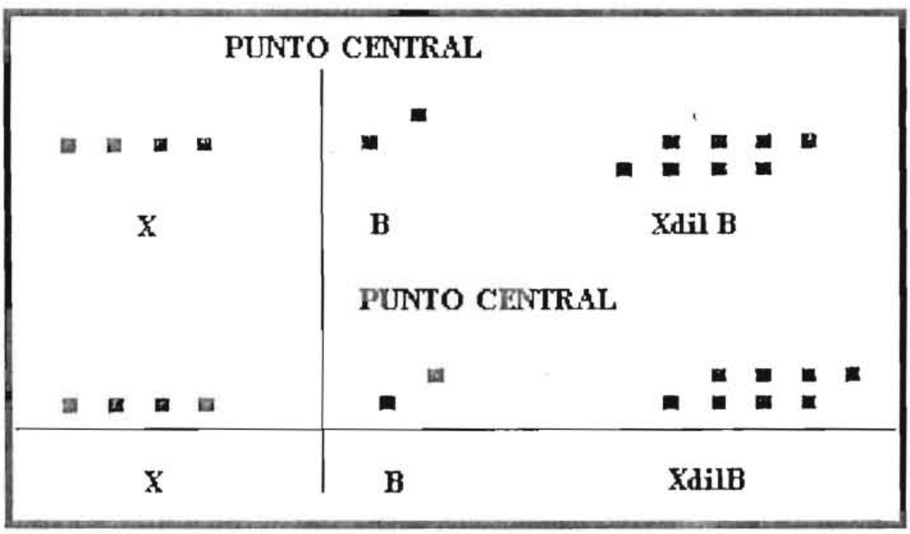


Figura A.6. Ejemplos de dilatación a partir de un mismo elemento estructurante con un posicionamiento diferente del punto central

A1.3. Morfología Matemática Binaria

A1.3.1. Operaciones morfológicas binarias básicas

La morfología matemática representa una rama no lineal de las técnicas de procesamiento digital de imágenes. De manera general, el análisis de imagen requiere de la extracción de parámetros y se puede decir que para cualquier parámetro, se usa una transformación de la imagen. Un buen ejemplo de esto es el cálculo del área de una entidad digital. Calcular el área, consiste en verificar el número de puntos contenidos en esta entidad. Esta operación se puede interpretar por el número de veces que un punto recorre la imagen y encuentra la entidad estudiada. De manera equivalente, se puede estudiar el exterior de esa entidad.

- Mejor que simplemente evaluar el interior o el exterior de una imagen Matheron y Serra definieron una operación que permite realizar esos dos estudios al mismo tiempo, es la transformación Hit-miss (hom).

A1.3.2.. Preliminares Matemáticos

B_h es el conjunto de B por la translación del vector h.

$$y \in B - y + h \in B_h \tag{4}$$

$$B_o = B \tag{5}$$

$$(B_h)_k = B_{h+k} = (B_k)_h \tag{6}$$

$\overline{B}$ es el conjunto deducido de B por simetría centrada en **0**

$$y \in B \rightarrow -y \in \overline{B} \tag{7}$$

$$B_h = (\overline{B})_{-h} \tag{8}$$

En las diferentes transformaciones utilizamos la notación B o B_x para un elemento estructurante centrado en x.

A1.3.3. Transformación Hit-miss

La transformación hom generaliza varios procesos. Consiste en evaluar un conjunto X de una imagen a partir de un elemento estructurante y el conjunto complemento X^c a partir de otro elemento estructurante. Para realizar ésto, se precisa de dos elementos estructurantes B^i y B^e que forman el par $B = (B^i, B^e)$ uno para evaluar el interior y el otro para evaluar el exterior de la entidad. Entonces, aplicar la transformación Hit-miss (hom) sobre X a partir de $B=(B^i,B^e)$ consiste en:

$$\mathbf{X}\,\mathbf{hom}\,\mathrm{B} = \left\{\mathrm{X}: \mathrm{B}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{x}} \subset \mathbf{X}; \mathrm{B}^{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}} \subset \mathbf{X}^{\mathbf{c}}\right\} \tag{9}$$

Podemos decir que un punto de A pertenece a el conjunto transformado (XhomB) si y sólo si B^i "cabe" en X y si B^e "cabe" en X^c. Esto supone que B^i y B^e sean disjuntos, si no es imposible definir la operación Hit-miss.

