

REOLOGÍA DE SUSPENSIONES:

VISCOSIDAD DE SUSPENSIONES MINERALES BAJO UNA APROXIMACIÓN TERMOMECAÁNICA

UN NUEVO MODELO DE LA VISCOSIDAD DE SUSPENSIONES MINERALES

Profesor: M. Oswaldo Bustamante Rúa
I.M.M., DCPME, MSc.
Departamento de Recursos Minerales –CIMEX
Facultad de Minas

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE DE MEDELLÍN

Medellín, 1999

UNAL-Medellín



6 4000 00116227 3

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
DEPTO. DE RECURSOS MINERALES
BIBLIOTECA MINAS

I
531.1134
B87

A Margarita, Daniel y Pablo

INDICE

	Pag.
1. Introducción	1
Definición de una suspensión	2
2. Antecedentes y derivación clásica de la ecuación constitutiva de un fluido viscoso	4
Derivación clásica de la ecuación constitutiva de un fluido viscoso	5
Definición del tensor esfuerzo	7
Principio de Stokes	7
Concepto de presión	12
Dependencia polinomial	13
3. Termodinámica de la hidrodinámica clásica	15
Función de disipación	15
Principio de conservación de la energía	15
4. Análisis termodinámico de los cambios de energía interna en la deformación de suspensiones	18
Modelos de la viscosidad considerando las suspensiones como fluidos Newtonianos generalizados.	23
Definición de la viscosidad reducida	25
<i>Modelos de la viscosidad que dependen de la tasa de cizalladura $\dot{\gamma}$</i>	25
Modelo de la viscosidad de Cross	27
Modelo de la viscosidad de Ellis	28
Modelo de la viscosidad de Carreau	28
Modelo de la viscosidad de la ley de potencia	28
Ecuación constitutiva de Ostwald	29
Modelo de la viscosidad de Sisko	30
Ecuación constitutiva de Bingham	30
Ecuación constitutiva de Herschel-Bulkley	31
<i>Modelos de la viscosidad que dependen de la fracción volumétrica de sólidos</i>	31
Modelos de la viscosidad que dependen de ϕ , en suspensiones diluidas	32
Modelos de la viscosidad que dependen de ϕ , en suspensiones concentradas	33
Máxima fracción de empaquetamiento ϕ_c	34
Interpretación del factor $(1-\lambda\phi)$ de acuerdo a la teoría de formación de paquetes	37
Aproximación de Krieger & Dougherty	39
Efecto implícito al considerar la viscosidad de la suspensión únicamente en términos de la fracción volumétrica de sólidos	43
Modelos de la viscosidad que involucran ϕ y el tamaño de partícula	44

Análisis dimensional	47
Número adimensional de la viscosidad reducida	48
Número adimensional de empaquetamiento	48
Número adimensional de densidad reducida	49
Número adimensional de longitud reducida	49
Número adimensional de Deborah	49
Tiempo de relajación y memoria de una suspensión	49
Número adimensional de Peclet	51
Número adimensional de Reynolds	52
Modelos de viscosidad empleando análisis dimensional de Barrientos <i>et. al.</i>	53
7. Teoría de disipación de energía mecánica para el cálculo de la viscosidad de una suspensión	55
8. Nuevo modelo de la viscosidad de una suspensión	58
9. Trabajo experimental y validación del modelo	60
10. Discusión	72
11. Conclusiones	74
12. Bibliografía	75

Notación

\mathbf{T}	Tensor de esfuerzo definido en la ecuación (1) y la ecuación (7)
\mathbf{L}	Tensor gradiente de velocidad definido en la ecuación (5)
\mathbf{D}	Parte isotrópica del tensor \mathbf{L} definido en la ecuación (6)
\mathbf{I}	Tensor identidad
\mathbf{T}^E	Tensor de esfuerzo extra definido en la ecuación (8) y en la ecuación (30)
\mathbf{t}	Vector esfuerzo de Cauchy, definido en la ecuación (9)
\mathbf{n}	Vector unitario de superficie definido en la ecuación (9)
I_i	Invariantes principales del tensor \mathbf{T} definidos en la ecuación (13)
K_C	Energía cinética definida en la ecuación (39)
U	Energía interna por unidad de volumen definida en la ecuación (40)
$F(x)$	Distribución de tamaños de partículas definida en la ecuación (124)
K_{RR}	Parámetro de tamaño definido en la ecuación (124)
S	Entropía específica definida en la ecuación (47)
m	Parámetro de distribución definido en la ecuación (124)
l	Espaciamiento promedio entre las partículas definido en la ecuación (153)
t_R	Tiempo de relajación definido en la ecuación (133)
$f(x_i)$	Fracción en peso en el intervalo de tamaño $i+di$
x_p	Tamaño de paquete de partículas definido en la ecuación (54)
Φ	Función de disipación de energía mecánica definida en la ecuación (38)
μ_D	Viscosidad de dilatación definida en la ecuación (1)
μ_a	Viscosidad aparente definida en la ecuación (70)
μ_r	Viscosidad relativa definida en la ecuación (73)
μ_S	Viscosidad de suspensión
μ_f	Viscosidad del fluido que forma parte de la suspensión
τ	Esfuerzo de cizalladura definido en la ecuación (68)
μ_o	Viscosidad Newtoniana a baja tasa de cizalladura definida en la figura 4
μ_∞	Viscosidad Newtoniana a alta tasa de cizalladura definida en la figura 4
$\dot{\gamma}$	Tasa de cizalladura definida en la ecuación (68)
ψ	Factor de forma de las partículas
λ	Parámetro de la ecuación (100)
ϕ	Fracción volumétrica de sólidos en la suspensión
ϕ_C	Fracción volumétrica crítica definida en la figura 5
κ	Parámetro de la ecuación (171)
De	Número de Deborah definido en la ecuación (134)
Re	Número de Reynolds definido en la ecuación (140)
Pe	Número de Peclet definido en la ecuación (139)

1. INTRODUCCIÓN

La disipación de energía mecánica ocasionada por la deformación permanente de suspensiones, es uno de los aspectos de mayor interés científico e industrial en la ingeniería actual.

Este interés se ha originado con la necesidad de establecer relaciones matemáticas que permitan determinar la cantidad de energía necesaria que se debe suministrar para lograr que un volumen determinado se deforme permanentemente bajo un esfuerzo de contacto, el cual puede ser de tracción-compresión o de cizalladura.

De otro lado, es evidente que las suspensiones bajo determinadas condiciones de composición (fracción volumétrica de sólidos ϕ , tamaños de las partículas y forma de ellas), poseen la propiedad de deformarse permanentemente bajo la acción de un esfuerzo de cizalladura y normalmente esta deformación tipo líquido de la suspensión es de varios órdenes de magnitud respecto a la escalas de deformación del fluido que forma parte de la mezcla, bajo la misma tasa de cizalladura. ✓

Si las suspensiones poseen un comportamiento tipo líquido, surge entonces la posibilidad de caracterizarlas mediante una ecuación constitutiva, en la cual como se detallará más adelante, juega un papel importante la viscosidad como parámetro hidrodinámico principal.

Dentro de este esquema, la modelación de la viscosidad de suspensiones es imprescindible, pero a su vez, las dificultades que en ello surgen no son de poca importancia.

En este sentido, existen varias aproximaciones para el cálculo de la viscosidad, pero en la actualidad no existe un modelo que clausure la investigación reológica de suspensiones, las cuales se detallarán más adelante.

Diferente a las concepciones clásicas, esta investigación desarrolla un modelo para la viscosidad de suspensiones considerando elementos de la termomecánica basados en los cambios de la energía interna ocasionados por la aplicación de esfuerzos de cizalladura sobre un volumen determinado de suspensión sin intercambio de calor a través de las paredes que circundan el volumen de control. De esta manera, para el caso analizado en este estudio, se investiga la deformación como un proceso puramente termomecánico de carácter isoterma.

La metodología del análisis es básicamente una aproximación basada en la mecánica del medio continuo, por lo que se considera a la suspensión como un fluido Newtoniano generalizado. Es por ello que en la sección 2 se desarrolla la ecuación constitutiva de un fluido viscoso, mientras la sección 3 desarrolla la termodinámica clásica de la hidrodinámica, la sección 4 analiza la termodinámica de la deformación para suspensiones, la sección 5 presenta los principales modelos de viscosidad que se conocen en la literatura científica, la sección 6 desarrolla el análisis dimensional de la deformación de

suspensiones, mientras la sección 7 muestra la teoría de disipación de energía mecánica para el cálculo de la viscosidad.

El aporte de la presente investigación se inicia en la sección 4 en la cual se expone el análisis termodinámico de los cambios de energía interna en la deformación de una suspensión compuesta por un fluido Newtoniano y un sistema particulado formado por partículas de diferentes tamaños y se demuestra que la deformación isothermal de una suspensión sólo cambia los niveles de energía interna del sistema pero no altera la distribución de ella, para luego continuar específicamente en la sección 8 donde se desarrolla la estructura de un nuevo modelo; el cual, bajo algunas suposiciones, permite obtener la viscosidad reducida de una suspensión.

La evaluación y validación experimental del modelo propuesto se detalla en la sección 9 y se reportan los resultados y los valores cuantitativos de los parámetros experimentales en la sección 10.

Para terminar, se puede observar fácilmente que la metodología teórico-práctica que se siguió en esta investigación permitió establecer una estrategia en la cual se obtiene la estructura de los modelos mediante el uso de una aproximación fenomenológica y los parámetros de la ecuación obtenida se precisan haciendo uso de un ajuste del modelo incluyendo una evaluación estadística.

Definición de una suspensión

Una suspensión es una mezcla de una fase fluida o continua con una fase dispersa o discontinua. La fase discontinua puede ser aire, gotas de aceite o partículas duras, por lo cual la suspensión recibe el nombre de espuma, emulsión y pulpa, respectivamente.

Si se observa el comportamiento reológico de un fluido al cual se le han agregado partículas, se puede verificar fácilmente que la presencia de éstas modifica substancialmente la disipación de energía mecánica a medida que se deforman permanentemente los fluidos a una tasa de cizalladura determinada. ✓

Las modificaciones del comportamiento reológico de las suspensiones llegan a ser tan abruptas que si el fluido que forma parte de la suspensión es Newtoniano, la presencia de las partículas puede generar comportamientos no-Newtonianos de la mezcla. ✓

Es bueno tener en la cuenta que la deformación de una suspensión se origina principalmente por la deformación del fluido, el que a su vez le transmite los esfuerzos de contacto a las partículas sólidas, las cuales se ven obligadas a desplazarse implicando colisiones y reorientación de las partículas con el fin de atenuar la disipación de energía.

De esta manera, la suspensión se comporta mecánicamente como un fluido al cual se le ha modificado substancialmente las propiedades mecánicas.

Resumiendo, una suspensión es un material que de acuerdo a las características de la deformación puede presentar comportamiento tipo fluido, pero es posible que bajo otras circunstancias presente comportamiento tipo sólido, lo cual como se detallará más adelante depende fuertemente de las condiciones de deformación.

Alcance de esta investigación

Esta investigación pretende hacer un aporte a la reología de suspensiones, ya que desarrolla la deducción de un nuevo modelo de la viscosidad de pulpas minerales a partir de una visión extraída de la termomecánica y el cual se validó experimentalmente.

Antes de terminar, se debe advertir que la lectura de este texto se recomienda a estudiantes avanzados en fluidodinámica y que posean formación en reología, ya que se emplea una buena cantidad de términos que suelen usarse con frecuencia en la investigación reológica de materiales, y se obvian algunas demostraciones y/o definiciones clásicas, las que están fuera del alcance de este texto y lo harían exageradamente largo.

2. ANTECEDENTES Y DERIVACIÓN CLÁSICA DE LA ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE UN FLUIDO VISCOSO

La modelación de la viscosidad o de la ecuación constitutiva de una suspensión implica el estudio del comportamiento mecánico, el cual en no pocas ocasiones es bastante complejo y ello explica los diferentes intentos para formular una ecuación aproximadamente correcta.

Una de las áreas de estudio que se ha desarrollado en la modernidad ha sido la Mecánica Racional Moderna a través de los trabajos de Serrin (1959), Trusdell & Noll (1965), Happel & Brenner (1965), Macosko (1994), Edgal et. al. (1995) y Volkov & Leonov (1996), entre otros.

De los anteriores, Trusdell & Noll (1965) establecen la base axiomática para la formulación de ecuaciones constitutivas introduciendo la teoría de funciones isotrópicas las cuales proveen la base matemática para desarrollar ecuaciones constitutivas de fluidos Newtonianos generalizados.

Por otro lado, existen diferentes aproximaciones teóricas, las cuales no son estrictamente desarrolladas a partir de la mecánica del medio continuo y pretenden encontrar relaciones constitutivas para fluidos no-Newtonianos.

Resumiendo, Bustamante (1998) ha clasificado las diferentes aproximaciones de la siguiente manera:

✓ **Aproximación micromecánica de las suspensiones.**

La contribución más importante bajo esta aproximación la hizo Hwang & Shen (1989). Ellos deducen un modelo del tensor de esfuerzo extra de la suspensión, identificando cada uno de los mecanismos de interacción hidrodinámica entre el fluido y las partículas y entre las partículas mismas. Posteriormente, promedian los valores deducidos de acuerdo a un criterio seleccionado, los cuales se emplean para resolver las ecuaciones de conservación del momento y determinar la ecuación constitutiva global.

✓ **Aproximación microestructural.**

Esta aproximación está basada fuertemente en la evidencia experimental de fenómenos de difusión generados por el campo de cizalladura al que está sometida la suspensión. Los principales trabajos orientados por esta estrategia son los de Eckstein *et. al.* (1977), Leighton & Acrivos (1987), Brady & Morris (1989) y Brady & Morris (1996).

Bajo esta aproximación, se defiende la idea de que la isotropía de la suspensión durante la deformación está fuertemente controlada por los fenómenos difusionales, muy similares al

movimiento Browniano generado por el campo de cizalladura, lo que se denominará efectos difusionales cizalle-generados.

Una suspensión en la que ocurran estos procesos y que a su vez ellos controlan la reología de la pulpa, tiene la posibilidad de que el número de Peclet (Pe) proporcione la información necesaria para caracterizar la deformación. Sin embargo, si los procesos convectivos controlan fuertemente la reología de la suspensión el número de Reynolds (Re) puede caracterizar el flujo de la suspensión.

Además de lo anterior, existe la posibilidad de que ambos procesos de transporte, los difusionales tipo Brownianos y los convectivos controlen conjuntamente la reología de la suspensión, y en estos casos Bustamante (1999) define un grupo adimensional compuesto por los números de Reynolds (Re) y de Peclet (Pe), conjuntamente.

De otro lado, no son pocos los trabajos de modelación empírica de la viscosidad de pulpas en donde la fase discontinua está compuesta por partículas de forma esférica y donde ellas tienen un único tamaño, las que en mineralurgia se le conocen como suspensiones compuestas por monotamaños.

Para terminar, es necesario aclarar que independiente de la aproximación que se escoja, todas las aproximaciones asumen que la suspensión es un fluido Newtoniano generalizado, por lo cual a continuación se detalla la formulación de la ecuación constitutiva para este tipo de fluidos.

Derivación clásica de la ecuación constitutiva de un fluido viscoso

Serrin (1959) desarrolla la ecuación constitutiva de un fluido Newtoniano generalizado empleando el principio de Stokes y asumiendo una deformación Lagrangiana de los fluidos.

Suponer que las deformación son Lagrangianas, implica asumir que las deformaciones son muy pequeñas a medida que se varía la tasa de cizalladura o el esfuerzo de cizalladura, por lo cual, se puede decir que el tensor esfuerzo aplicado genera una tasa de deformación, las cuales son directamente proporcionales.

Antes de iniciar la deducción del tensor de esfuerzo \mathbf{T} para un fluido Newtoniano generalizado debe tenerse presente que a partir de la teoría de funciones isotrópicas se puede deducir que para un fluido viscoso lineal el tensor esfuerzo \mathbf{T} tiene la siguiente ecuación constitutiva:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu_D(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T) \quad (1)$$

Donde p es la presión, \mathbf{v} es el campo de velocidad, μ_D es la viscosidad de dilatación y μ la viscosidad de cizalladura.

Puede notarse en la ecuación (1) que los dos primeros términos corresponden a la contribución de los esfuerzos normales, pues el primero representa el esfuerzo a compresión ejercido por el medio externo, mientras que el segundo término representa el esfuerzo generado al interior del fluido en la deformación y el cual puede ser de tracción o compresión, dependiendo de si la suspensión se expande o se contrae en el proceso.

De otro lado, el tercer término corresponde a la contribución de los esfuerzos de cizalladura. Puede observarse que la magnitud del tensor de esfuerzo está determinada exclusivamente por las fuerzas de contacto.

Ahora bien, de acuerdo a la ecuación de la continuidad se tiene que:

$$\frac{\delta(\rho \mathbf{v})}{\delta t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2)$$

Si el fluido es incompresible, ρ es constante entonces:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3)$$

Por lo que el segundo término a la derecha de la ecuación (1) se anula y sólo interesa la viscosidad de cizalle μ para este tipo de fluidos. Esto implica que la dilatación o contracción para fluidos incompresibles es cero y por lo tanto el único esfuerzo normal importante es la presión hidrodinámica p .

De otro lado, el término

$$\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \quad (4)$$

de la ecuación (1) corresponde a la parte simétrica y objetiva del tensor:

$$\mathbf{L} = \nabla \mathbf{v} \quad (5)$$

mientras que $\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T)$ es la parte antisimétrica del mismo tensor \mathbf{L} , así que:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T) \quad (6a)$$

ósea que:

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (6b)$$

Siendo:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \quad \text{y} \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T) \quad (6c)$$

Reemplazando la ecuación (6c) en la ecuación (1) y considerando que una suspensión es un fluido incompresible debido a lo planteado en la ecuación (3) se obtiene el modelo del tensor de esfuerzo:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu_s\mathbf{D} \quad (7)$$

La ecuación (7) es la ecuación constitutiva del tensor de esfuerzo considerando los dos tipos de esfuerzos de contacto que puede soportar un fluido incompresible, la presión hidrodinámica p , la cual representa los esfuerzos normales y el esfuerzo de cizalladura representado por el tensor \mathbf{D} .

Una forma de expresar alternativamente la ecuación (7) es:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}^E \quad (8a)$$

Donde \mathbf{T}^E es denominado el tensor de esfuerzo extra, tal que:

$$\mathbf{T}^E = 2\mu\mathbf{D} \quad (8b)$$

Definición del tensor de esfuerzo

El vector de esfuerzo de Cauchy \mathbf{t} , el cual describe la acción de las fuerzas materiales sobre una superficie puede expresarse como :

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \quad (9a)$$

Donde:

$$\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{e}_i, t) \quad (9b)$$

Siendo \mathbf{n} el vector unitario normal a la superficie; \mathbf{e}_i el vector posición en coordenadas espaciales cartesianas y un tiempo t arbitrario (o lo que es equivalente el tiempo $t = 0$ escogido arbitrariamente).

Lo anterior implica que en la ecuación de movimiento el tensor de esfuerzos gobierna la respuesta dinámica del medio, así que si se relaciona a \mathbf{T} con las demás variables cinemáticas y termodinámicas, se podrá definir efectivamente o delimitar el tipo de medio en el cual se va a estudiar; esto es un fluido elástico, plástico, entre otros. Por lo tanto una relación entre \mathbf{T} y las demás características del flujo es lo que se suele denominar **ecuación constitutiva**.

El procedimiento que se desarrolla está dentro de la mecánica del medio continuo y es completamente independiente de la naturaleza molecular de los líquidos y/o gases, y de acuerdo a esto, puede ser criticado como inadecuado para algunas aplicaciones. Por ejemplo se ha encontrado que las ecuaciones de Navier-Stokes no son aplicables en condiciones a altas alturas en el caso de aeronaves, aunque si se emplean ciertos artificios puede dar resultados aceptables (Serrin, 1959).

Principio de Stokes

Sir George Stokes define el concepto de fluidez de la siguiente forma: “La diferencia entre la presión sobre un plano en una dirección dada pasando a través de cualquier punto P de

un fluido en movimiento y la presión que puede existir en todas las direcciones alrededor de P si el fluido en su contorno estuviera en un estado de relativo equilibrio, depende solamente del movimiento relativo del fluido alrededor de P ; y el movimiento relativo debido a algún movimiento de rotación puede ser eliminado sin afectar las diferencias de presión antes mencionadas". Aunque este argumento puede ser muy vago, esta descripción involucra la idea esencial de fluidez. Actualmente la idea de Stokes se puede resumir más exactamente teniendo en la cuenta los postulados:

- ✓ **Postulado I** \mathbf{T} es una función continua de tensor de deformación \mathbf{D} , y a su vez es independiente de todas las demás cantidades cinemáticas.
- ✓ **Postulado II** \mathbf{T} no depende explícitamente de la posición \mathbf{x} (homogeneidad espacial)
- ✓ **Postulado III** No existe una dirección preferencial en el espacio respecto a la magnitud de \mathbf{T} (isotropía)
- ✓ **Postulado IV** Cuando $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, \mathbf{T} se reduce a $-p\mathbf{I}$, así que $\mathbf{T}^E = 0$

Se puede emplear otro grupo de suposiciones en diferentes circunstancias, pero al menos en el estado actual del avance en la hidrodinámica, las aplicaciones de los postulados de Stokes son suficientes. Un medio en donde la ecuación constitutiva satisfaga las anteriores suposiciones se denomina *Fluido de Stokes*.

Como consecuencia de los postulados I y II, se tiene que:

$$\mathbf{T} = f(\mathbf{D}) \quad (10)$$

Mientras que el postulado III exige una condición de isotropía, la que matemáticamente se expresa como:

$$\mathbf{S}\mathbf{T}\mathbf{S}^{-1} = f(\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}) \quad (11)$$

donde \mathbf{S} es cualquier transformación ortogonal ($\mathbf{S} \in Orth \in Lin V$).

Nota: $LinV$ es el subespacio de tensores de segundo orden, mientras que $Orth$ es el subespacio de tensores ortogonales de segundo orden, el cual a su vez está contenido en $LinV$.

La ecuación (11) propone que no hay una dirección preferencial en el espacio para la respuesta del fluido frente a una fuerza de contacto que se le aplique, en otras palabras, una deformación determinada produce intrínsecamente la misma respuesta independiente de la orientación. Alternativamente:

La ecuación (11) implica que la ecuación (10) es invariante bajo todas las transformaciones en coordenadas rectangulares.

Por lo anterior, tácitamente se asume que \mathbf{T} depende entonces del estado termodinámico en cuestión, pero ésto por el momento es irrelevante y no es necesario considerarlo en la ecuación (10).

Se puede demostrar que al considerar los postulados planteados se tiene una expresión matemática del tensor de esfuerzos bastante simple:

$$\mathbf{T} = \alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{D} + \chi \mathbf{D}^2 \quad (12)$$

donde α , β y χ son funciones escalares de los invariantes principales del tensor \mathbf{D} , esto es;

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha(I_1, I_2, I_3) \\ \beta &= \beta(I_1, I_2, I_3) \\ \chi &= \chi(I_1, I_2, I_3) \end{aligned} \quad (13)$$

Los invariantes principales I_i , con $i = 1, 2$ y 3 , se pueden definir haciendo uso del conjunto de valores propios (λ) de la matriz de valores del tensor \mathbf{D} , tal que: $D(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{D})$ y por lo tanto:

$$D(\lambda) = \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 \quad (14)$$

Considerando que $I_1 = \text{Tr} \mathbf{D}$ (traza de \mathbf{D}) = $\nabla \cdot \mathbf{v}$, entonces los valores propios d_1, d_2, d_3 de \mathbf{D} son las raíces de la ecuación $D(\lambda) = 0$, que existen y son a su vez números reales dado que \mathbf{D} es simétrica por definición. Claramente los valores propios de \mathbf{D} son funciones de los invariantes principales.

Esto implica que para diferentes valores de α , β y χ se obtiene diferentes respuestas viscosas de un fluido. Por ejemplo, si se seleccionan valores específicos de α , β y χ tal que \mathbf{T} sea lineal en \mathbf{D} se obtiene la ley clásica de viscosidad de Cauchy-Poisson.

