UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

“Una propuesta para la enseñanza de la trigonometría y la astronomía, desde los conceptos de razón, ángulo y cuerda, basada en la construcción de las tablas de cuerdas del Almagesto de Ptolomeo”

KELLY ANDREA MATEUS VARGAS

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Bogotá, Colombia
2013

“Una propuesta para la enseñanza de la trigonometría y la astronomía, desde los conceptos de razón, ángulo y cuerda, basada en la construcción de las tablas de cuerdas del Almagesto de Ptolomeo”

KELLY ANDREA MATEUS VARGAS
Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:
BENJAMÍN CALVO MOZO
Físico, MSc. Astronomía

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Bogotá, Colombia

A Dios,
quien en su infinita sabiduría
ha guiado mi camino como maestra,
madre, hija y hermana.

A mi hija Luisa Fernanda,
el centro de mi universo
y la estrella que siempre
orienta mi camino.

A mis Padres; Luisa y Alberto,
y a mi hermana Catalina
quienes con su amor desmedido
me han brindado su apoyo incondicional
y a quienes por su infinita dedicación
debo la persona que soy.

A mis estudiantes,
quienes son mis mejores maestros
y la razón de ser de mi trabajo.

En memoria de mi abuelito Alberto,
quien me sigue acompañando,
celebrando mis triunfos
y compartiendo mis derrotas
desde algún lugar del universo.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, le doy infinitas gracias a Dios ofrecerme la oportunidad de dar un paso más en mi formación profesional.

En segundo lugar, quiero expresar mi profunda admiración y mis sinceros agradecimientos al Profesor Benjamín Calvo Mozo, quien además de dirigir este trabajo con tanto empeño y dedicación, me enseñó a amar la astronomía y a conocerla mejor por medio de una de mis grandes pasiones: la trigonometría. También agradezco a los docentes de la Maestría, especialmente a la Profesora Clara Helena Sánchez Botero por sus orientaciones desde la perspectiva histórica de la matemática tan significativos y útiles para la realización de este trabajo.

Finalmente agradezco a mi familia por su colaboración en todo momento y a mis estudiantes del Club de Astronomía, porque sin ellos este trabajo no hubiera sido posible.

"The knowledge comes from the shadow, and the shadow comes from the gnomon"

Frase de Chou-pei Suan-king (ca. 1105 b.c.),
según la obra de Eli Maor, Trigonometric Delights, p. 20,
citado por David E. Smith, History of Mathematics, vol. 2, p. 603

RESUMEN

Este documento presenta una propuesta de enseñanza que se fundamenta desde una perspectiva histórica – epistemológica, didáctica e interdisciplinar de la relación entre trigonometría y astronomía, considerando que dicha relación puede ser potencialmente útil para posibilitar el desarrollo de los conceptos matemáticos básicos de razón, ángulo y cuerda, precursores de conceptos propios de la trigonometría plana como razón trigonométrica y función trigonométrica que se enseñan en la escuela y, al mismo tiempo, posibilitar el pensamiento científico y la utilidad de las herramientas matemáticas para su desarrollo.

La propuesta está estructurada a partir de tres componentes que se describen a lo largo del trabajo: en primer lugar, una componente histórica y epistemológica que se desarrolla en los dos primeros capítulos, cuyo objetivo es guiar al docente hacia la comprensión de cómo nacieron los conceptos ya nombrados y cómo llegaron a influir en la construcción de las tablas de cuerdas que aparecen en la obra de Claudio Ptolomeo *"El Almagesto",* reconociendo su importancia y su carácter práctico para el desarrollo de la astronomía; en segundo lugar, una componente conceptual y disciplinar que se describe en el tercer capítulo, cuya intención es permitir al docente establecer las relaciones entre dichos conceptos y el origen de otros subyacentes como razón, función e identidad trigonométrica que comúnmente aparecen en el currículo actual de matemáticas, y tercero, una componente didáctica que se desarrolla en el cuarto capítulo, cuyo fin es fundamentar la metodología y las herramientas históricas y conceptuales de las componentes anteriores, vistas en el sentido de recursos didácticos para el diseño e implementación de la propuesta.

Finalmente, en los últimos capítulos se desarrolla la secuencia de actividades con sus objetivos, descripción de cada actividad y recomendaciones; el análisis, producto de la implementación de las actividades con una población de estudiantes definida y, las conclusiones del trabajo realizado.

Palabras clave: Trigonometría, matemáticas, astronomía, geometría, cuerda, razón, ángulo, función, enseñanza.

ABSTRACT

This paper presents a proposal for teaching based from a historical – epistemological, didactic and interdisciplinary perspective of the relationship between trigonometry and astronomy, considering that this relationship may be potentially useful to enable the development of basic mathematical concepts of ratio, angle and chord, precursors of concepts of plane trigonometry as trigonometric ratio and trigonometric function which are taught in the school and, at the same time allowing scientific thought and usefulness of mathematical tools for its development.

The proposal is structured around three components described throughout the work: First, a historical and epistemological component developed in the first two chapters, which aims to guide the teacher towards understanding how the concepts were born already appointed and how they influence the construction of chord tables showed in the work of Claudius Ptolemy *"The Almagest",* recognizing its importance and practical nature for the development of astronomy; secondly, a conceptual and disciplinary component described in the third chapter, intended to allow the teacher to establish the relationship between these concepts and the origin of other underlying conditions such as trigonometric ratio, function and identity that commonly appear in the current curriculum of mathematics, and third, a didactic component developed in the fourth chapter, which aims to support the methodology as well as historical and conceptual tools of the above components, seen in the direction of teaching resources for the design and implementation of the proposal.

Finally, in the last chapters it is developed a sequence of activities with their objectives, description of each activity and recommendations; analysis, due to the implementation of activities with a specific student population, and the conclusions of the work.

Keywords: Trigonometry, mathematics, astronomy, geometry, chord, ratio, angle, function, teaching.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

A nivel general, ésta propuesta surge del interés personal por aproximar los procesos de enseñanza de la matemática a sus aplicaciones en las ciencias, específicamente en la astronomía; en contraposición al tratamiento poco motivador y carente de significado en la enseñanza de la matemática, que se presenta en los currículos convencionales.

En particular, la trigonometría se relaciona íntimamente con la astronomía, por lo cual surge la necesidad de analizar el punto de vista histórico – epistemológico para responder a la pregunta: ¿por qué y de dónde nacen?, lo cual puede llegar a ser una herramienta didáctica potencialmente útil e impactante en la enseñanza de éstas disciplinas. Así, para efectos de este trabajo, se propone enseñar trigonometría en el sentido de su utilidad al suplir algunas necesidades propias de la astronomía, por las cuales los antiguos lograron avanzar en el desarrollo de esta ciencia.

Por otra parte, la propuesta pretende motivar a los docentes en general, a incluir temas de astronomía en el currículo, pues resulta ser una ciencia interesante para los estudiantes, que provee muchas herramientas a nivel didáctico, no solo para la enseñanza de la matemática, sino para otras disciplinas y asignaturas.

Es de resaltar los aportes obtenidos desde las clases de Introducción a la Historia y Filosofía de la Matemática, Enseñanza de la Astronomía, Temas Selectos en la Enseñanza de la Astronomía e Introducción al Viaje Espacial, que han motivado la realización de esta propuesta y han posibilitado el ejercicio de análisis didáctico, histórico y epistemológico frente a la relación entre trigonometría y astronomía.

I. COMPONENTE HISTÓRICA – EPISTEMOLÓGICA

1. Los precursores del Almagesto

Para aproximarse a las interpretaciones del mundo, a los conceptos y conocimientos que Claudio Ptolomeo consideró para construir sus tablas de cuerdas, se debe tener en cuenta el desarrollo histórico – epistemológico de la astronomía, de los conceptos de razón, ángulo y cuerda anteriores al *"Almagesto"* y su relación con las ideas matemáticas que surgieron en cada época en el marco de algunas culturas antiguas.

1.1 Los babilonios: Las nociones de ángulo y de razón.

Según los datos históricos, el concepto de ángulo y la determinación del grado sexagesimal nacen con los babilonios como consecuencia del sistema de numeración sexagesimal, caracterizado por la escritura cuneiforme y el principio de notación posicional de base 60. La influencia de este sistema en la medición tanto del tiempo como de la amplitud angular, constituye uno de los más grandes aportes de la cultura babilónica al desarrollo de la matemática, pues a pesar de que el Sistema Internacional de medidas considera al radián[1] como unidad de medida angular (Figura 1) y no al grado sexagesimal, este último ha perdurado hasta nuestros días, lo cual es evidente al efectuar conversiones entre grados sexagesimales y radianes; ejercicio muy común en la enseñanza de la trigonometría:

$$360° = 2\pi \text{ radianes} \;\Rightarrow\; 1 \text{ radián} = 360° / 2\pi \text{ radianes}.$$

Así, 1 radián equivale a 57.29°, lo cual se puede expresar con la igualdad:

$$180° = \pi \text{ radianes}$$

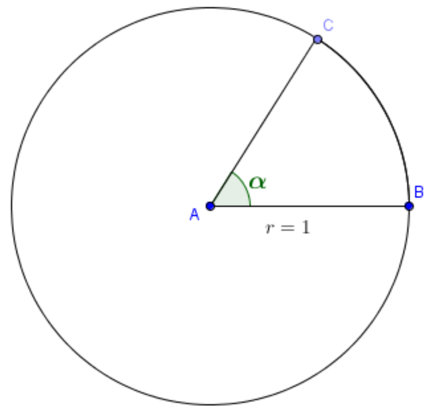


Figura 1.
El arco CB tiene una longitud igual al radio de la circunferencia. El ángulo ***α*** equivale a un radián.

[1] El radián se define como el ángulo medido en el centro de un círculo que abarca una longitud de arco igual al radio de la circunferencia

Según Maor (1998), existen dos hipótesis con respecto al origen de la noción de ángulo en la cultura babilónica; la primera afirma que surgió de la división de un círculo en 360 partes basándose en la similitud de este número con los 365 días del año y la segunda hipótesis refiere a la naturalidad de dividir el área del círculo en seis partes iguales, donde en cada parte el ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia subtiende una cuerda igual al radio. Así, independiente de cualquier hipótesis, el sistema de medida angular es coherente con el sistema sexagesimal babilónico, el cual fue adoptado posteriormente por los griegos y utilizado por Claudio Ptolomeo en la elaboración de las tablas de cuerdas.

En cuanto a la relación del concepto de ángulo con la astronomía, se hace mención a las ideas expuestas por Kline (1972): Los babilonios efectuaban mediciones de distancias angulares en la esfera celeste, por ejemplo al determinar la longitud de arco para cada constelación zodiacal; las agrupaciones arbitrarias de estrellas que constituyen las constelaciones zodiacales se determinaron en la esfera celeste con arcos de 30° cada una. Así, se puede pensar que los registros sistemáticos de las observaciones astronómicas para los movimientos de la Luna y los planetas se hacían en función de sus periodos y posiciones con respecto a las estrellas, esencialmente de las constelaciones zodiacales.

Como producto de éstas prácticas, Kline (1972) afirma que uno de los aportes más significativos de la cultura babilónica fue la creación de textos astronómicos sobre las indicaciones para calcular efemérides planetarias y las tablas de las posiciones de los cuerpos celestes en diferentes épocas, textos en los cuales los babilonios disponían de información suficiente sobre los movimientos del sol y de la luna y de los eclipses, que utilizaban para la predicción y para determinar la longitud del año solar[2] y del año sidéreo[3]. Estos aportes constituyen una estrecha relación entre la medición del tiempo y la medición angular, con lo cual era posible crear un calendario determinado por las posiciones del Sol, la Luna y las estrellas, y organizar el tiempo en años, meses y días, muy útiles para determinar las épocas de siembra y las fiestas religiosas.

La matemática de los babilonios no solamente resultó ser una herramienta poderosa en términos del concepto de ángulo para fines de organizar el tiempo y en general, para desarrollar conocimiento de carácter astronómico, dado que también hay sospechas, específicamente en la tablilla Plimpton 322[4] en torno a la familiaridad de los babilonios con el concepto de razón. Para explicar éstas sospechas, Maor (1998) refiere primero a los datos que muestra la tabilla: en la segunda y la tercera columnas muestra los valores para la diagonal y para la anchura de algunos rectángulos, que naturalmente se pueden

[2] El año solar es también llamado año tropical o año de las estaciones.

[3] Tiempo que emplea el sol en volver a la misma posición relativa a la estrellas.

[4] Plimpton 322 es una tablilla que data del período babilónico de la dinastía Hammurabi, aproximadamente del 1800 o 1600 a.C., que organiza números en escritura cuneiforme del sistema sexagesimal en cuatro columnas y 15 filas, correspondientes a las ternas pitagóricas.

interpretar como valores para la hipotenusa ***"c"*** y uno de los catetos ***"b"*** en un triángulo rectángulo **ABC**. Por ejemplo, para los valores de la décimoprimera fila o terna pitagórica, se muestra $\boldsymbol{b = 45}$ y $\boldsymbol{c = 1{,}15}$ que se pueden interpretar bajo los siguientes procedimientos en términos del sistema sexagesimal:

Para $\boldsymbol{b = 45}$ se tiene: $\boldsymbol{45 \cdot 60^0 = 45}$, entonces $\boldsymbol{b = 45}$

Para $\boldsymbol{c = 1{,}15}$ se tiene: $\boldsymbol{(1 \cdot 60^1) + (15 \cdot 60^0) = 75}$, entonces $\boldsymbol{c = 75}$

Luego, según el teorema de Pitágoras[5] el otro cateto ***"a"*** se puede expresar como:

$$\boldsymbol{a = \sqrt{(75^2 - 45^2)} = 60}$$

Por lo que la terna pitagórica obtenida sería $\boldsymbol{b = 45}$, $\boldsymbol{a = 60}$ y $\boldsymbol{c = 75}$. Ahora, la primera columna tiene algo que de acuerdo con Maor (1998) puede ser sorprendente en tanto que las sospechas en relación con el concepto de razón sean ciertas, pues al parecer esta columna indica el cuadrado de la razón entre la hipotenusa ***"c"*** y el cateto ***"b"***: $\boldsymbol{(c/b)^2}$, que interpretada en términos del ángulo ***"α"*** opuesto al cateto ***"a"***, del triángulo rectángulo en cuestión, corresponde al valor de $\boldsymbol{\csc^2 \alpha}$ y por tanto, eliminando los cuadrados se obtiene la expresión $\boldsymbol{c/a = \csc \alpha}$.

La explicación de este posible hallazgo se puede hacer verificando el valor de la primera columna con los valores de la segunda y tercera columna para la décimoprimera terna:

$$\boldsymbol{b = 45},\ \boldsymbol{c = 75} \text{ y } \boldsymbol{a = 60}.$$

Entonces se tiene $\boldsymbol{(c/a)^2 = (75/60)^2 = 1.5625}$, y como en la primera columna de la fila en cuestión aparece el valor de ***1,33,45*** se puede realizar el siguiente procedimiento:

$\boldsymbol{1{,}33{,}45 = 1 \cdot (1/60^0) + 33 \cdot (1/60^1) + 45 \cdot (1/60^2) = 1.5625}$, valor que corresponde a $\boldsymbol{(c / a)^2}$.

Desde éste punto de vista, se podría afirmar que los babilonios usaban el concepto de razón y además, si existiera la certeza de que hubieran sido capaces de establecer la relación funcional de éste concepto con el de ángulo, eventualmente se hubieran aproximado al concepto de razón trigonométrica. Sin embargo no existen evidencias suficientes de su interés en determinar la relación entre la hipotenusa y el cateto opuesto al ángulo "***α***" en triángulos rectángulos, más allá del interés explícito en encontrar las ternas pitagóricas. Así, si las sospechas fueran ciertas, según Maor (1998), la tablilla Plimpton 322 sería la primera tabla trigonométrica encontrada.

1.2 Los egipcios y el desarrollo de una matemática útil para sus necesidades

Los egipcios utilizaron sus conocimientos en astronomía y trigonometría para la construcción de sus templos, pirámides y la esfinge, dado que las construyeron orientadas en función de la salida y puesta del Sol y del movimiento de algunas estrellas en la esfera celeste.

[5] El teorema de Pitágoras $c^2 = a^2 + b^2$ era conocido por los babilonios aproximadamente 1 milenio antes de Pitágoras.

Maor (1998) afirma que específicamente para la construcción de las pirámides de Giza (Keops, Kefren y Micerino), los egipcios usaron una especie de trigonometría primitiva, evidente en el desarrollo de algunos problemas prácticos que aparecen en el papiro de Ahmes[6]. Por ejemplo, para determinar la inclinación de las caras de la pirámide era necesario calcular el valor del *"Seked",* un número que en el lenguaje actual se puede interpretar como la cotangente del ángulo que forma la base de una pirámide con una de sus caras (Figura 2). El proceso para hallar el valor del *"Seked"* era netamente numérico, haciendo uso del álgebra y de la suma con fracciones unitarias, por lo que se puede deducir que los egipcios no eran consientes del sentido trigonométrico del problema; en otras palabras, de la existencia de una relación de dependencia entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo en función de un ángulo.