A1.3.4. Erosión

¿Qué acontece con la transformación Hit-miss cuando la segunda componente B^e del par de elementos estructurantes $B = (B^i,B^e)$ es nula? La condición $\mathrm{B}^{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}} \subset \mathbf{A}^{\mathbf{c}}$ siempre se verifica que la operación muda es para :

$$\mathbf{X}\,\mathbf{hom}\,\mathrm{B} = \left\{\mathrm{X}: \mathrm{B}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{x}} \subset \mathbf{X}\right\} \tag{10}$$

La transformación Hit-miss constituye, en este caso, la operación llamada erosión. El conjunto erodado Y de un conjunto X es el lugar de los centros X de Bx tal que Bx esté incluido en X (figura A.7)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Xero}\mathrm{B} = \{\mathbf{x}: \mathrm{B}_{\mathbf{x}} \subset \mathbf{X}\} \quad (11)$$

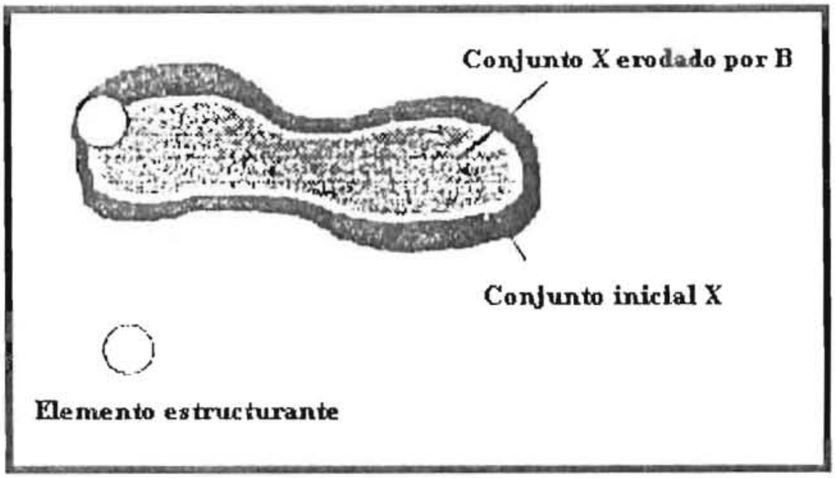


Figura A.7. Principio de erosión binaria

Se puede relacionar esta operación ero con una operación de Minkowski. De hecho, la definición de erosión se aproxima a la sustracción de Minkowski de un conjunto A por un elemento B dada por:

$$\mathrm{X}\theta \cap_{b \in \mathrm{B}} \mathrm{X}b \quad (12)$$

$\mathrm{X}\,\theta\,\mathrm{B}$ representa la intersección de las translaciones de X por b, sean los conjuntos Xb, $b \in \mathrm{B}$. La erosión se puede describir a partir de las sustracción de Minkqwski tomándose $\overline{B}$ en vez de B (figura A.8)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Xero}\mathrm{B} = \{\mathbf{x}: \mathrm{Bx} \subset \mathbf{X}\} = \cap_{\mathbf{Y} \in \mathbf{Bo}} \mathbf{X} - \mathbf{y} = \cap_{-\mathbf{y} \in \mathbf{Bo}} \mathbf{X}\mathbf{y} = \mathbf{X}\theta\overline{\mathrm{B}} \quad (13)$$