Demostración de la ecuación (14).

Primero se debe demostrar que las direcciones principales de \mathbf{T} coinciden con las de \mathbf{D} , o en otras palabras, que cualquier transformación ortogonal que reduzca a \mathbf{D} a una forma diagonal igualmente reduce a \mathbf{T} a la misma forma.

Supongamos que \mathbf{D} sea transformada a su forma diagonal:

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \quad (15)$$

y sea \mathbf{T}^* la transformación de \mathbf{T} correspondiente a su forma diagonal, de tal manera que mediante las ecuaciones (10) y (11), se tiene que:

$$\mathbf{T}^* = f(\mathbf{D}^*) \quad (16)$$

Ahora bien, si consideramos una rotación de 180 grados alrededor del eje x , lo que matemáticamente se expresaría como una transformación ortogonal de la siguiente manera;

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

no se alterará a \mathbf{D}^* porque el tensor \mathbf{D} es simétrico por definición. Por lo tanto, empleando nuevamente las ecuaciones (10) y (11) se tiene que:

$$\mathbf{S}\mathbf{T}^*\mathbf{S}^{-1} = f(\mathbf{S}\mathbf{D}^*\mathbf{S}^{-1}) = f(\mathbf{D}^*) = \mathbf{T}^* \quad (18)$$

Lo que implica que \mathbf{T}^* tampoco se altera mediante la rotación ocasionada por el tensor ortogonal \mathbf{S} . Por lo tanto si:

$$\mathbf{T}^* = \begin{bmatrix} t_{11}^* & t_{12}^* & t_{13}^* \\ t_{21}^* & t_{22}^* & t_{23}^* \\ t_{31}^* & t_{32}^* & t_{33}^* \end{bmatrix} \quad (19)$$

Todos los t_{ij}^* son cero para $i \neq j$ y finalmente se obtiene que:

$$\mathbf{T}^* = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Dado que \mathbf{T}^* es diagonal, entonces sus valores propios son funciones de d_1 , d_2 y d_3 , así que:

$$t_i = f_i(d_1, d_2, d_3) \quad i = 1, 2, 3 \quad (21)$$

Si asumimos que los valores propios de \mathbf{D} son todos diferentes, los escalares α , β y γ se pueden determinar mediante:

$$t_i = \alpha + \beta d_i + \gamma d_i^2 \quad i = 1, 2, 3 \quad (22)$$

Este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas se puede resolver y así obtener los valores de los parámetros buscados.

Supongamos que los valores propios de \mathbf{D}^* sean diferentes entre sí ($d_1 \neq d_2 \neq d_3$) por lo que α , β y γ se pueden expresar como funciones continuas de estos valores propios.

Por ejemplo para el caso de α , se puede obtener su valor aplicando la regla de Cramer;

$$\alpha = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} t_1 & d_1 & d_1^2 \\ t_2 & d_2 & d_2^2 \\ t_3 & d_3 & d_3^2 \end{vmatrix} \quad (23)$$

Se puede observar además, que cualquier permutación de d_i conduce a la correspondiente permutación de t_i , así que se produce el mismo efecto al aplicar la rotación a \mathbf{T} como al aplicarla a \mathbf{D} .

Empleando este efecto, se ve en la ecuación (23) que permutando los valores de d_i se mantiene invariante el valor de α . Naturalmente que este mismo resultado se puede aplicar a los valores de β y χ y así que se demuestra que α , β y χ son funciones simétricas de las variables d_i .

Sin embargo, ésto implica que α , β y χ dependen solamente de los invariantes principales I_1 , I_2 e I_3 ; y ello se debe a que los diferentes d_i corresponden a las raíces del polinomio expresado en la ecuación (14), cuando se tiene a los invariantes como coeficientes.

De otro lado, se debe demostrar que α , β y χ poseen valores únicos y son funciones continuas de los invariantes principales de \mathbf{D} . Volviendo a la notación matricial, la ecuación (12) se puede escribir como:

$$\mathbf{T}^* = \alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{D}^* + \gamma \mathbf{D}^{*2} \quad (24)$$

Considerando la ecuación (15), el tensor \mathbf{D}^* es la transformada del tensor \mathbf{D} , y por lo tanto la ecuación (24) es exactamente igual a la ecuación (12).

Cuando dos a más valores propios de \mathbf{D} coinciden entonces una permutación de éstos, produce de la misma manera valores propios de \mathbf{T} coincidentes. Por lo tanto, haciendo uso del razonamiento empleado para la construcción de la ecuación (12) se tiene que:

$$\mathbf{T}^* = \alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{D}^* \quad (25)$$

Igualmente, si todos los valores propios son iguales, la ecuación (24) se reduce a:

$$\mathbf{T}^* = \alpha \mathbf{I} \quad (26)$$

Si a los postulados del I hasta el IV se le agrega además, que los componentes de \mathbf{T} son lineales respecto a \mathbf{D} , entonces la ecuación (12) se reduce a la forma:

$$\mathbf{T} = \left(-p + \lambda I_1 \right) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} \quad (27)$$

Concepto de la presión

Para un fluido compresible, la presión es una variable termodinámica que se debe definir. Al considerar este aspecto, la ecuación (27), se puede escribir de la forma:

$$\mathbf{T} = (-p + \alpha^*)\mathbf{I} + \beta\mathbf{D} + \gamma\mathbf{D}^2 \quad (28)$$

donde p es la presión termodinámica y $\alpha^* = \alpha + p$. De acuerdo a lo postulado en las suposiciones anteriores y particularmente en la suposición IV, cuando $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, α^* debe desaparecer. Por otro lado, de acuerdo a la ecuación (8) es posible expresar el tensor de esfuerzo mediante dos términos, a saber:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}^E \quad (29)$$

donde \mathbf{T}^E es el tensor extra. Si se comparan la ecuaciones (28) y (29), se ve fácilmente que:

$$\mathbf{T}^E = \alpha^*\mathbf{I} + \beta\mathbf{D} + \gamma\mathbf{D}^2 \quad (30)$$

Por otro lado, si el fluido es incompresible, la presión no es una variable termodinámica, por lo cual se suele introducir cualquier definición de presión que sea compatible con el postulado IV, que se planteó al principio de esta sección. Además, lo que se conoce como “presión” en las ecuaciones hidrodinámicas, no tiene que ser necesariamente la presión que se registra en los aparatos de medida, aunque esta última sea generalmente una componente particular del tensor de esfuerzo.

En vista de lo anterior, se ve razonable escoger una “presión” que permita simplificar las ecuaciones de movimiento. Se define así a $-p$ como el coeficiente α^* en la ecuación (30), lo que permite obtener la fórmula:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \beta\mathbf{D} + \gamma\mathbf{D}^2 \quad (31)$$

para un fluido incompresible. Debe notarse que esta definición de presión cumple el postulado IV, el cual plantea que para $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, el tensor \mathbf{T} se reduce a $-p\mathbf{I}$.

Algunos autores definen la presión del fluido como $-(1/3)Tr\mathbf{T}$ y aunque esto es enteramente permisible, no permite acceder a una fórmula simple para \mathbf{T} como lo hace la definición anterior. Por lo tanto, a este valor se le nombra como la *presión media* y se le denota por

$$\bar{p} = -\frac{1}{3}Tr\mathbf{T} \quad (32)$$

La diferencia entre la presión y la presión media en un fluido incompresible, se puede calcular a partir de la ecuación (32);

$$3(p - \bar{p}) = \chi \mathbf{D} : \mathbf{D} \quad (33)$$

por lo que:

$$p = \bar{p} \quad \text{si y solo si} \quad \chi = 0 \quad (34)$$

lo que implica que una igualdad entre ambas presiones es equivalente a una relación esfuerzo-deformación cuasi-lineal.

En particular, la diferencia entre p y la presión media desaparece en la teoría clásica de viscosidad lineal, ya que ambas definiciones de la presión, $p = -\alpha$ o $p = -\text{tr}\mathbf{T}/3$, permiten obtener exactamente los mismos resultados. En resumen, la naturaleza arbitraria de la presión en un fluido incompresible, es un elemento clave en hidrodinámica, y en algunas ocasiones no se precisa detalladamente este aspecto.

Dependencia polinomial

Replanteado, se puede considerar que para resolver un problema de un flujo en particular se debe considerar que:

- Las ecuaciones (30) y (31) representan las expresiones más generales de la relación esfuerzo-deformación, las cuales a su vez son consistentes con los postulados planteados inicialmente (I al IV).
- Los coeficientes α^* , β y χ son funciones arbitrarias de los invariantes principales de \mathbf{D} y de las variables termodinámicas.
- Por ende, es necesario especificar las formas particulares de estos coeficientes (α^* , β y χ) para resolver el problema de un flujo determinado. Sin embargo, esta arbitrariedad en la selección de las funciones genera bastante dificultad aún en los problemas más sencillos de flujo. Por esta razón, una práctica universal consiste en seleccionar α^* , β y χ de tal manera que los componentes del esfuerzo T_{ij} sean polinomiales respecto a los componentes de la deformación D_{ij} .

El caso más importante y analizado con más frecuencia consiste en asumir que \mathbf{T} es lineal en \mathbf{D} , el cual se trató en la sección anterior de acuerdo a la teoría Lagrangiana de deformación.

La siguiente consideración en importancia consiste en asumir una dependencia cuadrática de \mathbf{T} en \mathbf{D} . En este caso los invariantes principales I_1 , I_2 e I_3 son, respectivamente, de grados 1, 2 y 3 en los componentes de \mathbf{D} , lo que puede hacerse solamente empleando las ecuaciones (30) y (31) y llevándolas a la forma:

$$\mathbf{T} = \begin{cases} \left(-p + \lambda I_1 + \lambda' I_1^2 + \lambda'' I_2 \right) \mathbf{I} + (2\mu + 2\mu' I_1) \mathbf{D} + 4\nu \mathbf{D}^2 & \text{Compresible} \\ -p \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} + 4\nu \mathbf{D}^2 & \text{Incompresible} \end{cases} \quad (35)$$

y para más altos ordenes de esfuerzo-deformación se podrá seguir el mismo método.

En general para ordenes mayores al cuadrático es posible construir una ecuación general si se tiene en la cuenta el siguiente teorema:

Teorema: Una ecuación constitutiva general que satisfaga los cuatro postulados anteriores (I hasta el IV) y que a su vez las componentes del esfuerzo T_{ij} sean polinomiales de grado N en las componentes de D_{ij} , es:

$$\mathbf{T} = (-p + P_0)\mathbf{I} + P_1\mathbf{D} + P_2\mathbf{D}^2 \quad (36)$$

donde los diferentes P_k (con $k = 0, 1, 2$) son polinomios de los invariantes principales de \mathbf{D} , con peso* $P_k \leq N - k$. Para un fluido incompresible, el término constante P_0 debe despreciarse, mientras que para fluidos incompresibles $P_0 \equiv 0$

* **Nota:** El peso se refiere al máximo de alguno de sus términos, un término $I_1^k I_2^l I_3^m$ será considerado con peso $k + 2l + 3m$.

Demostración. Es suficiente demostrar que α^* en la ecuación (30) tiene la forma P_0 , mientras que un argumento similar se puede aplicar a β y χ . Ahora, de acuerdo a la hipótesis, las funciones f_i en la ecuación (21) deben ser a lo sumo polinomiales de grado N , además de que las transformaciones ortogonales no deben afectar la dependencia polinomial. Por lo tanto el determinante en la expresión (23) para α es polinomial a lo sumo de grado $N + 3$ en las variables d_i , la que desaparece cuando $d_1 = d_2$ (dado que $t_1 = t_2$), pues contiene a $(d_1 - d_2)$, $(d_2 - d_3)$ y $(d_3 - d_1)$ como factores. Por otro lado, al dividir la ecuación (23) por el factor Δ se asegura que el polinomio para α sea a lo sumo de grado N en d .

Pero además se tiene que α es una función simétrica de d_i , y a partir de consideraciones algebraicas α es una función polinomial a lo sumo de grado N en los invariantes principales de \mathbf{D} . Para satisfacer el postulado IV, el término constante de α debe ser $-p$, así que $\alpha^* = \alpha + p$ es una función polinomial P_0 con el término constante igual a cero

Empleando análisis dimensional, Truesdell & Noll (1965) muestra como los coeficientes en los polinomios P_k deben depender de variables termodinámicas.

3. TERMODINÁMICA DE LA HIDRODINÁMICA CLÁSICA

Debido a que el tensor de deformación es en general suficientemente pequeño con respecto a alguna velocidad y/o una longitud de referencia, es muy razonable suponer que \mathbf{T} y \mathbf{D} poseen una relación lineal.

El hecho de que esto sea una hipótesis debe ser tenido siempre en la cuenta y por lo tanto no es menester por el momento comprobarla con base a experimentos ni mediante el uso de razonamientos abstractos.

Lo anterior implica que el protocolo consiste más bien en sostener esta hipótesis y compararla mediante los resultados obtenidos experimentalmente.

La hipótesis de linealidad permite reconstruir la ecuación (35) de la siguiente manera:

$$\mathbf{T} = \begin{cases} (-p + \lambda I_1)\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} & \text{Compresible} \\ -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} & \text{Incompresible} \end{cases} \quad (37)$$

En este caso, para un fluido compresible p es una presión termodinámica, I_1 es la divergencia de la velocidad, así que $I_1 = \nabla \cdot \mathbf{v}$, mientras que λ y μ son funciones escalares del estado termodinámico.

Para un fluido incompresible, p es una variable dinámica primitiva la cual se define convenientemente y μ es una función escalar de la temperatura.

Función de disipación

La función de disipación correspondiente a la ley de Cauchy-Poisson es:

$$\Phi = \mathbf{T}^E : \mathbf{D} = \begin{cases} \lambda I_1^2 + 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D} & \text{Compresible} \\ 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D} & \text{Incompresible} \end{cases} \quad (38)$$

Se puede demostrar fácilmente que la condición $\Phi \geq 0$ siempre ocurre, lo cual puede hacerse mediante la termodinámica de la deformación a partir de la ecuación de balance de energía (Bustamante, 1998).

Principio de conservación de la energía

Si se define la energía cinética K_C de un cuerpo B_t :

$$K_C = \frac{1}{2} \int_{B_t} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) dV \quad (39)$$

y además se define la variable primitiva energía interna U de este mismo volumen como:

$$U = \int_{B_t} \rho \varepsilon(\mathbf{x}, t) dV \quad (40)$$

donde \mathbf{v} es la velocidad y $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ es una variable termodinámica de estado (por ende intensiva) de carácter primitivo denominada energía interna específica, la cual es función de la posición \mathbf{x} y del tiempo t .

A partir del principio de la conservación de la energía se tiene que:

$$\frac{d}{dt}(K_c + U) = \int_{B_t} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \oint_{\delta B_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dA - \oint_{\delta B_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA \quad (41)$$

Lo que en palabras sería que;

La tasa de cambio de energía total de un cuerpo B es igual a la tasa a la cual el trabajo es efectuado más la tasa a la cual el calor es conducida por el mismo volumen.

Donde \mathbf{q} es el flujo de calor y tiene unidades de energía por unidad de tiempo, \mathbf{f} es la fuerza volumétrica (o campos externos) por unidad de masa y \mathbf{t} el vector de esfuerzo de Cauchy que se definió en la ecuación (9).

Por otro lado, el cambio de energía cinética ocasionado por una deformación se puede sintetizar como:

El cambio de la energía cinética de un volumen V que se mueve es igual a la tasa a la cual se hace trabajo sobre el volumen mediante las fuerzas externas disminuido por la “disipación” de energía involucrada en la interacción del esfuerzo y la deformación.

Matemáticamente será:

$$\frac{dK_c}{dt} = \int_{B_t} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV + \oint_{\delta B_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS - \int_{B_t} \mathbf{T} : \mathbf{D} dV \quad (42)$$

Restando la ecuación (42) a la ecuación (41), se obtiene que:

$$\frac{dU}{dt} = \int_{B_t} \rho \varepsilon dV = \int_{\delta B_t} \mathbf{T} : \mathbf{D} dV - \oint_{\delta B_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA \quad (43)$$

Aplicando el teorema de Green-Gauss-Ortogovsky (GGO) al término de calor en la ecuación (38) y aplicando posteriormente el teorema de localización, se obtiene que:

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = \mathbf{T} : \mathbf{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (44)$$

Introduciendo la ecuación (29) en la ecuación (44), se obtiene que:

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -p\mathbf{I}:\mathbf{D} + \mathbf{T}^E:\mathbf{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (45)$$

Teniendo en la cuenta que $\mathbf{I}:\mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{v}$, y considerando la función de disipación Φ definida en la ecuación (38), la ecuación (45) se puede escribir como:

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -p\nabla \cdot \mathbf{v} + \Phi - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (46)$$

De otro lado, si S es la entropía específica, a partir de la segunda ley de la termodinámica:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho S dV \geq - \oint_{\partial B_t} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} dA \quad (47)$$

Ahora bien, si el fluido es compresible se asume que ε es una variable de estado termodinámica que satisface la relación:

$$TdS = d\varepsilon + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (48)$$

Para un fluido incompresible (ρ constante) la ecuación anterior se simplifica a:

$$TdS = d\varepsilon \quad (49)$$

A modo de advertencia, no sobra decir anunciar que los balances de energía efectuados aquí tienen que ver con fluidos homogéneos, químicamente inertes, en donde aspectos tales como difusión, reacciones químicas, disipación de energía por choques entre partículas que forma el fluido, etc. no se consideran específicamente.

4. ANÁLISIS TERMODINÁMICO DE LOS CAMBIOS DE ENERGÍA INTERNA EN LA DEFORMACIÓN DE SUSPENSIONES.

Como se puede observar, el análisis clásico planteado en la sección anterior no considera los efectos termodinámicos de la presencia de partículas sólidas en el fluido cuando este es deformado por esfuerzos de contacto.

Sin embargo, es evidente que la presencia de partículas suspendidas en el fluido produce cambios en las variables termodinámicas primitivas en el volumen de fluido escogido y es por ello que esta investigación haciendo uso de elementos de la termodinámica estadística desarrolla a continuación los cambios de energía interna como una aproximación fenomenológica para el estudio de la reología de suspensiones. Esta aproximación fue iniciada por Bustamante (1999).

Es posible asumir inicialmente que la deformación por esfuerzos de contacto de una suspensión altera la energía interna de la mezcla involucrando los siguientes efectos:

- ✓ Variación de los niveles de energía interna en la suspensión
- ✓ Variación de la distribución de energía interna

El cambio de la energía interna ocasionada por la deformación de una suspensión se puede analizar de acuerdo a la teoría de formación de paquetes de partículas (“clusters”) y asumiendo que las paquetes no tienen porqué tener un tamaño uniforme, sino que ellos poseen una distribución de tamaños que es controlada por la distribución granulométrica del sistema particulado que está suspendido en fluido Newtoniano que forma parte de la suspensión.

Consideremos la suspensión mantenida a temperatura T constante, formada por un fluido Newtoniano y un sistema particulado con una distribución de tamaños $f(x_i)$, siendo $i = 1$ el tamaño máximo, $i = 2$ para el tamaño menor siguiente y así sucesivamente hasta $i = j$ para el tamaño más fino de la misma distribución y de tal forma que la distribución de tamaños del sistema particulado que forma parte de la suspensión se puede expresar mediante una función continua $F(x_i)$, la cual representa la fracción acumulada en peso de tamaño más fino que el tamaño i de la siguiente manera:

$$F(x_i) = 1 - \sum_{m=1}^{m=i} f(x_m) \quad m = 1, 2, 3, \dots, j \quad (50)$$

Con la condición de que $F(x_j)$ es igual a cero.

Primera suposición: Supongamos que el sistema está compuesto por una distribución de n paquetes de partículas (o subsistemas) no necesariamente idénticos $n_1, n_2, n_3, \dots, n_j$, los cuales a su vez tendrán energías internas $U_1, U_2, U_3, \dots, U_j$, respectivamente.

El número total de paquetes de partículas N en la suspensión será:

$$N = \sum_{i=1}^j n_i \quad (51)$$

Por lo tanto la energía interna total del sistema será:

$$U = \sum_j n_j U_j \quad (52)$$

De lo anterior, la probabilidad de encontrar un paquete de partículas en el estado U_j dentro del volumen de medición puede ser:

$$P_j = \frac{n_j}{N} \quad (53)$$

Segunda suposición: Supongamos ahora que la distribución de probabilidad de encontrar un paquete de partículas es similar a la distribución granulométrica, así que:

$$P_j = f(x_p) \quad (54)$$

Donde x_p es el tamaño de paquete, y se podrá tener una distribución de tamaños de paquetes de partículas $F(x_p)$, similar la distribución de tamaños de partículas aisladas del sistema particulado que forma parte de la suspensión.

De otro lado, el número de estado energéticos U_1, U_2, \dots, U_j en la distribución es:

$$\Omega(n) = \frac{n!}{\prod n_j} \quad (55)$$

con:

$$\prod n_j = n_1 \cdot n_2 \cdots n_j \quad (56)$$

Es probable que la distribución n no sea única, sino que existan varias de ellas que a nivel macroscópico reflejen el mismo estado termodinámico global de la suspensión, entonces el número total de estados energéticos posibles será:

$$\sum_n \Omega(n) \quad (57)$$

Si cada estado es equiprobable (considerando el postulado ergódico, Pacault, 1963) la probabilidad de encontrar una distribución será:

$$\frac{\Omega(n)}{\sum_j \Omega(n)} \quad (58)$$

Si consideramos todas las distribuciones, la probabilidad de encontrar un sistema con energía U_j en la distribución será:

$$f(x_p) = \frac{\Omega(n)}{\sum_j \Omega(n)} \cdot \frac{n_j}{N} \quad (59)$$

Lo anterior permite determinar la distribución n de paquetes más probable en la suspensión, la que se denominará n^* . Empleando la técnica de los multiplicadores de Lagrange junto con la ecuación de Stirling (Pacault, 1963), se tiene que:

$$n^* = n \cdot \frac{\exp[U_j/kT]}{\sum_j \exp[U_j/kT]} \quad (60)$$

Haciendo el siguiente reemplazo:

$$Q = \sum_j \exp[U_j/kT] \quad (61)$$

se obtiene Q la cual es una función de partición y por lo tanto U_j es la energía necesaria para formar un paquete de partículas, k es la constante de Boltzman y T la temperatura absoluta.

Lo anterior permite proponer que si la energía interna promedio de cada paquete de partículas es U_p y si se tiene N paquetes de partículas, la energía total promedio del sistema será:

$$U_t = \sum_j n_j \cdot U_j = N \cdot U_p = \sum_j f(x_p) \cdot U_j \quad (62)$$

Derivando la ecuación anterior a N constante y aplicando la regla de la cadena, se tiene que:

$$dU = \sum_j U_j \cdot d(f(x_p)) + \sum_j f(x_p) \cdot dU_j \quad (63)$$

Puede observarse como los cambios de energía interna puede ser ocasionados por dos factores los cuales son representados por los términos de la ecuación anterior; a saber:

1. El primer término representa los cambios de la energía interna ocasionados por variaciones de la distribución de tamaños de paquetes de energía, lo cual implica a su vez que cambia la distribución de la energía interna en el volumen de la suspensión.
2. El segundo término representa los cambios en la energía interna ocasionados por variación de los niveles de energía interna pero conservando la distribución de tamaños de paquetes o lo que es similar, se deja invariante la distribución de la energía interna en la suspensión.

De otro lado, si se considera la primera ley de la termodinámica se sabe que:

$$dU = \Delta Q + \Delta W \quad (64)$$

A partir de las dos últimas igualdades se pueden deducir fácilmente las siguientes conclusiones:

1. Al deformar una suspensión a una tasa de cizalladura constante, y si el calor generado por la disipación de la energía mecánica no sale a través de las paredes que contienen la mezcla, los cambios globales de energía interna se deben a cambios de en la distribución de esta energía.
2. Si se deforma la suspensión y el calor es evacuado de tal forma que la operación sea isothermal, la variación de la energía interna se debe fundamentalmente a cambios de los niveles de energía y no a cambios de la distribución de ella en el seno de la suspensión.