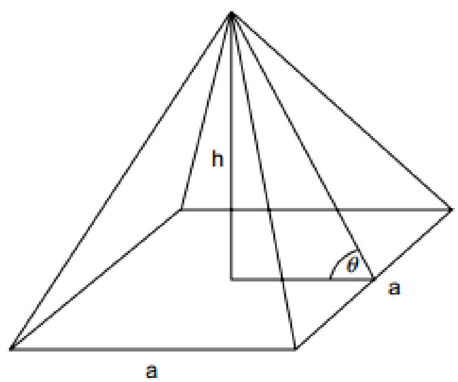


Figura 2.
Pirámide de base cuadrada. El "Seked" de la pirámide corresponde a un número equivalente a la cotangente del ángulo ***θ*** formado entre la base y una de las caras de la pirámide.[7]

Las aplicaciones de la matemática y de la astronomía, además de orientar las construcciones arquitectónicas, se limitaron a la medición del tiempo y a la creación de calendarios, que según Kline (1972) eran necesarios para cuestiones prácticas como establecer las fiestas religiosas y predecir la llegada de las inundaciones. También determinaron la longitud del año solar analizando el comportamiento de la estrella Sirio[8] con el cual los egipcios adoptaron un calendario con un año de 365 días, dividido en 12 meses de 30 días cada uno, más cinco días extras al final, por lo que el calendario iba retrasándose poco a poco con respecto a las estaciones, y al cabo de 1460 años volvía a la situación inicial, sin embargo, no se tienen evidencias suficientes para afirmar que los egipcios fueran consientes de este hecho. El calendario egipcio fue adoptado por Julio Cesar en el año 45 a.C., pero modificado en un año de 365 días y ¼ por consejo del griego alejandrino Sosígenes, intercalando un día adicional cada cuatro años como se hace actualmente para determinar los años bisiestos.

[6] El papiro de Ahmes, también conocido como el papiro Rhind, es un documento egipcio del año 1650 a. C que contiene algunos problemas de carácter matemático y geométrico.

[7] Imagen tomada de MAOR, E. Trigonometric Delights. 1998, pág 7.

[8] Sirio, también denominada Alfa Canis Maioris, es la estrella más brillante de la constelación Canis Maior y del cielo nocturno visto desde la Tierra.

1.3 Influencia de Babilonia y Egipto en la civilización griega

Kline (1972) afirma que si se toman como referencia los escritos de La Ilíada y La Odisea, la civilización griega antigua se remonta hacia el año 2800 a. C. Los griegos adoptaron la escritura alfabética fenicia y disponían del papiro, razones por las cuales sobresalieron en comparación con las civilizaciones egipcia y babilónica, siendo un pueblo más letrado y capaz de registrar su historia y sus ideas.

La cultura griega, por su ubicación geográfica, se vio sensiblemente influenciada con las culturas egipcia y babilónica. Al respecto, según Kline (1972), existen muchas referencias griegas a los conocimientos de la cultura egipcia, a los que algunos griegos llegaron a considerar como los fundadores de la ciencia, en particular de la agrimensura, la astronomía y la aritmética, pues especialmente por fines comerciales muchos griegos viajaron a Egipto mientras que otros visitaban Babilonia, donde además aprendieron matemáticas y otras ciencias.

1.4 Matemática y astronomía en la civilización griega

Las contribuciones más importantes de la civilización griega antigua, son *Los Elementos de Euclides* y *Las Secciones Cónicas de Apolonio*, obras que según Kline (1972) constituyen un conglomerado de la actividad matemática realizada durante los 300 años anteriores y de las cuestiones que iban a ser vitales en el futuro. Es por esto que en las siguientes líneas se hará referencia a los protagonistas, predecesores de éstas ideas y a sus aportes en el campo de la relación entre matemática y astronomía.

1.4.1 Tales de Mileto: El conocimiento viene de la sombra

La civilizaciones egipcia y babilónica tuvieron bastante influencia sobre Mileto, ciudad jónica localizada en las costas de Asia menor, en la que según Kline (1972) se asume el origen de la filosofía, la matemática y otras ciencias griegas. La primera de las escuelas del periodo clásico fue la escuela jónica, fundada en ésta ciudad por Tales de Mileto (640-546 a.C.), quien probablemente nació y vivió allí, y por algún tiempo vivió en Egipto donde realizó actividades comerciales y aprendió la matemática egipcia. Su punto de vista del universo estaba basado en la idea de la Tierra como un disco en forma circular flotando sobre el océano, en el cual el agua es el principio de todas las cosas (Dreyer, 1953).

Algunos autores atribuyen a Tales el haber sido el primer griego en predecir un eclipse de Sol hacia el año 585 a. C., sin embargo, Dreyer (1953) afirma que desde el punto de vista de universo planteado por Tales, sería extraño pensar en la predicción de eclipses y en consecuencia, es más probable que la predicción del eclipse de Sol atribuida a Tales pudo haber sido el resultado de un conocimiento adquirido durante su larga estancia en Egipto, pues los mismos egipcios recibieron conocimientos de los babilonios relacionados con los movimientos del Sol y la Luna, de quienes se sabía, fueron capaces de predecir eclipses. Así mismo es probable que Tales aprendiera el ciclo babilónico de las 223 lunaciones y del Saros, y que fuera consciente de los principios por los cuales ocurrían los eclipses.

A pesar de atribuir a los egipcios la división del año en 365 días, algunas fuentes atribuyen a Tales esta división y el descubrimiento de las estaciones del año. El aporte de Tales que más interesa en relación con los conceptos de ángulo y razón, es el cálculo de las alturas de las pirámides comparando sus sombras con las de un gnomon[9] de altura conocida en el mismo instante y mediante el uso de los triángulos semejantes, conocimiento que probablemente, según lo anterior, fue adquirido por Tales producto de su estancia en Egipto y el estudio de la astronomía egipcia.

El *Gnomon*, una varilla para calcular la hora a partir de la medida de la longitud de su sombra proyectada en el piso, era conocido por los antiguos griegos, método que según Heredoto (450 a.C.) mencionado por Maor (1998), se recibió de los babilonios. El gnomon es en esencia un dispositivo análogo al cálculo de las funciones trigonométricas modernas "tangente" y "cotangente", en la medida que se establecen relaciones geométricas entre las alturas de los objetos y sus sombras reflejadas por acción de la luz del Sol.

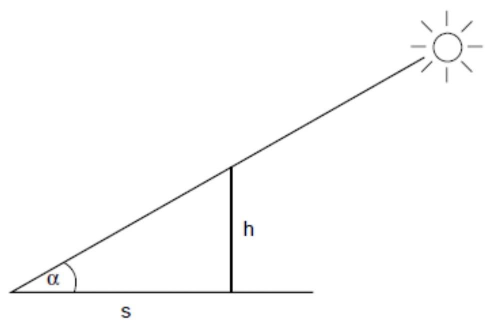


Figura 3.
Representación de la sombra ***s*** de un gnomon de altura ***h***, proyectada por la luz del sol bajo un ángulo[10].

En términos modernos, si ***h*** es la altura conocida del bastón y ***s*** la longitud de su sombra cuando el sol está a una altitud de ***α*** grados por encima de la horizontal, entonces ***s = h cot α*** y ***h = s tan α****,* por lo que ***s*** es proporcional a la cotangente de ***α*** y ***h*** también lo es a la tangente de ***α***. Maor (1998) afirma que Tales no estaba interesado en "descubrir" explícitamente las razones tangente y cotangente como tal, sino en usar el gnomon como un controlador del tiempo, el cuál mediante la medición de la variación diaria de la longitud de la sombra al mediodía podría ser utilizado para determinar las horas del día. Ésta idea proporciona el principio de funcionamiento del reloj de Sol.

Así, Maor (1998) dice que Tales de Mileto midió la altura de las pirámides de Giza mediante la comparación de las sombras que proyectadas en el suelo, más la longitud desde el pie de la altura hasta la base de la pirámide, con la sombra proyectada por el gnomon, utilizando las relaciones de semejanza entre triángulos rectángulos. Mostró que la proporción de la sombra del gnomon (***a***) a la de la pirámide (***e***) más la distancia del pie de la altura de la pirámide hasta su base (***f***), era igual a la relación entre la altura del gnomon (***b***) y de la pirámide (***d***) (Figura 4). Después, estos métodos simples servirían como una herramienta exitosa para medir las dimensiones de la tierra, y más tarde, la distancia a las estrellas.

[9] Bastón o varilla de altura conocida que arroja una sombra prot.
[10] Imagen tomada del texto *Trigonometric Delights*. 1998, pág 23.

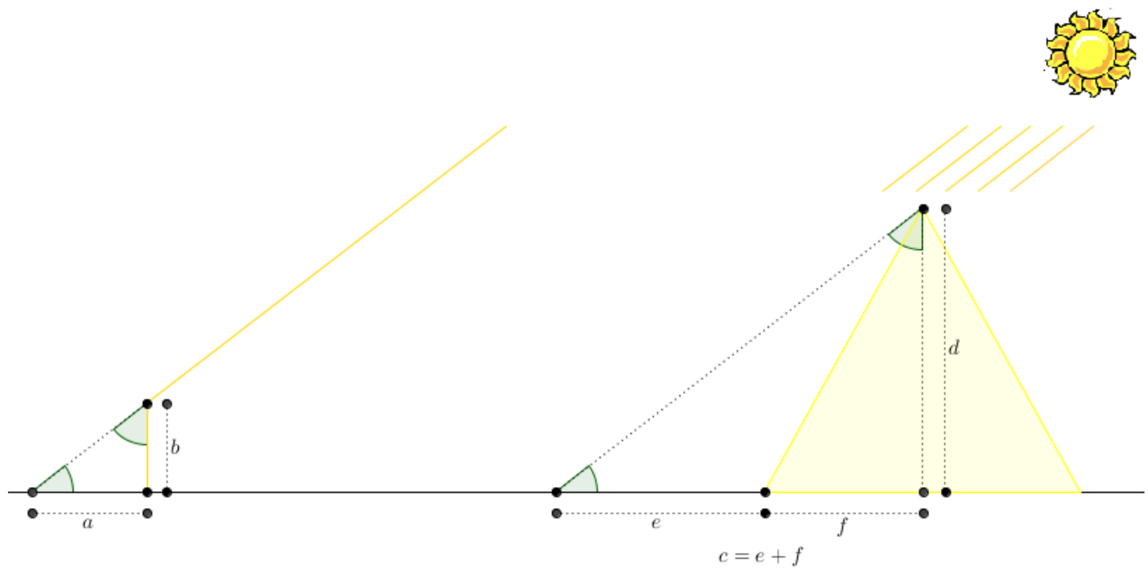


Figura 4.
a / c = b / d o *a / b = c / d, donde c = e + f*

El aporte más sobresaliente de Tales de Mileto, en términos de la trigonometría, se da en sus trabajos geométricos en relación con los conceptos de triángulo rectángulo, semejanza, razón y proporción, que constituyen un acercamiento intuitivo encaminado al origen de los conceptos de razón trigonométrica y función trigonométrica que se desarrollarán en épocas posteriores.

1.4.2 Anaximandro: El uso del gnomon en la cultura griega

Otro de los filósofos jónicos fue Anaximandro de Mileto (611-545 a.C), discípulo de Tales, quien según Dreyer, (1953) sugirió una visión geocéntrica del universo pero no avanzó mucho en sus ideas acerca de la construcción de este. Anaximandro defendía la idea de una Tierra plana o convexa en la superficie, pero en forma cilíndrica como una columna de piedra más que en forma de disco, siendo la altura la tercera parte de la amplitud. La Tierra según Anaximandro, permanecía en equilibrio en el centro del universo, idea que probablemente influyó posteriormente en Aristóteles. En cuanto al cielo, era una especie de bola de fuego ligada a la atmósfera, con una cantidad de capas entre las cuales el Sol, la Luna y las estrellas estaban situados a diferentes distancias; el Sol era el más lejano y las estrellas fijas las más cercanas a nosotros. Anaximandro utilizó el gnomon como un reloj de sol para medir los solsticios y los equinoccios, razón por la que se le atribuye introducir el uso de éste instrumento entre los griegos a pesar que mucho antes fueron los babilonios quienes comenzaron a utilizarlo. Así mismo, trabajó en la determinación de la distancia y tamaño de las estrellas (Dreyer, 1953).

Las ideas especialmente de Tales y Anaximandro, al parecer influyeron en el pensamiento de Pitágoras, en el sentido de las ideas matemáticas, pues Taylor (1818)[11] afirma, citando a Jámblico, que Pitágoras visitó a Tales de Mileto cuando tenía entre 18 y 20 años de edad. Para esa época Tales siendo un anciano, probablemente creó una fuerte impresión en Pitágoras que afianzó su interés en las matemáticas y le aconsejó aprender más de estos temas en Egipto. Por otra parte, Pitágoras asistió a conferencias que daba Anaximandro en la ciudad de Mileto, pues éste último estaba interesado en la geometría y la cosmología. Así muchas de sus ideas influirían en las opiniones futuras de Pitágoras.

1.4.3 Pitágoras: La belleza del número, la razón y la teoría de proporciones

Pitágoras (580 – 495 a. C) nació en la ciudad de Samos y hacia el año 535 a. C viajó a Egipto. Taylor (1818)[12] dice que según Jámblico, Pitágoras fue tomado como prisionero y llevado a Babilonia hacia el 525 a.C., donde logró llegar a la cima de la perfección en la aritmética, la música y las otras ciencias enseñadas por los babilonios. Desde su sistema filosófico, basado en la idea del número como principio de todas las cosas, Pitágoras creía que todas las relaciones podían reducirse a relaciones numéricas.

En relación con el concepto de razón, O'Connor y Robertson (1999) afirman que Pitágoras mostró con sus trabajos en música que:

(…)"las cuerdas vibrantes producen tonos armoniosos cuando las razones de las longitudes de éstas son números enteros"(…)

Actualmente, se atribuye a Pitágoras el famoso teorema geométrico que lleva su nombre[13], aunque se sabe que éste ya era conocido un milenio antes por los babilonios y, además de éste teorema, algunas fuentes como Heath (1931)[14] atribuyen a Pitágoras y otros miembros de su escuela otros aportes, de los cuales interesan los siguientes: *"La suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos"*[15] y *"El descubrimiento de los irracionales"*[16], sin embargo, a causa de la creencia de que todo es número entero ó razón entre números enteros, trató de demostrar que la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles tenía una longitud correspondiente a un número.

Según Dorce (2006), Pitágoras fue el primer griego en considerar la idea de una Tierra esférica y de un sistema geocéntrico. Otras de sus contribuciones en astronomía fue pensar que los planetas tienen movimiento propio y no siguen la rotación de las estrellas fijas y que la órbita de la Luna está inclinada hacia el ecuador de la Tierra. Los

[11] Citado en el texto *Pythagoras of Samos* por O'Connor, J. J y Robertson, E. F. Enero de 1999

[12] Citado en el texto *Pythagoras of Samos* por O'Connor, J. J y Robertson, E. F. Enero de 1999

[13] *"El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo siempre es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos".*

[14] Citado en el texto *Pythagoras of Samos* por O'Connor, J. J y Robertson, E. F. Enero de 1999

[15] Los pitagóricos conocían la generalización que establece que un polígono con *n* lados tiene la suma de los ángulos interiores igual a *(2n – 4)* ángulos rectos y la suma de los ángulos exteriores iguales a cuatro ángulos rectos.

[16] *S*in duda, el hallazgo de los inconmensurables se atribuye a los pitagóricos, pero parece poco probable que haya sido por el mismo Pitágoras, pues este descubrimiento iba en contra de su filosofía.

pitagóricos notaron que la Luna no tiene luz propia sino que está iluminada por el Sol y siempre buscaban un modelo armónico del mundo relacionado con la belleza de los números. Así, la distancia de la Tierra al sol era el doble de la distancia de la Tierra a la luna, la distancia de Venus era el triple, a Mercurio el cuádruple y así sucesivamente con el resto de los planetas. Además, entre Parménides y Pitágoras distinguieron los cinco planetas visibles del resto de estrellas por su movimiento.

En relación con las ideas de razón y proporción, Boyer (1999) afirma que Proclo, citando probablemente el libro de Eudemo, atribuye a Pitágoras la teoría de proporciones, según su coherencia con los intereses matemáticos de los pitagóricos y que uno de los aportes que dejó Mesopotamia a Pitágoras fue el conocimiento de las tres medias: la aritmética, la geométrica y la armónica, así como la proporción áurea que relaciona a dos de ellas: "el primero de dos números es a su media aritmética como su media armónica es al segundo de los números", relación equivalente al algoritmo babilónico para calcular raíces cuadradas.

Para la época de Platón, el hallazgo de los inconmensurables resultó ser la causa de la ruina de la teoría de las proporciones, pues encontrar la razón entre la diagonal y el lado de un cuadrado eran problemas que ponían en duda la posibilidad de comparar las razones entre magnitudes inconmensurables.

1.4.4 Eudoxo de Cnido: La teoría de proporciones y las esferas concéntricas

Eudoxo de Cnido (390- 377 a. C) dio una nueva definición de la igualdad entre dos razones por lo que según Boyer (1999) se le atribuye el descubrimiento de la teoría de proporciones que se desarrolla en los libros V y VI de *Los Elementos* de Euclides. El concepto de razón según Euclides, como una relación en tamaño entre dos magnitudes del mismo tipo, se complementa con la afirmación del mismo Euclides: *"dos magnitudes se dice que tienen una razón una a la otra, es posible encontrar un múltiplo de una cualquiera de ellas que supere a la otra"*. Boyer (1999) afirma que ésta proposición es comúnmente llamada "*Axioma de Arquímedes"* y que fue atribuida a Eudoxo por el mismo Arquímedes. Así, el concepto de razón de Eudoxo excluía al cero, clarificaba que las magnitudes debían ser de la misma naturaleza y que era posible encontrar un múltiplo de cualquiera de ellas que excediera a la otra.

En *Los Elementos*, Euclides (definición 5, libro V) menciona la formulación de Eudoxo:

"se dice que magnitudes que están en la misma razón, la primera a la segunda y la tercera a la cuarta, cuando, tomados cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera y cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, entonces los primeros equimúltiplos ambos exceden, son iguales o son menores que los segundos equimúltiplos, tomados en el orden correspondiente".

En otros términos: $a/b = c/d$ si y sólo si, dados dos números naturales cualesquiera m y n. Si $m \cdot a < n \cdot b$ entonces $m \cdot c < n \cdot d$, o si $m \cdot a = n \cdot d$ entonces $m \cdot c = n \cdot d$ o bien si $m \cdot a > n \cdot b$, entonces $m \cdot c > n \cdot d$.

