IMÁGENES CON PLANOS

Método. El método de las imágenes simplifica, con una conjetura, la determinación del campo electromagnético en presencia de interfaces, como planos, esferas y cilindros circulares, cuando hay fuentes puntuales del campo como cargas, dipolos o filamentos con cargas o corrientes, que crean singularidades en las propiedades del campo. La conjetura diseña un problema ficticio, cuyas soluciones son las mismas del real en la región de interés, para sustituir la influencia sobre el campo de las interfaces, por fuentes de magnitudes y posiciones conocidas; éstas se ubican como imágenes, con respecto a las interfaces, de las fuentes reales del campo. La solución es válida si cumple las condiciones de frontera del problema real y las ecuaciones de Maxwell.

Interfaz plana conductor dieléctrico. Si el problema real consiste en cargas ubicadas frente a un plano conductor conectado a tierra, el ficticio queda definido por las mismas cargas reales y las imágenes especulares de éstas con respecto al plano, que se supone un espejo.

Problema. Una carga puntual, q, está a una distancia d de un plano conductor conectado a tierra, en un dieléctrico de permitividad ε. Hallar la fuerza sobre la carga.

Paso I. Coordenadas. Cartesianas; ejes X e Y, en el plano, el Z es perpendicular a éste y pasa por la carga.

Región. Los puntos en los que: $0 < z < \infty$, con $\mathbf{r} \neq \mathbf{i}_z d$.

Consideraciones. En la región:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0,\ \mathbf{J} = \mathbf{0},\ \mathbf{B} = \mathbf{0},\ \mathbf{H} = \mathbf{0};\ \text{sistema electrostático.}$$

$$\rho = 0, \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E};\ \text{dieléctrico.}$$

Ecuaciones. En la región: $\nabla \bullet \mathbf{E} = 0$ y $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$.

Paso II. Potencial eléctrico. $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ y $\nabla^2\Phi = 0$. El problema ficticio está formado por cargas q y -q, colocadas en los puntos (0,0,d) y (0,0,-d); se definen, además:

- $r_1 = \left[x^2 + y^2 + (z-d)^2\right]^{1/2}$ y $r_2 = \left[x^2 + y^2 + (z+d)^2\right]^{1/2}$.

Paso III. Condiciones de frontera.

- En: $z = 0$, para todo x e y; $\Phi = 0$.
- En: $z \to \infty$, para todo x e y; $\Phi \neq \infty$.
- En: $\mathbf{r} \to \mathbf{i}_z d$; $\Phi \to \dfrac{q}{4\pi\varepsilon r_1}$.

Solución. Para Φ. $\Phi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)$, para $z > 0$.

Para E. $\mathbf{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{\mathbf{i}_1}{r_1^{\,2}} - \dfrac{\mathbf{i}_2}{r_2^{\,2}}\right)$, para $z > 0$

Fuerza sobre q. $\mathbf{F} = q\mathbf{E}_q = -\mathbf{i}_z \dfrac{q^2}{16\pi\varepsilon d^2}$.

Problema. Una carga puntual, q, en un dieléctrico de permitividad ε, está entre dos semiplanos conductores conectados a tierra que forman un ángulo diedro α. Hallar la fuerza sobre la carga.

Solución. Si: $\alpha = \pi / N$, con $N = 2,3,\ldots$, el problema se puede resolver por imágenes, con un problema ficticio de 2N cargas, iguales a q y de signos alternos, en los vértices de un polígono de 2N lados y que equidistan del vértice del ángulo diedro; cuando: $\alpha \neq \pi / N$ el problema puede resolverse por transformación conforme.

Problema. Una carga puntual, q, está a una distancia d de la interfaz plana de dos dieléctricos semiinfinitos, de permitividades ε_1 y ε_2, inmersa en el dieléctrico de permitividad ε_1. Hallar la fuerza sobre la carga.

Solución. Similar a la del problema de la interfaz plana conductor dieléctrico, con las siguientes adiciones:

La región es todo el espacio, salvo: $z = 0$ y $\mathbf{r} = \mathbf{i}_z d$.

- Los dieléctricos se designan con los índices 1 y 2.
- $\mathbf{D}_1 = \varepsilon_1 \mathbf{E}_1$ y $\mathbf{D}_2 = \varepsilon_2 \mathbf{E}_2$, en los dieléctricos.
- El problema ficticio tiene, para $z > 0$, cargas q y q_1 en (0,0,d) y (0,0,-d); para $z < 0$, la carga q_2 en (0,0,d).
- En: $z = 0$, para todo x e y; $\Phi_1 = \Phi_2$.
- En: $z = 0$, para todo x e y; $\varepsilon_1 \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \varepsilon_2 \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial z}$.
- En: $z \to \pm\infty$, para todo x e y; Φ_1 y $\Phi_2 \neq \infty$.