Esta última conclusión es muy importante, ya que permite un análisis termodinámico del comportamiento de la suspensión al ser sometida a una deformación mediante esfuerzos de cizalladura en régimen laminar e isotérmicamente.

A partir de lo anterior, se puede explicar desde el punto de vista termodinámico el comportamiento cizalle espesante (o dilatante) que se desarrollan algunas suspensiones a muy altas tasas de cizalladura, como lo muestra la figura 1.

A pesar de que la suspensión posee un intervalo de tasa de cizalladura en la cual se comporta reológicamente como un fluido cizalle-adelgazante, las suspensiones minerales después de superar un número Reynolds crítico (Re_{crit}), como se plantea en las ecuaciones (140) y (141), en un flujo de Couette (Bird, et. al., 1960, Tangsathikulchai & Austin, 1988) generan un comportamiento turbulento el cual se puede identificar en la curva de flujo mediante la aparición de intervalos de comportamiento cizalle-espesante (ver figura 1).

Se puede ver fácilmente que la aparición de la turbulencia a números de Reynolds mayores que el Re_{crit} está ligado a cambios en la distribución de la energía interna, lo que implica operaciones de mezclas y cambios en las distribuciones de paquetes de partículas originado por el comportamiento turbulento, pues la energía térmica no se disipa sino que interviene directamente en los cambios de las distribuciones de energía.

Por lo tanto, si se deforma una suspensión isotérmicamente y en régimen laminar, el trabajo realizado sobre ella será:

$$W = \sum_j \int_v f(x_p) \cdot dU_j \quad (65)$$

Lo anterior implica que se puede deducir la tasa de cambio de energía interna en una suspensión al derivar la ecuación anterior con respecto a la tasa de cizalladura:

$$\frac{dU}{dt} = \sum_j f(x_p) \cdot \frac{dW}{dt} \quad (66)$$

Considerando la definición de distribución de tamaños en la ecuación (50), se tiene que:

$$\frac{dU}{dt} = [1 - F(x_p)] \frac{dW}{dt} \quad (67)$$

La ecuación (67) expresa la tasa de cambio de los niveles de energía interna a medida que la suspensión se deforma a diferentes tasas de cizalladura.

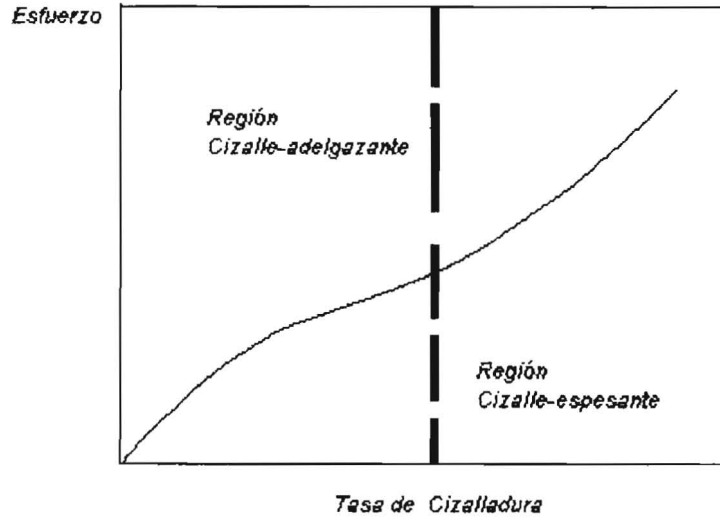


Figura 1. Curva de flujo típica de una suspensión mineral en intervalos muy grandes de tasas de cizalladura.

5. MODELOS DE LA VISCOSIDAD CONSIDERANDO LAS SUSPENSIONES COMO FLUIDOS NEWTONIANOS GENERALIZADOS.

La modelación de la viscosidad de suspensiones considerando a las suspensiones como fluidos Newtonianos generalizados, asume que las suspensiones pueden ser representadas por la ecuación constitutiva del tensor de esfuerzo \mathbf{T} planteada en la ecuación (37) cuando el fluido es incompresible.

Sin embargo, con el fin de precisar más este concepto, es importante destacar que al definir los fluidos Newtonianos generalizados, éstos involucran tanto a los fluidos de viscosidad constante, los cuales son conocidos como Newtonianos, como aquellos cuya viscosidad depende de la tasa de cizalladura los cuales son más conocidos como fluidos no-Newtonianos.

Presentándolo de una manera más sencilla, si se considera la deformación de una suspensión en un plano, se puede deducir fácilmente que la tasa de cizalladura y el esfuerzo de cizalladura serán, respectivamente:

$$\dot{\gamma} = \|\mathbf{D}\| \quad \text{y} \quad T_{ij} = \tau \quad (68)$$

Siendo:

$\|\mathbf{D}\|$ la norma del tensor \mathbf{D} , y

T_{ij} la componente del tensor de esfuerzo \mathbf{T} para la cual $i \neq j$.

Lo anterior permite plantear la versión más conocida de la ecuación (37) para un fluido Newtoniano generalizado en un campo de deformación planar:

$$\tau = \mu_a \dot{\gamma} \quad (69)$$

Donde la viscosidad μ_a es la viscosidad aparente (ver figura 2), la cual se define como la relación sobre la curva de flujo:

$$\mu_a = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (70)$$

Puede notarse como μ_a es una viscosidad Newtoniana ya que une el origen con un punto sobre la curva de flujo, y por lo tanto, un fluido Newtoniano generalizado se considera como la superposición de “una gran cantidad” de fluidos Newtonianos, los cuales en general desarrollarán un comportamiento reológico como el de la suspensión de la figura 2.

De otro lado, también se puede notar en la figura 2, que un fluido en el cual la viscosidad aparente disminuya a medida que aumente la tasa de cizalladura, se define como un fluido cizalle- adelgazante o en ingeniería se le suele denominar fluido pseudoplástico. El caso contrario ocurre cuando la viscosidad aumenta a medida que aumente la tasa de cizalladura y a este tipo fluido se le denomina cizalle-espesante, el cual en ingeniería se le conoce como dilatante.

De lo anterior, se puede decir entonces que para un fluido Newtoniano generalizado, la viscosidad es una función de la tasa de cizalladura, así que:

$$\mu_a = \tilde{\mu}(\dot{\gamma}) \quad (71)$$

Ahora bien, las suspensiones minerales presentan curvas típicas como la que se presenta en la figura 2, pero donde además de la tasa de cizalladura, la pseudoplasticidad es controlada fuertemente por la fracción volumétrica de sólidos ϕ , la distribución granulométrica del sistema particulado $F(x)$ que forma parte de la pulpa y la forma de las partículas ψ . De esta manera, matemáticamente se tiene que:

$$\mu_a = \tilde{\mu}(\phi, \dot{\gamma}, F(x), \psi) \quad (72)$$

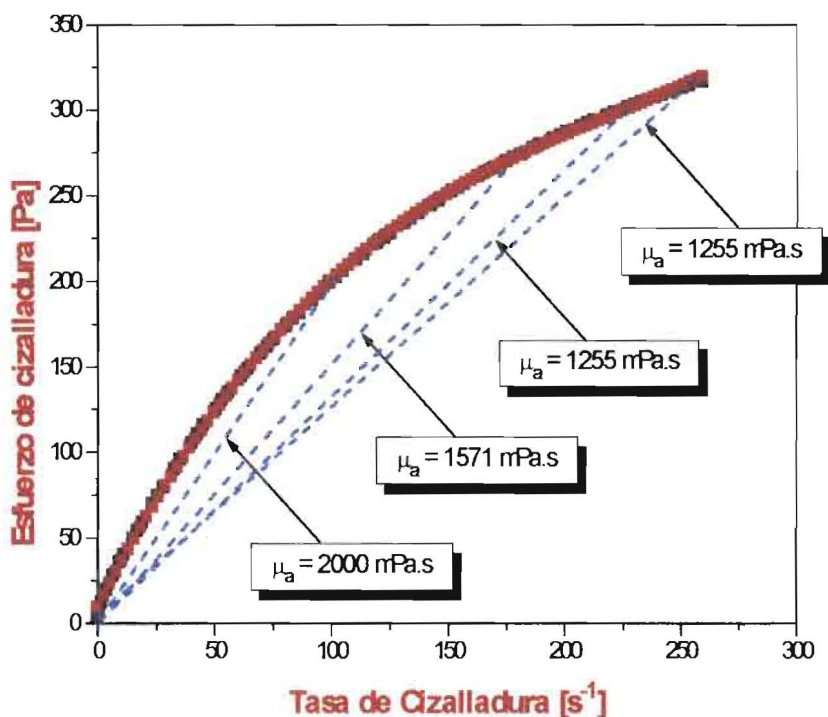


Figura 2. Curva de flujo para una suspensión del Carbón-coke ($\phi = 0.40$)

Por último, se puede observar un caso especial de los fluidos Newtonianos generalizados, en el cual la viscosidad de un fluido sea constante en todo el intervalo de tasa de cizalladura y no posea además esfuerzo de cedencia. En este tipo de fluidos las viscosidades aparentes serán iguales a un único valor y la ecuación (71) será una función constante, lo que permite definir un fluido Newtoniano.

Los demás fluidos, bien sea cizalle-adelgazantes o cizalle-espesantes se denominan no-Newtonianos, pero si se pueden expresar por una relación constitutiva como la ecuación (69) forman parte también del conjunto de fluidos Newtonianos generalizados.

De acuerdo a lo anterior, si las suspensiones minerales formadas por un fluido Newtoniano y un sistema particulado se pueden considerar fluidos Newtonianos generalizados, es posible entonces mediante ensayos reológicos determinar el conjunto de viscosidades aparentes μ_a en un amplio intervalo de la tasa de cizalladura y de esta manera, si se puede modelar matemáticamente la magnitud de la viscosidad aparente, es posible directamente introducir esta magnitud dentro de la relación constitutiva de la ecuación (69) y poder resolver diferentes problemas que involucren el escurrimiento de estos fluidos.

Definición de viscosidad reducida de una suspensión: μ_r

Se define la viscosidad reducida de una suspensión μ_r como la razón:

$$\mu_r = \frac{\mu_s}{\mu_f} \quad (73)$$

donde μ_s y μ_f son las viscosidades aparentes de la suspensión y del fluido que forma parte de la suspensión a una determinada tasa de cizalladura. Ahora bien, como generalmente los fluidos que forman parte de la suspensión son Newtonianos, la viscosidad aparente del fluido es igual a cualquier tasa de cizalladura como se dijo antes.

Puede notarse que la viscosidad reducida μ_r es un número adimensional, el cual indica el número de veces que se incrementa la viscosidad aparente de una suspensión respecto a la viscosidad del fluido que forma parte de la suspensión.

Modelos de viscosidad que dependen de la tasa de cizalladura.

Normalmente las curvas de flujo de suspensiones minerales en régimen laminar presentan tres regiones muy bien acotadas, dos zonas de comportamiento Newtoniano, o sea de viscosidad constante independiente de la tasa de cizalladura y una región de comportamiento cizalle-adelgazante (ver figuras 3 y 4):

- a. Una región donde la viscosidad reducida es constante a tasas de cizalladura cercanas a cero, la que se le suele denominar viscosidad Newtoniana a baja tasa de cizalladura y se indica por μ_0 .
- b. Otra región de viscosidad reducida constante a altas tasas de cizalladura, la que se denomina comúnmente viscosidad Newtoniana a alta tasa de cizalladura y se indica normalmente por μ_∞ .
- c. Una región de comportamiento reológico cizalle-adelgazante o pseudoplástica entre las regiones anteriores.

Cuando la suspensión alcanza la región de comportamiento Newtoniano a alta tasa de cizalladura μ_{∞} , normalmente se desarrolla una región de comportamiento cizalle-espesante posterior a la región cizalle adelgazante (ver figura 1) a medida que se incremente la tasa de cizalladura. El surgimiento de esta región se puede explicar con base en el cambio de las condiciones de flujo de la suspensión al pasar de flujo laminar a flujo turbulento, lo cual se puede verificar fácilmente a nivel experimental, cuando las condiciones de escurrimiento superan el número de Reynolds crítico (Re_{crit}).

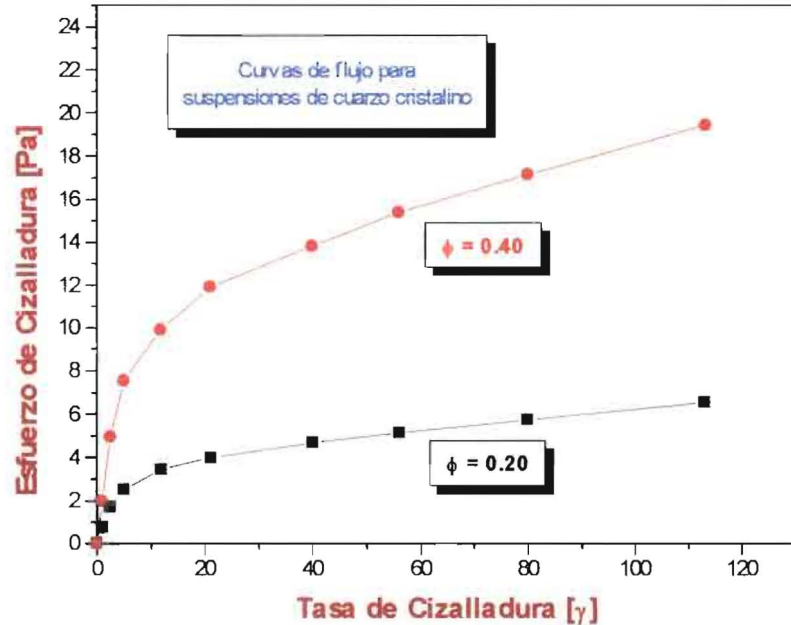


Figura 3. Curva de flujo cizalle-adelgazante de una suspensión de cuarzo cristalino, variando la fracción volumétrica de sólidos ϕ .

De lo anterior se puede deducir que los modelos clásicos de viscosidad de suspensiones se han esforzado en comprender el comportamiento cizalle-adelgazante entre los dos límites de comportamiento Newtoniano, así que se ha modelado el comportamiento reológico en una región del flujo laminar.

Como se detallará más adelante, clásicamente los modelos que se han desarrollado asumen como conocidos las viscosidades Newtonianas a baja y alta tasa de cizalladura, y por lo tanto el problema consiste en desarrollar algoritmos que permitan predecir el comportamiento cizalle-adelgazante entre estas dos regiones Newtonianas (ver figura 4).

Lo anterior conduce a una aclaración que debe hacerse y ella consiste en que para suspensiones no-Newtonianas, el valor de la viscosidad aparente está sujeto a la tasa de cizalladura a la cual se determinó experimentalmente, ya que como se ha dicho reiteradamente, no existe un único valor de la viscosidad aparente para estas suspensiones a medida que se varía la tasa de cizalladura.

De acuerdo a lo anterior, es de suponer que los valores de la viscosidad reportados en la literatura normalmente se refieren a la viscosidad Newtoniana a alta tasa de cizalladura (ver figura 4).

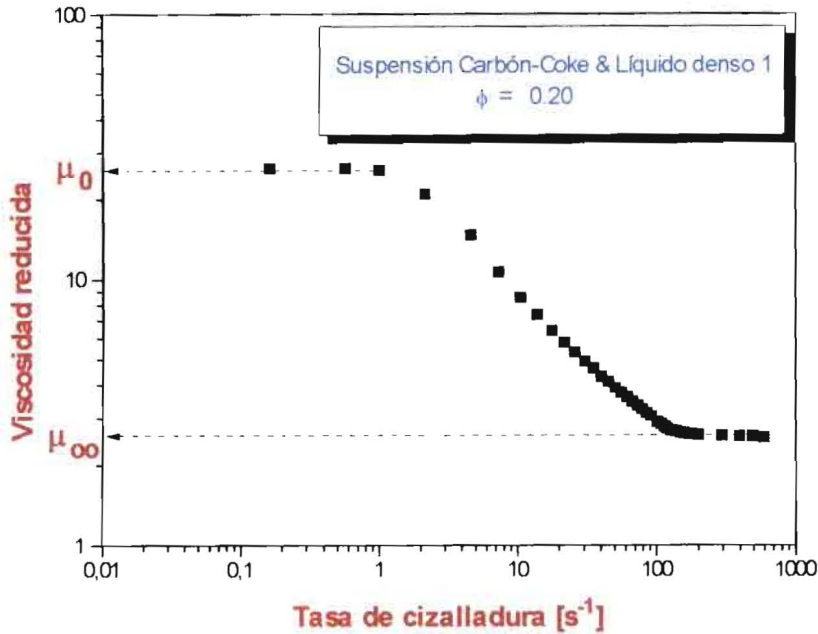


Figura 4 Variación de la viscosidad reducida μ_r con la tasa de cizalladura, mostrando los intervalos de comportamiento Newtoniano (μ_0 y μ_∞) y la región de comportamiento cizalle-adelgazante (o pseudoplástico).

Modelo de la viscosidad de Cross. Cross (1965) dedujo una ecuación de la forma:

$$\frac{\mu_s - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = \frac{1}{1 + [C_C \dot{\gamma}]^h} \quad (74)$$

Donde; μ_s es la viscosidad reducida, C_C es una constante con unidades de tiempo y h es una constante adimensional.

Se puede ver fácilmente que la estructura de la ecuación (74) asume que se debe conocer los valores de las viscosidades Newtonianas a baja y alta tasa de cizalladura (μ_0 y μ_∞), además de los parámetros C_C y h , los cuales deben ser determinados experimentalmente.

Manipulando la ecuación (74) se puede obtener una forma más sencilla del modelo de la viscosidad de Cross, así:

$$\frac{\mu_0 - \mu_s}{\mu_s - \mu_\infty} = [C_C \dot{\gamma}]^h \quad (75)$$

Modelo de la viscosidad de Ellis. Haciendo uso de la relación constitutiva planteada en la ecuación (69), el modelo de Cross expresado en la ecuación (74), se puede expresar en términos del esfuerzo de cizalladura τ introduciendo este término en reemplazo de $\dot{\gamma}$:

$$\frac{\mu_s - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = \frac{1}{1 + (C_T \tau)^h} \quad (76)$$

Donde C_T será:

$$C_T = \frac{C_C}{\mu_s} \quad (77)$$

El modelo de la ecuación (76) es el modelo de Ellis, el cual como se puede ver fácilmente es una versión del modelo de Cross.

Modelo de la viscosidad de Carreau. Un modelo con estructura similar al de Cross es el de Carreau (Barnes *et. al.*, 1989):

$$\frac{\mu_s - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = \frac{1}{\left(1 + [C_C \dot{\gamma}]^p\right)^{1/2}} \quad (78)$$

Donde C_C es una constante y posee un significado similar a la del modelo de Cross.

Modelo de la viscosidad de ley de potencia. Un caso particular que satisface conjuntamente al modelo de Cross y al modelo de Carreau, ocurre cuando $\mu_0 \gg \mu_s$ y a su vez $\mu_s \gg \mu_\infty$, esto es:

$$\mu_\infty \ll \mu_s \ll \mu_0 \quad (79)$$

Bajo estas circunstancias ambos modelos se pueden expresar como:

$$\mu_s = \frac{\mu_0}{(C_C \dot{\gamma})^h} \quad (80)$$

Haciendo algunos arreglos, tales como:

$$K = \frac{\mu_0}{C_c^h} \quad \text{y,} \quad h = 1 - n \quad (81)$$

Se puede reescribir la ecuación (81) de la siguiente manera:

$$\mu_s = K \dot{\gamma}^{n-1} \quad (82)$$

La que es conocida como el modelo de *ley de potencia*, y a n suele llamársele el *índice de la ley de potencia* y a K se le denomina *consistencia*.

Los valores de n permiten identificar el comportamiento reológico de la suspensión, así:

$n < 1$; *La suspensión será cizalle-adelgazante o pseudoplástica*

$n = 1$; *La suspensión será Newtoniana*

$n > 1$; *La suspensión será cizalle-espesante o dilatante.*

Se puede notar que linealizando la ecuación (82), lo cual ocurre si se grafica el modelo de ley de potencia en un plano *log-log*, se obtiene la expresión lineal:

$$\log \mu_s = \log K - (1 - n) \log \dot{\gamma} \quad (83)$$

Si se observa la figura 4, puede notarse que entre las dos regiones de comportamiento Newtoniano de la suspensión, existe un intervalo de la tasa de cizalladura en que la viscosidad presenta un comportamiento lineal en un plano log-log. Esta región lineal en este plano está bien modelada por la ecuación (82), lo que permite deducir que en las regiones asintóticas el modelo de ley de potencia presenta serios inconvenientes en cuanto a la predicción de la viscosidad.

Lo anterior implica que el modelo de ley de potencia tiene una limitada capacidad de predicción de la viscosidad en las cercanías de las regiones Newtonianas a baja y alta tasa de cizalladura, lo cual es una consecuencia directa de las suposiciones que se usaron para derivar la magnitud de la viscosidad, las cuales se plantearon en la estructuración de la ecuación (82).

A manera de conclusión, se puede deducir que el modelo de ley de potencia representaría adecuadamente la viscosidad de la suspensión de la región lineal de la curva de viscosidad versus la tasa de cizalladura en un plano log-log, cuya pendiente sería $(n-1)$, mientras que en las cercanías de los valores asintóticos de la viscosidad, tanto a muy baja como a muy alta tasa de cizalladura, el modelo puede presentar problemas de predicción de la viscosidad de las suspensiones, lo cual es una consecuencia de las suposiciones planteadas para el desarrollo del modelo ($\mu_0 \gg \mu_s$ y a su vez $\mu_s \gg \mu_\infty$).

Ecuación constitutiva de Ostwald. Si multiplicamos a ambos lados de la ecuación (82) por la tasa de cizalladura obtenemos el esfuerzo de cizalladura en la suspensión, así que:

$$\tau = K \dot{\gamma}^n \quad (84)$$

Esta ecuación es conocida como la **ecuación constitutiva de Ostwald** (Fredrickson, 1964)

Modelo de la viscosidad de Sisko. Un caso especial se obtiene si tan sólo $\mu_0 \gg \mu_\infty$, en el modelo de Cross planteado en la ecuación (74); por lo que se obtiene :

$$\mu_s = \mu_\infty + \frac{\mu_0}{(C_C \dot{\gamma})^h} \quad (85)$$

Cuya ecuación representa el modelo de Sisko (Barnes *et. al.*, 1989).

Considerando los cambios de variables presentados en la ecuación (81), el modelo de Sisko puede presentarse como:

$$\mu_s = \mu_\infty + K \dot{\gamma}^{n-1} \quad (86)$$

Ecuación constitutiva de Bingham. En el caso de que una suspensión en particular tenga un índice de ley de potencia igual a cero ($n = 0$), la ecuación (86) tendrá una estructura en la cual K tendrá unidades de esfuerzo, por lo que se puede denotar por τ_0 ; así que:

$$\mu_s = \mu_\infty + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} \quad (87)$$

Si a la ecuación (87) la multiplicamos a ambos lados de la igualdad por la tasa de cizalladura, se obtiene que:

$$\tau_s = \tau_0 + \mu_\infty \dot{\gamma} \quad (88)$$

Donde τ_0 define un esfuerzo de cedencia.

Recordando las suposiciones planteadas en el desarrollo del modelo de Sisko, $\mu_0 \gg \mu_\infty$, como se ve en la ecuación (85), y teniendo en la cuenta que el modelo de Bingham planteado en la ecuación (88), es una solución particular de la ecuación (86), entonces, puede deducirse que para suspensiones cuya pendiente de la curva de flujo sea exageradamente alta a muy bajas tasas de cizalladura $\dot{\gamma}$, esto es para μ_0 muy grandes, es fácil confundir la viscosidad Newtoniana a baja tasa de cizalladura con el eje del esfuerzo, por lo de acuerdo a la escala de los experimentos se pueda reportar un esfuerzo de cedencia, aunque realmente éste no exista verdaderamente.