La definición de proporción de Eudoxo como igualdad de dos razones, es equivalente al procedimiento de los productos cruzados que se usa actualmente:

$$a/b = c/d \text{ si y sólo si } ad = bc$$

A Eudoxo se le atribuye ser el creador de una astronomía científica, pues consiguió dar un modelo para cada uno de los siete cuerpos celestes que consistía en un sistema de esferas concéntricas con centros en el centro de la Tierra y radios variables en el que cada esfera giraba uniformemente alrededor de un eje fijo con respecto a la superficie de la esfera siguiente en tamaño (de menor a mayor): para cada planeta había un sistema de esferas homocéntricas. Más tarde Aristóteles combinó estos sistemas geométricos en la cosmología peripatética de las esferas cristalinas que dominó el punto de vista astronómico durante casi 2000 años (Boyer, 1999).

1.4.5 Aristarco de Samos: El primer modelo heliocéntrico del universo

Boyer (1999) citando a Plutarco y Arquímedes, afirma que se le atribuye a Aristarco de Samos (310-230 a. C) pensar por primera vez en un sistema heliocéntrico, idea que adopta Copérnico hacia el siglo XVI. La razón del por qué oponerse a las ideas de un sistema geocéntrico se basaba en las observaciones de los movimientos de los errantes como Marte y Venus que describían trayectorias en el cielo hacia adelante y hacia atrás, lo cual era contradictorio con los movimientos en trayectorias circulares propias del geocentrismo aristotélico[17]. Sin embargo, Boyer (1999) dice que antes de formular un modelo heliocéntrico del universo hacia el año 260 a. C, Aristarco elaboró un tratado *"Sobre los tamaños y distancias del Sol y la Luna"* basado aún en un modelo geocéntrico, donde registró la observación de que cuando la mitad de la luna está iluminada, el ángulo desde la Tierra al centro del sol y desde la Tierra al centro de la luna es menor que un ángulo recto en 1/30 de cuadrante, es decir $\beta = 90 - \alpha$, donde α equivale a 3 grados sexagesimales[18]. Entonces, el sistema Tierra, Sol, Luna se podría representar bajo el modelo de un triángulo rectángulo, con la Luna como vértice formando el ángulo recto (Figura 5). En el lenguaje trigonométrico: ***Sen 3° = TL/TS***.

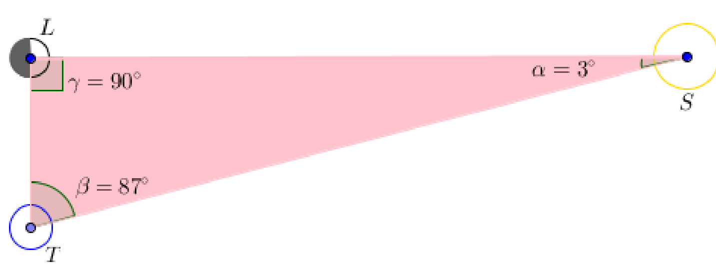


Figura 5.
La razón de la distancia Tierra – Luna (*TL*) a la distancia Tierra – Sol (*TS*) es equivalente al seno de 3 grados.

De acuerdo con Boyer (1999), Aristarco, como otros antiguos que habían estudiado el fenómeno de los eclipses, sabía por la observación de los eclipses de Sol, que aunque los

[17] En http://es.wikipedia.org/wiki/Aristarco_de_Samos
[18] La introducción sistemática de los 360° fue posterior a Aristarco

tamaños aparentes de la Luna y del Sol eran muy aproximados, la distancia Tierra – Luna (***TL***) debía ser menor que la distancia Tierra – Sol (***TS***), pues es la Luna el cuerpo que tapa al Sol cuando se da éste fenómeno. De esta manera y sin existir aún las tablas trigonométricas, Aristarco halló la razón ***TL/TS***, como una relación entre ***1/20*** y ***1/18***. Como ya se había mencionado, en términos trigonométricos se tiene: ***Sen 3° = TL/TS*** y entonces ***1/20 < Sen 3° < 1/18***, es decir, el Sol estaría entre 20 y 18 veces más alejado de la Tierra, que la Luna de la Tierra.

A pesar que el método de Aristarco es correcto y ofrece uno de los primeros acercamientos explícitos al concepto de razón trigonométrica, los resultados obtenidos no son reales, pues el valor real es que el Sol está más alejado de la Tierra aproximadamente unas 400 veces más que la Luna de la Tierra. Boyer (1999) afirma que esto se debe al error de observación en el momento de calcular la amplitud del ángulo ***β = 87°,*** que en realidad debería medir alrededor de ***89°50´***, por lo que el ángulo ***α*** mediría ***10´***de arco. Aunque el margen de error en el ángulo ***β*** es de ***2°50´***de arco, al parecer un error muy pequeño, en términos de la relación ***TL/TS*** es muy sensible y terminaría siendo un error muy grande:

Para ***α = 3°*** se tiene ***Sen 3°= 0.052*** , por lo que la relación ***TL/TS*** es de ***1/19***
Para ***α = 0°10´*** se tiene ***Sen 0°10´= 0.0029***, por lo que la relación ***TL/TS*** es de ***1/345***.

1.4.6 Eratóstenes de Cirene: El tamaño de la Tierra y su relación con los conceptos de razón, tasa, ángulo y proporción

La primera persona que calculó las dimensiones de la Tierra, fue Eratóstenes de Cirene (276-194 a.C), reconocido por su genialidad y por obtener un alto grado de precisión en sus mediciones. Por medio de muchos años de observación, durante su estancia en Siena, una ciudad ubicada al sur de Alejandría casi en su mismo meridiano, notó que el 21 de Junio[19] al medio día, justo cuando el sol se encontraba en el zenit, los templos y en general las cosas no proyectaban sus sombras en el piso y vio además que la luz del sol se proyectaba directamente en un pozo profundo. Durante el tiempo que vivió en Alejandría trabajando como bibliotecario, observó que el mismo 21 de Junio, justo al medio día, en la ciudad de Alejandría, se proyectaban las sombras de las columnas, templos y otros objetos en el piso de forma significativa.

La explicación que Eratóstenes dio al porqué en el mismo momento (el mismo día, a la misma hora) ocurrían cosas diferentes en dos ciudades distintas, fue reafirmar la idea pitagórica de una Tierra curva o esférica, pues era la única explicación de que si el sol está tan alejado de nosotros, sus rayos de luz caen de forma paralela a la Tierra, de forma tal que si la Tierra fuera plana las sombras en todo lugar serian proyectadas en el piso

[19] En el 21 de Junio es el día es más largo que la noche, por iniciar el solsticio de verano para los habitantes del hemisferio norte. Por eso se afirma que es el día más largo del año.

bajo un mismo ángulo, cosa que no ocurre. Entonces, una Tierra con superficie curva explicaría el fenómeno de forma acertada (Figura 6)[20].

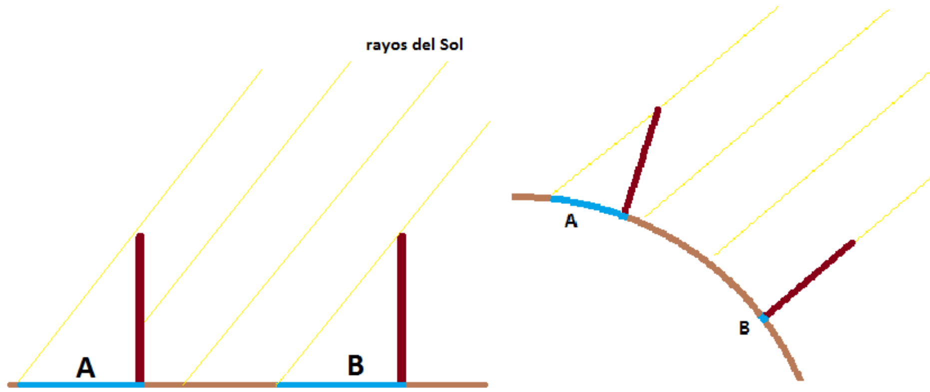


Figura 6.
(Izquierda): Sombras A y B para un modelo plano de la Tierra.
(Derecha): Sombras A y B para un modelo esférico de la Tierra. B representa la ciudad de Siena y A la ciudad de Alejandría[21].

Eratóstenes se dispuso a crear un modelo geométrico en el cual los rayos del sol caen paralelos sobre la tierra esférica. En su modelo, extendió los rayos del sol que se proyectaban perfectamente en el pozo hasta el centro de la Tierra. Al mismo tiempo, los rayos de sol caerían paralelamente sobre la ciudad de Alejandría, en la cual se tendría dispuesto un gnomon, en el cual el ángulo que se forma por los rayos de sol y el gnomon equivaldría a 7.2°. Proyectando el gnomon hasta el centro de la Tierra y a partir de las propiedades geométricas de la igualdad de ángulos[22] que se forman cuando una recta corta paralelas (rayos del sol) determinó que el ángulo formado en el centro de la Tierra[23] debía ser igual a 7.2°. Por lo tanto el ángulo que subtiende un arco cuya longitud es la distancia Alejandría – Siena, guarda una relación de proporcionalidad con la amplitud del ángulo de 360° que subtiende a la longitud de la circunferencia (Figura 7)[24].

[20] Imagen tomada de http://patximendiburu.blogspot.com/2012/11/la-hazana-de-eratostenes.html
[21] Imagen tomada de http://astroantares.p.ht/eratostenes-y-la-medida-de-la-circunferencia-terrestre.html
[22] Propiedad de los ángulos alternos e internos.
[23] Ángulo entre las rectas proyectadas del rayo de sol en el pozo de Siena y del gnomon en Alejandría.
[24] Imagen tomada y adaptada de http://astroantares.p.ht/eratostenes-y-la-medida-de-la-circunferencia-terrestre.html

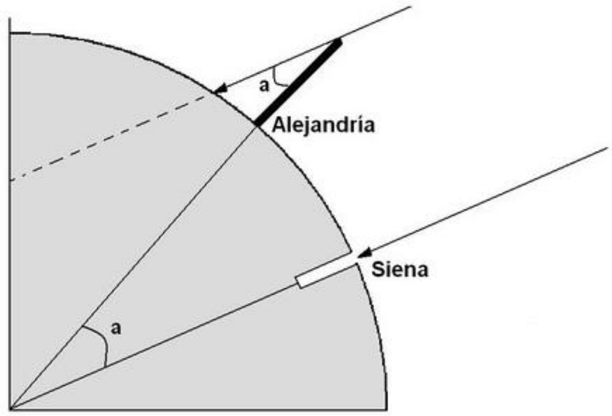


Figura 7.
Esquema de los ángulos que forman los rayos de Sol sobre un pozo en Siena y un gnomon en Alejandría para el 21 de Junio al medio día.

Eratóstenes se vio en la necesidad de medir la distancia entre las dos ciudades, por lo que se dice, que contrató a un viajero o a un grupo de soldados para hacer ésta medición. La persona o personas que tomaron la medida lo hicieron en términos de estadios, obteniendo una distancia entre las dos ciudades equivalente a unos 5000 estadios[25]. Eratóstenes sabía que de la relación angular entre 7.2° y 360°, la distancia entre Siena y Alejandría por guardar la misma proporción debía ser la quincuagésima parte de la circunferencia de la Tierra, y como la distancia entre las dos ciudades era de 5000 estadios, el problema de calcular la circunferencia terrestre quedaría resuelto aplicando razones y proporciones entre medidas de distinta naturaleza: unas angulares y otras de longitud[26].

Entonces el ángulo ***a =7.2°*** (Figura 7) es al ángulo total ***t =360°***, así como la longitud del arco ***d = 5000 estadios*** es a la longitud de la circunferencia terrestre ***p***:

$$a / t = d / p \quad \Rightarrow \quad 7.2°/ 360° \text{ estadios} = 5000 \text{ e} / p$$
$$7.2°\cdot p = 360°\cdot 5000 \text{ estadios} \;\Rightarrow\; p = 360°\cdot 5000 \text{ estadios} / 7.2°$$
$$\text{Luego, } p = 250000 \text{ estadios}$$

Así, la circunferencia terrestre mediría 250000 estadios de longitud, es decir, unos 46250000 metros o 46250 kilómetros.

Teniendo el valor de la circunferencia terrestre, y sabiendo que este valor esta dado por la expresión ***p = 2πr***, Eratóstenes pudo haber calculado fácilmente el radio y el diámetro terrestre:

$$r = p / 2\pi \;\Rightarrow\; r = 250000 \text{ estadios} / 2\pi \;\Rightarrow\; r = 39789 \text{ estadios} \Rightarrow 2r = 79578 \text{ estadios}$$

[25] Un estadio equivale a unos 185 metros de longitud.
[26] El relato que se hace en este documento acerca del cálculo de las dimensiones de la Tierra, atribuido a Eratóstenes, fue adaptado del video “Eratóstenes” de la serie “Cosmos”. Sagan, Carl. 1980. En www.youtube.com/watch?v=cDkaPqks3RQ

Entonces, si el radio de la Tierra mide 39789 estadios, el diámetro medirá 79578 estadios, es decir, el radio terrestre es de unos 7360916 metros o 7361 Kilómetros, valor no muy alejado del actual[27].

El aporte de Eratóstenes en cuanto a la medición de las dimensiones de la Tierra es de especial atención, dada la aplicación de los conceptos de ángulo, razón, tasa y proporción en el sentido de la utilidad para resolver problemas de tipo astronómico, enfatizando de nuevo en la relación trigonometría – astronomía.

1.4.7 Apolonio de Perga: Las Secciones Cónicas y su aplicación en los epiciclos y deferentes

Las ideas de que Mercurio y Venus giraban alrededor del Sol en una trayectoria circular y no alrededor de la Tierra y que el Sol a su vez giraba en trayectoria circular alrededor de la Tierra fueron, según Dorce (2006), retomadas por Apolonio de Perga (262-190 a.C) para aplicarlas en el movimiento de Marte, Júpiter y Saturno. Según Claudio Ptolomeo en "*El Almagesto"*, Apolonio es el más insigne de los matemáticos que han estudiado éste problema.

Dorce (2006) relata que Apolonio hizo un gran aporte con el modelo planetario de los epiciclos y deferentes basado en el estudio de la geometría, el cual aparece en su más famosa obra: Los ocho libros sobre *Las Secciones Cónicas*, mostrando la posibilidad de explicar los movimientos de los cuerpos celestes por medio de la geometría, aspecto que no sólo le dio reconocimiento como geómetra sino también como astrónomo. Se le atribuye el cálculo de la distancia entre el disco de la Luna y la superficie terrestre en unas 125 veces el radio terrestre. Igualmente se le atribuye a Apolonio la invención del círculo ecuante, posteriormente usado por Ptolomeo, para explicar los cambios de velocidad relativa de los planetas superiores con respecto a la Tierra, separándola del centro del universo.

1.4.8 Hiparco de Nicea: La primera tabla de cuerdas y el nacimiento de la trigonometría

Según Boyer (1999), el estudio de la trigonometría se inició con Hiparco de Nicea (190-120 a.C.), considerado por la gran mayoría de autores como el más grande astrónomo de la antigüedad. Se sabe muy poco de su vida y se tienen muy pocos detalles sobre sus escritos. La mayor parte de la información de su trabajo en trigonometría y astronomía[28] aparece referenciada en *El Almagesto* de Claudio Ptolomeo y en los comentarios sobre el Almagesto hechos por Teón y Pappus de Alejandría, quienes afirmaron que Hiparco escribió una obra sobre cuerdas en 12 libros que desafortunadamente desaparecieron. Igualmente, Boyer (1999) alude que a Hiparco se le atribuye la invención de la primera tabla trigonométrica, o por lo menos, es Hiparco la primera persona de la cual se tiene

[27] Radio ecuatorial terrestre: 6378 Km, en http://es.wikipedia.org/wiki/Radio_de_la_Tierra

[28] Al igual que sus antecesores, Hiparco trata la trigonometría y la astronomía indistintamente. La trigonometría se logra independizar de la trigonometría, solo hasta el siglo XVI

evidencia documental que hace un uso sistemático de ésta tabla. El único escrito de Hiparco que se conserva es un comentario que hizo sobre los trabajos de Arato y Eudoxo, compuesto por tres libros que tratan temas astronómicos.

Una contribución muy importante de Hiparco a la astronomía y en consecuencia a la trigonometría, fue la construcción de una tabla de cuerdas, que en términos trigonométricos correspondería a una tabla moderna de valores para la función seno, razón por la cual se le atribuye la invención de la trigonometría y se le reconoce como el padre de ésta rama de las matemáticas. En este sentido y más allá de la construcción de la tabla de cuerdas, Toomer (1974)[29] afirma que la gran contribución de Hiparco fue proporcionar una solución general a los problemas trigonométricos, por lo cual transformó la astronomía griega de ciencia teórica en ciencia predictiva y práctica.

Según Toomer (1974)[30], la explicación del porqué de éstas afirmaciones se puede encontrar en la descripción detallada que hace Claudio Ptolomeo en *El Almagesto* sobre el método de Hiparco: Para él era necesario hacer un tratamiento sistemático y cuantitativo de las posiciones de las estrellas y los planetas en la esfera celeste. El método usado para hacer dicho tratamiento era a partir de la medición de cuerdas y ángulos. Así, Hiparco introdujo en los griegos la división sistemática del círculo en 360 grados y la división del diámetro del círculo en 120 partes, probablemente con la intención de que el radio midiera 60 unidades. Cada parte tanto del círculo como del diámetro la dividió a su vez en 60 partes, y cada una de éstas nuevamente en 60. De esta manera, a cada ángulo del círculo le correspondía la cantidad de unidades en la cuerda subtendida y en el radio respectivo. Este método constituye un gran aporte para el desarrollo de los conceptos de ángulo, cuerda y razón en el sentido trigonométrico, dado que la cantidad de unidades de longitud de la cuerda que subtiende el ángulo, con relación a la cantidad de unidades de longitud del radio, entendiendo que la relación cuerda – radio depende únicamente del ángulo, correspondería al concepto de función cuerda, que actualmente llamamos función seno.