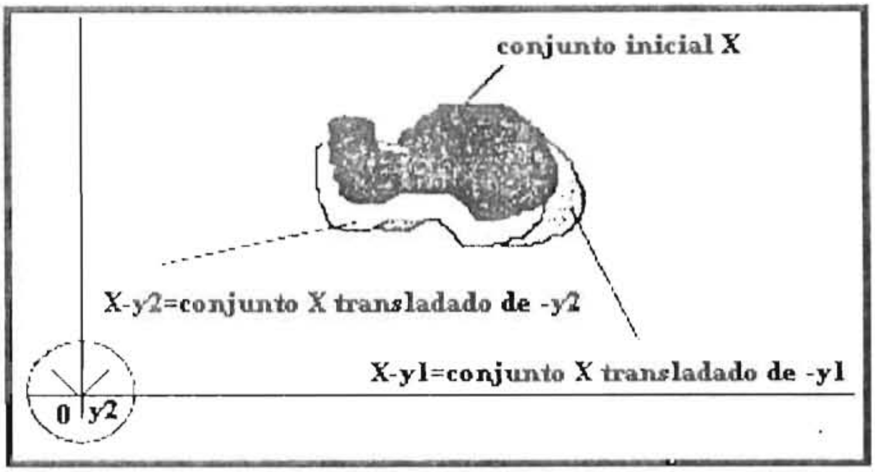


Figura A.8. Interpretación de la erosión binaria por la sustracción de Minkowski

Esta fórmula significa que cuando y describe Bo, el punto A+x pertenece a A si y sólo si X es un elemento de A-x. Sea :

$$\mathbf{Xero}\mathrm{B} = \mathbf{X}\theta\overline{\mathrm{B}} \tag{14}$$

Los efectos de la erosión son:

- Reducir las partículas
- Hacer desaparecer granos de tamaño inferior a el tamaño del elemento estructurante
- Aumentar los huecos
- Permitir la separación de los granos próximos

Cuando el elemento estructurante no es simétrico respecto del origen, el conjunto erodado está desfazado con respecto a el conjunto inicial.

A1.3.5. Dilatación

El estudio del resultado complementario de la erosión proporciona otra operación denominada dilatación. La dilatación se define de la siguiente manera:

$$X^{C}\, dil B = (X ero B)^{C} \tag{15}$$

Las dos operaciones son por tanto *duales* y se interpreta la dilatación como el complemento de la erosión. El complemento de la proposición "Bx está incluido en X" es la proposición "la intersección de Bx y X no es vacía" (figura A.9).

Esta definición se aproxima a la definición de adición de Minkowski de X por B denotada por $\oplus$ y dada por:

$$X \oplus B = \bigcup_{b \in B} Xb \tag{16}$$

$X \oplus B$ representa la unión de conjuntos Xb deducidos de B en la translación b, cuando b describe el conjunto B. La dilatación se puede describir a partir de la adición de Minkowski tomándose $\overline{B}$ en vez de B.

El dilatado X dil B es el lugar de los centros x de Bx tales como una intersección de Bx y X no es vacia, es decir,

$$X dil B = \{\mathbf{x} \in X: B\mathbf{x} \cap X \neq \varnothing\} = \bigcup_{\mathbf{y} \in Bo} X - \mathbf{y} = \bigcup_{-\mathbf{y} \in Bo} = X \oplus \overline{B} \tag{17}$$