Por lo tanto, el reporte o no de esfuerzos de cedencia a nivel experimental dependerá de la sensibilidad en la medición del equipo a tasas de cizalladura cercanas a cero (Bustamante, 1999), pues en algunas ocasiones será una aproximación debido a que la suspensión tiene una muy alta viscosidad Newtoniana μ_0 , a baja tasa de cizalladura.

Puede notarse que la suspensión que pueda ser representada por una ecuación constitutiva como la ecuación (88), presenta un comportamiento Newtoniano después de superar el esfuerzo de cedencia, por lo que la viscosidad plástica a tasas de cizalle muy altas sería siempre igual, lo que ha permitido darles el nombre a estas suspensiones de elasto-plásticas.

Ecuación constitutiva de Herschel-Bulkley. Despejando el término μ_S en el modelo de Cross de la ecuación (75), se puede obtener que:

$$\mu_S = \frac{\mu_0 (C_c \dot{\gamma})^{n-1} + \mu_\infty}{[1 + (C_c \dot{\gamma})^{n-1}]} \quad (89)$$

Considerando un caso especial cuando:

$$(C_c \dot{\gamma})^{n-1} \gg \gg 1 \quad (90)$$

la ecuación (89) se reduce a:

$$\mu_S = \mu_0 + \mu_\infty (C_c \dot{\gamma})^{n-1} \quad (91)$$

Si μ_0 es muy grande, ésto es:

$$\mu_0 \rightarrow \infty \quad \text{para} \quad \dot{\gamma} \rightarrow 0$$

al multiplicar a ambos lados de la ecuación (91) por la tasa de cizalladura se tiene que:

$$\tau_S = \tau_0 + K_{HB} \dot{\gamma}^n \quad (92)$$

La ecuación (92) se conoce como la **Ecuación constitutiva de Herschel-Bulkley**.

Nótese que si no existe esfuerzo de cedencia, la ecuación (92) se transforma a la relación constitutiva de Ostwald, representada por la ecuación (84).

Las suposiciones planteadas para la deducción de la ecuación (92) permiten deducir fácilmente las limitaciones de la ecuación constitutiva de Herschel-Bulkley. Si se considera que la condición más fuerte se planteó en la ecuación (90), se puede inferir que esta ecuación constitutiva se ajusta a deformaciones con valores de K_{HB} muy pequeños y/o a tasas de cizalladura cercanas a cero.

Modelos de viscosidad que dependen de la fracción volumétrica de sólidos ϕ

Como se planteó en la ecuación (72), fuera del efecto de la tasa de cizalladura sobre la viscosidad aparente de las suspensiones, existe además, un fuerte control de la reología de las suspensiones por la fracción volumétrica de sólidos ϕ (ver figura 5).

Sin embargo, este efecto ha sido muy difícil de caracterizar sobre todo en el caso de suspensiones donde la fracción de sólidos sea relativamente alta. Es por esto, que en aras de comprender un poco más el efecto de esta variable sobre la reología de suspensiones, se

separa la modelación de suspensiones concentradas (alto valor de ϕ) de suspensiones diluidas (bajas en ϕ).

Modelos de la viscosidad que dependen de la fracción volumétrica de sólidos, ϕ , en suspensiones diluidas.

Para suspensiones con una fracción volumétrica de sólidos muy bajas ($\phi \rightarrow 0$), la ecuación desarrollada por Einstein (1956) predice la viscosidad eficientemente (Storms *et. al.*, 1990).

Einstein demostró que al agregar partículas a un líquido Newtoniano se genera un incremento de la viscosidad reducida μ_r así:

$$\mu_r = \frac{\mu_s}{\mu_f} = (1 + 2.5\phi) \quad (93)$$

Con μ_r como se definió en la ecuación (73).

La ecuación (93) no considera efectos generados por el tamaño de partícula, ni por las interacciones hidrodinámicas entre las mismas. Sin embargo, cuando se intenta considerar las interacciones entre las diferentes partículas, al modelo de la ecuación (93) se le han incorporado términos de orden mayor en ϕ , tales como ϕ^2 , ϕ^3 , etc.

En este sentido, Tomas, reportado por Jinescu (1974), propone un modelo de la forma:

$$\frac{\mu_s}{\mu_f} = 1 + 2.5\phi + 14.1\phi^2 + k_3\phi^3 \quad (94)$$

Siendo k_3 una constante que se determina experimentalmente.

Este modelo fue modificado parcialmente por Jinescu (1974) cambiando el término que involucra la fracción volumétrica al cubo de la ecuación (94) de la siguiente manera:

$$\frac{\mu_s}{\mu_f} = 1 + 1.25\phi + 10.05\phi^2 + 0.00273 \exp(16.6\phi^3) \quad (95)$$

Sin embargo, tanto Tomas como Jinescu (Jinescu, 1974) al justificar la introducción de términos al cubo coinciden en concluir que a medida que se involucra el término al cuadrado de ϕ , mejora la predicción de los valores de la viscosidad hasta cuando el valor de ϕ no supere al 0.20 (Jinescu, 1974). Con fracciones volumétricas de sólidos (ϕ) mayores a 0.20 los valores de la viscosidad obtenidos mediante el uso del modelo se alejan substancialmente de los obtenidos experimentalmente, introduciendo un error apreciable.

Para terminar, Batchelor (1977), elimina el término al cubo de las ecuaciones anteriores y propone una ecuación de la forma:

$$\frac{\mu_s}{\mu_f} = 1 + 2.5\phi + 6.2\phi^2 \quad (96)$$

Para todos los modelos anteriores, los autores sostienen la validez de sus ecuaciones para suspensiones compuestas por un fluido Newtoniano y un sistema particulado compuesto por esferas de un tamaño único y donde los efectos gravitacionales son despreciables, esto es, donde la densidad de la partículas es igual a la densidad del fluido que forma parte de la mezcla.

Es importante resaltar que dentro de un cálculo de orden de magnitud, en la ecuación (94) y (73), el término que contiene la fracción volumétrica al cubo a lo sumo contribuye aproximadamente con un 1 % para el cálculo de la viscosidad relativa; lo cual es muy pequeño si se considera el error experimental ocasionados por las dificultades de reproducibilidad los cuales exceden normalmente el 15% (Cheng, 1984), si se tiene en la cuenta los efectos generados por la distribución granulométrica, la intensidad de mezcla en el viscosímetro, el cambio de estructuras en el empaquetamiento por aumento de la fracción volumétrica de sólidos en la suspensión, las variaciones de la abertura (“gape”) del viscosímetro, el efecto pared y la razón abertura/diámetro del tubo, entre otros factores.

Lo anterior ha permitido excluir el término al cubo, lo que favorece notoriamente el modelo de Batchelor planteado en la ecuación (96).

Analizando el modelo de Einstein, planteado en la ecuación (93), una suposición importante consiste en asumir que la distancia entre las partículas es tal que no existen colisiones entre ellas (Einstein, 1956), por lo tanto el efecto del empaquetamiento es desestimado y por ende la estructura lineal no considera efecto de interacción entre las diferentes partículas que forman la suspensión.

Modelos de la viscosidad que dependen de la fracción volumétrica de sólidos, ϕ , en suspensiones concentradas.

Para tratar de involucrar los efectos del empaquetamiento de las partículas, los modelos han tratado de introducir términos de orden cuadrático y cúbico en ϕ . Sin embargo, no es una premisa segura el hecho de que los exponentes de ϕ sean exactamente números enteros positivos. De lo anterior surge una duda hacia esta estrategia, lo que se comprueba si tan sólo se comparan los datos obtenidos experimentalmente con los datos calculados a partir de la aplicación de alguno de los anteriores modelos.

Lo anterior conduce a plantear una nueva estrategia, pues hasta el momento prácticamente el efecto del empaquetamiento no ha sido estrictamente introducido, ya que se deben considerar otros términos relacionados a la distribución de tamaños y forma de las partículas.

Máxima fracción de empaquetamiento ϕ_c

El efecto de la interacción dinámica entre las partículas se ha tratado de modelar a través de la fracción de máximo empaquetamiento ϕ_c (Dabak & Yucel, 1987, Frith *et. al.*, 1987, Leighton & Acrivos, 1987, Russel, 1987 y Szengun & Probstein, 1989, entre otros)

Se define la máxima fracción de empaquetamiento como aquella fracción volumétrica de sólidos en la cual las partículas poseen un contacto tridimensional con las demás partículas de la suspensión, lo que genera un incremento exagerado de la viscosidad haciéndola tender a infinito (ver figura 5).

Es de esperar que ϕ_c depende de la forma de las partículas y del arreglo que favorezca la disposición espacial de las partículas. En la tabla 1 se muestra diferentes valores de la fracción máxima de empaquetamiento para diferentes arreglos de partículas esféricas.

Además de lo anterior, la máxima fracción de empaquetamiento depende fuertemente también de la distribución de tamaños de partículas (Tangsathitkuchai & Austin, 1988, Dabak & Yucel, 1987, Kim, *et. al.*, 1993) y de la forma de las partículas (Mayadunne, *et. al.*, 1996).

Modernamente se habla de paquetes de partículas o “clusters” y hasta de paquetes de paquetes (Quemada, 1985), los cuales se forman en las suspensiones y es posible mediante la técnica del efecto Tindall medir los tamaños de estas estructuras.

Desde este punto de vista, una manera de calcular analíticamente la fracción de máximo empaquetamiento en una suspensión, consiste en asumir que ésta sería la fracción volumétrica máxima de sólidos de partículas en los paquetes, o bien, la máxima fracción de paquetes de paquetes en la suspensión (Quemada, 1985).

Experimentalmente la fracción de máximo empaquetamiento se puede determinar en un gráfico de viscosidad versus fracción volumétrica de sólidos (ver figura 5), en la cual un pequeño incremento de ϕ conduce hacia un exagerado aumento de la viscosidad.

TABLA 1. Máxima fracción de empaquetamiento ϕ_c para diferentes arreglos de esferas de igual diámetro (Quemada, 1985).

Arreglo del sistema particulado de esferas	ϕ_c
Cúbico simple	0.520
Mínima configuración termodinámicamente estable	0.548
Empaquetamiento hexagonal	0.605
Empaquetamiento aleatorio de esferas	0.637
Empaquetamiento cúbico de cuerpo centrado	0.680
Empaquetamiento cúbico de cara centrada/ hexagonal	0.740

Por último, es de esperar que cuando la suspensión se encuentre en condiciones cercanas a la de máxima fracción de empaquetamiento, la viscosidad sea exageradamente alta. Lo anterior implica que en estas condiciones se presenten grandes incrementos de la viscosidad con pequeños incrementos de la fracción volumétrica de sólidos y por lo tanto los modelos anteriores no sean muy eficaces en la predicción de la viscosidad (ver la figura 5).

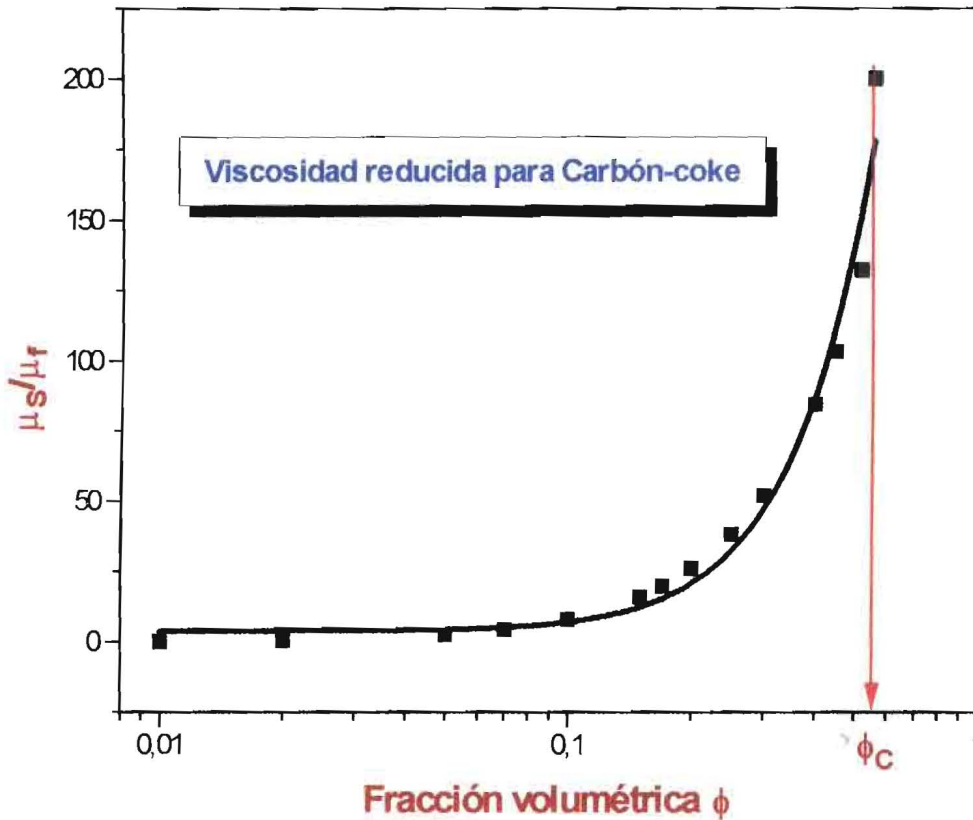


Figura 5. Curva de viscosidad reducida versus la fracción volumétrica de sólidos para una suspensión de carbón-coke.

Para estudiar la reología de las suspensiones concentradas, se utilizó una técnica que consistió en promediar la influencia de las partículas vecinas e introducir este aspecto en los modelos.

El primer desarrollo es de Ball & Richmond, reportado por Barnes, *et. al.* (1989), el cual consistió en suponer que los efectos de todas las partículas en una suspensión concentrada es la suma de los efectos de las partículas agregadas secuencialmente; así que si se

diferencia la ecuación de Einstein, se obtienen los incrementos diferenciales de la viscosidad de una suspensión, los cuales se pueden expresar así:

$$d\mu_s = \frac{5}{2} \mu_f d\phi \quad (97)$$

Puede notarse como la viscosidad del fluido μ_f es una condición de contorno en la solución de la ecuación de Einstein, ya que el valor de la viscosidad de la suspensión μ_s es μ_f cuando la fracción volumétrica ϕ es cero. Esto permite establecer el siguiente reemplazo:

$$\frac{d\mu_s}{\mu_s} = \frac{5}{2} \frac{d\phi}{(1 + 2.5\phi)} \quad (98)$$

Donde se interpreta a $d\mu_s$ como el incremento diferencial de la viscosidad por la adición de partículas que aumentan diferencialmente la fracción volumétrica de sólidos en una suspensión de viscosidad μ_s .

Puede observarse como el término $(1+2.5\phi)$ en la ecuación (98) es un aumento efectivo del volumen de las partículas en la suspensión ocasionado por el arreglo intrínseco de las partículas al formar los paquetes, debido a que en este caso se consideran los espacios entre las partículas.

Sin embargo, la ecuación (98) sigue siendo válida solamente para suspensiones diluidas, por lo que si se desea generalizar el modelo a valores relativamente altos de la fracción volumétrica de sólidos ϕ el término $(1+2.5\phi)$ puede ser reemplazado por $(1 - \lambda\phi)$, en donde se cumpla la condición de contorno de:

$$(1 - \lambda\phi) = (1 + 2.5\phi) \quad \text{para } \phi \rightarrow 0 \quad (99)$$

Donde λ tendrá en la cuenta el efecto del empaquetamiento, ósea que λ es una función de ϕ , y por lo tanto:

$$\lambda = \tilde{\lambda}(\phi) \quad (100)$$

así que:

$$\lambda(\phi) = -\frac{5}{2} = \quad \text{para } \phi \rightarrow 0 \quad (101)$$

Se puede ver fácilmente que el valor de λ puede ser diferente a $-2/5$ para fracciones volumétricas muy altas y/o suspensiones formadas con partículas diferentes a la forma esférica.

De acuerdo a lo anterior, se puede reestructurar la ecuación (98) de la siguiente manera:

$$\frac{d\mu_s}{\mu_s} = \frac{5}{2} \frac{d\phi}{(1-\lambda\phi)} \quad (102)$$

El reemplazo del factor $(1-\lambda\phi)$ no es muy explícito en la literatura pero se puede orientar un análisis hacia la identificación de este factor y su papel en la reología de suspensiones. En este sentido ampliaremos a continuación este aspecto el cual fue desarrollado por Bustamante (1999).

Interpretación del factor $(1-\lambda\phi)$ de acuerdo a la teoría de formación de paquetes de partículas.

Bustamante (1999) desarrolló una teoría con el fin de identificar el papel que cumple el factor $(1-\lambda\phi)$ de acuerdo a la teoría de formación de paquetes.

Si ϕ es la fracción volumétrica de sólidos en una suspensión, $(1-\phi)$ es la fracción de agua en la mezcla. Además de lo anterior, Bustamante (1999) asume que el agua en la suspensión puede ser dividida en dos fracciones:

- a. Una fracción del agua en la suspensión que está ligada a la formación de paquetes, y
- b. Una fracción restante de agua que se denominará por esta investigación “agua libre”, la cual no está necesariamente ligada a la formación de paquetes de partículas, la cual es proporcional a $(1-\lambda\phi)^n$.

De otro lado, Bustamante (1999) asume que es razonable suponer que el principal promotor del comportamiento tipo líquido de las suspensiones minerales sería la fracción de agua que no está ligada a la formación de paquetes, y por lo tanto en este sentido, la disipación de energía mecánica se vería disminuida a medida que aumente la magnitud de agua “libre” en la suspensión.

De esta manera, si el término $(1-\lambda\phi)^n$ se incrementa, lo cual indica que el agua “libre” aumenta, la viscosidad de la suspensión disminuye, e igualmente si este término disminuye a viscosidad aumenta fuertemente.

Mirado así, la fracción de agua $[(1-\phi)-(1-\lambda\phi)^n]$ es la fracción de agua asociada a la formación de paquetes.

Soluciones particulares de la ecuación (102)

De la ecuación (102) se pueden obtener varias soluciones particulares dependiendo del valor de λ , los cuales a su vez permiten analizar y deducir algunos de los modelos que se reportan en la literatura (Barnes, *et. al.*, 1989):

Primer caso: Cuando: $\lambda = 0$

Integrando la ecuación (102), y considerando que λ es igual a cero, se deduce una expresión exponencial de la forma:

$$\mu_s = \mu_f \exp\left(\frac{5}{2}\phi\right) \quad (103)$$

La ecuación (103) sugiere que la viscosidad de una suspensión puede representarse por este tipo de modelo si el empaquetamiento se puede despreciar en la suspensión, o lo que sería equivalente, no existe fracción de agua ligada a la formación de paquetes, lo cual podría aproximarse a suspensiones de esferas relativamente gruesas y diluidas.

Puede notarse que si se expande la ecuación (103) en serie:

$$\mu_s = \mu_f \left[1 + \frac{5}{2}\phi + \frac{25}{4} \frac{\phi^2}{2!} + \frac{125}{8} \frac{\phi^3}{3!} + \dots \right] \quad (82)$$

se pueden tener las siguientes consideraciones:

- ✓ Al truncar los términos de orden mayor e igual a dos se reproduce el modelo de la viscosidad de Einstein, ver la ecuación (93).
- ✓ Si se truncan los términos de orden tres en adelante aparece la estructura del modelo de Batchelor, ver ecuación (96)
- ✓ Si se toman los cuatro primeros términos de la expansión aparece la estructura del modelo de Tomas, ver ecuación (94).

De acuerdo a lo anterior Bustamante (1999) dedujo que los modelos de Einstein, Tomas y Batchelor, consideran implícitamente que no se forman paquetes de partículas, o lo que es equivalente, no hay agua ligada a la formación de paquetes, así estos modelos involucren términos de orden superior en ϕ .

Por lo tanto, se puede concluir que al tratar de considerar los efectos del empaquetamiento con la introducción de términos de orden mayor al unitario en la fracción volumétrica (ϕ^2, ϕ^3 , etc.), la solución que se obtiene no puede ser claramente defendida ni tiene un soporte matemático fuerte.

Segundo caso: Cuando λ es diferente de cero.

Integrando la ecuación (102) y considerando que $\lambda \neq 0$, se obtiene la siguiente solución:

$$\mu_s = \mu_f (1 - \lambda\phi)^{-5/2\lambda} \quad (105)$$

Analizando esta ecuación, se puede ver que la viscosidad es infinita cuando $\phi = 1/\lambda$, lo cual corresponde a la definición empírica de fracción de máximo empaquetamiento ϕ_m (ver figura 5); entonces:

$$\phi_m = 1/\lambda \quad (106)$$

Reemplazando la ecuación (106) en la (105) se obtiene que:

$$\mu_s = \mu_f \left(1 - \frac{\phi}{\phi_m} \right)^{-5\phi_m/2} \quad (107)$$

La cual es la ecuación de Krieger & Dougherty (1959).

Se puede observar nuevamente, que en el caso particular de que λ tenga el valor asignado en la ecuación (101), la ecuación de Einstein es una solución particular de las ecuaciones (105) y (107).

A pesar de lo anterior Quemada (1985), reporta que a partir de datos experimentales el valor de λ en la ecuación (105) es una función de la forma y del tamaño de las partículas que forman la suspensión y no de la fracción volumétrica de sólidos como se determina en la ecuación (100).

Cabe destacar que la ecuación de Krieger & Dougherty (1959) tal como la presentaron sus autores, tiene una fundamentación extraída a partir de un “equilibrio químico” de una reacción de formación de duplas de partículas como se explica a continuación.

Aproximación de Krieger & Dougherty para el cálculo de la viscosidad de una suspensión.

Considere una suspensión de esferas rígidas de radio r en un medio continuo de viscosidad μ_s . Cuando se aplica un esfuerzo de cizalladura τ , la suspensión fluye con una tasa de cizalladura $\dot{\gamma}$, lo que permite que las esferas tienden a rotar con una velocidad angular $\dot{\gamma}/2$, arrastrando con ello al fluido que está adherido a la superficie de las partículas (condición de no desplazamiento). Sin embargo, debido a las fluctuaciones de concentración ocasionadas por el movimiento Browniano, pueden en algún instante interactuar pares de esferas separadas en una distancia pequeña comparada con el diámetro de la esferas, esto es, el acercamiento entre partículas es mucho menor que el orden del diámetro de las partículas. Si estas esferas cercanas fueran a rotar independientemente, la tasa de cizalladura en el medio que separa las dos esferas sería extraordinariamente alta. Para evitar la alta disipación de energía que consecuentemente se produciría, las esferas tenderían a rotar como un conjunto, cuyos centros de masa tenderían a separarse por el movimiento de cizalladura.

Si la separación entre las dos esferas permite que ellas roten independientemente cada uno de la otra, las esferas pueden denominarse como “solos”, y se denotara como P_1 al conjunto de esferas solas; ahora, si los pares de esferas tienden a rotar como un conjunto, los pares serán llamados duplas y se denotará al conjunto de esferas duplas como P_2 . En ausencia de esfuerzos de cizalladura, la distribución de esferas “solos” y de esferas duplas, puede representarse más formalmente como un equilibrio químico:



Donde k_f y k_d representan las constantes específicas de velocidad de formación y destrucción de duplas. Al someterse la suspensión a una tasa cizalladura determinada, se introduce un segundo mecanismo que favorece de la destrucción de duplas, dado que el esfuerzo de cizalladura permite separar la rotación de las esferas dobles, la que esquemáticamente a nivel de equilibrio químico se puede representar como:



Donde k_s es la “constante de reacción” de la disociación inducida por el campo de cizalladura.

Si consideramos que N_1 y N_2 son los números de partículas “solos” y de duplas, por unidad de volumen, respectivamente, se asume una ecuación global para la formación de duplas; así:

$$\frac{dN_2}{dt} = k_f N_1^2 - (k_d + k_s) N_2 \quad (110)$$

En el estado estacionario, la ecuación (110) se iguala a cero, así que:

$$\frac{N_2}{N_1^2} = \frac{k_f}{k_d + k_s} = \frac{k_f}{k_d} \left[1 + \frac{k_s}{k_d} \right]^{-1} \quad (111)$$

Krieger & Dougherty supusieron que k_f y k_d son independientes de la tasa de cizalladura, mientras que k_s es una función de ella, así que:

$$k_s = k_s(\dot{\gamma}) \quad (112)$$

Con una condición inicial, $k_s = 0$, para $\dot{\gamma} = 0$.