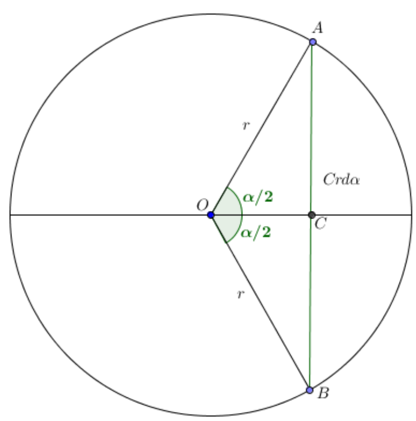


Figura 8.
AB = Crd α*, *AC = CB = ½ crd α
Sen α/2 = (½ Crd α) / r

[29] Citado en el texto *Hipparhcus of Rhodes* por O'Connor, J. J y Robertson, E. F. Abril de 1999
[30] Citado en el texto *Hipparhcus of Rhodes* por O'Connor, J. J y Robertson, E. F. Abril de 1999

En la figura 8, ***α*** es el ángulo comprendido por el arco ***AB***, luego ***α/2*** es el semi – ángulo[31] definido por la mediatriz de la cuerda ***AB***. Para Hiparco la relación entre la semi – cuerda[32] y el radio "***AC/OA***" es la cantidad de unidades en la semi – cuerda cuando el radio, por ser la mitad de un diámetro de 120 unidades, tiene el valor de 60 de unidades, que se puede expresar en términos trigonométricos como: ***Sen (α/2) = AC/OA.***

Como ***AC = ½ Crd α*** y ***OA = r***, se obtiene la expresión:

$$\mathrm{Sen}\,(\alpha/2) = (\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Crd}\,\alpha)\,/\,r \;\Rightarrow\; r\,\mathrm{Sen}\,(\alpha/2) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Crd}\,\alpha \;\Rightarrow\; \mathrm{Crd}\,\alpha = (r\,\mathrm{Sen}\,(\alpha/2))/\,\tfrac{1}{2}$$

Por lo que la función cuerda queda definida como ***Crd α = 2r Sen (α/2)***

Un ejemplo particular[33] es si la cuerda del ángulo α mide 40 unidades, entonces al reemplazar los valores en la expresión ***Sen (α/2) = AC/OA,*** se obtiene: ***Sen (α/2) = 20/60.***

Como ***20 unidades = ½ Crd α***, entonces ***Sen (α/2) = 1/60 · ½ Crd α***, luego:

$$\mathrm{Sen}\,(\alpha/2) = (1/120)\,\mathrm{Crd}\,\alpha \;\Rightarrow\; \mathrm{Sen}\,(\alpha/2) = 40/120 = 1/3$$

Se cree además que Hiparco construyó la tabla de cuerdas con el propósito de dar un método para resolver triángulos al establecer explícitamente las relaciones entre las medidas lineales y angulares en triángulos rectángulos, en tanto que, según Toomer (1974), construyó las relaciones de dependencia entre las semi – cuerdas como medidas lineales y los semi – ángulos como medidas angulares, con un radio fijo para el círculo. En este sentido, y en términos modernos, podemos hablar del nacimiento de los conceptos de razón y función asociados al seno de un ángulo. La importancia de los conceptos de razón y función seno radica en la necesidad de resolver triángulos para realizar cálculos en astronomía, para lo cual este tipo de procesos y el uso de la tabla de cuerdas eran muy frecuentes. De hecho, al lograr relacionar los lados y los ángulos de cualquier triángulo plano, era posible analizar las propiedades de un triángulo esférico[34] en la esfera celeste, como método práctico bajo los mismos principios. Es probable que Hiparco haya pensado en la idea de variación de las cuerdas en función de la variación del ángulo que las subtiende tomando amplitudes de 7½ en 7½ grados sexagesimales (cuarentaiochoavas partes de la circunferencia), al lograr encontrar una relación entre dos magnitudes, dando lugar al primer acercamiento al concepto de función trigonométrica.

---

[31] Semi –ángulo es el ángulo medio o la mitad de un ángulo en el centro de una circunferencia, definido por la mediatriz de la cuerda (que éste subtiende) que lo biseca.

[32] Semi – cuerda se define como la mitad de la longitud de una cuerda subtendida por un ángulo en una circunferencia o el segmento definido entre el punto medio (lugar de intersección entre la cuerda y su mediatriz) y uno de los extremos de la cuerda.

[33] Este ejemplo fue extraído y adaptado del archivo ppt. "La trigonometría y su relación con la astronomía". SÁNCHEZ B., CLARA H. Introducción a la historia y la filosofía de la matemática. Universidad Nacional de Colombia. 2009

[34] El triángulo esférico es una porción de la superficie de una esfera, como la esfera celeste, delimitada por tres arcos o segmentos curvos que se suelen llamar geodésicas, por lo cual la suma de los ángulos de un triangulo esférico es mayor que 180°.

Algunos autores consideran que el mayor descubrimiento de Hiparco fue el de la precesión de los Equinoccios por la lentitud en el cambio de dirección del eje de rotación de la Tierra, pues gracias a esta observación fue posible para el mismo Hiparco calcular la duración del año con un alto grado de precisión, razón por la cual se pueden diferenciar los conceptos de año sidéreo y año tropical. Boyer (1999), dice que además de basarse en sus propias observaciones sobre los cambios de las constelaciones y de algunas estrellas en determinados intervalos de tiempo, para hacer estos cálculos se basó también en conocimientos heredados por los babilonios y que en base a la observación de eclipses, Hiparco fue capaz de calcular la distancia a la Luna, estimada por él entre 59 y 67 radios terrestres[35] y de idear un modelo teórico para describir los movimientos de la Luna y del Sol basado en los epiciclos, que posteriormente fue perfeccionado por Claudio Ptolomeo. Adicional a esto, elaboró un catalogo que contenía información sobre más de 850 estrellas, y aunque aparecen designadas las posiciones de éstas, no hay claridad sobre si utilizó un modelo sistemático de coordenadas para referenciar la ubicación de cada estrella. Hiparco dio su propia versión de la salida y puesta de las constelaciones y una lista de estrellas brillantes siempre visibles en la noche, con el fin de determinar su posición con mucha precisión y de asignarles un brillo determinado según una escala de magnitud aparente formulada por el mismo. Ésta escala va de la magnitud 1 a la 6, donde 1 es la magnitud para caracterizar a las estrellas más brillantes y 6 la magnitud para las estrellas menos brillantes.

1.4.9 Menelao y la trigonometría esférica

Menelao de Alejandría (70 d. C – 140 d. C), matemático y astrónomo alejandrino, es reconocido, según Boyer (1999), por ser el primero en iniciar el estudio de la trigonometría esférica, en términos de su utilidad para una astronomía basada en el modelo de la esfera celeste. Fue el primero en hacer un tratamiento de las geodésicas sobre la esfera, análogo al de las líneas rectas y segmentos de recta sobre el plano. Los trabajos más importantes de Menelao son el tratado de *"Cuerdas en un círculo"* que se desarrolla en seis libros y la "*Esférica*", su obra más influyente, descrita a lo largo de tres libros.

En el libro I de "*La Esférica"*, Menelao establece las bases para el tratamiento de los triángulos esféricos de manera análoga al tratamiento que da Euclides para los triángulos en el libro I de *Los Elementos*. Es de gran importancia el teorema que Menelao presenta en el libro I sobre la congruencia de triángulos esféricos, donde afirma que *"dos triángulos esféricos son congruentes si tienen sus ángulos iguales dos a dos*". Lo interesante de este teorema es que Menelao no hace una distinción entre triángulos esféricos congruentes y semejantes, pero se sabe que ésta afirmación no es válida para los triángulos planos, pues en esos términos, los triángulos no son congruentes sino semejantes. También demuestra la propiedad de la suma de los ángulos de los triángulos esféricos que debe ser siempre mayor a 180 grados (Boyer, 1999).

El libro II de *"La Esférica"* presenta las aplicaciones de la geometría esférica a los fenómenos astronómicos y el libro III, de especial interés para la trigonometría, contiene el

[35] El valor de la distancia Tierra – Luna es de 60 radios terrestres aproximadamente.

famoso “Teorema de Menelao”, desde la geometría de cuerdas en un círculo[36] (Figura 9). En términos trigonométricos se tienen las siguientes dos expresiones:

$$\boldsymbol{Crd\ \alpha = 2r\ Sen\ (\alpha/2)} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{Crd\ \beta = 2r\ Cos\ (\alpha/2)}$$

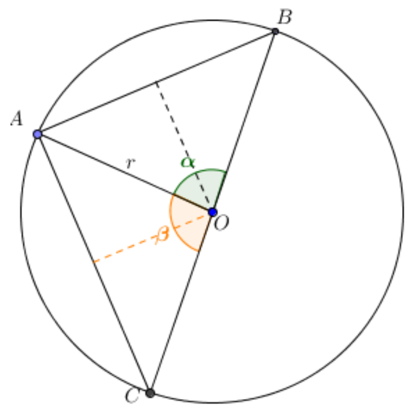


Figura 9.
Representación geométrica para las cuerdas ***AB*** y ***AC***.

Donde si ***BOC*** es el diámetro del círculo, es fácil identificar que la cuerda ***AB*** equivale al doble del seno del semi – ángulo ***α*** multiplicado por el radio y que la cuerda ***AC*** equivale al doble del coseno del semi - ángulo ***α***[37] . Ésta construcción geométrica lleva al teorema de Pitágoras:

$\boldsymbol{(Crd\ \alpha)^2 + (Crd\ \beta)^2 = (2r)^2}$, que en términos trigonométricos quedaría:

$$\boldsymbol{(2r\ Sen\ (\alpha/2))^2 + (2r\ Sen\ (\beta/2))^2 = 4r^2}$$

Entonces: $\boldsymbol{Sen^2\ (\alpha/2) + Sen^2\ (\beta/2) = 1}$

En términos modernos, si el radio es unitario, entonces la semi – cuerda es el seno del semi – ángulo y la altura de la cuerda es el coseno de dicho semi – ángulo. Así, si ***α*** es el semi – ángulo y ***s*** la semi – cuerda (Figura 10), tenemos:

$$\boldsymbol{s = ½\ Crd\ (2\ \alpha) = Sen\ \alpha} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{h = Cos\ \alpha}$$

Pero como $\boldsymbol{\alpha + \beta = 90°}$. Entonces: $\boldsymbol{s = Sen\ \alpha = Sen\ (90° - \beta)}$ y $\boldsymbol{h = Cos\ \alpha = Cos\ (90° - \beta)}$

De acuerdo con el Teorema de Pitágoras $\boldsymbol{s^2 + h^2 = 1}$, o bien: $\boldsymbol{Sen^2\alpha + Cos^2\alpha = 1}$
Así, pues, la identidad trigonométrica fundamental es una re – expresión del Teorema de Pitágoras.

[36] Tomado y adaptado del texto *Historia de la Matemática*. BOYER, C. B. 1999

[37] Nótese este hecho ya que las mediatrices de las cuerdas en mención hacen que la semi - cuerda de la cuerda ***AC*** sea congruente a la altura de la cuerda ***AB***

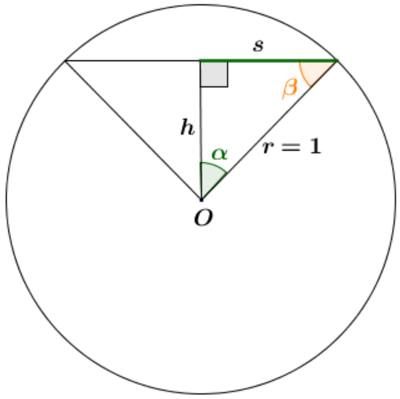


Figura 10.
Representación de la semi – cuerda ***s*** y la altura ***h*** en el círculo de radio unitario.

Volviendo a las raíces históricas, Menelao procede a demostrar su teorema para una geometría plana usando una recta transversal que corta a un triángulo en sus tres lados. De acuerdo con Boyer (1999), antes de efectuar su demostración tiene la necesidad de demostrar dos lemas utilizando una construcción geométrica que incluye cuerdas en un círculo.

El proceso de construcción de estos lemas es de gran interés en cuanto al concepto de razón, pues establece razones no sólo entre segmentos sino entre los senos de arcos correspondientes a los segmentos, asumiendo en éstas razones la relación de proporción por semejanza de triángulos.

Así, de acuerdo con Boyer (1999), si una cuerda ***AB*** en un círculo de centro ***O*** se corta por un radio ***OD*** en un punto ***C***, se tiene que la razón entre los segmentos ***AC y CB*** y la razón entre el seno del arco ***AD*** y el seno del arco ***DB*** son proporcionales[38]. Al prolongar el radio del círculo y la cuerda ***AB*** se cortan en un punto ***E***, por lo que análogamente ocurre que la razón entre los segmentos ***AE*** y ***BE*** y la razón entre el seno del arco ***AF*** y el seno del arco ***BF*** son también proporcionales[39]. Esto se puede demostrar por semejanza de triángulos trazando los radios que forman la cuerda AB (Figura 11).

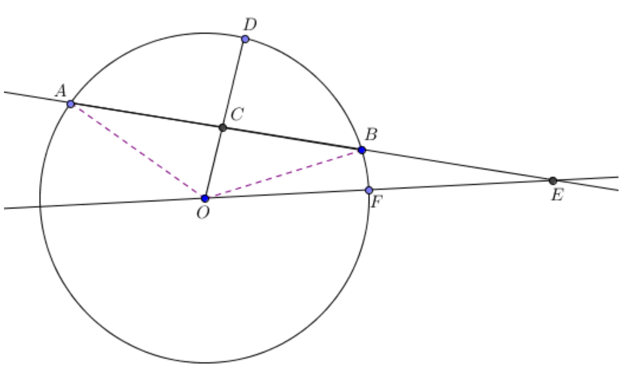


Figura 11.
Representación gráfica de los lemas de Menelao para demostrar el Teorema sobre la transversal.

[38] Corresponde al primer lema.
[39] Corresponde al segundo lema.

Teniendo la certeza sobre la veracidad de los dos lemas, Boyer (1999) afirma que Menelao pasa a construir la recta transversal que corta al triángulo en un punto de cada uno de sus lados, o en su defecto a las prolongaciones de sus lados, enunciado como Teorema de Menelao para la geometría plana de la siguiente manera:

*"Sea **ΔABC** un triángulo y **DEF** una recta tal que corta a los lados de un triángulo (o sus prolongaciones) en los puntos **D**, **E** y **F**, se cumple que:*
AF / CF = CE / BE = BD / AD = 1" (Figura 12)

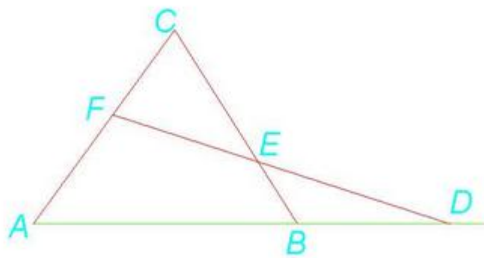


Figura 12.
Representación geométrica del Teorema de Menelao para triángulos planos

Lo que equivale a ***AD·BE·CF = BD·CE·AF***, pues *"una recta corta a los lados de un triángulo o a sus prolongaciones de manera que el producto de tres segmentos no adyacentes es igual al producto de de los otros tres"*.

Según Boyer (1999) y Dorce (2006), este teorema para la geometría esférica es muy similar, por lo que el Teorema de Menelao en su versión esférica quedaría:

*"Sean **AB**, **AC**, **BE** y **CD** arcos de círculos máximos de una esfera, de modo que **BE** y **CD** cortan a **AB** y **AC** y cuya intersección es el punto **Z**. sean todos ellos menores de un semicírculo* (Figura 13), *entonces*:

Crd (arco 2CE) / Crd (arco 2AE) = Crd (arco 2CZ) / Crd (arco 2DZ) =
Crd (arco 2BD) / Crd (arco 2AB)"

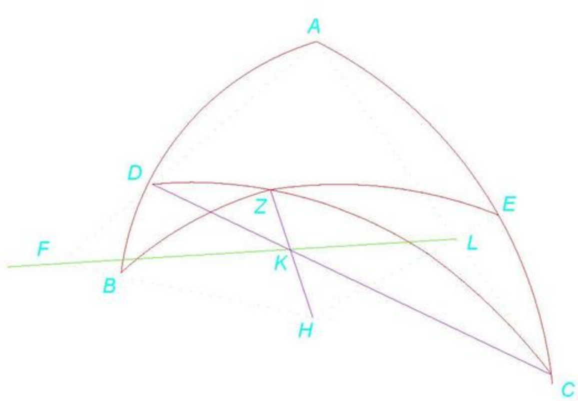


Figura 13.
Construcción geométrica para el Teorema de Menelao en su versión esférica

Desde el centro ***H*** de la esfera, se trazan los segmentos ***BH***, ***HZ*** y ***EH***. Se traza ***AD*** que corta a ***BH*** en ***F***. se trazan los segmentos ***DC*** y ***AC*** que son cortados por ***HZ*** y ***EH*** en los puntos ***K*** y ***L***. Así, los puntos ***F***, ***K*** y ***L*** quedan alineados por estar simultáneamente en dos planos (el del **Δ*ACD*** y el del círculo ***BZE***). Si se dibuja la recta ***FKL*** se forman los segmentos ***FL*** y ***CD*** que cortan a ***AF*** y a ***AC*** cuya intersección es ***K***, cumpliéndose así, como afirma Dorce (2006), la condición de éste teorema en su versión plana:

CL/AL = CK/DK · DF/AF

Pero, como por ***Crd (arco 2CE) / Crd (arco 2AE) = Crd (arco 2CZ) / Crd (arco 2DZ) = Crd (arco 2BD) / Crd (arco 2AB)***, se tiene:

CL/AL = Crd (arco 2CE) / Crd (arco 2AE)
CK/DK = Crd (arco 2CZ) / Crd (arco 2DZ)
DF/AF = Crd (arco 2BD) / Crd (arco 2AB).

Razón por la que se demuestra el Teorema.