Cargas virtuales. Son:

- $q_1 = \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q$ y $q_2 = \dfrac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q$.

Φ. $$\Phi = \begin{cases} \dfrac{2q}{4\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) r_1}, & \text{para } z < 0 \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_1}\left[\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) r_2}\right], & \text{para } z > 0 \end{cases}$$

Fuerza sobre q. $\mathbf{F} = q\mathbf{E}_q = \mathbf{i}_z \dfrac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) q^2}{16\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) d^2}$.

IMÁGENES CON ESFERAS

Problema. Una carga puntual, q, está en un dieléctrico de permitividad ε a una distancia d del centro de una esfera conductora, de radio a, conectada a tierra. Hallar la fuerza sobre la carga.

Paso I. Coordenadas. Esféricas; origen, en el centro de la esfera, el eje Z pasa por la carga puntual.

Región. Los puntos en los que: $a < r < \infty$, con $\mathbf{r} \neq \mathbf{i}_z d$.

Consideraciones. En la región:

$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$; por la simetría.

$\frac{\partial}{\partial t} = 0$, $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, $\mathbf{H} = \mathbf{0}$; sistema electrostático.

$\rho = 0, \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$; dieléctrico.

Ecuaciones. En la región: $\nabla \bullet \mathbf{E} = 0$ y $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$.

Paso II. Potencial eléctrico. $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ y $\nabla^2\Phi = 0$. El problema ficticio está formado por cargas q y q_1, colocadas en los puntos (d,0) y (b,0); se definen, además:

$$r_1 = \left[r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta\right]^{1/2} \text{ y } r_2 = \left[r^2 + b^2 - 2rb\cos\theta\right]^{1/2}.$$

Paso III. Condiciones de frontera.

- En: $r = a$, para todo θ y φ; $\Phi = 0$.
- En: $r \to \infty$, para todo θ y φ; $\Phi \neq \infty$.
- En: $\mathbf{r} \to \mathbf{i}_z d$; $\Phi \to \dfrac{q}{4\pi\varepsilon r_1}$.

Solución. Carga virtual. $q_1 = -\dfrac{a}{d}q$ y $b = \dfrac{a^2}{d}$.

Para Φ. $\Phi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{q}{r_1} + \dfrac{q_1}{r_2}\right)$, para $r > a$.

Para E. $\mathbf{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{\mathbf{i}_1 q}{r_1^{\,2}} + \dfrac{\mathbf{i}_2 q_1}{r_2^{\,2}}\right)$, para $r > a$.

Fuerza sobre q. $\mathbf{F} = q\mathbf{E}_q = \mathbf{i}_z \dfrac{qq_1}{4\pi\varepsilon(d-b)^2}$.

Carga de la esfera. Es: $Q_0 = q_1 = -\frac{a}{d}q$.

Problema. Una carga puntual, q, está en un dieléctrico de permitividad ε a una distancia d del centro de una esfera conductora, de radio a, cuyo potencial con respecto al infinito es V_0. Hallar la fuerza sobre la carga.

Solución. Similar a la del problema anterior; cambia:

En: $r = a$, para todo θ y φ; $\Phi = V_0$.

Al problema ficticio, formado por las cargas q y q_1, se añade la carga, $q_2 = 4\pi\varepsilon a V_0$, en el centro de la esfera.

Solución. Para Φ. $\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{q}{r_1} + \frac{q_1}{r_2} + \frac{q_2}{r}\right)$, para $r > a$.

Para E. $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{\mathbf{i}_1 q}{r_1^2} + \frac{\mathbf{i}_2 q_1}{r_2^2} + \frac{\mathbf{i}_r q_2}{r^2}\right)$, para $r > a$.

Fuerza sobre q. $\mathbf{F} = q\mathbf{E}_q = \mathbf{i}_z \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{-\ q_1}{(d-b)^2} + \frac{q_2}{d^2}\right]$.

Carga de la esfera. $Q = q_1 + q_2$.

Problema. Una carga puntual, q, está en un dieléctrico de permitividad ε a una distancia d del centro de una esfera conductora, de radio a, aislada y cuya carga es Q_0. Hallar la fuerza sobre la carga puntual.

Solución. Similar a la del primer problema; cambia:

- En: $r = a$, para todo θ y φ; $\Phi = C$.
- En: $r = a$; $Q_0 = \oint_S \mathbf{D} \bullet d\mathbf{A}$.
- Al problema ficticio, formado por las cargas q y q_1, se añade la carga, $q_2 = Q_0 - q_1$, en el centro de la esfera.

Solución. Para Φ. $\Phi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{q}{r_1} + \dfrac{q_1}{r_2} + \dfrac{q_2}{r}\right)$, para $r > a$.