Si se considera que a una tasa de cizalladura igual a cero, el número de partículas “solos” es N_1^* y de duplas es N_2^* , la ecuación (111) queda como:

$$\frac{N_2^*}{N_1^{*2}} = \frac{k_f}{k_d} \quad (113)$$

En este punto, Krieger & Dougherty (1959) introducen una relación entre la viscosidad de la suspensión, la concentración de partículas “solos” y de duplas. Ellos asumieron que la viscosidad reducida está afectada por la concentración de la siguiente forma:

$$\frac{\mu_s}{\mu_f} = f_1 N_1 + f_2 N_2 = f_1 N + (f_2 - 2f_1) N_2 \quad (114)$$

Donde N es la concentración total de esferas:

$$N = N_1 + 2N_2 \quad (115)$$

Las funciones f_1 y f_2 son independientes de la tasa de cizalladura y según Krieger & Dougherty (1959), dependen solamente del número total de partículas N .

Cuando la tasa de cizalladura se iguala a cero el número de duplas es N_2^* y la viscosidad en este límite será μ_o . En este sentido:

$$\frac{\mu_s}{\mu_o} = f_1 N + (f_2 - 2f_1) N_2^* \quad (116)$$

A una tasa de cizalladura infinitamente grande, todas las duplas estarán disociadas, y por lo tanto N_2 será cero. En este caso la viscosidad tenderá a la viscosidad Newtoniana a alta tasa de cizalladura μ_∞ , así que:

$$\frac{\mu_\infty}{\mu_f} = f_1 N \quad (117)$$

Sustrayendo la ecuación (115) de la ecuación (116) se tiene que:

$$\frac{N_2}{N_2^*} = \frac{\mu_s - \mu_\infty}{\mu_o - \mu_\infty} \quad (118)$$

Se puede notar que la estructura de la ecuación (118) es similar a la del modelo de Cross, planteado en la ecuación (74), cuando se modela la viscosidad relativa de la suspensión con respecto a la tasa de cizalladura.

De otro lado, al dividir las ecuaciones (111) y (113), se obtiene que:

$$\frac{N_2}{N_2^*} = \frac{N_1^2}{N_2^{*2}} \left[1 + \frac{k_s}{k_d} \right]^{-1} \quad (119)$$

Para lograr la expresión más sencilla de la ecuación (119) Krieger & Dougherty (1959) asumieron la suposición más fuerte para la obtención del modelo, a saber:

“We now assume that only a small fraction of the spheres will be paired as doublets, and hence that N_1 and N_1^ are not greatly different from N ”*

Según esta suposición, si N_1 y N_1^* no difieren fuertemente de N (que es el número total de partículas en la suspensión), se puede aceptar que la razón $(N_1/N_1^*)^2$ es cercana a la unidad, dado que el número de dobles N_2 están muy alejados del valor de N , implicando que N_2 tiende a cero durante todo el proceso.

Los efectos de esta suposición son:

- La reacción “química” que se plantea en la ecuación (108) será débil hacia la derecha alcanzando el equilibrio muy rápidamente con sólo tener una pequeña cantidad de partículas dobles, ya que N_2 (que sería el producto de reacción) tiende a cero y por lo tanto $k_d \gg \gg k_f$.
- La reacción “química” que se plantea en la ecuación (109) será fuertemente irreversible y por lo tanto, es posible que exista una relación entre las constantes de tal manera que $k_s \gg \gg k_f$.
- A partir de lo anterior, la ecuación (119) podría caer fácilmente en una indeterminación, dado que si el número de dobles tiende a cero, la ecuación (113) se igualaría a la ecuación (119). Esto implica que la viscosidad infinita fuera igual a la viscosidad a baja tasa de cizalladura, lo cual es válido sólo para fluidos Newtonianos.
- Krieger & Dougherty (1959) asumen que a medida que la suspensión es sometida a una tasa de cizalladura cada vez mayor, la tendencia sería destruir los dobles, llegando al límite en el cual a altas tasas de cizalladura la cantidad de dobles se anula. Sin embargo, según lo planteado por Quemada (1986), la evidencia experimental de este fenómeno no es tan exageradamente simplista, ya que al someter a una suspensión a una tasa de cizalladura, la tendencia es el establecimiento de un equilibrio entre la formación de paquetes de partículas con la destrucción de éstos, aún a fracciones volumétricas de sólidos en la suspensión relativamente bajas.
- Por otro lado, Krieger & Dougherty (1959) proponen que la destrucción de dobles es el mecanismo más importante en la disipación de energía mecánica a medida que la suspensión es sometida a una tasa de cizalladura determinada, pero a la vez minimizan el efecto de la producción de dobles con las suposiciones anteriores y su efecto sobre la reacción “química” como se ve en la ecuación (108).

A partir de las consideraciones anteriores, se cuestiona profundamente la irreversibilidad de la ecuación (109), el rápido equilibrio que se alcanza en la ecuación (108) y su efecto en la magnitud de las constantes de reacción.

Una alternativa será analizar la ecuación (114) y considerar para altas tasas de cizalladura la nulidad del término $(f_2 + 2f_1)$, pero habría que justificar debidamente este aspecto. Lo importante es que se podría acceder a resultados similares.

Efecto implícito al considerar la viscosidad de la suspensión únicamente en términos de la fracción volumétrica de sólidos.(Dabak & Yucel, 1987).

Se sabe experimentalmente que la viscosidad es una función de varios parámetros entre los que se encuentra la fracción volumétrica de sólidos en la suspensión ϕ , el tamaño de partículas (x), la distribución de tamaños $F(x)$, la forma (ψ) y la densidad (ρ_s) de las partículas como variables que definen a la fase discreta. Por otro lado están la densidad (ρ_o) y viscosidad (μ_o) del fluido como propiedades que definan la fase continua con una energía térmica $K_B T$, siendo K_B la constante de Boltzman, T la temperatura absoluta, y la tasa de cizalle ($\dot{\gamma}$) como variable que caracteriza el nivel de la deformación. De esta manera es posible determinar que:

$$\mu_s = \tilde{\mu}_s(\phi, \rho_o, \mu_o, K_B T, \rho_s, x, \alpha, \dot{\gamma}) \quad (120)$$

A manera de facilitar el análisis, asumamos:

- Partículas de igual forma, densidad y tamaño, lo que evita emplear *tres números adimensionales: factor de forma, gravedad específica y tamaño reducido*.
- Fluido inviscido ($\mu_f = 0$), con densidad igual a la de los sólidos ($\rho_s = \rho_f$) en equilibrio térmico, que permita obtener una suspensión deformada permanentemente bajo un campo de cizalladura bajo la condición hipotética de energía cinética total constante de las partículas.
- Operemos solamente en los casos en los que la tasa de cizalladura no tiene efecto sobre la viscosidad, esto es a muy baja y a muy alta tasa de cizalladura y en flujo laminar.

En este caso estaríamos observando un fenómeno de deformación isocinética de una mezcla Newtoniana, por lo que la ecuación (120) podría formularse en términos de $9 - (3+4) = 2$ números adimensionales (aplicando el teorema de Buckingham), los que serían: la viscosidad reducida de la suspensión y la fracción volumétrica de sólidos. Por lo tanto:

$$\mu_s = \mu_s(\phi) \quad (121)$$

Esto implica que al formular un modelo de la viscosidad solamente en términos de la fracción volumétrica de sólidos se estarían asumiendo como mínimo las suposiciones anteriores dentro de un contexto de modelación matemática.

Un caso especial que puede incluirse bajo las condiciones de la ecuación (121) es una suspensión formada por un fluido Newtoniano mezclado con una poca cantidad de partículas esféricas de manera que haya una baja fracción volumétrica de sólidos en la pulpa. En este caso, nuevamente la ecuación de Einstein es válida para estas circunstancias.

Modelos que involucran además de la fracción volumétrica de sólidos, el tamaño de las partículas que forman la suspensión.

Desde tiempo atrás se han hecho esfuerzos por involucrar el tamaño de la partícula sobre el comportamiento reológico de las suspensiones (Evenson, 1959, Farris, 1968, Parkinsons, *et. al.*, 1970, Dabak & Yucel, 1987, Hopkins & Woodcock, 1990, Storms *et. al.*, 1990, Kim & Luckham, 1993, Tangsathitkulchai & Austin, 1990, Barrientos *et. al.*, 1994, Logos & Nguyen, 1996, Bustamante & Barrientos, 1998).

El efecto sobre la reología de las suspensiones en las que partículas esféricas no-coloidales formen parte de la mezcla con tamaños en intervalos estrechos (relaciones de tamaño grueso a fino entre 1.26 a 15) fue estudiado por Eveson (1959). Esta investigación concluyó que a medida que la amplitud del intervalo de tamaños de las partículas esféricas se aumenta, se produce una reducción de la viscosidad de la suspensión. Por otro lado, Parkinson *et. al.* (1970) investigó la influencia sobre la viscosidad de la distribución de tamaños coloidales preparadas artificialmente en la suspensión, proponiendo el siguiente modelo:

$$\frac{\mu_s}{\mu_f} = \exp\left(\frac{2.5\phi_1}{1 - C_1\phi_1}\right) \exp\left(\frac{2.5\phi_2}{1 - C_2\phi_2}\right) \exp\left(\frac{2.5\phi_2}{1 - C_2\phi_2}\right) \dots \exp\left(\frac{2.5\phi_i}{1 - C_i\phi_i}\right) \quad (122)$$

Donde ϕ_i es la fracción volumétrica de las partículas de tamaño i en la suspensión y los diferentes valores de C_i se obtiene mediante la aplicación de una ecuación empírica de la forma:

$$C_i = 1.079 + \exp\left(\frac{0.01008}{x_i}\right) + \exp\left(\frac{0.0029}{x_i^2}\right) \quad (123)$$

Donde x_i es el tamaño i -ésimo en la distribución granulométrica.

Posteriormente, Dabak & Yucel (1987) plantearon un modelo para predecir el comportamiento reológico de suspensiones con distribuciones de tamaño preparadas artificialmente. La formulación consiste básicamente en cuatro parámetros adimensionales, los cuales deben ser calibrados para cada suspensión en la que se desee emplear este modelo, en los cuales el tamaño de partícula se involucra en el cálculo de uno de los parámetros que tiene que ver con el parámetro denominado por ellos de “resistencia de flujo”

Por otro lado, la investigación de Tangsathitkulchai & Austin (1988) comprueba experimentalmente que la viscosidad de una suspensión está fuertemente afectada cuando varía la distribución de tamaños del sistema particulado que forma parte de mezcla.

Tangsathitkulchai & Austin (1988) trabajaron con distribuciones de tamaños naturales, esto es, con distribuciones obtenidas de procesos convencionales de molienda de minerales, las cuales fueron caracterizadas por una ecuación tipo Rosin- Rammler:

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{K_{RR}}\right)^m\right] \quad (124)$$

donde $F(x)$ es la fracción de tamaño menor al tamaño x en la distribución granulométrica, K_{RR} es el parámetro de tamaño y m es un parámetro de distribución.

Tangsathitkulchai & Austin (1988) reportan una conclusión bastante importante desde el punto de vista de reología de suspensiones. Ellos encontraron que la viscosidad de las suspensiones varía substancialmente a medida que las partículas cambiaron su parámetro de tamaño K_{RR} , pero las variaciones de la viscosidad con el parámetro de distribución m no fueron significativamente importantes. Esto les permitió concluir que el empaquetamiento de las partículas no es en sí mismo un parámetro tan importante en el comportamiento reológico de suspensiones, lo cual es una de las suposiciones clásicas más importantes en el desarrollo de una teoría reológica de éstas, ya que el parámetro m es más determinante en el empaquetamiento del sistema particulado que el parámetro de tamaño K_{RR} .

El modelo propuesto por Tangsathitkulchai & Austin (1988) tiene la siguiente expresión:

$$\log\left(\frac{\mu_s}{\mu_f}\right) = \left\{ 4.26 + \frac{1}{1 + \left[\frac{0.06}{(m - 0.7)^2}\right]^{4.7}} \right\} \cdot \left(\frac{\phi}{1 - \phi}\right)^{1.1 + \exp(-14.2m^{2.6})} k^{-0.21} \quad (125)$$

Donde μ_s es la viscosidad Newtoniana a alta tasa de cizalladura, a la cual Tangsathitkulchai & Austin (1988) denominaron viscosidad plástica μ_{PL} o viscosidad Newtoniana a alta tasa de cizalladura μ_{∞} .

Otras aproximaciones posteriores, tales como los de Storms, *et. al.* (1990) y de Kim & Luckham (1993) que trabajan con sistemas particulados bimodales (una mezcla de dos monotamaños) encuentran que dependiendo de las fracciones relativas de tamaño fino a tamaño grueso en las partículas que constituyen la suspensión se reduce o no la viscosidad, la cual disminuye hasta alcanzar un mínimo para luego aumentar a medida que se incrementa la fracción de finos en la suspensión. Lo anterior fue justificado con el empaquetamiento, al ligarse este fenómeno a un decrecimiento de la presión de poro, lo cual se confirma por los resultados de la investigación de Hopkins *et. al.* (1990) para suspensiones coloidales, en la cual sostiene que la polidispersión de la granulometría que forma parte de la suspensión **reduce el efecto cizalle-adelgazante de ésta a bajas tasas de cizalladura y reduce drásticamente el efecto cizalle-espesante a altas tasas de cizalladura.**

Debe tenerse en la cuenta que la reducción del efecto cizalle-espesante a muy altas tasa de cizalladura, lo cual es propuesto por Hopkins *et. al.* (1990), se debe fuertemente a la aparición de flujos secundarios (Cheng, 1968) que generan procesos de retromezclas, lo que globalmente determina un comportamiento turbulento. Una mejor visualización de lo anterior se puede ver a partir de la teoría de fluidos estructurados (Kline, 1977).

Por último, Logos & Nguyen (1996) concluyen que la substancial reducción de la viscosidad en una suspensión de carbón al agregar partículas gruesas sin variar la fracción volumétrica de sólidos se debe a que las partículas más finas que rellenan los intersticios dejados por las partículas más grandes disminuyen su concentración en el seno del fluido que forma parte de la suspensión, y por ende se reduce la viscosidad debido a una disminución efectiva de la fracción fina en la suspensión al ser sometida a una deformación. Esto investigadores concluyen que la fracción fina controla el comportamiento reológico de la suspensión, pero no precisan cuantitativamente el efecto.

No consideran Logos & Nguyen (1996), el efecto del aumento de la eficiencia del empaquetamiento de los paquetes de partículas, lo cual puede reducir el efecto sobre la viscosidad del movimiento tipo Browniano (o mejor conocido como auto-difusión cizalle generada, Brady, 1994) de las partículas más finas, pues los paquetes tienden a poseer un control por el movimiento convectivo.

Para terminar, la polidispersidad de la distribución de tamaños del sistema particulado que forma parte de la suspensión, sí parece tener un efecto sobre la disipación de energía mecánica de las pulpas, por lo tanto los resultados de Tangsathikulchai & Austin (1988) son un caso singular de una distribución granulométrica muy particular (distribuciones naturales generados por procesos convencionales de molienda, las cuales posee un solo modo en la distribución), Más adelante se amplía este concepto cuando se desarrolla teóricamente el modelo propuesto en este trabajo.

6. ANALISIS DIMENSIONAL

El análisis dimensional para la deducción de un modelo de la viscosidad fue inicialmente empleado por Krieger & Dougherty (1959), después por Jomha *et. al.* (1991) y finalmente por Barrientos *et. al.* (1994).

Este método es una aproximación en donde la mecánica de las partículas y la física del sistema es ignorado, aunque la aproximación sigue siendo enteramente fenomenológica. Lo anterior permite determinar la viscosidad de la suspensión como una función *a priori* de las diferentes variables del sistema.

La clave del éxito de este tipo de aproximación radica en definir adecuadamente los diferentes números adimensionales que permitan generar una función de la viscosidad con variables tanto del sistema particulado, como del fluido que compone la mezcla, así como de las diferentes variables de estado del sistema.

Variables del sistema particulado

- Diámetro de las partículas: x_i
- masa de las partículas: m_i , o alternativamente la densidad ρ_s
- Parámetros de forma: α_1 para componente 1,
 α_2 para componente 2,
|
 α_n para componente n

Suponiendo que cada componente del sistema particulado posee una mineralogía determinada es posible caracterizar a cada uno de ellos (1, 2, 3, ...n) con un parámetro de forma determinada α_i , independiente del tamaño.

Variables del fluido que componen la suspensión

- Densidad del fluido: ρ_o
- Viscosidad del fluido: μ_f

Variables de estado del sistema

- Fracción volumétrica de sólidos: ϕ
- Viscosidad de la suspensión: μ_s
- tasa de cizalladura: $\dot{\gamma}$ (o esfuerzo de cizalladura: τ)
- Longitud característica del viscosímetro $Ra-Ri$
- Temperatura: T (o energía $K_B T$)
- Tiempo característico: t_c

La energía térmica, definida como $K_B T$, trata al movimiento Browniano como un proceso aleatorio Gaussiano-Markoviano; sin embargo, bajo una visión no-Markoviana (Volkov & Leonov, 1996), la energía de difusión así definida sería simplemente un caso particular, pues bajo este último enfoque, se tiene que:

$$D = \frac{T}{\zeta + \chi \cdot t_c} \quad (126)$$

donde; ζ es el coeficiente de fricción, χ es el parámetro para la fuerza cuasielástica: $-\chi \cdot r_i$, por lo que la movilidad de una partícula en un fluido de relajación $b = 1/(\zeta + \chi \cdot t_c)$ depende del campo externo, así que $K_B T$ corresponde a un caso particular en que χ es igual a cero.

La función a priori que se determina el esfuerzo y la viscosidad tiene la siguiente forma, respectivamente:

$$\tau = \tilde{\tau} \left[x_i, m_i, \alpha_n, \rho_o, \eta_o, \dot{\phi}, \dot{\gamma}, L, K_B T, t_c \right] \quad (127)$$

$$\mu_s = \tilde{\mu}_s \left[x_i, \rho_n, \alpha_n, \rho_o, \mu_f, \dot{\phi}, \dot{\gamma}, L, K_B T, t_c \right] \quad (128)$$

de acuerdo al teorema Buckingham el número de variables consideradas son 11 y el rango de la matrix dimensional es 3. De esta manera, la ecuación (124) puede ser formulada en $11 - 3 = 9$ términos, a saber:

1. ***Número adimensional de viscosidad de la suspensión reducida o relativa: μ_r***

Este número adimensional que ya se definió en la ecuación (73), parte del principio de superposición, por lo que implícitamente supone que en la interacción del sistema particulado con un fluido elástico en un mezcla origina un comportamiento macroscópico similar al de otro fluido, en el cual la viscosidad efectiva de la suspensión es igual a la otro fluido al cual se le ha variado el tamaño de las moléculas.

2. ***Número adimensional de empaquetamiento: ϕ_{eff}***

La fracción volumétrica de sólidos en si misma es un grupo adimensional, pero lamentablemente este valor no da cuenta de los efectos que generan los fenómenos de superficie, los cuales producen un comportamiento similar a un aumento efectivo del diámetro de la partícula, lo que implica que en la realidad una partícula no ocupa un volumen proporcional a su diámetro al cubo (x^3), sino proporcional a $(x + \delta)^3$, donde δ es una distancia en la cual las partículas vecinas poseen su máximo acercamiento. En rigor debería definirse un número adimensional del empaquetamiento como:

$$\phi_{eff} = \frac{\phi}{\phi_c} \quad (129)$$

donde ϕ_c es la fracción crítica o máxima fracción volumétrica de sólidos en la cual la suspensión alcanza una viscosidad infinita.

3. *Número adimensional de densidad reducida: ρ^**

Este grupo adimensional da cuenta de la relación entre las fuerzas de peso (debidas a la gravedad) y de las fuerzas de empuje, así:

$$\rho^* = \frac{\rho_s}{\rho_o} \quad (130)$$

En rigor se debería considerar para cada clase mineralógica de partículas una densidad reducida, cuando se trabaja con una sistema particulado granos de diferentes minerales.

4. *Número adimensional de longitud reducida: x^**

Este grupo adimensional caracteriza la relación entre el diámetro de partícula respecto a una distancia, la cual puede ser el ancho de la abertura del viscosímetro ($R_a - R_c$) así que::

$$x^* = \frac{x}{R_a - R_c} \quad (131)$$

5. *Número adimensional de Deborah; De*

Antes de definir el número adimensional de Deborah, De , es conveniente definir el tiempo de relajación t_R de una suspensión.

Definición. Tiempo de relajación t_R y memoria de una suspensión

Cuando se deforma una suspensión por un esfuerzo de cizalladura fijo, y súbitamente se retira el esfuerzo, la suspensión se demora un instante en retornar el equilibrio. Los esfuerzos medidos después de suspender súbitamente la deformación se pueden denominar **esfuerzos residuales**.

Como normalmente los esfuerzos residuales, los que se denotarán como $\tau(t)$, disminuyen su magnitud exponencialmente con el tiempo (ver figura 6), entonces se pueden determinar estos esfuerzos residuales empleando la siguiente ecuación:

$$\frac{\tau(t)}{\tau(0)} = \exp\left[-\frac{t}{t_R}\right] \quad (132)$$

Donde t_R es el tiempo de relajación y $\tau(0)$ es el esfuerzo de cizalladura en el momento en que se retiró súbitamente la carga sobre la suspensión.

La condición de borde para la ecuación (132) se puede obtener si se tiene en la cuenta que el tiempo de relajación t_R satisface la ecuación cuando el lado derecho de la misma es igual a $1/e$, siendo e la base de los logaritmos naturales, ésto es:

$$\tau_R = \tau(0) / e \quad \text{para} \quad t(t) = t_R \quad (133)$$

Puede notarse como el tiempo de relajación es una medida del tiempo que requiere una suspensión para retornar al equilibrio. En este sentido el tiempo de relajación es el tiempo característico de memoria de una suspensión.

Lo anterior implica que para fluidos elásticos ideales, t_R sería cero, o sea que no tiene memoria, mientras que para suspensiones viscoelásticas la memoria t_R tendría un valor finito, y no despreciable.

Número adimensional de Deborah

Es un número adimensional que caracteriza dinámicamente la suspensión y es el más importante a nivel reológico. En él se relaciona la memoria de la suspensión, el cual como se definió antes no es más que el tiempo de relajación t_R , con el tiempo característico de la deformación del material (t_c), así que:

$$De = \frac{t_R}{t_D} \quad (134)$$

Se debe anotar que t_D está relacionado al inverso de la tasa de cizalladura: $1/\dot{\gamma}$, de tal manera que el número de Deborah podría redefinirse como:

$$De = 1/\dot{\gamma} t_R \quad (135)$$

Un análisis de este número adimensional permite definir dos situaciones asintóticas:

- a. Si el tiempo de relajación t_R es muy pequeño ($t_R \rightarrow 0$), el material posee un número de Deborah $De \rightarrow 0$ independiente del tiempo característico de la deformación t_D lo que describe reológicamente una suspensión Newtoniana (Barnes, et. al., 1989).
- b. Si una suspensión posee un tiempo de relajación t_R es muy grande ($t_R \rightarrow \infty$), y los tiempos de deformación t_D son relativamente pequeños con respecto a t_R ($t_R \gg t_D$), entonces $De \rightarrow \infty$ y el material reológicamente se comporta como un sólido elástico (Barnes, et. al., 1989). Este aspecto puede dar claridad respecto a los esfuerzos de cedencia que se desarrollan en suspensiones concentradas, para suspensiones elasto-viscosas, las cuales pueden ser representadas por las ecuaciones constitutivas de Bingham, en la ecuación (88) o la ecuación constitutiva de Herschel-Bulkley como se planteó en la ecuación (92).