De la misma manera, y de acuerdo con Dorce (2006), si los triángulos de la Figura 12 se dibujan sobre la superficie de una esfera, sus lados serían arcos de circunferencias definidos por el seno del ángulo que subtiende dichos arcos, por lo cual el teorema esférico se podría formular así:

Sen AF / Sen CF · Sen CE / Sen BE · Sen BD / Sen AD = 1, lo que equivale a
Sen AD·Sen BE·Sen CF = Sen BD·Sen CE·Sen AF

Este teorema interesa en gran medida por la exportación que se hace desde el concepto de razón al concepto de razón trigonométrica, y aunque esto se hace para pasar de lo plano a lo esférico, es de vital importancia para el desarrollo de la trigonometría. En cuanto a su uso para fines astronómicos, según Dorce (2006), el teorema fue utilizado posteriormente por Claudio Ptolomeo en *El Almagesto* para demostrar los tamaños de los arcos cortados por el Ecuador y la Elíptica a lo largo del círculo máximo que pasa por los polos del ecuador".

Los trabajos relacionados con el desarrollo de los conceptos de razón, cuerda y ángulo y el origen de los conceptos de razón y función trigonométrica, quedan almacenados en *"El Almagesto*", la obra más importante escrita por Claudio Ptolomeo, que constituye el tratado más importante existente sobre la astronomía antigua y que sirvió como base de la astronomía científica hasta el siglo XVI.

En el segundo capítulo se desarrollará a fondo la construcción de las tablas de cuerdas que realizo Ptolomeo para complementar el trabajo realizado por sus antecesores, especialmente Hiparco con los elementos de trigonometría plana y Menelao con los elementos de trigonometría esférica.

2. *Claudio Ptolomeo y El Almagesto*

2.1 ¿Quién fue Claudio Ptolomeo?

Claudios Ptolemaios (100 d. C – 170 d. C), conocido como Claudio Ptolomeo, fue un, astrónomo, geógrafo, matemático y astrólogo nacido en Ptolemaida (Egipto), que vivió por mucho tiempo en Alejandría; muy famoso por ser el autor del tratado astronómico "*El Almagesto*" compuesto por trece libros, del cual se conserva la traducción en latín de Gerardo de Cremona del siglo XII [40].

Ptolomeo adoptó una concepción del universo basada en el geocentrismo aristotélico, que como se sabe consideraba a la Tierra fija en el centro del universo, rodeada de una esfera celeste cuya superficie contenía a las estrellas fijas y al interior de la esfera giraban la Luna, el Sol y los planetas describiendo trayectorias circulares alrededor de la Tierra. Bajo esta visión, Ptolomeo realizó su trabajo, que consistió en el estudio de los datos producto de la observación astronómica de él y de algunos de sus antecesores, especialmente de Hiparco. La intención de Ptolomeo era construir modelos geométricos para el movimiento de los cuerpos celestes que facilitaran el estudio de la astronomía.

De acuerdo con algunos autores como Boyer (1999) y Dorce (2006), al parecer, Ptolomeo se educó en Alejandría con Teón de Esmirna, obteniendo las referencias observaciones astronómicas hechas por este personaje entre los años 127 y 132 d.C, las de los babilonios, además de las de personajes como Metón, Euctemón, Timocaris, Aristarco e Hiparco. Además del *Almagesto*, Ptolomeo fue el autor de otras obras como las *"Tablas Manuales"*, *"El Tetrabiblos"*, *"La Geografía"*, *"Las Hipótesis Planetarias"*, *"El planisferio"*, "*El Analemma", "Las fases de las estrellas fijas", La Óptica"* y *"La Armonnica".* A continuación se hace una breve descripción de los temas más importantes de los cuales trataban sus obras[41]:

En "*La Geografía"*, Ptolomeo se basó en las observaciones erróneas hechas por Posidonio relacionadas con las dimensiones de la Tierra, en vez de adoptar las observaciones hechas por Eratóstenes, pues desconfiaba de éstas según su experiencia, dado que a su parecer consideraba que eran muy grandes. Probablemente, *"Las fases de las estrellas fijas"* es una obra posterior al *Almagesto* pues daba la forma de calcular la posición del Sol sobre la eclíptica para poder ver la primera y la última aparición anual de una estrella anterior al alba, tema que se trata en el libro VIII del "*Almagesto"*; además proponía una introducción al cálculo de las condiciones de visibilidad estelar, una especie de calendario[42] con las salidas y ocasos de las estrellas y las condiciones meteorológicas para observarlas (Dorce, 2006).

---

[40] Tomado y adaptado de http://es.wikipedia.org/wiki/Claudio_Ptolomeo

[41] La descripción de las obras de Ptolomeo fue extraída y adaptada del texto Ptolomeo, el astrónomo de los círculos. DORCE, C. 2006

[42] Invención atribuida a Metón y Euctemón, S. V a. C.

En *"Las Tablas Manuales"*, obra posterior al *Almagesto*, se encuentra una versión más amplia de las tablas astronómicas del *Almagesto*, en el sentido de la aplicación práctica de éstas, por ejemplo las instrucciones de manejo de las tablas para el cálculo de efemérides y las predicciones astrológicas. En *"El Analemma"* y *"El Planisferio"* se hace un estudio de las sombras de los relojes de Sol, en el cual Ptolomeo da los cálculos matemáticos necesarios para tal estudio, como el cálculo de las coordenadas esféricas exactas del Sol para ciertas fechas, horas y lugares. En "*Las Hipótesis Planetarias*", obra posterior al *Almagesto*, la intención de Ptolomeo es dar consistencia física a los modelos de los movimientos celestes trabajados, ya que pensaba que sus modelos geométricos formaban parte de un engranaje tridimensional de esferas invisibles que definían los movimientos del Sol, la Luna y los planetas alrededor de la Tierra (Dorce, 2006).

Así mismo, Dorce (2006) afirma que *"El Tetrabiblos"* era básicamente un tratado de astrología, mientras que *"La Óptica"* presentaba cinco libros con la teoría general de la visión, un estudio del color y su influencia en la visión, y la teoría de la reflexión y la refracción.

"El Almagesto" es básicamente un tratado teórico de astronomía, dividido en trece libros cuyos temas tratan:

Libro I: El modelo geocéntrico del universo
Libro II: La periodicidad de los equinoccios y la longitud del año.
Libro III: Los solsticios y los equinoccios.
Libro IV: La Luna y el mes sinódico
Libro V: La corrección de paralaje de las posiciones del Sol y la Luna.
Libro VI: Medida del diámetro aparente del Sol y la Luna con el método de predicción de eclipses.
Libros VII y VIII: Se muestran cómo las posiciones relativas entre las estrellas son fijas, y un catálogo de las estrellas australes conocidas por Ptolomeo.
Libros del IX al XIII: Se muestra el método de Ptolomeo para calcular las posiciones y trayectorias de los planetas, exponiendo en detalle el sistema de epiciclos[43].

En el siguiente apartado se tratará detalladamente lo referente a la construcción de tablas de cuerdas para el tratamiento de los conceptos trigonométricos en relación con la utilidad de la matemática en la astronomía.

2.2 La relación geometría – trigonometría en *"El Almagesto"*

Como ya se había mencionado, "*El Almagesto"* es un tratado teórico de la astronomía muy importante para el desarrollo de la Astronomía y por tanto, para la historia de la trigonometría en la medida que Ptolomeo concentró gran parte de su vida, continuando el trabajo iniciado por Hiparco de Nicea en la creación de un catalogo de estrellas y en la construcción de las tablas de cuerdas, que servirían como una herramienta útil para realizar cálculos astronómicos (Dorce, 2006).

[43] Información adaptada de http://es.wikipedia.org/wiki/Almagesto y de "The Almagest by Ptolemy" (Claudius Ptolemaeus). Traducción de CATESBY T. R. Tomo 16, Enciclopedia Británica. 1952

El nombre árabe *"Almagesto"* escrito como "*Al-Majisti*", se traduce como *"el más grande"* que en griego se llamaba "*Hè Megalè Syntaxis"* por ser la astronomía una rama de las matemáticas. El término "*Al-Majisti*" combina el artículo árabe con el adjetivo griego *"mégiston*"[44]. Un rasgo muy interesante de ésta obra es, que a pesar de considerar un universo geocéntrico, Ptolomeo incluye el modelo geométrico de los epiciclos y deferentes con el fin de resolver los problemas asociados al movimiento planetario como la retrogradación de los planetas y las duraciones distintas de las revoluciones siderales.

Para formular sus modelos geométricos planetarios y desarrollar todos los cálculos a lo largo de los trece volúmenes del *Almagesto,* Ptolomeo, en el libro I, sección 10[45] da a conocer los métodos para construir la tabla de cuerdas, sabiendo que la necesitará como base de todos sus cálculos astronómicos posteriores. Este aporte corresponde al más importante en términos del nacimiento de la trigonometría, pues es en base a ésta rama de las matemáticas que se da un desarrollo de la astronomía durante casi los siguientes 1500 años. Naturalmente, el tratamiento original que se hace en *El Almagesto* no utiliza un lenguaje trigonométrico, dado que dicho lenguaje se desconocía para esa época, pero sin duda, hay una aproximación muy avanzada al concepto de función trigonométrica en términos geométricos, es decir de la función cuerda como las longitudes que dependen única y exclusivamente de un ángulo central. Se verá a continuación que para encontrar los valores de las cuerdas para la construcción de tablas, aparecen los conceptos de razón, función e identidad trigonométrica, basados en tratamientos netamente geométricos y en el teorema de Pitágoras.

Según Dorce (2006), se sabe por los trabajos de Hiparco que la trigonometría griega se basa en el concepto de función cuerda, donde dada una circunferencia, el ángulo central ***α*** determinado por dos radios y su ángulo doble (***2α***), se construye una cuerda ***AB*** subtendida por éste último, que se denotará ***Crd (2α)*** (Figura 14).

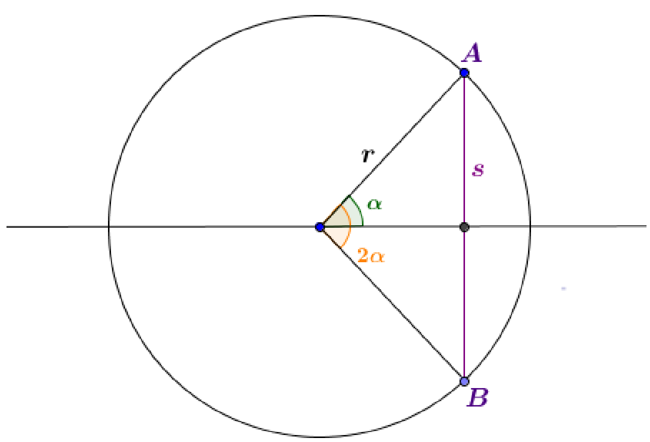


Figura 14.
Crd (2α) = 2s = 2r Sen α

[44]Tomado y adaptado de http://es.wikipedia.org/wiki/Almagesto

[45] *On the size of chords in a circle*. En "The Almagest by Ptolemy" (Claudius Ptolemaeus). Traducción de CATESBY T. R. Tomo 16, Enciclopedia Británica. 1952

Si **_s = AB/2_**, se denota **_s_** como la semi - cuerda de **_AB_**, que en términos modernos se expresa: **_s = r Sen α_**, por lo que **_Crd (2α9 = 2s_** y **_2s = 2r Sen α_**

Luego igualando se obtiene la expresión: **_Crd (2α9 = 2r Sen α_**

A la luz de la función cuerda, Dorce (2006) relata que Ptolomeo construye una tabla de cuerdas para todos los ángulos entre 0° y 180°, calculada de ½ grado en ½ grado[46], teniendo en cuenta la práctica babilónica de dividir la circunferencia en arcos de 360° y su radio en 60 unidades o partes[47], por lo cual se debe usar la notación sexagesimal[48].

2.2.1 El cálculo de las cinco primeras cuerdas[49]

De acuerdo con Catesby (1952) y Dorce (2006), Ptolomeo inició la construcción de su tabla de cuerdas calculando la longitud de las cuerdas de los ángulos de 36° y 72°, en otras palabras, las cuerdas de los ángulos centrales en un decágono y un pentágono regulares. Para lograrlo, determinó los lados de dichos polígonos inscritos en un círculo, por lo que construye un semicírculo **_ABG_** con centro en **_D_** y diámetro **_ADG_**. Luego traza el segmento **_DB_** perpendicular al diámetro por el centro **_D_** y determina el punto medio de **_DG_** como **_E_**. Enseguida traza el segmento **_EB_** y considera el punto **_Z_** sobre el diámetro, tal que el segmento **_EZ_** sea congruente al segmento **_EB_**. Finalmente traza el segmento **_ZB_**. Con esta construcción se concluye que los segmentos **_ZD_** y **_BZ_** son los lados del decágono y del pentágono regulares, respectivamente (Figura 15).

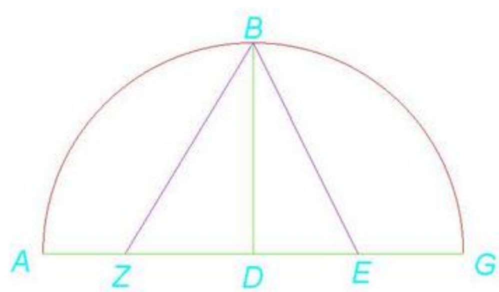


Figura 15.
Construcción geométrica para hallar los segmentos **_ZD_** y **_BZ_**: lados del decágono y de pentágono regular

Según Dorce (2006), con los lados de los dos polígonos ya obtenidos, Ptolomeo procede a calcular las longitudes de las cuerdas utilizando el Teorema de Pitágoras:

---

46 Hiparco hizo la misma construcción tomando valores de las cuerdas de los ángulos de 7 ½° en 7 ½°.

47 En los cálculos se utiliza el símbolo ^{p}, que indica partes o unidades.

48 Por ejemplo, para el número 3;10,15 en notación sexagesimal, se tiene:
$(3/60^0) + (10/60^1) + (15/60^2) = 3.1708$ en notación decimal

49 Tomado y adaptado de DORCE, C. *Ptolomeo, el astrónomo de los círculos*. 2006 y *"The Almagest by Ptolemy" (Claudius Ptolemaeus)*. Traducción de CATESBY T. R. Tomo 16, Enciclopedia Británica. 1952

Como el radio del círculo es $r = BD = 60^p$ y $DE = 30^p$ (por ser E el punto medio del radio), por el Teorema de Pitágoras se sabe que $DE^2 + BD^2 = EZ^2$, donde reemplazando se obtiene:

$30^2 + 60^2 = 4500 \Rightarrow EZ = \sqrt{4500} = 67.082$ que en sistema sexagesimal corresponde a $67;4,55^p$

Luego, Dorce (2006), afirma que con el resultado para ***EZ***, Ptolomeo logró calcular el valor del lado del decágono regular ***ZD***, sabiendo que $ZD = EZ - DE$: $ZD = 67;4,55^p - 30^p \Rightarrow ZD = 37;4,55^p$

Como el lado del decágono regular corresponde a la cuerda del ángulo de 36°, Ptolomeo logra obtener el valor de la primera cuerda para su tabla: $\underline{Crd\ 36° = 37;4,55^p}$

Luego, teniendo el valor de ***ZD***, se sigue un proceso similar para hallar el valor de la cuerda del ángulo de 72°, para lo cual se calcula el valor del lado ***BZ*** del pentágono regular:

Por el teorema de Pitágoras, $BD^2 + ZD^2 = BZ^2$, se obtiene:

$60^2 + 37;4,55^2 = 4975;4,15 \Rightarrow BZ = \sqrt{4975;4,15} = 70;32,3^p$, que es el valor de la cuerda de 72° para continuar con la construcción de la tabla: $\underline{Crd\ 72° = 70;32,3^p}$

El valor de la tercera cuerda resulta trivial, pues Ptolomeo sabía que el lado del hexágono regular es congruente al radio de la circunferencia (60^p) por lo que sin mucho esfuerzo tenía el valor de la cuerda para el ángulo de 60°: $\underline{Crd\ 60°= 60;0,0^p}$

La cuarta cuerda es la correspondiente al ángulo de 90°, que por ser el lado del cuadrado inscrito en el círculo resulta muy sencilla de encontrar (Figura 16). Por Pitágoras, $AB^2 = AD^2 + BD^2 \Rightarrow r^2 + r^2 = AB^2$

$60^2 + 60^2 = 7200 \Rightarrow AB = \sqrt{7200} = 84;51,10^p$, por lo tanto: $\underline{Crd\ 90° = 84;51,10^p}$

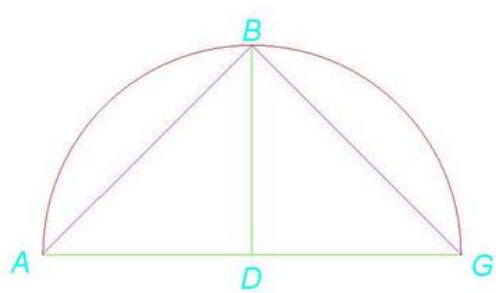


Figura 16.
Construcción geométrica de la cuerda para el ángulo de 90°. Cuadrado inscrito en una circunferencia.