Para E. $\mathbf{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{\mathbf{i}_1 q}{r_1^2} + \dfrac{\mathbf{i}_2 q_1}{r_2^2} + \dfrac{\mathbf{i}_r q_2}{r^2}\right)$, para $r > a$.

Fuerza en q. $$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_q = \mathbf{i}_z \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{\frac{aq}{d}}{(d-b)^2} + \frac{Q_0 + \frac{aq}{d}}{d^2}\right].$$

Obsérvese que, aunque Q_0 y q tengan igual signo, la fuerza puede ser atractiva cuando $d \approx a$.

Potencial en la esfera. Es: $V_0 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon a}\left(Q_0 + \dfrac{aq}{d}\right)$.

Problema. Una carga puntual, q, está en un dieléctrico de permitividad ε a una distancia d del centro de una esfera conductora, de radio a, aislada y descargada. Hallar la fuerza sobre la carga puntual.

Solución. En el problema anterior se hace: $Q_0 = 0$.

Para Φ. $\Phi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{q}{r_1} - \dfrac{aq}{dr_2} + \dfrac{aq}{dr}\right)$, para $r > a$.

Para E. $\mathbf{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{\mathbf{i}_1}{r_1{}^2} - \dfrac{\mathbf{i}_2 a}{dr_2{}^2} + \mathbf{i}_r \dfrac{aq}{dr^2}\right)$, para $r > a$.

Fuerza en q. $\mathbf{F} = q\mathbf{E}_q = \mathbf{i}_z \dfrac{aq^2}{4\pi\varepsilon d}\left[-\dfrac{1}{(d-b)^2} + \dfrac{1}{d^2}\right]$.

$b = \dfrac{a^2}{d}$

Potencial en la esfera. $V_0 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon d}$.

IMÁGENES CON CILINDROS

Hilo cargado. **E** y Φ de un hilo recto, infinito, cargado con λ y en un dieléctrico de permitividad ε, donde r es la distancia al hilo y C una constante, son:

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}_r \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r} \text{ y } \Phi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln r + C.$$

Dos hilos cargados. **E** y Φ de dos hilos rectos, paralelos, distanciados 2d, cargados con $\pm\lambda$ e inmersos en un dieléctrico de permitividad ε, son:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{\mathbf{i}_1}{r_1} - \frac{\mathbf{i}_2}{r_2}\right) \text{ y } \Phi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

donde r_1 y r_2 son las distancias del punto a los hilos de carga $+\lambda$ y $-\lambda$, respectivamente, y se supone: $\Phi = 0$, en el plano mediatriz a los hilos. Obsérvese que:

$$\Phi > 0, \text{ si } r_1 < r_2 \wedge \Phi < 0, \text{ si } r_1 > r_2.$$

Equipotenciales. Son cilindros circulares que dependen de un parámetro, M. Respecto a un sistema cartesiano plano en el que los hilos de carga, $+\lambda$ y $-\lambda$, pasan por los puntos (0,0) y (- 2d,0), el parámetro de la familia, la posición del eje y el radio de cada cilindro, son:

$$M = \frac{r_1}{r_2};\ x_c = \frac{2dM^2}{1-M^2}\ \text{e}\ y_c = 0.$$

$$R = \begin{cases} \dfrac{2dM}{1-M^2}, \text{ para } 0 < M < 1. \\ \\ \dfrac{2dM}{M^2-1}, \text{ para } 1 < M < \infty. \end{cases}$$

Aplicaciones. Si el problema real está formado por dos cilindros conductores paralelos, los hilos de carga $\pm\lambda$ forman el problema ficticio cuya solución es también la del primero; para ello, basta hacer coincidir dos de las superficies equipotenciales del ficticio con las de los cilindros del real.

Problema. Dos cilindros conductores, paralelos, de radios a y b, separados entre ejes la distancia c, con $c > a + b$, están inmersos en un dieléctrico y sometidos al voltaje V_0. Hallar la capacitancia y la fuerza mutua, por unidad de longitud de los cilindros.

Paso I. Coordenadas. Cartesianas; el eje Z es paralelo a los cilindros, el X pasa por los ejes de los mismos, y el origen se ubica en el hilo virtual de carga $+\lambda$.

Región. Puntos exteriores a los cilindros; al de la derecha, de radio a, se asigna el subíndice 1 y 2 al otro.

Consideraciones. En la región:

- $\dfrac{\partial}{\partial z} = 0$; por la simetría.
- $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0,\ \mathbf{J} = \mathbf{0},\ \mathbf{B} = \mathbf{0},\ \mathbf{H} = \mathbf{0}$; sistema electrostático.
- $\rho = 0, \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$; dieléctrico.

Ecuaciones. En la región: $\nabla \bullet \mathbf{E} = 0$ y $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$.