Considerando que el tiempo característico de las suspensiones poseen ordenes de magnitud que oscilan entre 10^{-12} segundos para suspensiones muy diluidas hasta 6.0 segundos para

suspensiones altamente concentradas de partículas coloidales (Bustamante, 1999), es posible que las suspensiones al ser sometidas a muy altas tasas de cizalladura (del orden de 10^4 s^{-1}) en intervalos de tiempo muy cortos (t_D muy pequeños) presenten una distorsión inicial en la curva de flujo, ocasionando la aparición de un comportamiento tipo sólido, lo que está asociado al desarrollo de esfuerzos de cedencia en las suspensiones (Bustamante, 1999) y termomecánicamente hablando a la producción de mayor entropía en la deformación, lo que se percibe por un aumento de la tixotropía (Bustamante, 1999).

Es obvio que los modelos reológicos construidos para predecir la viscosidad en el límite Newtoniano a alta tasa de cizalladura, no consideran este número adimensional, sin embargo si se desea obtener predicciones de viscosidad comparando datos obtenidos en distintos viscosímetros este número adimensional es muy importante.

Dada la dificultad de tener un valor del tiempo característico de la suspensión, t_R , suele hacerse una aproximación empleando otros tipos de tiempos, dependiendo de los movimientos más importantes que puedan presentarse durante el flujo de la suspensión, así:

a. Si es importante el movimiento Browniano en la suspensión se define un tiempo basado en este aspecto:

$$t_R = t_B = \frac{\eta_o x^3}{K_B T} \quad (136)$$

b. Si es importante la deformación elástica, como en el caso de suspensiones concentradas con diámetros relativamente gruesos de partículas, se define un tiempo basado en esta deformación elástica de cizalladura así:

$$t_R = t_E = \frac{\eta_o}{G} \quad (137)$$

donde G es el módulo de rigidez de la deformación mediante la aplicación de un campo esfuerzos de cizalladura.

c. Flujo de suspensiones donde la inercia sea importante, se puede definir t_I :

$$t_R = t_I = \frac{\rho_o x^2}{\eta_o} \quad (138)$$

d. Existen otros tiempos que caracterizan la suspensión dependiendo de la importancia relativa de las fuerzas de tensión superficial, las fuerzas de repulsión y/o las fuerzas de atracción electrostáticas para partículas cargadas superficialmente.

6. *Número adimensional de Peclet: Pe.*

Este número adimensional se define como la relación entre las fuerzas hidrodinámicas debidas a la cizalladura y las fuerzas debidas al movimiento Browniano, así:

$$Pe = \frac{\dot{\gamma} \mu_f x^3}{K_B T} \quad (139)$$

Como puede notarse, este grupo adimensional tiene importancia cuando el movimiento Browniano es significativo, lo que ocurre particularmente en suspensiones con altos contenidos de partículas de tamaño coloidal.

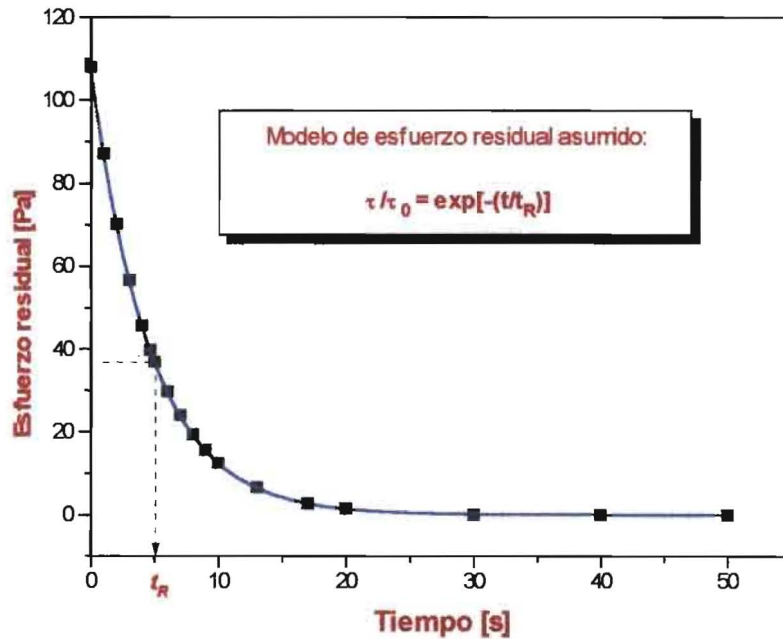


Figura 6. Curva de relajación de esfuerzos cuando se suspende súbitamente el esfuerzo de cizalladura para una suspensión de Cuarzo y Líquido denso 2, con ϕ de 0.20 ($t_R = 4.64$ s)

7. Número adimensional de Reynolds: Re

Este grupo define el balance de fuerzas inerciales (debidas al campo de velocidad sobre la partículas) respecto a las fuerzas viscosas del medio, así:

$$Re = \frac{\dot{\gamma} \rho_o x^2}{\mu_f} \quad (140)$$

Este grupo es importante cuando Re es relativamente más grande que el número de Peclet Pe , esto es, en el caso de suspensiones con diámetros de partículas relativamente grandes o viscosidad del fluido que forma parte de la suspensión demasiado baja (fluido inviscido).

Para suspensiones cizalle-adelgazantes, se ha demostrado que el número de Reynolds, Re , disminuye a medida que aumenta la tasa de cizalladura (Barrientos, *et. al.*, 1994).

$$\mu_r = \mu_r \left[x_i^*, \rho^*, \alpha_n, \phi_{eff}, De, Pe, \frac{1}{Re} \right] \quad (141)$$

Modelos de viscosidad empleando análisis dimensional de Barrientos et. al. (1994).

Con base en una análisis dimensional, Barrientos *et. al.* (1994) desarrollaron un modelo de la viscosidad que se le conoce con el nombre de “modelo de los nueve parámetros” el cual tiene la siguiente estructura:

$$\frac{\mu_s}{\mu_o} = p_8 \exp \left(\frac{p_1 \phi}{1 - \left[\frac{\phi}{p_2} \right]^{p_3}} \right) \left(1 + \frac{p_4 \exp \left[- p_5 \phi^{p_7} \left(\bar{x} / x_o \right)^{p_9} \right]}{Re^{1/p_6}} \right)^{p_6} \quad (142)$$

Donde \bar{x} es un tamaño promedio de la distribución de tamaños, y los diferentes parámetros p_i ($i = 1,2,\dots,9$) son ajustables para cada tipo de mineral.

Es de anotar que este modelo introduce como variable característica de tamaño el diámetro medio de la distribución, la cual es una medida de tendencia central, por lo tanto si se desea considerar realmente la distribución granulométrica es pertinente introducir, además de lo anterior, otra variable que caracteriza la medida de la dispersión de la distribución como lo es la desviación estándar u otro índice estadístico, que de información de la polidispersidad de tamaños en la distribución de los sólidos que forman parte de la suspensión.

Sin embargo, como está planteado en la ecuación (142), este modelo es equivalente a la viscosidad que tendría una suspensión compuesta por un fluido Newtoniano y un sistema particulado con un monotamaño de diámetro igual al tamaño promedio de la distribución, y por ende los efectos ocasionados por la polidispersión de los tamaños de las partículas, tales como empaquetamiento, modificación de la presión de poro, cambios de área superficial, entre otros, débilmente podrían ser considerados.

En tal sentido Hopkins & Woodcock (1990) introducen para la medición de las propiedades reológicas de una suspensión el coeficiente de variación CV definido como la razón entre la desviación estándar y el tamaño medio de la distribución granulométrica del sistema particulado que forma parte de la suspensión.

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \quad (143)$$

A pesar de los esfuerzo anteriores, no parece ser tan simple la consideración de la polidispersidad de la distribución solamente teniendo en la cuenta el coeficiente de variación.

El número de Reynolds empleado en la ecuación (142) se define como:

$$\text{Re} = \frac{\rho_f \bar{x}^2 \dot{\gamma}}{\mu_f} \quad (144)$$

Es importante resaltar que en el modelo de Barrientos *et. al.* (1994), se introduce el número de Reynolds en términos de la tasa de cizalladura y la viscosidad del fluido. Esto permite hacer algunos comentarios:

- a. El número de Reynolds que se define en la ecuación (144) tiene un carácter eminentemente reológico y describe de alguna manera el estado de deformación independiente del equipo.
- b. Debe considerarse que previa a la definición planteada en la ecuación (144), existe una definición de un número de Reynolds obtenida a partir de la geometría del aparato dentro de un régimen laminar, como lo reportan Tangsathitkulchai & Austin (1988), para un flujo de Couette con la siguiente forma:

$$\text{Re}_{CL} = \frac{2\pi N \rho_f R_b^2 (S - 1)}{\mu_f} \quad (145)$$

Donde Re_{CL} es el número de Reynolds en un flujo de Couette definido en términos de la geometría y operación del viscosímetro, N son las revoluciones por segundo, R_b es el radio del cilindro y S es la razón entre radio de la copa sobre el radio del cilindro.

Tangsathitkulchai & Austin (1988) reportan también que el número de Reynolds crítico, en el cual el flujo de Couette pasa de flujo laminar a turbulento esta definido como:

$$\text{Re}_{crit} = \frac{40}{\sqrt{1 - \frac{1}{S}}} \quad (146)$$

Lo anterior implica que el número de Reynolds, Re ; en términos de la geometría del viscosímetro y de las condiciones de operación propuesto por la ecuación (145) difiere del número de Reynolds definido en la ecuación (144), ya que este último tiene en la cuenta un parámetro de tamaño de las partículas que forman parte de la suspensión.

7. TEORÍA DE DISIPACIÓN DE ENERGÍA MECÁNICA PARA EL CALCULO DE LA VISCOSIDAD EN UNA SUSPENSION.

Happel y Brenner (1965) usaron la misma metodología que empleara Einstein (1956) para el cálculo de la viscosidad en una suspensión formada por un fluido newtoniano mezclado con partículas duras.

El concepto básico propuesto en ambas circunstancias consiste usar el concepto de viscosidad reducida, como se planteó en la ecuación (73). La viscosidad reducida a su vez representa la razón entre el trabajo realizado por los esfuerzos de contacto en la suspensión (W_s) y el trabajo realizado por los mismos esfuerzos en el fluido solamente (W_f), cuando se mantienen iguales las condiciones hidrodinámicas en la deformación de la suspensión y del fluido Newtoniano dentro del viscosímetro. Lo anterior equivale a comparar el trabajo realizado bajo las mismas condiciones de deformación, la que se como aproximación *isocinética*.

Si consideramos un fluido viscoso con velocidad \mathbf{v} , que disipa energía mecánica sobre una superficie $d\mathbf{S}$, la tasa de disipación puede ser calculada así:

$$\left[\begin{array}{c} \text{Tasa de disipación} \\ \text{de energía mecánica} \end{array} \right] \propto \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \cdot d\mathbf{S} \quad (147)$$

Dado que el vector $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$ puede considerarse como un flujo de energía mecánica, la tasa de energía por unidad de tiempo y por unidad de volumen que es suministrada debido al trabajo efectuado por los esfuerzos sobre un elemento de volumen (cuando no se consideran las fuerzas de cuerpo) está dada por:

$$\left[\begin{array}{c} \text{Trabajo realizado por} \\ \text{los esfuerzos por unidad} \\ \text{de volumen, sobre un} \\ \text{elemento de volumen} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Trabajo realizado} \\ \text{sobre un elemento} \\ \text{por cambio de su} \\ \text{volumen} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{trabajo realizado} \\ \text{sobre un elemento} \\ \text{considerando la} \\ \text{fricción interna} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Trabajo realizado} \\ \text{en el movimiento} \\ \text{del elemento en} \\ \text{conjunto} \end{array} \right] \quad (148)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}) = -p \nabla \cdot \mathbf{v} + \Phi + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{T})$$

Además, se puede calcular el trabajo realizado por la suspensión W_s y por el fluido newtoniano W_f , al ser sometidos a un campo de esfuerzos de contacto representado por el tensor \mathbf{T} de la siguiente manera:

$$W_s = \int_{S_o} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}_s \cdot \mathbf{v}_s \quad (149)$$

$$W_f = \int_{S_o} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}_f \cdot \mathbf{v}_f$$

Por lo tanto la viscosidad relativa de la suspensión se puede definir como (Happel & Brenner, 1965):

$$\frac{\mu_s}{\mu_f} = \frac{W_s}{W_f} = \frac{\int_{S_0} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}_s \cdot \mathbf{v}_s}{\int_{S_0} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}_r \cdot \mathbf{v}_r} \quad (150)$$

Ahora bien, como se mantiene fija la condición de no-deslizamiento (flujo de Stokes), entonces:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_s = \mathbf{v}_r \quad \text{sobre } S_0 \quad (151)$$

Si cambiamos el marco de referencia al centro de las partículas esféricas, podemos transformar el sistema de un estado transiente a un estado estacionario (Barrientos & Concha, 1995), por lo que se pueden comparar ambos regímenes.

Por otro lado, si consideramos la magnitud de la fuerza de arrastre de cada una de las partículas esféricas en la suspensión como:

$$F_D = 6\pi\mu R v_r \xi \quad (152)$$

donde v_r es una velocidad relativa sólido-fluido y ξ es una corrección (Happel & Brenner, 1965), R es el radio de las partículas y l es el espaciamiento promedio entre las partículas en la suspensión. De esta manera se puede encontrar una expresión para la energía disipada así:

$$E_s \propto \frac{3}{4} \pi \mu_f v_r^2 x \left[\frac{x}{l} \right] \quad (153)$$

donde x es el diámetro de la partícula y μ_f la viscosidad del fluido Newtoniano que forma parte de la suspensión.

Ahora bien, asumiendo que las partículas están orientadas de tal forma que poseen un *número de coordinación seis* (Happel & Brenner, 1965), es posible determinar una velocidad relativa promedio, tal que:

$$\langle v_r^2 \rangle = A(x+l)^2 (\mathbf{T}_s : \mathbf{T}_s) \quad (154)$$

Donde A es del orden de 1/30 a 1/12 (Happel & Brenner, 1965) la cual depende inicialmente de la fracción volumétrica de partículas en la pulpa.

Reemplazando en la ecuación (150), se tiene que:

$$\frac{\mu_s}{\mu_f} = AN \frac{\frac{3}{2} \pi \mu_f x (x+l)^2 \left[\frac{x}{l} \right] \sum_i \mathbf{T}_s^i : \mathbf{T}_s^i}{2 \mu_f \int_v \mathbf{T}_r : \mathbf{T}_r dV} \quad (155)$$

donde \mathbf{T}_s^i es el tensor deformación evaluado en el centro de una esfera.

Haciendo los arreglos convenientes para expresar la sumatoria de los tensores en cada partícula como una integral de volumen se tiene que:

$$\frac{\pi x^3}{6} \sum_i \mathbf{T}_s^i : \mathbf{T}_s^i = \phi \int_v \mathbf{T}_r : \mathbf{T}_r dV \quad (156)$$

reemplazando en la ecuación (155), se tiene que:

$$\frac{\mu_s}{\mu_f} \propto \frac{9}{2} \phi AN \left[\frac{x}{l} \right] \quad (157)$$

Como se sabe, la razón x/l depende de la fracción volumétrica de partículas en la suspensión esto implica la existencia de una relación funcional entre x/l y ϕ , de acuerdo a un arreglo cúbico de las esferas, así:

$$\frac{x}{l} = \frac{(\phi / \phi_m)^{1/3}}{1 - (\phi / \phi_m)^{1/3}} \quad (158)$$

donde ϕ_m es la máxima concentración que se puede obtener (ver figura 5), y por lo tanto:

$$\frac{\mu_s}{\mu_f} \propto C \left[\frac{(\phi / \phi_m)^{1/3}}{1 - (\phi / \phi_m)^{1/3}} \right] \quad \text{con} \quad \frac{\phi}{\phi_m} \rightarrow 1 \quad (159)$$

8. NUEVO MODELO DE LA VISCOSIDAD DE SUSPENSIONES

De acuerdo a lo planteado a la luz de las consideraciones termomecánicas de la ecuación (67), se puede obtener una estructura matemática de un modelo para la viscosidad reducida μ_r en una suspensión en los límites Newtonianas de alta y baja tasa de cizalladura, solamente.

Debe tenerse en la cuenta que por definición, el planteamiento termomecánico es incapaz de generar un modelo de la viscosidad dependiente de la tasa de cizalladura, pues a medida que se involucra la tasa de cizalladura en la deformación de la suspensión se introducen elementos cinéticos en el proceso, lo cual por definición está fuera del alcance del análisis termodinámico.

Para una suspensión considerada como un fluido Newtoniano generalizado, la ecuación (69) se puede reescribir teniendo en la cuenta la ecuación (71) así:

$$\tau = \mu_s(\dot{\gamma})\dot{\gamma} \quad (160)$$

donde en general, μ_s es función de la tasa de cizalladura $\dot{\gamma}$ y se aplica la regla de la cadena para derivar la ecuación (160) con respecto a $\dot{\gamma}$ se tiene que:

$$\frac{d\tau}{d\dot{\gamma}} = \mu_s(\dot{\gamma}) + \dot{\gamma} \frac{d\mu(\dot{\gamma})}{d\dot{\gamma}} \quad (161)$$

La viscosidad Newtoniana de la suspensión a alta tasa de cizalladura (ver figuras 3 y 4) no depende de la tasa de cizalladura, entonces:

$$\frac{d\mu(\dot{\gamma})}{d\dot{\gamma}} = 0 \quad \text{cuando} \quad \mu(\dot{\gamma}) = \mu_\infty \quad (162)$$

Si se estima que no se cambia la distribución de la energía interna al deformar una suspensión por un campo de cizalladura determinado, es posible entonces derivar la estructura matemática de un modelo de la viscosidad Newtoniana a alta tasa de cizalladura independiente esta última variable.

Como se demostró antes, la distribución más probable de paquetes de partículas n^* se expresó en la ecuación (60), en donde U_j es la energía interna por unidad de volumen de cada paquete de partículas.

La disipación viscosa de energía mecánica dependerá fuertemente de la distribución de paquetes de partículas, por lo tanto:

$$\frac{\mu_s}{\mu_f} \propto \frac{n^*}{n} \quad (163)$$

Esto implica que:

$$\frac{\mu_s}{\mu_f} \propto \frac{\exp[U_j / KT]}{Q}$$

$$\dot{}$$

$$\ln \frac{\mu_s}{\mu_f} \propto \frac{U_j}{KT}$$
(164)

Bustamante (1998) analizó los datos experimentales de Hopkins & Woodcock (1990) y dedujo que la variación de la presión osmótica en el seno de la suspensión (la que en mineralurgia se denomina presión de poro) tiene una estructura de la forma:

$$p \propto \exp \frac{\phi^{(1-2/3m)}}{\kappa}$$
(165)

Donde m es el coeficiente de distribución cuando la función de Rosin- Rammler representa la distribución de tamaños y como se detalla en la ecuación (124).

Si se asume que los cambios en los niveles de energía interna en la suspensión debido a deformaciones por esfuerzos de cizalladura pueden ser representados por las variaciones de la presión de poro en un volumen determinado, esto es:

$$U_j \propto \int_V f(x_p, \psi) \exp\left(\frac{\phi^{(1-2/3m)}}{\kappa}\right) dV_p$$
(166)

Donde $f(x, \psi)$ es una función del tamaño y de la forma de las partículas. De otro lado, el parámetro de tamaño de la distribución de tamaños según la ecuación (124) es K_{RR} , entonces:

$$f(x, \psi) = \tilde{f}(K_{RR}, \psi)$$
(167)

Considerando que el término exponencial en la ecuación (166) es independiente del volumen de paquetes la cual se puede sacar de la integral, y que la integral de la función f es $g(K_{RR}, \psi)$, entonces:

$$U_j \propto g(K_{RR}, \psi) \cdot \exp \frac{\phi^{(1-2/3m)}}{\kappa}$$
(168)

Si se reemplaza la expresión (168) en la ecuación (164), se puede obtener una expresión para la viscosidad reducida en los límites Newtonianos a alta tasa de cizalladura de la siguiente forma:

$$\ln \frac{\mu_s}{\mu_f} \propto g(K_{RR}, \psi) \cdot \exp \left[\frac{\phi^{(1-2/3m)}}{\kappa} \right]$$
(169)

Donde K_{RR} y ψ son los parámetros de tamaño y de forma de la distribución de tamaños del sistema particulado, los cuales controlan la coordinación y estructura de los paquetes de partículas que se forma en la suspensión.

Trabajo experimental

Equipo de medición para la evaluación reológica

La evaluación del comportamiento reológico de las suspensiones se efectuó en un rotámetro **Haake RV-100** combinado con un sistema de medida **CV 100** acoplado con un sensor de torque **M5** y cuatro juegos de copa/cilindro **MV1P**, **MV1P**, **SVI** y **SVII** (ver tabla 2)

Este rotámetro es del tipo copa/cilindro con un sistema de medición *Searle* en el cual la copa permanece fija y el cilindro interior gira a una velocidad de rotación ω . La tasa de cizalladura en el cilindro interior se calcula mediante la expresión:

$$\|\mathbf{D}\| = \dot{\gamma} = \frac{1}{30} \omega \frac{R_a^2}{R_a^2 - R_i^2} = \left\{ \frac{\pi}{15} \frac{R_a^2}{R_a^2 - R_b^2} \right\} n = M \cdot n \quad (170)$$

Donde R_a es el radio de la copa y R_i el radio del cilindro que rota al interior en el sistema *Searle*, n es la frecuencia del movimiento de rotación en revoluciones por segundo y M la expresión que se haya entre paréntesis en la ecuación 1.

Este equipo reporta el esfuerzo de cizalladura τ y la tasa de cizalladura $\dot{\gamma}$, además de los parámetros derivados a partir de estas variables, entre los que se encuentra la viscosidad aparente para cada uno de los pares de esfuerzo y tasa de cizalladura.

En la tabla 2 se muestran las características geométricas de los sensores del viscosímetro **Haake RV-100** y los intervalos de operación, en los cuales las mediciones fueron efectuadas

La temperatura de todas las pruebas se mantuvo constante a 11.5 ± 0.5 grados centígrados, lo cual se logra mediante un termostato que posee el equipo Haake.

Minerales empleados

Se emplearon tres tipos de minerales:

1. **Concentrados de sulfuros metálicos**, proveniente de la planta de flotación de Molibdeno de la División Andina de CODELCO- Chile (G.E. 4.1). Se emplearon tres distribuciones granulométricas, las cuales se detallan en la figura 7.
2. **Cuarzo cristalino** de alta pureza empleado en la fabricación de vidrio (G.E. 2.58). Se emplearon tres distribuciones granulométricas (ve figura 8).
3. **Carbón Coke** (G.E. 1.48) proveniente de la Compañía de Aceros del Pacífico CAP - Chile. Se empleó una sola distribución granulométrica (ver figura 9).

La distribución de tamaños de cada una de los minerales ensayados, se ajustó muy bien a una distribución Rosin-Rammler(ver ecuación (124)), como se puede apreciar en las figuras 7, 8 y 9.