Según Dorce (2006), para hallar el valor de la cuerda de 120°, es decir, el lado del triángulo equilátero inscrito en la circunferencia (Figura 17), Ptolomeo sabía que el cuadrado del lado del triángulo equilátero es igual a tres veces el cuadrado del radio: $AC^2 = 3r^2 \Rightarrow AC^2 = 3\ (60^2) \Rightarrow AC^2 = 10800 \Rightarrow AC = \sqrt{10800} = 103;55,23^p$, por lo que podía encontrar un quinto valor para la tabla, equivalente a $\underline{Crd\ 120° = 103;55,23^p}$

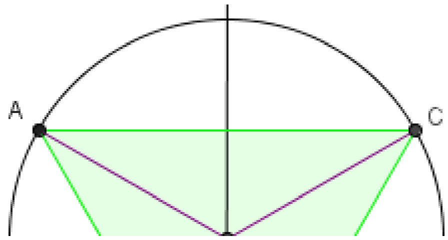


Figura 17.
La cuerda ***AC*** es el lado del triángulo equilátero inscrito, subtendida por un ángulo de 120°

2.2.2 El cálculo de las cuerdas de los ángulos suplementarios

Dorce (2006) reafirma el proceso seguido por Ptolomeo en *El Almagesto,* ahora para calcular las cuerdas de los ángulos suplementarios de 36° y 72°, es decir las cuerdas de 144° y de 108°. Para lograrlo, según Dorce (2006), Ptolomeo sabía que dada la cuerda de cierto ángulo ***Crd α***, se cumple según el teorema de Pitágoras que $\mathbf{Crd\ (180° - \alpha) = \sqrt{4r^2 - Crd^2\alpha}}$, pues todo triángulo formado sobre el diámetro de un circulo siempre es un triángulo rectángulo. La hipotenusa del triángulo es ***2r***, mientras que los catetos son cuerdas subtendidas por los ángulos ***α*** y su ángulo suplementario respectivo expresado como ***180° - α*** (Figura 18).

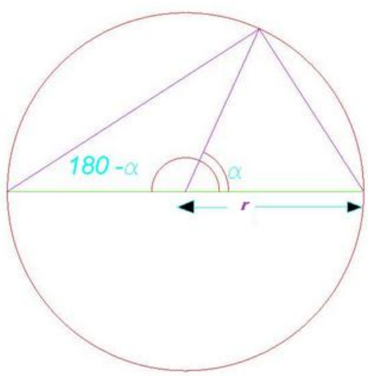


Figura 18
El ángulo suplementario de ***α*** es igual a ***180° - α*** y las cuerdas de ***α*** y de su ángulo suplementario son catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el diámetro de la circunferencia.

Entonces, aplicando el teorema de Pitágoras $\mathbf{Crd^2\alpha + Crd^2(180 - \alpha) = (2r)^2}$ ⇨ $\mathbf{Crd^2\ (180° - \alpha) = 4r^2 - Crd^2\alpha}$ ⇨ $\mathbf{Crd\ (180° - \alpha) = \sqrt{(4r^2 - Crd^2\alpha)}}$ y haciendo los procedimientos simultáneamente para α = 36° y α = 72°, se obtiene:

$\mathbf{Crd\ 36° = 37;4,55^p}$	$\mathbf{Crd\ 72° = 70;32,3^p}$
$\mathbf{37;4,55^2 + Crd^2 144° = (120)^2}$	$\mathbf{70;32,3^2 + Crd^2 108° = (120)^2}$
$\mathbf{Crd^2 144° = 14400 - 1375;4,14}$	$\mathbf{Crd^2 108° = 14400 - 4975;4,7}$
$\underline{\mathbf{Crd\ 144° = \sqrt{13025} = 114;7,37^p}}$	$\underline{\mathbf{Crd\ 108° = \sqrt{9425} = 97;4,55^p}}$

2.2.3 El cálculo de las cuerdas de los ángulos diferencia, mitad y suma

Teniendo ya los valores para las primeras 7 cuerdas de su tabla, Dorce (2006) afirma que Ptolomeo se dispone a calcular el valor de las cuerdas para los ángulos diferencia, mitad y suma, no sin demostrar antes el teorema que lleva su nombre.

Teorema de Ptolomeo: *"Dado un cuadrilátero **ABCD** inscrito en un círculo en el que se trazan las dos diagonales **AC** y **BD**, se cumple **AC·BD = AB·CD + AD · BC**"*[50]

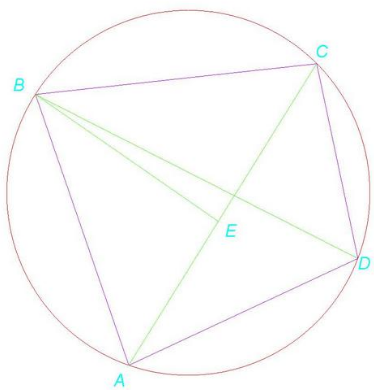


Figura 19.
Teorema de Ptolomeo

Para demostrar el teorema se dibuja sobre la diagonal ***AC*** un punto ***E*** tal que el ángulo ***ABE*** sea igual al ángulo ***DBC*** (Figura 19). Entonces, se tiene:

$$\angle ABE = \angle DBC \quad \Rightarrow \quad \angle ABE + \angle EBD = \angle DBC + \angle EBD \quad \Rightarrow \quad \angle ABD = \angle EBC$$

También se cumple la igualdad de ángulos: $\angle BDA = \angle BCE$, ya que ambos ángulos están inscritos en el mismo círculo y están limitados por la misma cuerda ***BA***. Con éstas dos igualdades de ángulos, tenemos que los triángulos ΔABD y ΔBCE son semejantes por lo que: $BC/CE = BD/DA \quad \Rightarrow \quad BC \cdot AD = BE \cdot CE$

Análogamente, los dos triángulos ΔABE y ΔBCD son semejantes, por lo que:

$$AB/AE = BD/CD \Rightarrow AB \cdot CD = BD \cdot AE$$ [51]

Sumando ambas expresiones, se tiene: $BE \cdot CE + BD \cdot AE = BC \cdot AD + AB \cdot CD \quad \Rightarrow$

$$BD \cdot (CE \cdot AE) = AB \cdot CD + AD \cdot BC \quad \Rightarrow \quad BD \cdot AC = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

Por lo que el Teorema queda demostrado para seguir avanzando en el cálculo de valores para la tabla de cuerdas.

---

[50] Tomado textualmente de DORCE, C. *Ptolomeo, el astrónomo de los círculos*. 2006

[51] Se tiene en cuenta la proposición 16 del libro VI de *Los Elementos de Euclides*: "*Si cuatro rectas son proporcionales, el rectángulo comprendido por las extremas es igual al rectángulo comprendido por las medias; y si el rectángulo comprendido por las extremas es igual al rectángulo comprendido por las medias, las cuatro rectas serán proporcionales*"

Según Dorce (2006), Ptolomeo traza las cuerdas en términos de su Teorema, para lo cual construye el semicírculo ***ABCD*** de diámetro ***AD*** y dibuja las cuerdas ***AB***, ***BC***, ***CD***, ***AC*** y ***BD*** (Figura 20).

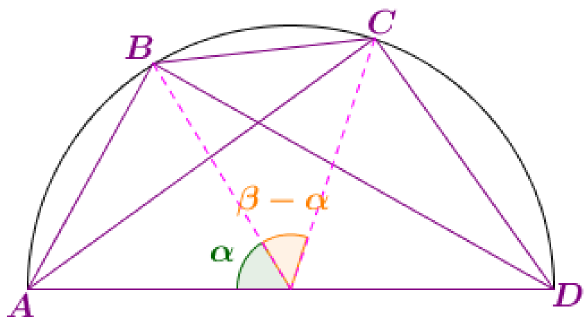


Figura 20.
Construcción del Teorema de Ptolomeo para obtener el valor de la cuerda del ángulo diferencia ***Crd (β – α)***

Por el Teorema en cuestión, ***ABCD*** es un cuadrilátero inscrito en un círculo, por lo que se cumple: ***BD · AC = AB · CD + AD · BC*** (★)

Ahora, tomando cada cuerda en términos del ángulo que le corresponde se tienen las siguientes equivalencias;

AB = Crd α
BC= Crd (β – α)
AC= Crd β
CD = Crd (180° - β)
BD = Crd (180° - α) y se sabe que ***AD = 2r***

Luego, reemplazando cada igualdad en el Teorema de Ptolomeo (★) y despejando la cuerda para la diferencia del ángulo ***Crd (β-α)***:

$$Crd\,(180° - \alpha) \cdot Crd\,\beta = Crd\,\alpha \cdot Crd\,(180° - \beta) + 2r \cdot Crd\,(\beta - \alpha) \Rightarrow$$
$$2r \cdot Crd\,(\beta - \alpha) = Crd\,(180° - \alpha) \cdot Crd\,\beta - Crd\,\alpha \cdot Crd\,(180° - \beta)$$

se obtiene la expresión:

$$Crd\,(\beta - \alpha) = 1/2r\,(Crd\,\beta \cdot Crd\,(180° - \alpha) - Crd\,\alpha \cdot Crd\,(180° - \beta)),$$

Que es la utilizada por Ptolomeo para calcular las cuerdas de las diferencias de los ángulos, correspondientes a 12°, 18° y 6°:

Crd 12° = Crd (72° - 60°) ⇨ <u>***Crd 12° = 12;32,36^p***</u>
Crd 18° = Crd (90° - 72°) ⇨ <u>***Crd 18° = 18;46,19^p***</u>
Crd 6° = Crd (18° - 12°) ⇨ <u>***Crd 6° = 6;16,49^p***</u>

De acuerdo con Dorce (2006), al encontrar el valor de la cuerda del ángulo de 6°, Ptolomeo procede a calcular las cuerdas de cualquier ángulo múltiplo de 6°, aplicando la diferencia del ángulo entre los ángulos para las cuerdas ya conocidas y el ángulo de 6 grados[52]. Teniendo calculados los valores de las cuerdas de 6° en 6°, Ptolomeo calcula la cuerda del ángulo mitad, con el fin de obtener más datos y seguir completando su tabla de cuerdas, lo cual hace de forma similar al cálculo de la cuerda de la diferencia del ángulo.

Nuevamente, construye un semicírculo ***ABCD*** con diámetro ***AD***, tal que los arcos ***BC*** y ***CD*** sean iguales. Luego dibuja el segmento ***CZ*** perpendicular al diámetro y coloca el punto ***E*** sobre ***AD*** con ***AE = AB*** y finalmente traza el segmento ***EC*** (Figura 21).

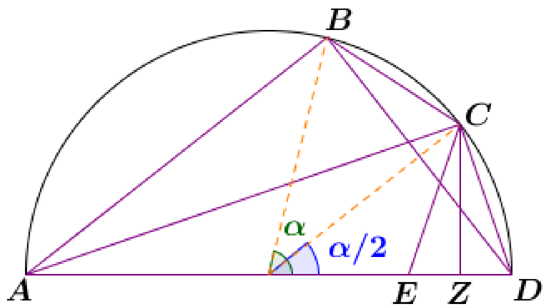


Figura 21.
Construcción geométrica del Teorema de Ptolomeo para obtener el valor de la cuerda del ángulo mitad ***Crd (α/2)***

Los triángulos de la construcción, ***ΔABC*** y ***ΔACE*** son iguales por tener el lado ***AC*** en común, ***AB = AE*** y ***∠BAC = ∠CAE***. Por lo tanto, ***BC = CE*** y como ***BC = CD***, el triángulo ***ΔCDE*** es isósceles y ***EZ = ZD***.

Ahora, como ***ED = AD – AE = AD – AB***, entonces ***ZD = ½ (AD – AB)***

Por la semejanza de los triángulos rectángulos ***ΔACD*** y ***ΔCZD***, se cumple:

$$AD/CD = CD/DZ, \text{ luego } AD \cdot DZ = CD^2 \Rightarrow CD = \sqrt{(AD \cdot DZ)}$$

Como ***AD = 2r***, ***DZ = ½(AD – AB)*** y ***AB = Crd (180° - α)***, entonces:

$$DZ = ½(2r – (Crd\ 180° - α))$$

Luego, como ***CD = Crd (α/2) = √(AD·DZ)*** entonces,

$$Crd\ (\alpha/2) = \sqrt{(2r \cdot ½\ (2r – Crd\ (180° - \alpha)))} \Rightarrow Crd\ (\alpha/2) = \sqrt{(r\ (2r – Crd\ (180° - \alpha)))}$$

Con ésta expresión y partiendo de la cuerda del ángulo de 6°, Dorce (2006), afirma que Ptolomeo calcula las cuerdas de los ángulos de 3°,de la mitad de 3° (1;30°) y de la mitad de 1;30° (0; 45°). Así, obtiene: ***Crd 3°= 3;8,28^p***, ***Crd 1;30°= 1;34,15^p*** y ***Crd 0;45° = 0;47,8^p***

Ptolomeo se propuso calcular el valor de 360 cuerdas, correspondientes a los ángulos de ½ en ½ grado en el intervalo de 0° a 180°. Con los procedimientos realizados hasta el momento, habría calculado el valor de 75 cuerdas. Para calcular las cuerdas restantes, Ptolomeo efectúa un razonamiento similar al de la diferencia del ángulo, pero ahora para el ángulo suma (Dorce, 2006).

[52] Por ejemplo, para calcular la cuerda del ángulo de 84°, pues ***Crd 84° = Crd (90° - 6°)***; ***Crd 78° = Crd (84° - 6°)*** y así sucesivamente.

Para esto construye un círculo de diámetro ***AD*** con centro en ***Z***, con ángulos centrales ***α*** y ***β*** de los cuales conoce sus cuerdas respectivas ***AB*** y ***BC***. Dibuja el diámetro ***BZE*** y une ***BD***, ***CD***, ***CE*** y ***DE*** (Figura 22).

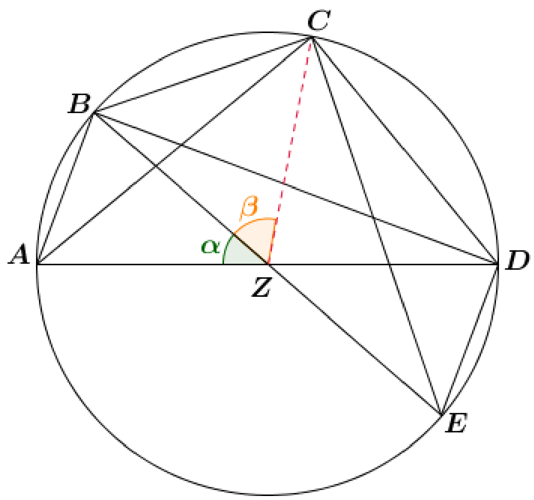


Figura 22.
Construcción geométrica del Teorema de Ptolomeo para obtener el valor de la cuerda del ángulo suma ***Crd (α+β)***

En términos de cuerdas se tiene

$$AB = Crd\ \alpha,\ BD = Crd\ (180° - \alpha),\ BC = Crd\ \beta \text{ y } CE = Crd\ (180° - \beta).$$

También se sabe que ***AD = BE = 2r*** y por ser iguales los ángulos opuestos por el vértice se tiene: ***DE = AB = Crd α***

Ahora, por el Teorema de Ptolomeo: ***BD · CE = BC· DE + BE· CD***, que en términos de las cuerdas quedaría: ***Crd (180° – α) · Crd (180° – β) = Crd β · Crd α + 2r · CD***

Al despejar ***CD*** se obtiene:

$$Crd\ (180° - \alpha) \cdot Crd\ (180° - \beta) - Crd\ \beta \cdot Crd\ \alpha = 2r \cdot CD \quad \Rightarrow$$
$$CD = 1/2r\ (Crd\ (180° - \alpha) \cdot Crd\ (180° - \beta) - Crd\ \beta \cdot Crd\ \alpha)$$

Luego, como ***CD*** es la cuerda del ángulo suplementario del ángulo suma, y aplicando la expresión $Crd\ (180° - \alpha) = \sqrt{(4r^2 - Crd^2\alpha)}$[53] para la cuerda del ángulo suplementario, se obtiene:

$$Crd\ (\alpha + \beta) = \sqrt{(4r^2 - 1/4r^2\ (Crd\ (180° - \alpha) \cdot Crd\ (180° - \beta) - Crd\ \beta \cdot Crd\ \alpha)^2)}$$

Según Dorce (2006), teniendo ésta expresión, Ptolomeo calcula las cuerdas faltantes de los ángulos múltiplos de 1;30° aplicando sumas sucesivas de 1;30° con los ángulos ya conocidos. Solo le falta determinar las cuerdas de los ángulos de ½ en ½ grado para los intervalos que van dejando los múltiplos de 1;30°. Para continuar hallando los valores que

[53] La expresión corresponde a la cuerda del ángulo suplementario, anteriormente desarrollada en el apartado 2.2.2

aún le hacen falta, hace el cálculo de la cuerda del ángulo 0;30° o la del ángulo de 1°, casos que implican la trisección de un ángulo[54]. Esto, según Dorce (2006), obliga a Ptolomeo a plantear el problema desde otro punto de vista:

Si construye un círculo en el que se trazan dos cuerdas tales que ***AB < BC***, se obtiene ***BC/AB < arco BC/ arco AB***. Se traza la bisectriz ***BD*** del ángulo ***ABC***, se traza ***AC*** y en la intersección de ***AC*** con ***BD*** se ubica el punto ***E***. Como la cuerda **BD** biseca al ángulo ***ABC***, entonces ***CD = AD*** y sabiendo que ***AB < BC***, se obtiene ***CE > AE***.

Luego se traza la perpendicular a ***AC*** por el punto ***D***, se construye el segmento ***DZ***, tal que ***Z*** es el punto de intersección entre la dicha perpendicular y ***AC***, y con centro en ***D*** se traza el arco de circunferencia de radio ***DE*** que cortará a ***DZ*** en ***F*** y a ***AD*** en ***H*** (Figura 23).

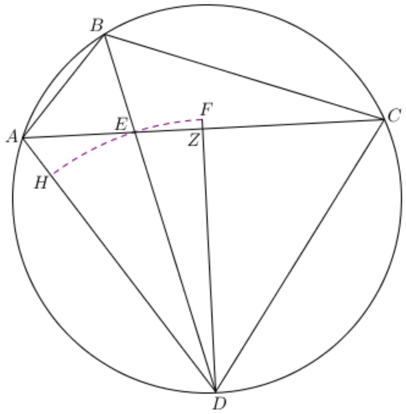


Figura 23.
Construcción auxiliar para hallar las cuerdas faltantes

Como el área del sector circular ***DEF*** es mayor que el área del triángulo **Δ*DEZ*** y el área del triángulo **Δ*DEA*** es mayor que el área del sector circular ***DEH*** (los sectores circulares se denotarán como ***s.c***), entonces

$$\angle ZDE / \angle EDA = s.c\ DEF / s.c\ DEH > \Delta DEZ / \Delta DEA = EZ / AE$$, por lo que:

$$EZ / AE < \angle ZDE / \angle EDA.$$ Así mismo, $$AZ / AE < \angle ZDA / \angle EDA$$

y como $2EZ = AC$, $2\angle ZDE = \angle CDA$, $2AZ = CE$ y $2\angle ZDA = \angle CDE$ se obtiene:

$$AC/AE < \angle CDA / \angle EDA \Rightarrow CE / AE < \angle CDE / \angle EDA$$

Además, como $CE/AE = BC/AB$, y $\angle CDB / \angle BDA <$ ***arco BC/ arco AB***, se obtiene ***BC/AB < arco BC/ arco AB***[55]

[54] La trisección del ángulo es uno de los tres problemas griegos que no se puede construir con regla y compás.