o

$$X dil B = X \oplus \overline{B} \tag{18}$$

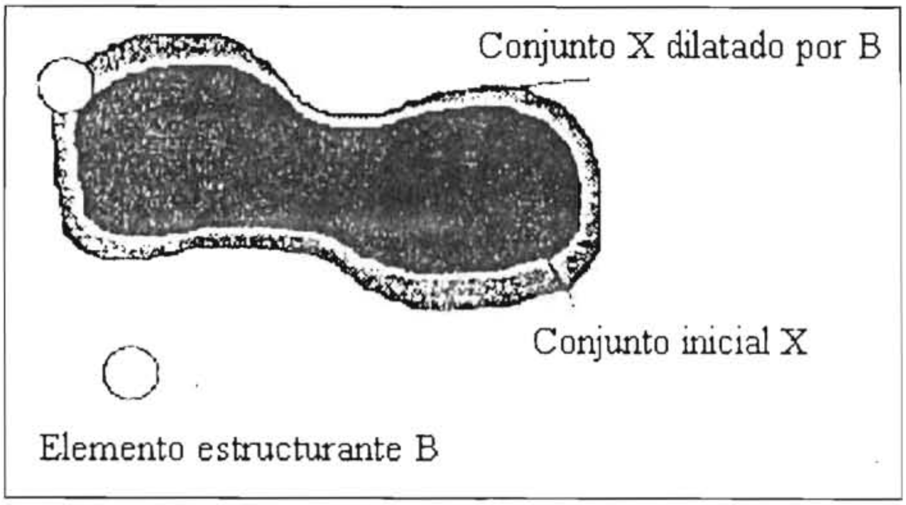


Figura A.9. Principio de dilatación binaria

Los efectos de la dilatación son:

- Agrandar las partículas
- Llenar los pequeños huecos
- Permitir la conexión de los granos próximos

A1.3.6. Propiedades de la erosión y la dilatación

Propiedad 1: En tanto que la erosión es una transformación no conmutativa, la dilatación es conmutativa :

$$X\,ero\,B \neq B\,ero\,X \quad \text{y} \quad X\,dil\,B = B\,dil\,X \tag{19}$$

Propiedad 2: La erosión y la dilatación por un punto se reduce a una translación. Como consecuencia, la dilatación y la erosión son invariantes por translación.

Propiedad 3: La dilatación es distributiva con respecto a la unión.

$$\mathbf{Xdil(B \cup B') = X \oplus ((\overline{B \cup B'}))} \tag{20}$$

donde $(\overline{\mathbf{B \cup B'}})$ significa el simétrico de (B ∪ B')

Propiedad 4: La erosión y la dilatación tienen dos propiedades con respecto a la repetición

Para la primera es:

$$(XeroB)eroB' = (X \oplus \overline{B}) \oplus B' \tag{21}$$

y para la segunda es:

$$(xdilB)dilB' = (X \oplus B) \oplus B' \tag{22}$$

Estas propiedades son fundamentales porque muestran que la erosión y la dilatación por un elemento estructurante se puede descomponer en erosiones y dilataciones por elementos estructurantes elementales. La aplicación de estas propiedades reside en el hecho de que la mayoría de los elementos estructurantes pueden ser entonces compuestos por la adición de Minkowski a partir de elementos más simples (figura A.10).

Esta propiedad es particularmente interesante para los elementos estructurantes convexos. Las erosiones bidimensionales se pueden realizar por operadores unidimensionales.

Propiedad 5: La erosión y la dilatación son operaciones crecientes.

$$\begin{aligned} X \subset X' &\Rightarrow XeroB \subset X'eroB \\ &\Rightarrow \mathrm{XdilB} \subset X'dilB \end{aligned} \tag{23}$$

y por la dualidad

$$\begin{aligned} B \subset B' &\Rightarrow BeroX \subset B'eroX \\ &\Rightarrow \mathrm{BdilX} \subset B'dilX \end{aligned} \tag{24}$$