Tabla 2 Geometría e intervalos de operación del viscosímetro Haake RV-100

VARIABLES GEOMÉTRICAS	TIPO DE SENSOR			
	MVIP	MVIP	SV1	SV2
<i>Cilindro interno (rotor)</i>				
Radio del cilindro R_i (mm)	20.04	18.40	10.1	10.1
Altura del cilindro L (mm)	60.0	60.0	61.4	19.6
<i>Copa externa</i>				
Radio R_a (mm)	21	21	11.55	11.55
Volumen de muestra (cm^3)	40	55	9	6
Intervalo de Esfuerzo (Pa)	5-230	8-250	10-300	50-350
Intervalo de tasa de cizalladura (s^{-1})	0.1-1000	0.08-800	0.05-250	0.05-250

(Fuente: Manual de operación de rotámetro Haake)

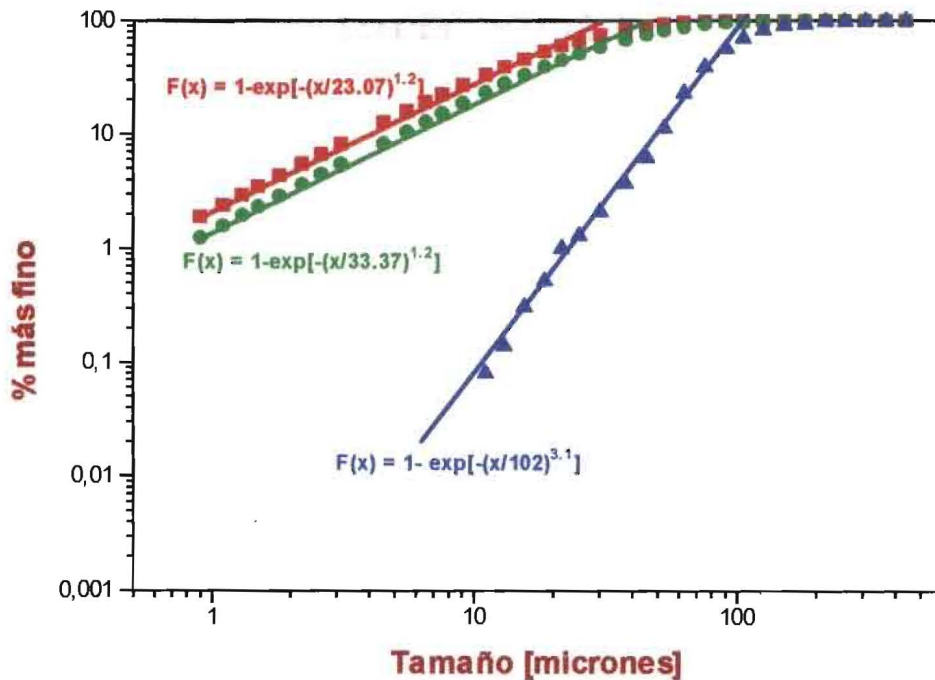


Figura 7 Distribución granulométrica de concentrado de Cobre

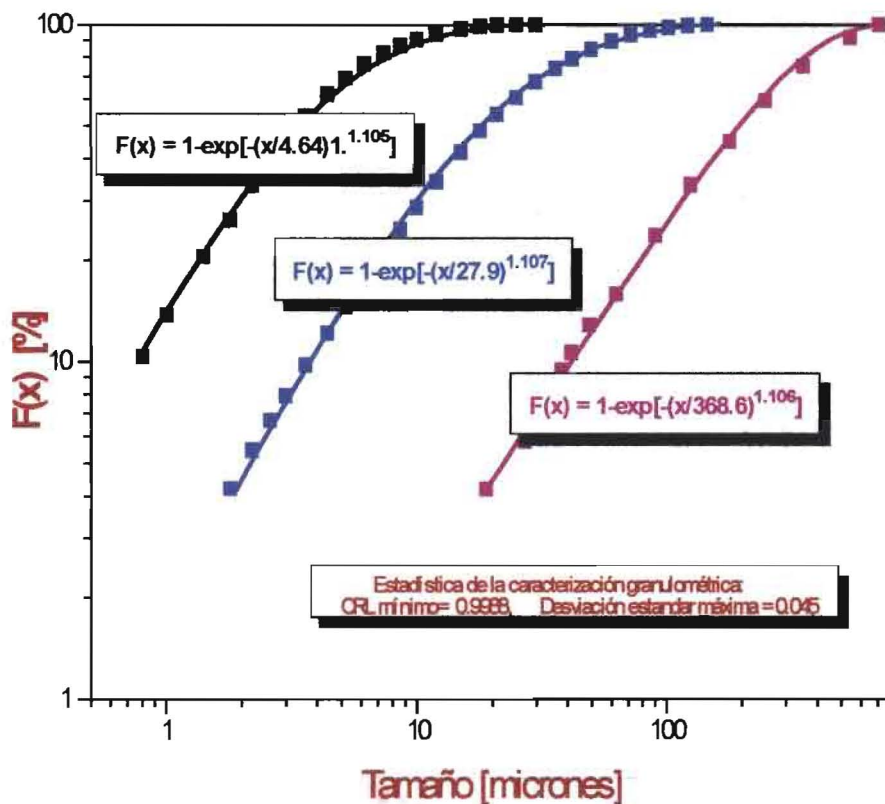


Figura 8 Distribuciones granulométricas del cuarzo cristalino

El equipo utilizado en la determinación de la granulometría fue un analizador de partículas **SYMPATEC HELOS**, empleando la vía húmeda y por lo tanto las muestras fueron suspendidas en agua destilada en una celda **SUCCELL** y dispersadas con ultrasonido durante 10 segundos.

Debe tenerse en la cuenta que los tamaños reportados son diámetros de Stokes, debido a los mecanismos de medición del equipo.

Fluidos Newtonianos empleados

Para la preparación de las suspensiones, se emplearon tres tipos de fluidos Newtonianos, los cuales fueron evaluados previamente en el rotámetro Haake. Los líquidos poseen la misma densidad de las partículas para impedir la sedimentación durante los diferentes ensayos y la estratificación del sistemas particulado durante la medición reológica.

Además de lo anterior, los líquidos son apolares con el fin de evitar efectos de interacción química superficial eludiendo de esta manera diferentes efectos electroviscosos.

La figura 10 muestra las curvas de flujo de los tres fluidos Newtonianos empleados, cuyas viscosidades se muestran en la tabla 3.

Los análisis de los datos obtenidos en la evaluación reológica tanto desde el punto de experimental como desde el punto de vista estadístico en los ajustes matemáticos de las curvas de flujo, no reportan esfuerzo de cedencia alguno en los líquidos empleados, lo cual es una condición imprescindible para asegurar el comportamiento Newtoniano de los líquidos y de esta manera controlar posteriormente la aparición de esfuerzos de cedencia en las suspensiones al ser deformadas.

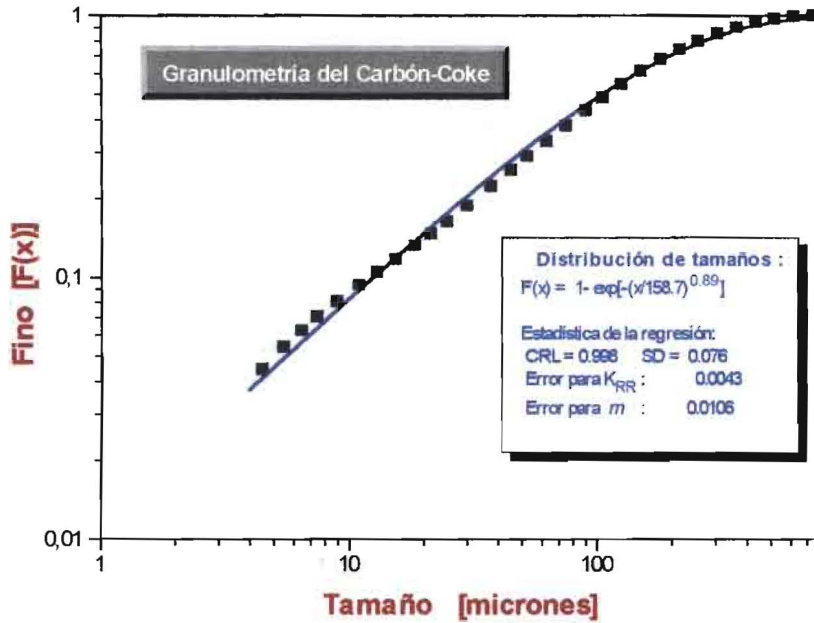


Figura 9. Granulometría del carbón-coke

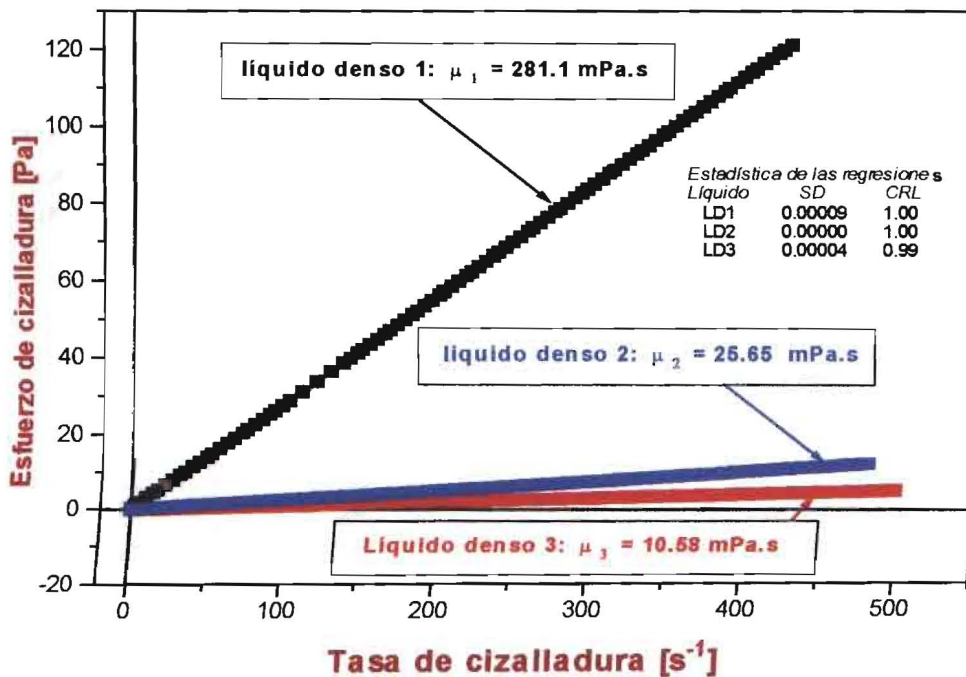


Figura 10 Curvas de flujo de líquidos Newtonianos

Estrategia experimental

Variación de parámetros reológicos de medición

Variación de la tasa de cizalladura

Los intervalos de variación de la tasa de cizalladura fueron desde cero hasta 1000 s^{-1} para los sensores MVIP y MVIIIP y hasta 440 s^{-1} para los sensores SV1 y SV2.

El intervalo de tiempo para que la suspensión alcance la tasa de deformación máxima, partiendo de cero, siempre fue muy alejado del tiempo de relajación t_R .

Medición del tiempo de relajación t_R

El tiempo de relajación t_R se midió experimentalmente al someter la suspensión a un esfuerzo de cizalladura determinado (τ_0), y luego retirar este esfuerzo súbitamente dejando que la suspensión retorne al equilibrio espontáneamente, como lo sugiere el fabricante del rotámetro Haake (ver figura5).

Por otro lado, con el fin de evitar confusiones en el análisis de los datos experimentales, se programó la operación del rotámetro durante los ensayos con incrementos constantes de la tasa de cizalladura en el tiempo, como se aprecia en la figura 11.

Variación de la velocidad de aplicación del esfuerzo de cizalladura

La gran mayoría de las pruebas se efectuaron con incrementos constantes de la tasa de cizalladura, (ver figura 11).

Lo anterior se hizo con el propósito de poder comparar los resultados reológicos bajo las mismas condiciones de velocidad de aplicación del esfuerzo de cizalladura, pues de lo contrario es difícil extraer conclusiones ya que se cambiarían las condiciones de aplicación del esfuerzo lo cual es un parámetro importante en el comportamiento reológico de las suspensiones.

Tabla 3 Viscosidades de líquidos Newtonianos usados en las suspensiones

Líquidos Newtonianos	Viscosidad
	mPa.s
<i>Líquido denso 1</i>	281.1
<i>Líquido denso 2</i>	25.65
<i>Líquido denso 3</i>	10.58

Además de lo anterior, se tuvo especial precaución de que los tiempos de deformación durante los ensayos fueran suficientemente grandes, normalmente entre 20 a 60 veces el

tiempos de relajación t_R y así evitar el efecto ocasionado por la velocidad de aplicación del esfuerzo de cizalladura.

La variación de los intervalos de duración de los experimentos fue entre 6.0 s hasta 300 s.

Variaciones en el sistema particulado.

Variación de la fracción volumétrica de sólidos ϕ

Se investigó los efectos de la fracción volumétrica de sólidos ϕ en intervalos desde 0.01 hasta 0.50 pasando por 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.40, 0.45 y 0.5

Variación de la granulometría del sistema particulado

Como se mencionó en las secciones anteriores, para el concentrado de cobre se tuvieron en cuenta tres distribuciones de tamaños (ver figura 7), para el cuarzo se trabajó con tres distribuciones de tamaños (ver figura 8) y para el carbón coke se operó con tan sólo una distribución de tamaños (ver figura 9).

Para cada una de las distribuciones originales se efectuaron ensayos variando la fracción volumétrica de sólidos ϕ .

Para la evaluación del efecto del tamaño de partícula sobre las reología de la suspensión se varió el parámetro de tamaño K_{RR} en las distribución de tamaños del sistema particulado que forma parte de la suspensión y se mantuvo fijo el parámetro de distribución m (ver ecuación 124).

Al mantener fijo el parámetro de la distribución m (ver ecuación de 124) se pretende evitar la modificación de las condiciones de empaquetamiento del sistema particulado en la suspensión. Esta estrategia fue reportada por Tangsathitkulchai & Austin (1988).

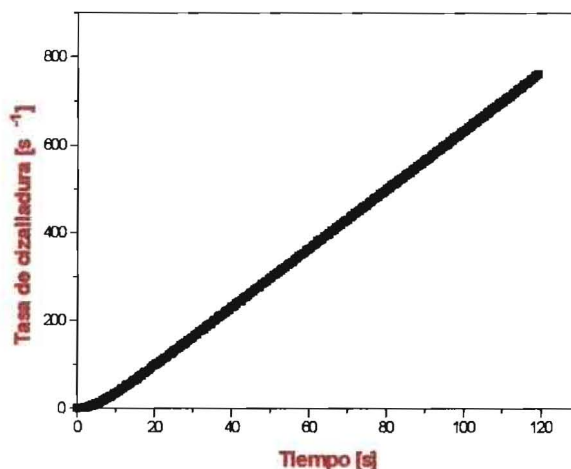


Figura 11. Variación de la tasa de cizalladura con el tiempo en la mayoría de los ensayos realizados con los diferentes minerales

Validación del modelo

Las figuras 12, 13, 14, 15 y 16 muestran los resultados experimentales y las curvas simuladas empleando el modelo propuesto.

Si no consideramos la forma de las partículas, se puede reducir el modelo de la ecuación (169) así:

$$\ln \frac{\mu_s}{\mu_f} = P(K_{RR}) \cdot \exp \left[\frac{\phi^{(1-2/3m)}}{\kappa} \right] \quad (171)$$

Donde $P(K_{RR})$ es una función del parámetro de tamaño del sistema particulado que forma parte de la suspensión y el parámetro κ depende solamente del parámetro m de la distribución de tamaños (ver ecuación 124).

La estadística de las regresiones no-lineales y la cota de error en que se incurre cuando se simula el modelo respecto a los datos experimentales, hace que este modelo tenga una capacidad de predicción muy alta con respecto a los reportados en la literatura clásica de reología de suspensiones.

Modelación de la viscosidad para suspensiones de sulfuros metálicos

Las suspensiones compuestas por un fluido Newtoniano y una distribución de tamaños de sulfuros metálicos cuando el sistema particulado posee una distribución granulométrica muy amplia, presentó bajo el modelo de la ecuación (171), el siguiente ajuste (ver figura 12):

$$\ln \left[\frac{\mu_s}{\mu_f} \right] = 0.069 \cdot \exp \left[\frac{\phi^{0.444}}{0.161} \right] \quad (172)$$

Con una cota de error del 0.9% y el χ^2 del ajuste es de 0.031 con un intervalo de confianza del 95%.

De otro lado, si no se varía fuertemente la distribución de tamaños del mineral de cobre; se tiene que el ajuste de acuerdo a la ecuación (171) se presenta así.

Para la distribución más fina de concentrados de cobre (ver figura 13) se tiene que:

$$\ln \left[\frac{\mu_s}{\mu_f} \right] = 0.09 \exp \left[\frac{\phi^{0.445}}{0.161} \right] \quad (173)$$

Con una cota de error del 7.0%, χ^2 de 0.140 e intervalo de confianza del 95%.

Para la distribución de tamaños de concentrados de cobre más gruesa (100% mayor a malla 325) se obtuvo el siguiente resultado:

$$\ln \left[\frac{\mu_s}{\mu_f} \right] = 0.158 \exp \left[\frac{\phi^{0.785}}{0.177} \right] \quad (174)$$

Con una cota de error del 1.0%, χ^2 de 0.0229 e intervalo de confianza del 95%.

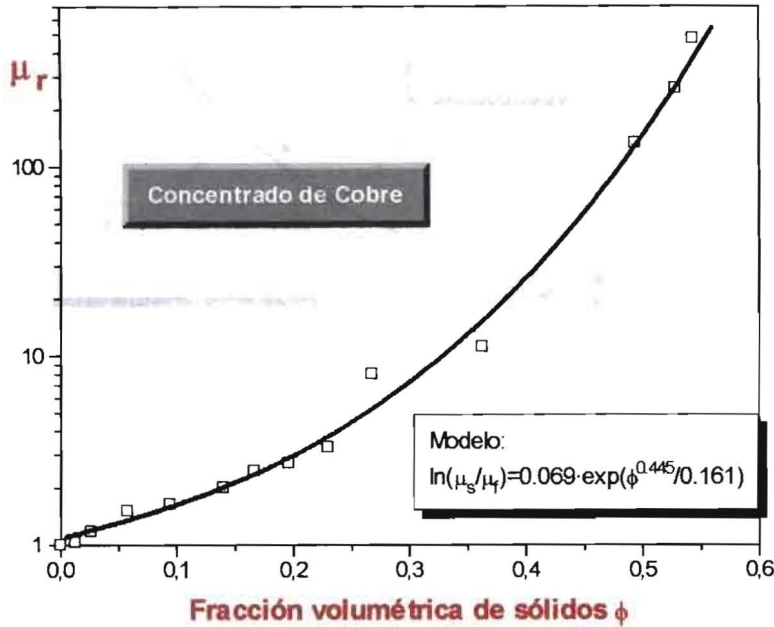


Figura 12. Curva simulada y valores experimentales de la viscosidad reducida versus la fracción volumétrica de sólidos en la suspensión, para el mineral de sulfuro con una distribución de tamaños muy amplia.

Modelación de la viscosidad para suspensiones de cuarzo cristalino

Las figuras 14 y 15 muestran los resultados del ajuste del modelo propuesto en la ecuación (171) con suspensiones compuestas con cuarzo cristalino para diferentes distribuciones de tamaño, pero donde se conserva fijo el parámetro m de la distribución Rosin-Rammler que se plantea en la ecuación (124).

Cuarzo cristalino grueso (ver figura 14):

$$\ln \left[\frac{\mu_s}{\mu_f} \right] = 0.027 \exp \left[\frac{\phi^{0.397}}{0.150} \right] \quad (175)$$

Con la siguiente evaluación estadística; cota de error del 0.60%, χ^2 de 0.012 e intervalo de confianza del 95%.

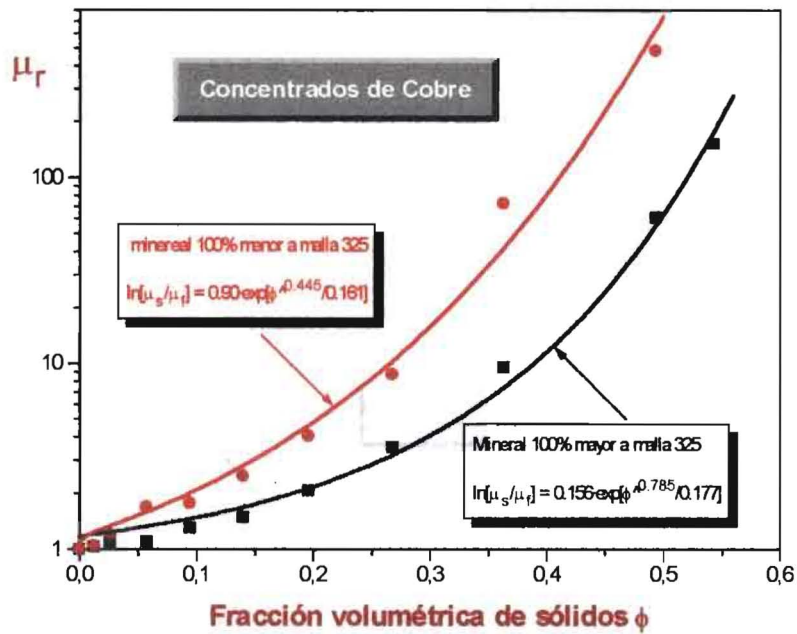


Figura 13. Resultados experimentales y curva simulada de la viscosidad en suspensión de mineral de cobre, modificando fuertemente la granulometría del sistema particulado.

Cuarzo medio (ver figura 15):

$$\ln \left[\frac{\mu_s}{\mu_f} \right] = 0.037 \exp \left[\frac{\phi^{0.397}}{0.150} \right] \quad (176)$$

Con la siguiente evaluación estadística; cota de error del 0.30%, χ^2 de 0.0025 e intervalo de confianza del 95%.

Cuarzo fino (ver figura 15):

$$\ln \left[\frac{\mu_s}{\mu_f} \right] = 0.043 \exp \left[\frac{\phi^{0.397}}{0.150} \right] \quad (177)$$

Con la siguiente evaluación estadística; cota de error del 1.0%, χ^2 de 0.024 e intervalo de confianza del 95%.

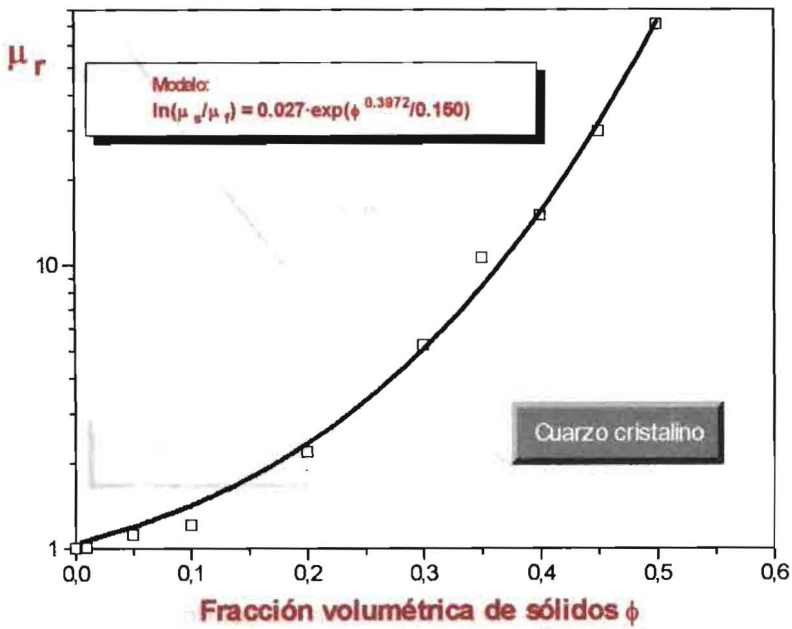


Figura 14. Valores simulados y experimentales de la viscosidad reducida μ_r del cuarzo cristalino grueso versus la fracción volumétrica de sólidos.

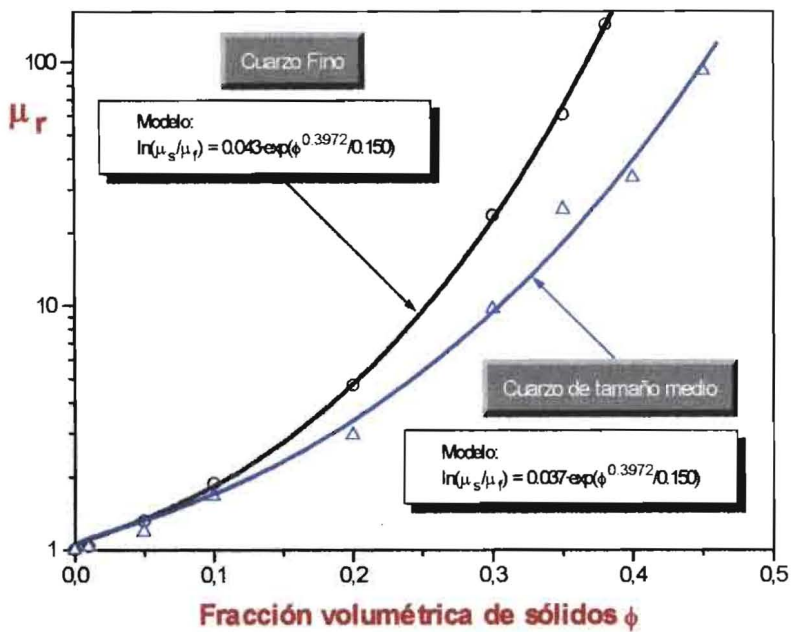


Figura 15. Datos experimentales y curva simulada de la viscosidad relativa μ_r de cuarzo medio y fino, versus la fracción volumétrica de sólidos en la suspensión.