[55] Se demuestra en base a la proposición 3, libro VI de *Los elementos de Euclides*

Con este resultado, Ptolomeo traza un círculo tal que ***AB = Crd 0;45°*** y ***AC = Crd 1°*** obteniendo la expresión:

AC/AB < arco AC/ arco AB ⇨ ***AC < AB arco AC/ arco AB***, luego:

$$AB \cdot r \cdot 1°/r \cdot 0;45° = 4AB/3$$

Sabiendo que ***AB = 0;47,8^p***, en consecuencia, ***AC < 4AB/3 = 4/3 · 0;47,8 = 1;2,50***, y calculando ahora ***AB = Crd 1°*** y ***AC = Crd 1;30°***, se obtiene:

$$AB > 2AB/3 = 3/2 \cdot 1;34,15 = 1:2,50^p$$

Siguiendo a Dorce (2006), Ptolomeo concluye que ***Crd 1° = 1;2;50°*** y procede a aplicar la expresión que ya había encontrado de la cuerda del ángulo medio, para obtener: ***Crd 0;30° = 0;31,25^p***. Con estos últimos valores de las cuerdas de 1° y de ½ ° y los obtenidos anteriormente, Ptolomeo calculó todos los 360 valores que se había propuesto, con un excelente grado de precisión debido al uso de las construcciones geométricas derivadas de su Teorema y a las expresiones ya calculadas[56], que interpretadas desde un lenguaje trigonométrico, pueden ser consideradas como la base del concepto de identidad trigonométrica y resultan ser útiles para determinar la tabla de cuerdas de ½ en ½ grado. A través de sus construcciones geométricas y sus demostraciones se manifiesta la relación entre los conceptos de función trigonométrica e identidad trigonométrica. El hecho de aplicar teoremas o identidades constituye para Ptolomeo una necesidad de configurar los valores para la construcción de la tabla de 360 cuerdas.

Para Ptolomeo fue posible resolver problemas de la geometría plana, pues disponía de tres elementos: la tabla de cuerdas, su excelente dominio de la resolución de triángulos rectángulos y su bagaje frente a las relaciones entre triángulos semejantes, conocimientos base de la trigonometría, que actualmente se asocian al uso de las funciones seno, coseno y tangente en la resolución de problemas trigonométricos. Teniendo estos elementos y para pasar a realizar un estudio sistemático de los movimientos de los astros en la esfera celeste que desarrolla a lo largo de los trece capítulos del *Almagesto*, Ptolomeo se basa en el Teorema de Menelao, que en términos modernos, corresponde a una trigonometría esférica acorde con el modelo de universo que considera en su obra.

2.3 La trigonometría esférica en *El Almagesto*

Posterior a la tabla de cuerdas, Ptolomeo dedica una sección del capítulo I del *Almagesto* a los lemas y teoremas previos para demostrar el Teorema de Menelao[57], pues su estudio en términos modernos corresponde a las bases de la trigonometría esférica y, por tanto a las aplicaciones de ésta en la astronomía.

De los teoremas previos al Teorema de Menelao, es de especial interés el tercer Teorema, pues es de éste que Ptolomeo obtiene la proporción:

[56] El recuento que se ha realizado, desde el hallazgo del valor para la cuerda de 36° hasta la cuerda de ½ grado, se ha tomado y adaptado del texto Ptolomeo, el astrónomo de los círculos. DORCE, C. 2006.

[57] Los lemas y el Teorema de Menelao fueron desarrollados en el apartado 1.4.9

Crd (arco 2AB) / Crd (arco 2BC) = AE / CE,

por construcción geométrica de un círculo con centro en ***D***, donde se ubican los puntos ***A***, ***B*** y ***C*** tales que los arcos ***AB*** y ***BC*** son menores que el semicírculo y se trazan los segmentos ***AC*** y el diámetro que pasa por los puntos ***DEB***, donde ***E*** es la intersección entre el dicho diámetro y el segmento ***AC*** y los segmentos ***HC*** y ***AZ***, perpendiculares al diámetro (Figura 24).

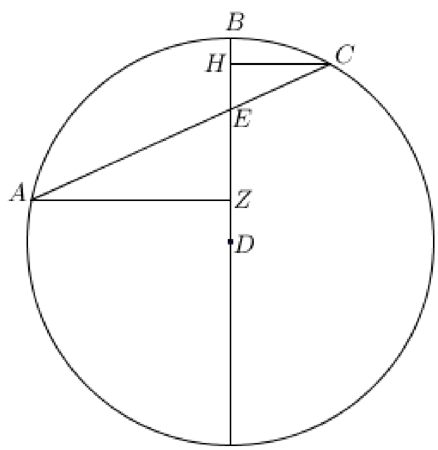


Figura 24.
Construcción geométrica auxiliar para demostrar el tercer teorema anterior al Teorema de Menelao

En los términos de Dorce (2006), según Ptolomeo, el teorema es muy útil, pues si se tiene el arco ***AC*** y la razón entre la cuerda del arco ***2AB*** y la cuerda del arco ***2BC***, entonces se tienen los arcos ***AB*** y ***BC***. De la construcción de los arcos ***α*** y ***β***, a partir de la arco ***α + β,*** se obtiene en términos trigonométricos la relación: ***sen α / sen β***. Para el arco ***α + β*** Ptolomeo hace una construcción análoga y establece la misma relación.

Posteriormente, Ptolomeo presenta el Teorema de Menelao en versión esférica[58] y procede a calcular los arcos entre el Ecuador y la Eclíptica, en donde calcula la ascensión recta y la declinación de un astro (Dorce, 2006).

[58] Este Teorema se desarrolló en la sección 1.4.9

II. COMPONENTE CONCEPTUAL Y DISCIPLINAR

3. *Conceptos clave en la enseñanza de la trigonometría basados en la construcción de las tablas de cuerdas*

Posterior a la revisión histórica – epistemológica de los conceptos de razón, ángulo y cuerda, y de otros conceptos asociados importantes para su estudio, se hace necesario elaborar un marco conceptual que relacione los conceptos en cuestión de acuerdo con su origen, desarrollo e importancia para la construcción de las tablas de cuerdas, su utilidad en el ámbito de la astronomía y en el desarrollo de la trigonometría plana, de modo tal que este marco sea una herramienta metodológica para estructurar la propuesta de enseñanza de la manera más adecuada.

3.1 Medición

Los aspectos matemáticos disciplinares, necesarios para diseñar la propuesta, se establecieron desde tres conceptos fundamentales que no son sólo útiles para la matemática, sino para otras ciencias: los conceptos de medida, magnitud y cantidad. Estos tres conceptos son los que propician el origen de los conceptos de ángulo, cuerda y razón, en tanto que la necesidad humana de medir unifica los tres conceptos con el fin de establecer patrones como unidades de referencia útiles para cuantificar, comparar o asignar valores a determinada propiedad de un objeto de estudio. En particular, estos conceptos son importantes para determinar y cuantificar las propiedades que refieren a las magnitudes amplitud y longitud, asociadas a los conceptos de ángulo y cuerda.

3.1.1 El concepto de medida

El concepto de medida por ser tan fundamental, está relacionado con el proceso de medir o de realizar mediciones y de establecer un patrón arbitrario mediante un sistema de referencia para cada característica que sea posible cuantificar, de modo que se pueda asignar a tal característica un valor determinado. Así, la medición se puede caracterizar como el proceso por el cual es posible comparar determinado patrón (elegido arbitrariamente) con un objeto que tiene características cuantificables llamadas magnitudes. Aquí únicamente se adopta el sentido físico de medida usado en las ciencias naturales el cual difiere sensiblemente del concepto de medida definido en matemáticas.

3.1.2 El concepto de magnitud

Según Godino y otros (2002), el concepto de magnitud se puede definir como aquello asociado a las cualidades, atributos o propiedades de los objetos que son susceptibles de ser cuantificadas, o en otras palabras, de tomar distintos valores numéricos. Así mismo, se pueden caracterizar dos tipos de magnitudes de acuerdo a la naturaleza discreta o continua de los objetos. Las magnitudes corresponden a variables físicas que se pueden contar ó medir dependiendo si éstas son discretas ó continuas.

3.1.3 El concepto de cantidad

La cantidad se puede definir fácilmente como el valor que toma una magnitud específica en determinado objeto, sin embargo, así como se hizo para caracterizar las magnitudes, es adecuado establecer claramente la distinción entre las cantidades que son discretas y las que son continuas. Esta distinción refiere a las preguntas ¿cuántos o cuántas hay? y ¿cuánto o cuánta hay? en tanto que sólo se pueden contar los objetos de un conjunto haciendo uso del concepto de número natural, pero si un objeto llegara a romperse perdería su propiedad para ser "contado", y en tanto que podemos medir alguna o algunas propiedades de determinado objeto, así se fraccione, rompa o divida indefinidamente sin perderse la naturaleza de sus propiedades. Para efectos de esta propuesta, se tendrá en cuenta el concepto de cantidad continua, dado que para el caso de las magnitudes angulares y de las longitudes de las cuerdas, éstas se pueden medir o comparar en función de un patrón de medida, por ser cada una de una naturaleza definida.

3.1.4 Los instrumentos de medición

Los instrumentos de medición en ciencias son objetos o artefactos tecnológicos elaborados por el ser humano para comparar magnitudes físicas por medio de un proceso de medición. Para realizar este proceso se utilizan unidades de medida o patrones ya establecidos de manera que de la medición se obtiene una cantidad que representa la relación entre la magnitud que se está cuantificando y la unidad o patrón de referencia.

El valor arrojado por un proceso de medición de una variable física tiene sus limitaciones instrumentales, lo cual lleva al concepto de precisión del instrumento y del error asociado en el proceso de medida, donde este último se refleja como una incertidumbre en el valor medido.

3.2 Los conceptos de ángulo, razón y cuerda

Teniendo claridad frente a las implicaciones de los conceptos fundamentales ya descritos en función de los procesos de medición, es posible definir y profundizar en los conceptos de ángulo, razón y cuerda. Para tal fin, en algunos momentos será necesario aludir a conceptos auxiliares como semejanza, proporción y triángulo.

3.2.1 El concepto de ángulo

Euclides define ángulo plano como *"la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta"* [59] y posteriormente profundiza en el concepto de ángulo con las definiciones 9 y 10, utilizando términos como inclinación, ángulos adyacentes, ángulo recto y perpendicular, para luego caracterizar ángulos obtusos y agudos en las definiciones 11 y 12 en función del ángulo recto.

[59] Euclides. Elementos. Libro I, Def. 8

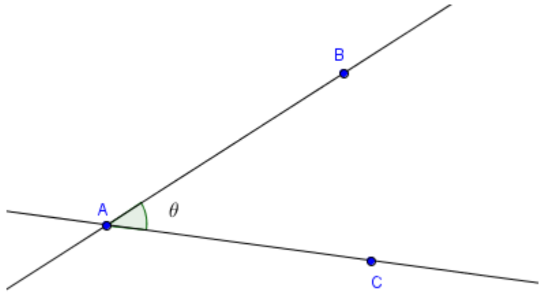


Figura 25. Ángulo θ

El ángulo se define actualmente como la porción de un plano comprendida por dos rectas que se cortan en un punto formando un vértice (figura 25). Esta porción es llamada amplitud y suele medirse actualmente en función de alguna de las siguientes tres unidades de medida: el radián, el grado sexagesimal ó el grado centesimal, correspondientes a los sistemas de medida angulares: circular, sexagesimal y centesimal, respectivamente. Así, el concepto de ángulo está asociado a la medición de la magnitud amplitud. Para efectos de la propuesta, se adoptará la unidad de medida del sistema sexagesimal y sus submúltiplos: el grado sexagesimal, el minuto y el segundo, porque fue este sistema el utilizado en la construcción de las tablas de cuerdas de Hiparco y Ptolomeo y, es además el que ha perdurado hasta nuestros días para referirnos, por ejemplo, a la medición del tiempo.

3.2.1.1Medición de ángulos

Para efectuar los procesos de medición de ángulos que se sugieren en algunas actividades de la propuesta, es importante la determinación y el uso tanto de un sistema de medida como de un instrumento de medición. Como se ha dicho anteriormente, se dará una atención especial al sistema sexagesimal, pero utilizando un instrumento que permita ir más allá del orden de los grados y determinar mayor precisión en los procesos de medida. Para esto se hará uso del nonio o escala de vernier angular, de manera que sea posible cuantificar minutos y segundos además de grados sexagesimales, aludiendo por ejemplo a la necesidad de Ptolomeo para calcular valores de las cuerdas de ½ en ½ grado de amplitud y para determinar los submúltiplos mencionados.

3.2.1.2 El nonio o escala de Vernier

Se hace referencia indistintamente al nonio o escala de Vernier como la escala auxiliar de un instrumento de medición que se utiliza con el fin de obtener medidas en órdenes de mayor precisión que la unidad de medida[60].

Para el caso particular de medición de ángulos, el objetivo del nonio es obtener una medida con mayor precisión que la que se obtiene utilizando un transportador cuya escala contiene valores sólo en el orden de los grados. Así, la escala auxiliar complementará las

---

[60] En http://es.wikipedia.org/wiki/Nonio

divisiones de la escala convencional en el momento de medir amplitudes o distancias angulares para representar las unidades de orden inferior al grado sexagesimal, que se conocen como el minuto y el segundo, sabiendo por referencia del *Almagesto*, que un grado sexagesimal equivale a 60 minutos y, un minuto sexagesimal a 60 segundos de arco: $\boldsymbol{1° = 60'}$ $\boldsymbol{1' = 60''}$

Para las unidades de orden inferior al grado, la escala auxiliar está dotada de una característica denominada apreciación $\boldsymbol{A}$, definida como la medida más pequeña perceptible en un instrumento de medida. Así mismo, el nonio tiene otras características importantes: un número $\boldsymbol{n}$ de divisiones, una constante de extensión $\boldsymbol{k}$ que determina la longitud del nonio para una misma apreciación, una longitud $\boldsymbol{L}$ que se define como la amplitud o distancia angular entre la primera y la ultima división del nonio, y una separación $\boldsymbol{S}$ que se da entre dos divisiones consecutivas del nonio.

De las características mencionadas, $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{k}$ son variables independientes, mientras que $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{S}$ dependen de las primeras. Entonces, tomando como referencia un transportador graduado en grados sexagesimales, se tiene que la unidad $\boldsymbol{u = 1°}$ y como $\boldsymbol{1° = 60'}$, la apreciación del nonio o vernier esta dada por la expresion $\boldsymbol{A = u / n}$ o $\boldsymbol{A = 1 / n}$, es decir el grado sexagesimal o su equivalente dividido entre el número de divisiones del nonio.

Un ejemplo para esta característica es que si el número de divisiones del nonio es 20, la apreciación será de 3 minutos:

$$\boldsymbol{A = 1°/n = 60'/n; \qquad A = 1°/20 = 60'/20 = 3'}$$

Entonces al efectuar la equivalencia entre grados y minutos sexagesimales, la apreciación del nonio quedará en términos de minutos sexagesimales.
Por otra parte, la longitud del nonio depende de $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{k}$, y está dada por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{L = (k \cdot n - 1)\, u}$$

En términos del ejemplo anterior, si la constante de extensión es $\boldsymbol{k = 1}$, y $\boldsymbol{n = 20}$, indicaría que la distancia angular entre la primera y la ultima división del nonio es de 19 grados,

$$\boldsymbol{L = (1 \cdot 20 - 1)\, 1° = 19°}$$

Al examinar el ejemplo en términos de la separación entre dos divisiones consecutivas, según la expresion $\boldsymbol{S = (k - 1/n)\, u}$, se obtiene una separación de 57 minutos de arco:

$$\boldsymbol{S = (1 - 1/20)\, 60' = 57'}$$

Figura 26.
Caracteristicas del nonio angular para *n = 20* divisiones, *k= 1*, apreciacion de *3´*de arco, longitud de *19°* y separación de *57´*

Para efectos de este trabajo, y en términos de lo que constituye un aporte al mismo, se construyó un medidor de ángulos con nonio angular teniendo en cuenta la teoría expuesta anteriormente, extraida y adaptada de wikipedia[61]. La construcción de este instrumento de medición se hizo con el software Autocad y se elaboró en acero inoxidable con centro movil. Adicionalmente se elaboró un trípode en aluminio como soporte del medidor de ángulos con sus respectivos niveles y una plomada para optimizar su funcionamiento (Figuras 26 y 27).

Figura 27.
Medidor de ángulos con nonio angular, plomada y trípode

[61] En http://es.wikipedia.org/wiki/Nonio

3.2.2 El concepto de razón

El concepto de razón es de gran importancia para este trabajo ya que constituye la base de la propuesta de actividades. En esencia, las razones y funciones trigonométricas nacen de las razones geométricas establecidas por Tales de Mileto, producto de la aplicación del concepto de razón en la semejanza de los triángulos. Es así, que interesa el concepto de razón geométrica trabajada desde Tales de Mileto, posteriormente definida por Pitágoras, desarrollada por Eudoxo en su teoría de proporciones y recopilada por Euclides en su obra Los Elementos. Es desde ésta perspectiva, que se entiende el concepto de razón como una cantidad que no expresa una magnitud[62] sino la relación entre magnitudes; que permite identificar cuántas veces contiene una magnitud a otra magnitud del mismo tipo o, en otras palabras, como la relación geométrica entre dos magnitudes o medidas de la misma naturaleza. Euclides, en el libro V de Los Elementos hace alusión a la idea de razón como *"determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas"* no sin antes hacer referencia al concepto de magnitud continua y a la acción de medir para explicar las relaciones entre las partes y el todo con respecto al tamaño.