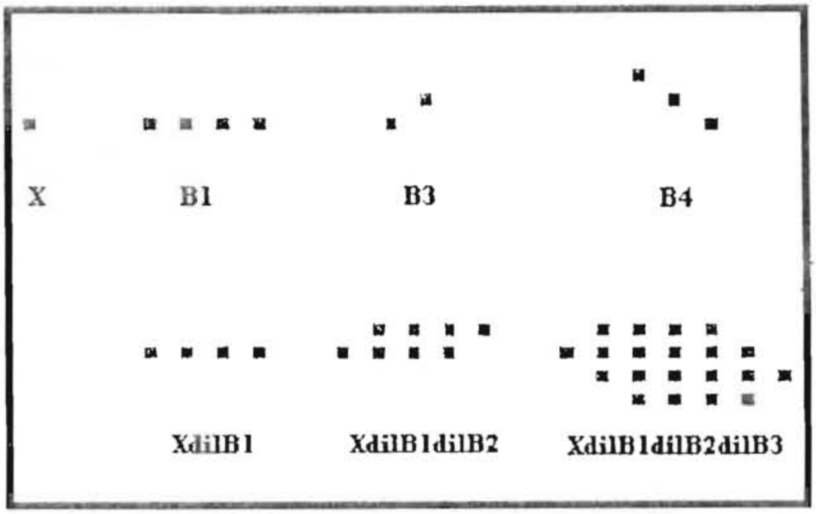


Figura A.10 Ejemplo de composición del elemento estructurante por dilatación

Propiedad 6: La dilatación es una operación extensiva

$$X \subset XdilB \tag{25}$$

Propiedad 7: La erosión es una operación antiextensiva

$$XeroB \subset X \tag{26}$$

Propiedad 8: La dilatación y la erosión son transformaciones continuas

A1.3.7. Abierto

A partir de la propiedad de iteratividad para la erosión y la dilatación, se introduce una nueva operación cuyo objetivo consiste en eliminar las partículas indeseables sin modificar el tamaño de las otras entidades. Intuitivamente, se puede ver que esta operación consiste en erodar y después dilatar el resultado de la erosión. Se define así mismo una nueva operación morfológica llamada el "abierto binario" y el nuevo conjunto procesado por el elemento estructurante B se llama el conjunto abierto por B (figura A.11)

Definida inicialmente por Serra a partir de las operaciones de Minkowski, se puede escribir como:

$$XabeB = (X\theta\breve{B}) \oplus B \tag{27}$$

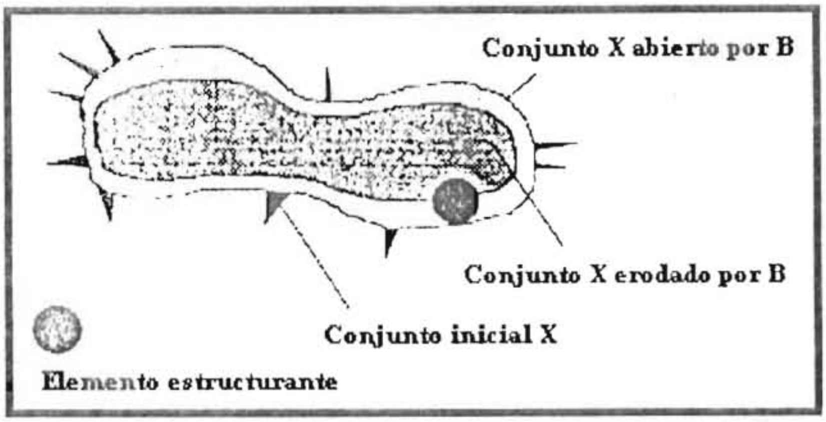


Figura A.11. Principio de abierto

que liga la operación de abierto con las operaciones anteriormente introducidas, la dilatación y la erosión, se puede escribir la siguiente relación:

$$XabeB(X\theta\bar{B}) \oplus B = (X\theta\bar{B}) \oplus \bar{B} \tag{28}$$

o sea

$$XabeB = (XeroB)dil\bar{B} \tag{29}$$

La operación de abierto no restituye de forma general el conjunto inicial

- El abierto nivela los contornos por el interior.
- El abierto separa las partículas.
- El abierto elimina las pequeñas partículas inferiores en tamaño a el elemento estructurante.
- Las entidades restantes después de la abertura quedan casi idénticas.
- El conjunto abierto es más regular que un conjunto inicial.
- El conjunto abierto es menos rico en detalles que un conjunto inicial.

A1.3.8. Cerrado

Se puede realizar la operación inversa, o sea, dilatar y después erodar el resultado de la dilatación.