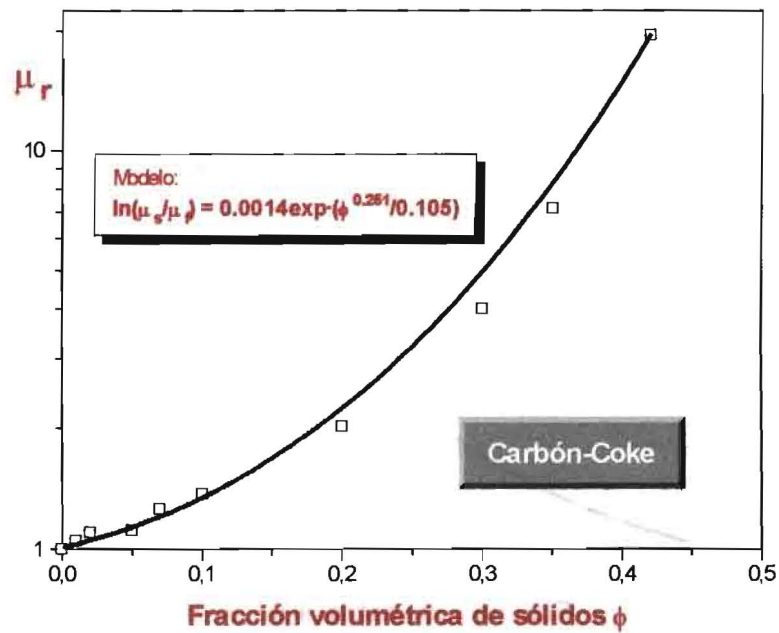


Figura 16. Curva de viscosidad reducida simulada y valores experimentales de la viscosidad relativa μ_r para una suspensión de carbón-coke

Modelación de la viscosidad para suspensiones de carbón-coke

Las suspensiones de carbón-coke presentaron el siguiente ajuste del modelo planteado en la ecuación (171).

$$\ln \left[\frac{\mu_s}{\mu_f} \right] = 0.014 \exp \left[\frac{\phi^{0.251}}{0.105} \right] \quad (178)$$

Con la siguiente evaluación estadística; cota de error del 0.1%, χ^2 de 0.019 e intervalo de confianza del 95%.

De lo anterior es fácil observar que los parámetros del modelo de la ecuación (171) tienen una estrecha relación con la distribución granulométrica del sistema particulado que forma parte de la suspensión.

Se puede verificar que el parámetro $P(K_{RR})$ es realmente una función del parámetro de tamaño de la distribución tipo Rosin-Rammler de la ecuación (124), mientras que el parámetro κ en la ecuación (171) depende de fuertemente del parámetro de distribución m en la ecuación (124) y de la amplitud de la distribución de tamaños del sistema particulado.

10. DISCUSIÓN

El modelo propuesto en la ecuación (171), posee una fundamentación termomecánica, la cual le da una base conceptual bastante sólida desde el punto de vista fenomenológico.

Sin embargo, la función $P(K_{RR})$ de la ecuación (171) debe ser evaluada con mayor precisión, así como el parámetro κ del modelo.

A pesar de lo anterior, se muestra la potencialidad de fusionar elementos de la mecánica de partículas con la mecánica del medio continuo, para lograr avances en la identificación de fenómenos reológicos en suspensiones minerales con distribuciones amplias de tamaños de partículas.

De otro lado, es importante destacar que la interpretación que se le da en este trabajo al factor $(1-\lambda\phi)$ de la ecuación (105) unido a la teoría de formación de paquetes, permite dilucidar un aspecto de bastante dificultad para interpretar en reología, y es el papel del agua en la suspensión sobre las características reológicas de la pulpa.

El papel que cumple el agua que no está ligado a la formación de paquetes de partículas en la disipación de energía mecánica de la suspensión al ser deformada permanentemente merece atención y es coherente con anteriores trabajos (Bustamante, 1999) respecto al comportamiento del tensor de esfuerzo y a la viscosidad de la suspensión.

A partir de la teoría de mezclas, si $\phi^{(1-2/3m)}$ es la fracción volumétrica efectiva de sólidos en la suspensión, entonces el factor $(1-\phi^{(1-2/3m)})$ es la fracción de agua libre en la pulpa y la responsable del carácter cizalle-adelgazante de la suspensión.

Para el presente caso, es fácil verificar que el factor $\phi^{(1-2/3m)}$ es equivalente al factor $\lambda\phi$ de la ecuación (105).

De esta manera, el factor $\lambda\phi$ se puede considerar como la fracción volumétrica efectiva de las partículas, esto es, bajo la teoría de formación de paquetes, sería la fracción volumétrica de paquetes, los cuales a su vez están formados por partículas y agua ligada a la formación de estos paquetes, mientras que el factor $(1-\lambda\phi)$ sería el agua que no está ligada a la formación de éstos.

En este sentido, la literatura reporta la aproximación de Roscoe (Quemada, 1985), en la cual da valores al parámetro λ dependientes de la amplitud de la distribución de tamaños que forma parte de la suspensión, así:

$$\lambda = \begin{cases} 1.0 & \text{Para suspensiones fuertemente polidispersas} \\ 1/0.74 & \text{Para suspensiones compuestas por monotamaños} \end{cases} \quad (179)$$

Si se observa detalladamente el parámetro κ en el modelo de la ecuación (171) se puede observar fácilmente que este parámetro está relacionado a la cantidad de agua que no está formando paquetes de partículas, esto es, a la fracción de agua “libre”, la cual a medida que aumente genera una disminución de la viscosidad, mientras el factor:

$$\phi^{(1-2/3m)} \quad (180)$$

estaría ligado al volumen efectivo ocupado por los paquetes de partículas en la suspensión.

Lo anterior implica que el papel del agua que no forma parte de los paquetes estaría ligado de alguna manera al control del comportamiento reológicos de las suspensiones, lo invierte la concepción clásica de considerar que la variable más importante en la reología de suspensiones es la fracción volumétrica de los sólidos que forman parte de la suspensión.

De otro lado, es importante resaltar que la distribución de tamaños que forma parte de la suspensión se caracterizó mediante la ecuación tipo Rosin-Rammler, como se detalla en la ecuación (124). Esta ecuación tiene la posibilidad de interpretar el sistema particulados en dos de sus principales aspectos.

El primer aspecto es la definición de un diámetro de partícula característico el cual es definido por el parámetro K_{RR} , mientras que la forma de la distribución y la amplitud de ésta se caracteriza por el parámetro m .

Es de esperar que el parámetro m de la distribución influya significativamente en el empaquetamiento de las partículas, mientras que el parámetro de tamaño proporcione suficiente información acerca del diámetro característico de la distribución y su efecto sobre las condiciones reológicas del escurrimiento de la suspensión.

Por último, Si se observa detalladamente la ecuación (171), se puede ver fácilmente que el modelo de la viscosidad como se plantea considera un caso especial, y es aquel en el cual el sistema particulado no posee una distribución de tamaños, sino que este es un sistema particulado compuesto por un monotamaño.

Es importante aclarar que para un sistema particulado compuesto por partículas de un único diámetro (un monotamaño) al ser caracterizado por la ecuación tipo Rosin-Rammler detallada en la ecuación (124), genera un valor de $m \rightarrow \infty$.

Lo anterior implica que el exponente de ϕ en la ecuación (180) tiende a la unidad y por lo tanto la viscosidad modelada según la ecuación (171) pronostique un valor máximo. Esto ha sido comprobado experimentalmente en trabajos anteriores (Bustamante & Barrientos, 2000, Bustamante, 1999, Hopkins & Woodcock, 1990)

De otro lado, mientras aumenta la polidispersidad del sistema particulado la viscosidad disminuye siempre y cuando las distribuciones de tamaño conserven un solo y único modo (Bustamante, 1999).

Para terminar, este modelo no considera en ninguna circunstancia los llamados efectos electroviscosos, ya que no se consideran interacciones eléctricas de las superficies de las partículas con grupos polares del fluido que forma parte de la suspensión.

11. CONCLUSIONES

Se pueden obtener las siguientes conclusiones a partir del trabajo anterior:

- a. El factor $\phi^{(1-2/3m)}$ representa una fracción volumétrica de partículas efectiva en la suspensión, si se considera la formación de paquetes de partículas en la pulpa, mientras que el parámetro κ representa dentro de la estructura de la ecuación una fracción de agua que no forma parte de los paquetes de partículas, y por lo tanto en la medida que aumente la cantidad de agua libre que no forma parte de los paquetes, la viscosidad tiende a disminuir así como el comportamiento cizalle-adelgazante.
- b. El modelo propuesto posee una sustentación termomecánica, la cual permite que fenomenológicamente esté apoyado a partir de la ecuación de conservación de energía mecánica.
- c. Una de las principales conclusiones de esta investigación radica en explicar como los procesos de deformación por esfuerzos de cizalladura en fluidos compuestos por dos fases, una continua y otra discontinua, elevan el nivel de energía interna, pero no cambian la distribución de esta energía. Lo anterior permite comparar dos estados de deformación, y por lo tanto la substracción de los esfuerzos de cizalladura aplicados bajo una determinada tasa de cizalladura, es una medida de la energía mecánica que se disipa en un fluido Newtoniano generalizado.
- d. El modelo propuesto en la ecuación (171) es valido para determinar la viscosidad Newtoniana a alta tasa de cizalladura en suspensiones cizalle-adelgazantes compuesta por un fluido Newtoniano y un sistema particulado con una distribución de tamaños.
- e. El modelo propuesto de viscosidad incluye como caso particular aquel en el cual el sistema particulado este compuesto por un monotamaño y predice en estos casos un valor de máxima viscosidad, lo cual experimentalmente ha sido comprobado por Bustamante (2000), y lo cual es coherente con los resultados de Dabak & Yucel ((1987) cuando compararon la viscosidad de suspensiones de monotamaños con valores de la viscosidad de suspensiones a las que se le fueron agregando partículas más finas (permanecieron fijos los demás parámetros de la suspensión), y reportaron la disminución de la viscosidad.

1965

C. TRUSDELL & W. NOLL (1965). The non-linear field theory of mechanics, in Flungge, Springer Verlag, New York,.

M. M. CROSS (1965). Rheology of non-Newtonian fluids: A new flow equation for pseudoplastic systems. *J. Colloid. Sci.* 20: 417-437.

J. HAPPER & H. BRENNER Low Reynolds Number Hydrodynamics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1965).

1967

N. A. FRANKEL & A. ACRIVOS (1967). On the viscosity of a concentrated suspension of solid spheres, *Chem. Eng. Sci.* 22: 847 - 853

1968

D. C. CHENG (1968). The effect of secondary flow on the viscosity measurement using the cone-plate viscosimeter. *Chem. Eng. Sci.* 23, 895-899.

R. J. FARRIS (1968). Prediction of the viscosity of multimodal suspensions from unimodal viscosity data. *Trans. of Soc. of Rheology* 12 (2): 281-301

1970

G. K. BATCHELOR (1970). The stress system in a suspension of force-free particles, *J. Fluid Mech.*, 41:3, 545 - 570.

N. A. FRANKEL & A. ACRIVOS (1970). The constitutive equation for dilute emulsion, *J. Fluid Mech.*, 44:1, 65-78

C.J. LIN, J. H. PEERY & W.R. SCHOWALTER (1970). Simple shear flow round a rigid sphere: inertial effects and suspension rheology, *J. Fluid Mech.* 44:1, 1-18.

C. PARKINSON, S. MATSUMOTO & P. SHERMAN (1970). The influence of particle-size distribution on the apparent viscosity of non-newtonian dispersed systems, *J. of Colloid and Interface Science*, 33 (1): 150-160.

1971

G. K. BATCHELOR (1971). The stress generated in a non-dilute suspension of elongated particles by pure straining motion, *J. Fluid Mech.*, 46(4): 813 - 829.

1972

G. K. BATCHELOR & J.T. GREEN (1972) The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order c^2 . *J. Fluid Mech*, 56: 401-472

1974

G. ASTARITA & G. MARRUCCI (1974). Principles of non-newtonian fluid mechanics, McGraw Hill, England..

B. P. HO & L. G. LEAL (1974). Inertial migration of rigid spheres in two-dimensional inidirectional flows, *J. Fluid Mech.*, 65 (2): 365 - 400.

V. V. JINESCU (1974), The rheology of suspension, *Int. Chem Eng*, 14 (3): 397-420.

1975

E. J. HINCH & J. LEAL (1975). Constitutive equations in suspensions mechanics, Part I. General Formulation, *J. Fluid Mech*, 71(3):481-495

1977

G. K. BATCHELOR (1977). The effect of Brownian motion on the bulk stress in a suspension of spherical particles, *J. Fluid Mech.*, 83(1): 97 - 118.

E. ECKSTEIN, D. G. BAILEY & A. H. SHAPIRO (1977). Self-diffusion of particles in shear flow of a suspension, *J. Fluid Mech.*, 79 (1): 191-208.

K. A. KLINE (1977). Structured fluid theory: Kinematics of substructure redistribution, *Acta Mechanica*, 27: 239-250.

1978

D. L. ERMARK, J. A. McCAMMON (1978). Brownian dynamics with hydrodynamic interactions, *J. Chem. Phys*, 64(4):1352-1360

1980

D. SOONG & M. SHEN (1980). Shear-rate-dependent viscosity of non-newtonian suspensions and entagled polymer systems. *Polymer Engineering and Science*, 20(17): 1177-1180.

J. D. SHERWOOD (1980). The primary electroviscous effect in a suspension of spheres, *J. Fluid Mech.*, 101(3): 609 - 630.

1981

N. CASSON (1981). An interpretation of viscosity measurements on suspensions of powdered solid, in terms of the physical state of the suspended particles. *J. Oil Chem. Assoc.*

1983

B. BIRD, G. C. DAI & B.J. YARURO (1983). The rheology and flow of viscoplastic material, *Reviews of the Chem. Eng.* vol 1(1), U. of Wisconsin, USA.

1984

G. BOSSIS & J. F. BRADY (1984). Dynamic simulation of sheared suspensions, I. General method, *J. Chem. Phys.*, 80:5141-5154.

D. C. CHENG (1984). Further observations on the rheological behaviour of dense suspensions. *Powder Technology*, 37:255-273

1985

J. BRADY & G. BOSSIS (1985). The rheology of concentrated suspensions of spheres in simple sphera flow by numerical simulation, *J. Fluid Mech.*, 155, : 105-129

D. QUEMADA (1985). Phenomenological rheology of concentrated dispersions, I. Clustering effects and the structure-dependent packing fraction, *J. of Theoretical and Applied Mechanics*, 267-288.

C. R. WILDEMUTH & M. C. WILLIAMS (1985). A new interpretation of viscosity and yield stress in dense slurries: coal and other irregular particles, *Rheologica Acta*, 24: 75-91.

1986

D. M. HEYES (1986). Some physical consequences of large shear rate on simple liquids, *J. Chem. Phys.*, 85(2): 997-1008.

M. H. MOYS (1986). The effect of grate design on the behaviour of grate-discharge grinding mills. *Int. J. Min. Process*, 18: 85-105.

D. QUEMADA (1986). Comments on the paper "Viscosity of suspensions modeled with a shear - dependent maximum packing fraction" by C. R. Wildemuth & M. C. Williams (Discussion), *Rheologica Acta* , 25: 647-655.

1987

G. BOSSIS & J. F. BRADY (1987). Self-diffusion of Brownian particles in concentrated suspensions under shear, *J. Chem. Phys.* 87 (9): 5437-5448.

T. DABAK & O. YUCEL (1987). Modeling of concentration and particle size distribution effects on the rheology of highly concentrated suspensions. *Powder Technology*: 52: 193-206.

W. J. FRITH, J. MEWIS & T.A. STRIVENS (1987). Rheology of concentrated suspensions: Experimental investigations. *Powder Technology*, 51: 27-34.

D. LEIGHTON & A. ACRIVOS (1987). Shear induced migration on concentrated suspensions, *J. Fluid Mech.* 415-439

W. B. RUSSEL (1987). Theoretical approaches to the rheology of concentrated dispersions, *Powder Technology* 51: 15-25

1989

H. A. BARNES, J. F. HUTTON & K. WALTERS, An introduction to rheology. Elsevier, Amsterdam, 1989.

G. BOSSIS & J. F. BRADY (1989). The rheology of Brownian suspensions, *J. Chem Phys.* 91(3):1866-1874.

G.J. HWANG & H.H. SHEN (1989). Modeling the solid phase stress in the solid-fluid mixture, *Int. J. Multiphase Flow.* 15(2):257-268

P. F. LUCKHMAN (1989). The measurement of interparticle forces, *Powder Technonology* 58: 75 - 91.

J. S. MARSHALL & P.M. NAGHDI (1989). A Thermodynamical theory of Turbulence, I. Basic Developments, *Phil Trans. R. Soc. Lond A* 327, 415-448.

M. Z. SENGUN & R. F. PROBSTEIN (1989). High-shear-limit viscosity and maximum packing fraction in concentrated monomodal suspensions, *Physico Chemical Hydrodynamics*, 11 (2): 229-241.

1990

A. HOPKINS & L. WOODCOCK (1990). Effects of polydispersity on osmotic properties of colloidal suspension. *J. Chem. Soc. Faraday Trans.* 86(20):3419-3428

R. F. STORMS, B.V. RAMARAO & R. H. WEILAND (1990), Low shear rate viscosity of bimodally dispersed suspensions, *Powder Technonology* 63: 247 - 259.

C. TANGSATHITKULCHAI & L. AUSTIN (1990). Rheology of Concentrates Slurries of Particles Natural Size Distribution Produced by Grinding. *Powder Technology*, 56, 293-299.

1991

A. I. JOMHA, A. MERRINGTON, L.V. WOODCOCK, H. A. BARNES & A. LIPS (1991). Recent developments in dense suspension rheology, *Powder Technology*, 65: 343-370.

P. F. LUCKHAM M.A. ANSARIFAR, B. A. de L. COSTELLO & Th. F. TADROS (1991), The relationship between interparticle forces and the bulk rheology of the suspensions, *Powder Techonology* 65: 371 - 379.

G. Q. WANG & J. R. NI (1991). The kinetic theory for dilute solid/liquid two-phase flow, *Int. J. Multiphase Flow*, 17 (2): 273-281.

1992

B. ALEJO (1992) Efecto del tamaño, distribución y concentración en la viscosidad de suspensiones. Tesis Magister en Ciencias, U. de Concepción, Chile,

F. CONCHA, A. BARRIENTOS, V. TORRES & B. ALEJO. Reología de Suspensiones. *Monografías en Conminución No. 4.*, U. de Concepción, Chile, 1992.

B. R. STANMORE & D. W. PAGE (1992), Yield stresses and sedimentation in dense fly-ash slurries, *Powder Techonology* 72: 167- 175.

1993

Y. T. KIM & P.F. LUCKHAM (1993), Some rheological properties of bimodal sized particulates, *Powder Techonology* 77: 31 - 37.

1994

A. BARRIENTOS, F. CONCHA & J. L. LEON (1994). A mathematical model of solid-liquid suspensions. *Proceedings of the IV Meeting of the Southern Hemisphere on Mineral Technology*. Vol I, Concepción - Chile, pp. 189-202.

J. BRADY (1994). The long-time self-diffusivity in concentrates colloidal dispersions, *J. Fluid Mech.*, 272: 109-133.

C. W. MACOSKO (1994). Rheology principles, measurements and applications, VCH-Publishers,Inc, New York, USA.

A. TSUTSUMI, K. YOSHIDA, M. YUI, S. KANAMORI & K. SHIBATA (1994), Shear viscosity behavior of flocculated suspensions, *Powder Technology* 78: 165 - 172.

G. VENU & R. P. CHHABRA (1994), Settling velocities of non-spherical particles in non-newtonian polymer solutions, *Powder Technology* 78: 77 -83.

1995

A. BARRIENTOS & F. CONCHA, Interacción Sólido-Fluido, Universidad de Concepción, Concepción - Chile, 1995

R. P. CHHABRA (1995), Wall effects on free-settling velocity of non-spherical particles in viscous media in cylindrical tubes, *Powder Technology* 85: 83-90

U. F. EDGAL, A. BOUKAHIL & D. L. HUBER (1995). Equation of state for classical hard-particlelike fluids. *J. Chem. Phys.* 103:12, 5027-5030

N. E. SABRI & J. COMITI (1995). Pressure Drop in non-Newtonian Purely Viscous Fluid Flow Through Porous Media, *Chem. Eng. Sc.*, 50(7), 1193-1202.

1996

F. R. CUNHA & E. J. HINCH (1996). Shear-induced dispersion in a dilute suspension of rough spheres, *J. Fluid Mech.*, 309: 211-223.

A. MAYADUNNE, S. N. BHATTACHARYA & E. KOSIOR (1996). Modelling of packing behaviour of irregularly shaped particles dispersed in a polymer matrix, *Powder Technology*. 89:2, 115 - 128

S. K. KAWATRA & A. K. BAKSHI (1996). On-line measurement of viscosity and determination of flow for mineral suspensions, *Int. Min. Process*, 47 : 275- 283.

G. LIAN, M. J. ADAMS & C. THORNTON (1996). Elastohydrodynamic collisions of solid spheres, *J. Fluid Mech.*, 311: 141-152.

C. LOGOS & Q. D. NGUYEN (1996). Effect of particle size on the flow properties of a south Australian coal-water slurry, *Powder Technology*, 88:55-58

J. MORRIS & J. F. BRADY (1996). Self-diffusion in sheared suspensions, *J. Fluid Mech.*, 312: 223-252.

T. N. PHUNG, J. F. BRADY & G. BOSSIS (1996). Stokesian dynamics simulation of brownian suspensions, *J. Fluid Mech.* 313: 181-207

F. N. SHI & T.J. NAPIER-MUNN (1996). A model for slurry rheology. *Int. J. Min. Process*, 47 :103 - 123.

F. N. SHI & T.J. NAPIER-MUNN (1996). Measuring the rheology of slurries using an on-line viscometer. *Int. J. Min. Process*, 47 :153-176.

P. S., WILLIAMS, M. H. MOON, Y. XU & J.C. GIDDINGS (1996). Effect of viscosity on retention time and hydrodynamics lift forces in sedimentation/steric field-flow fractionation,. *Chem. Eng. Sci*, 51:19, 4477 - 4488.

V. S. VOLKOV & A. I. LEONOV (1996). Non-markovian brownian motion in a viscoelastic fluid, *J. Chem. phys.* 104 (15): 5922-5931.

1998

M- O. BUSTAMANTE & A BARRIENTOS (1988). Modelo de la viscosidad y de los esfuerzos de cedencia para concentrados de cobre procedentes de la División Andina de CODELCO – Chile. División Andina de CODELCO-CHILE & U. de Concepción –Chile.

1999

M. O. BUSTAMANTE (1999). Reología de suspensiones: Modelación matemática del tensor esfuerzo y de la viscosidad de una suspensión mineral. Tesis de Doctor en Ciencias de la Ingeniería, con mención en Metalurgia Extractiva. Universidad de Concepción – Chile.

2000

M. O BUSTAMANTE & A. BARRIENTOS (2000). Fine addtion effects over rheological behavior of the mineral suspensions. *XXI Int. Mineral Processing Meeting*, ROMA.