Esta operación morfológica se llama el "cerrado binario" y el nuevo conjunto procesado por el elemento estructurante B se llama el conjunto cerrado por B (figura A.12)

El cerrado es la operación dual del abierto binario

$$(XabeB)^c = X^C cerB \tag{30}$$

O sea:

$$XcerB = (X \oplus \overline{B})\theta B \tag{31}$$

Relacionando la operación de cerrado con las operaciones de dilatación y erosión, se puede escribir la siguiente relación

$$XcerB = (X \oplus \overline{B})\theta B = (X \oplus \overline{B})\theta B \tag{32}$$

O

$$XcerB = (XdilB)ero\overline{B} \tag{33}$$

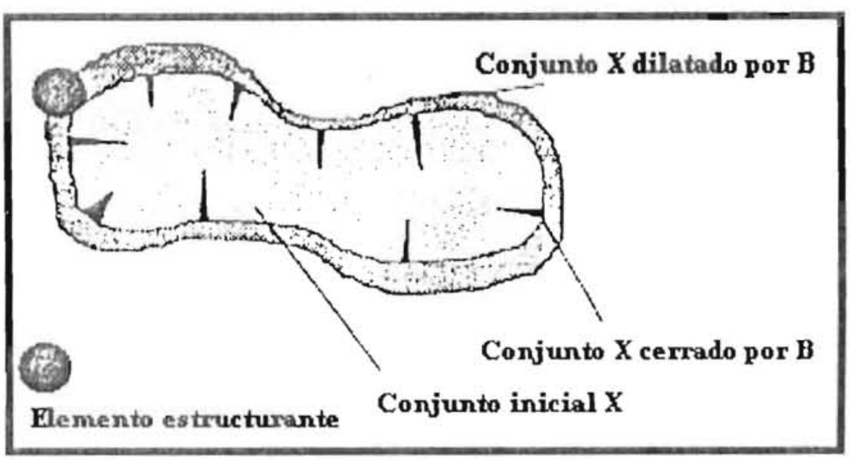


Figura A.12. Principio de cerrado

La operación de cerrado no restituye de forma general el conjunto inicial

- El cerrado suaviza las fronteras por el exterior.
- El cerrado llena los huecos en el interior de las partículas inferiores en tamaño a el elemento estructurante.
- El cerrado enmienda partículas próximas
- Las entidades restantes después del cerramiento quedan casi idénticas
- El conjunto cerrado es más regular que el conjunto inicial
- El conjunto cerrado es menos rico en detalles que el conjunto inicial

A1.3.9. Propiedades de abierto y cerrado

Para el abierto son:

- Idempotencia $(X \text{ abe } B) \text{ abe } B = X \text{ abe } B$
- Monotonía $Y \subset X \;\; Y \text{ abe } B \subset X \text{ abe } B$
- Antiextensividad $X \text{ abe } B \subset X$

Para el cerrado son:

- Idempotencia $(X \text{ cer } B) \text{ cer } B = X \text{ cer } B$
- Monotonía $Y \subset X \Rightarrow Y \text{ cer } B \subset X \text{ cer } B$
- Extensividad $X \subset X \text{ cer } B$

Las operaciones de abierto y cerrado difieren de las operaciones de erosión y de dilatación por la propiedad de idempotencia. Esta propiedad es definitiva en el proceso de filtrado. El proceso de abrir y cerrar con un elemento estructurante dado B no es sufuciente en la solución del problema de filtrado.

A1.3.10. Esqueletización

Un problema común en el procesamiento de una imagen binaria es determinar una replica "afinada" de esa imagen que sea fiel a la imagen original. El interés del proceso reside en comprimir los datos para permitir análisis futuros más rápidos. Un proceso comúnmente utilizado consiste en esqueletizar dicha imagen.

Sea un conjunto X y su frontera δx un punto x de X pertenece al esqueleto x, Esq(x), si la distancia Euclidiana de X hasta δx está restringida al menos por dos puntos distintos de X.

$$\begin{gathered} x \in (Esq(X) - Ey1) \\ y2 \in \delta X \\ \mathrm{y1} \neq \mathrm{y2} \end{gathered} \tag{34}$$

$$d(x, \delta X) = d(x, y1) = d(x, y2) \tag{35}$$

Se puede ilustrar una noción de esqueleto apoyado en la idea de la propagación del fuego en un campo. El fuego parte de todos los puntos del contorno de un campo propagándose de forma isotrópica. Cuando dos propagaciones de fuego se encuentran se aniquilan por la falta de combustibles. Los puntos de extinción constituyen entonces el esqueleto.

En otros terminos el esqueleto puede ser igualmente definido a partir del concepto de discos máximos contenidos en X. Para un punto que pertene a la figura de la imagen, existen varios discos centrados en ese punto completamente contenidos en la figura. En tanto, existe un solo disco de radio máximo contenido en la figura y centrado en ese punto. Cualquier disco que satisfaga esa condición se llama disco máximo. El conjunto de los centros de todos los discos máximos constituyen el esqueleto de la figura de la imagen (figura A.13). Un teorema permite extraer el esqueleto en términos de erosión y de dilatación (figura A.14).

$$Esq(X) = \bigcup_{\lambda>0} \bigcap_{\mu>0} \left[\frac{(Xero\lambda B)}{((Xero\lambda B)abe\mu B)} \right] \tag{36}$$

El esqueleto es la unión, según todos los λ positivos, de la intersección, según todos los μ positivos, de la diferencia del conjunto erodado de X por λB con el conjunto erodado de X por λB abierto μB.

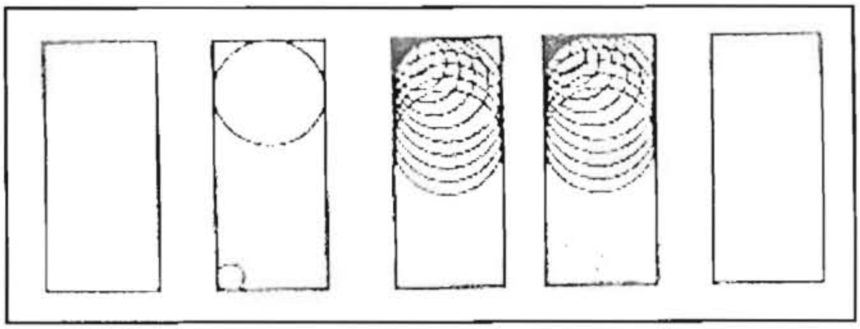


Figura A.13. Esqueleto por la noción de disco máximo

El termino:

$$x \in \bigcap_{\mu>0}\left[\frac{(Xero\lambda B)}{((Xero\lambda B)abe\mu B)}\right] \tag{37}$$

donde: $\frac{C_1}{C_2}$ representa la diferencia entre C_1 y C_2. Esto traduce la idea que X representa el centro de un disco máximo de radio λ.

Los discos de tamaño superior a λ pueden ser eliminados manipulando el operador intersección del termino ((XeroλB)abeμB)

Un segundo teorema, más accesible en términos de implementación, descompone el esqueleto morfológico en subesqueletos de la siguiente forma: Cada subesqueleto SEsq(X_1n) es asociado a un disco máximo nB($n \geq 0$) y representa el conjunto de todos los centros de X del disco máximo nB contenido en X. De esta manera se puede afirmar que el esqueleto Esq(X) representa la reunión de los subesqueletos SEsq(X,n)($n \geq 0$).

$$Esq(X) = \bigcup_n SEsq(X,n) \tag{38}$$

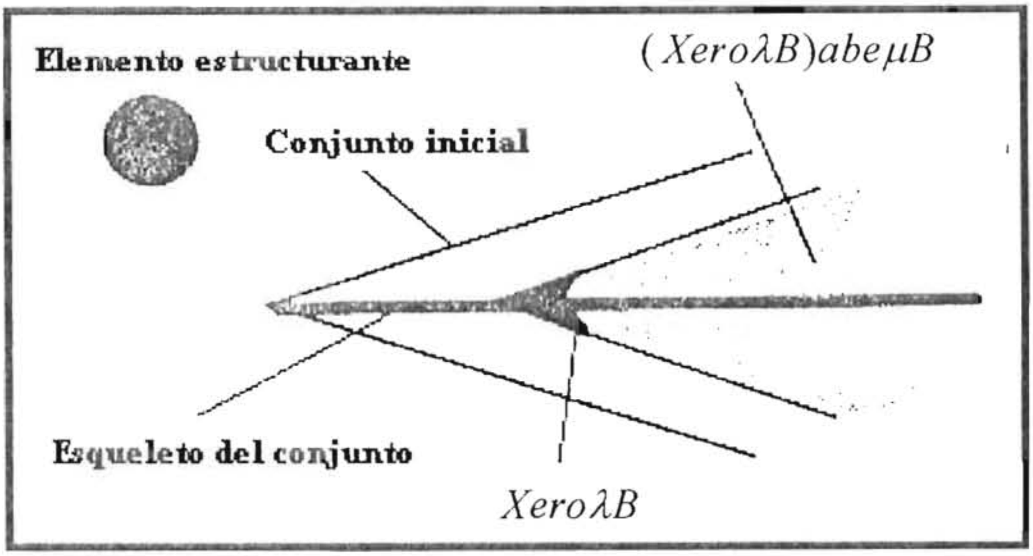


Figura A.14. Erosión y abertura de un conjunto X generado de un esqueleto

El subesqueleto SEsq(X,n) puede ser definido de la siguiente manera:

$$Esq(X) = \bigcup_n \left[\frac{(Xero(nB))}{((Xero(nB))abeB)} \right] \tag{39}$$

El conocimiento local del esqueleto Esq(X) permite la generación del conjunto inicial X. Un primer teorema formula este concepto:

$$X = \bigcup_{\rho >=} (Esq(X)dil(\rho B)) = \bigcup_{\rho >=} (Esq(X) \oplus (\rho \vec{B})) \tag{40}$$

donde ρ es el radio máximo asociado a cada punto del esqueleto Esq(X). El esqueleto obtenido por el método anterior en el caso de imágenes digitales (usando como elemento estructurante la malla elemental de la red hexagonal) no tiene obligatoriamente las propiedades del esqueleto no digital por causa de los valores discretos de λ y de μ.

Un segundo teorema formula la reconstrucción implementable del conjunto inicial X a partir del esqueleto Esq(X)

$$X = \bigcup_n [SEsq(X,n)dil(n\overline{B})] \tag{41}$$

Esta propiedad de reconstrucción del conjunto X es muy interesante pues podemos "reducir" el conjunto X sabiendo que retornaremos a él y que la memorización del esqueleto y del conjunto requiere menos espacio. Esta técnica se constituye en una herramienta de compresión.

La esqueletización no es una transformación creciente y es una operación antiextensiva

$$Esq(X) \subset X \tag{42}$$

A1.3.11. Afinamiento

Una transformación homotopica es una transformación que no modifica el número de conectividad. Esto quiere decir que la imagen inicial y la transformada tiene el mismo número de partes. En R^2, una transformación de este tipo consiste en reducir el espesor de los componentes conexos de X hasta un valor infinitamente pequeño sin cambiar el número y el tipo de componentes. Se puede realizar esa operación a partir de una transformación Hit-miss llamada afinamiento.

El afinamiento "afi" de un conjunto X consiste en retirar de él puntos que corresponden a una configuración dada. Por lo tanto se puede escribir:

$$XafiV = \frac{X}{(X \hom V)} \tag{43}$$

donde $\frac{C_1}{C_2}$ representa la diferencia entre C_1 y C_2.

La operación consiste en aplicar el par de elementos estructurantes hasta no tener más modificaciones. En lugar de afinar una imagen a través de un par de dos elementos estructurantes,