Desde el punto de vista de las primeras demostraciones geométricas, el concepto de razón se da con Tales de Mileto al aplicar las propiedades de la semejanza en triángulos para medir las alturas de las pirámides de Egipto. Tales debió iniciar con el reconocimiento y pleno convencimiento de algunas propiedades geométricas referentes a rectas, ángulos, círculos y triángulos, que consideró como reglas básicas aceptadas de manera intuitiva a partir de demostraciones empíricas. La evidencia de dichas propiedades se encuentra en los famosos teoremas que formuló el mismo Tales de Mileto.

Es de especial interés el teorema de Tales que expresa las propiedades o relaciones entre los ángulos que se forman al cortar dos paralelas por una recta, pues es éste teorema el que posibilitará el análisis frente a las condiciones de semejanza en triángulos a la luz de los conceptos de razón y proporción, y que luego permitirá enunciar el teorema de semejanza para la construcción de rectas paralelas a cualquiera de los lados de un triángulo con el fin de obtener triángulos semejantes al triángulo dado. Para visualizar este análisis, se considera la siguiente construcción geométrica:

Se traza una recta horizontal que pase por dos puntos ***A*** y ***B***. Luego, por un punto ***C*** exterior a dicha recta se construye una recta ***AC***, oblicua a la recta ***AB*** (Figura 28). Se construye un punto ***D*** sobre la recta ***AB*** y una circunferencia con centro en ***D*** y radio ***DE*** (Figura 29).

[62] Si la razón no expresa una magnitud, es de carácter adimensional.

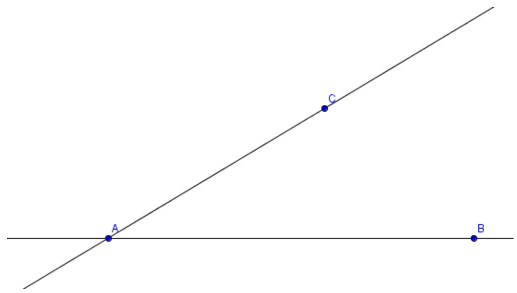


Figura 28.

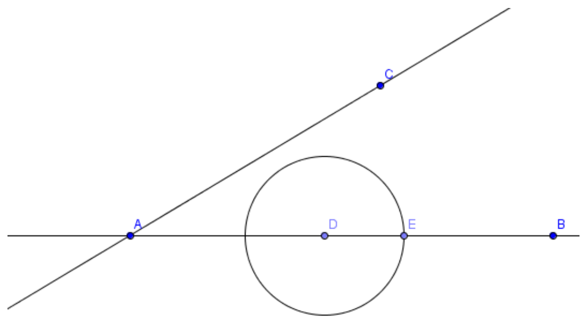


Figura 29.

Se construye una circunferencia con centro en ***E*** y radio ***DE***. Luego se marcan los puntos de intersección ***F*** y ***G*** entre las dos circunferencias y se traza una recta que pase por ***F*** y ***G***, perpendicular a ***AB*** (Figura 30).

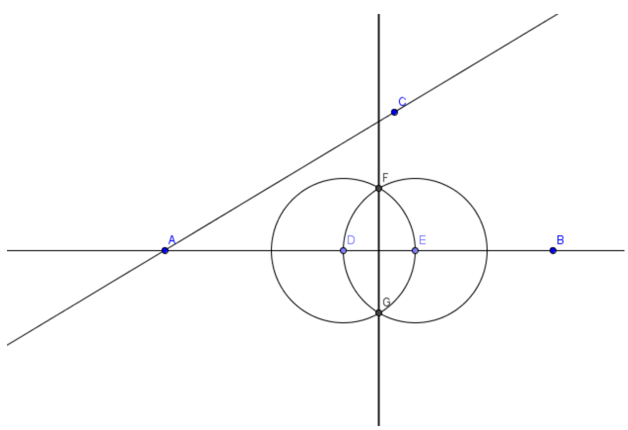


Figura 30.

Se marca un punto ***H*** sobre ***AB*** y se traza una circunferencia con centro en ***H*** y radio ***HI***. Luego se marcan los puntos de intersección ***J*** y ***K*** de la circunferencia de radio ***HI*** con otra de las circunferencias (en este caso la circunferencia de radio ***HI*** se interseca con la circunferencia de radio ***DE*** con centro en ***D***). Se traza una recta que pase por los puntos ***J*** y ***K***, perpendicular a la recta ***AB*** (Figura 31)

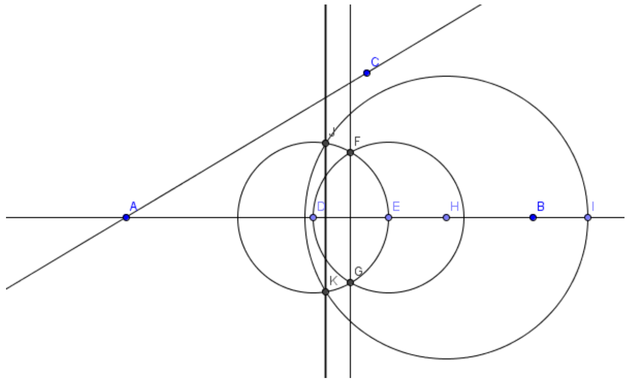


Figura 31.

Se nombran los puntos de intersección de las rectas perpendiculares a ***AB*** con dicha recta, como ***L*** y ***M***, y con la recta ***AC*** como ***N*** y ***O*** (Figura 32).

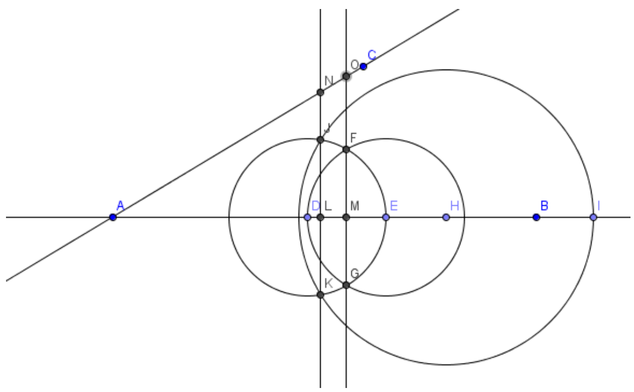


Figura 32.

Así se obtiene la construcción de dos triángulos semejantes con alturas ***LN*** y ***MO*** y bases ***AL*** y ***AM*** respectivamente (Figura 33).

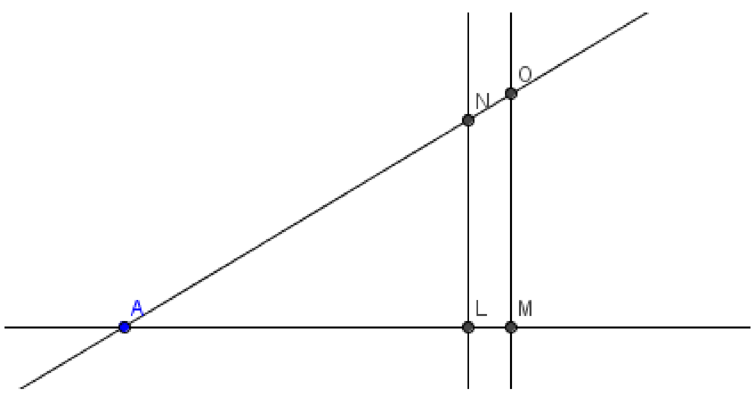


Figura 33.
El triángulo ***ANL*** es semejante al triángulo ***AOM***

Ahora se pueden establecen las razones geométricas entre las bases y las alturas de los triángulos semejantes obtenidos, dando paso al concepto de proporción como igualdad entre razones; en términos de Euclides, *"los lados son magnitudes proporcionales si* *guardan la misma razón”*[63]. Para el caso de la construcción, si existe una relación de semejanza entre los triángulos ***ANL*** y ***AOM*** (Figura 33), se deduce la proporcionalidad entre los lados de los triángulos. Por ejemplo, para el cociente entre los lados o catetos ***LN*** y ***AL*** del triángulo ***ANL***, se obtiene el mismo cociente entre los lados o catetos ***MO*** y ***AM*** del triángulo ***AOM***:

$$LN / AL \;=\; MO / AM \quad \Rightarrow \quad \Delta ANL \sim \Delta AOM$$

Cabe señalar que la idea de semejanza va más allá del concepto de ángulo, pues involucra otros dos conceptos: el de razón entre longitudes como magnitudes de una misma naturaleza y el de la igualdad entre dos razones o proporción. Por otro lado y sabiendo de la semejanza de triángulos que en términos de la congruencia de los tres ángulos homólogos a los dos triángulos que se forman, existiría un acercamiento al concepto de cuerda en el caso que la longitud del gnomon fuese igual a la longitud de su sombra (o que la altura de la pirámide fuera igual a la suma entre la longitud de su sombra y la longitud desde el pie de la base hasta su extremo en el piso) pues la relación se podría establecer en función del ángulo recto que forman los catetos (altura del gnomon, longitud de la sombra), pero como se asume que Tales concentró su atención en el ángulo con el cual apuntaban los rayos del sol sobre la altura de los objetos, podríamos pensar además en un acercamiento intuitivo a las razones tangente y cotangente del ángulo; el establecer relaciones geométricas entre las bases y las alturas de triángulos semejantes, constituye uno de los primeros acercamientos a las dichas razones trigonométricas. Si se nombra α al ángulo ***NAL***, en términos de la construcción realizada se establece, en términos modernos $\tan \alpha = LN / AL$ y $\tan \alpha = MO / AM$, dado que la razón tangente de un ángulo para triángulos rectángulos, se define como la relación geométrica entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto adyacente al ángulo en cuestión.

Si se establecen las relaciones geométricas recíprocas: ***AL / LN*** y ***AM / MO***, es decir, entre las bases y las alturas de los triángulos semejantes, de igual forma se obtiene:
$\operatorname{Ctg} \alpha = AL / LN$ y $\operatorname{Ctg} \alpha = AM / MO$, ya que la razón cotangente de un ángulo para triángulos rectángulos, se define como la relación geométrica recíproca de la tangente del ángulo, es decir, entre el cateto adyacente y el cateto opuesto al ángulo.

Con la escuela pitagórica, continúan y evolucionan los métodos de demostración que se venían cultivando con Tales. Aquí se tendrá en cuenta el tratamiento de las magnitudes conmensurables e inconmensurables por su relación con el concepto de razón.

3.2.2.1Magnitudes conmensurables

Las magnitudes conmensurables se pueden definir como aquel grupo de magnitudes de una misma naturaleza para el cual es posible encontrar una unidad de medida común, es decir, que las mida o cuantifique a cada una de ellas de manera exacta. En términos de la

[63] Euclides. *Elementos*. Libro V, Def. 6.

magnitud longitud para realizar comparaciones y establecer razones entre dos de los lados de una figura, o un lado y su diagonal, debe existir una unidad de medida que cuantifique ambas longitudes con cantidades expresadas en términos de números naturales. Para ejemplificar la idea de conmensurabilidad, se tiene el siguiente ejemplo:

Dados los catetos ***AC*** y ***BC*** de un triángulo rectángulo ***ABC***, dichos catetos son conmensurables si existe un segmento (unidad de medida) ***DE*** que pueda ser utilizado una cantidad de veces entera para medir al cateto ***AC*** y que también sirva determinada cantidad de veces entera para medir al cateto ***BC***.(Figura 34)

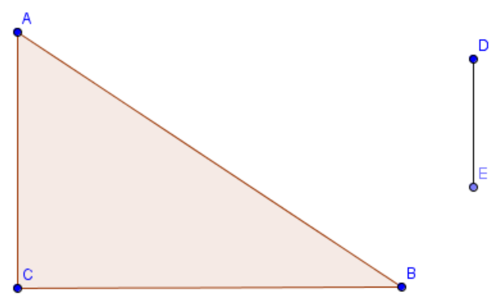


Figura 34.

En este caso, el segmento ***DE*** cabe 2 veces en el cateto ***AC*** y 3 veces en el cateto ***CB*** (Figura 35), por lo cual se pueden comparar las longitudes de los catetos del triángulo ***ABC*** por medio de las relaciones o razones ***AC / CB*** o ***CB /AC***:

AC/ CB = 2 / 3 "El cateto ***AC*** corresponde a las dos terceras partes del cateto ***CB***"

CB / AC = 3 / 2 "El cateto ***CB*** corresponde a tres mitades del cateto ***AC***"

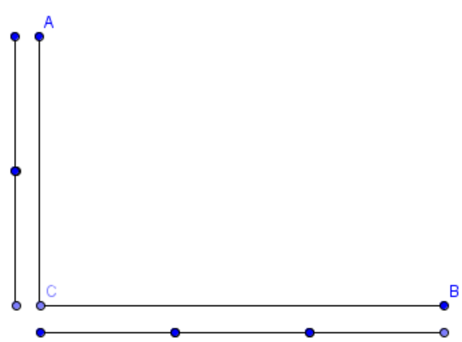


Figura 35.

Dada la existencia de la unidad de medida o segmento DE, se cumple:

$$AC = 2 \cdot DE \qquad y \qquad CB = 3 \cdot DE$$

3.2.2.2 Magnitudes inconmensurables

La idea de inconmensurabilidad nace de la imposibilidad de medir o comparar la diagonal de un cuadrado y uno de sus lados por medio de razones entre cantidades enteras (Figura 36). Los pitagóricos fueron los primeros capaces de demostrar rigurosamente y por contradicción ésta inconmensurabilidad y la de la diagonal de un pentágono regular con respecto a su lado.

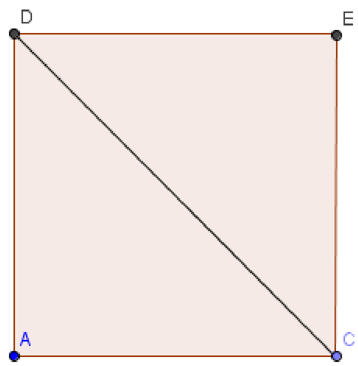


Figura 36.
La razón de la diagonal ***CD*** de cuadrado ***ADEC*** y su lado ***AC*** es inconmensurable

Si dos magnitudes de la misma naturaleza no son comparables entre sí, es porque no existe una unidad o patrón de medida común (que las mida exactamente). Así, las magnitudes que no guardan una proporción que pueda expresarse con números naturales son llamadas inconmensurables, idea que proporciona un primer acercamiento al concepto de número irracional.

De la demostración para la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado y su lado, nace el famoso teorema de Pitágoras, al cual Euclides dedica el libro I de *Los Elementos* con el fin de demostrarlo rigurosamente.

3.2.2.3 El Teorema de Pitágoras

El Teorema de Pitágoras y su recíproco aparecen en las proposiciones 47 y 48 del libro I de Euclides, respectivamente. Este teorema es fundamental para la propuesta dado que tiene una relación conceptual muy fuerte con la construcción de tablas de cuerdas, pues permite el proceso de generalización para las funciones trigonométricas en la identidad trigonométrica pitagórica conocida como: $\boldsymbol{1 = Sen^2\alpha + Cos^2\alpha}$, que posteriormente se analizará en detalle, tanto en términos de cuerdas y ángulos como en términos modernos.

Comúnmente se enuncia el Teorema de Pitágoras así: en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (Figura 37).

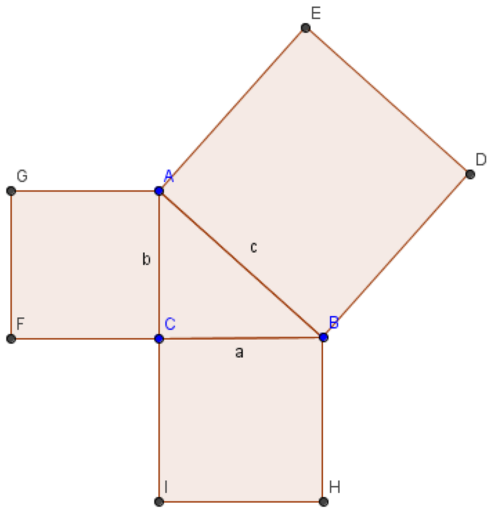


Figura 37.
$c^2 = a^2 + b^2$

Sin embargo en la proposición 47 del libro I, Euclides lo enuncia de la siguiente manera:

"Proposición 47: En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto".

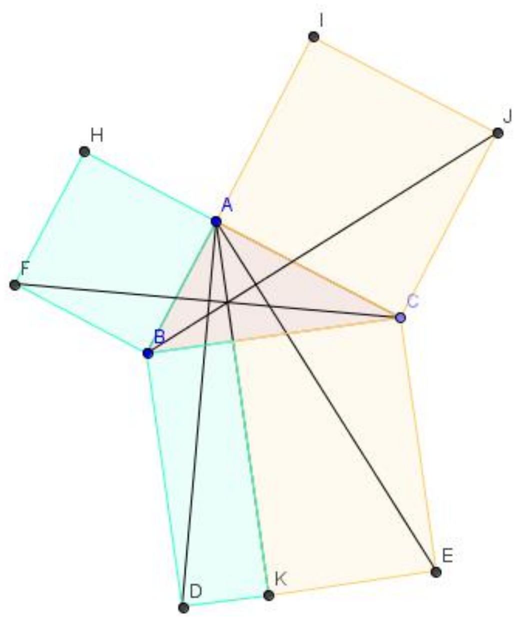


Figura 38.
Construcción geométrica del Teorema de Pitágoras

3.2.2.4 El concepto de tasa

En el mismo sentido del concepto de razón, se pueden establecer relaciones o cocientes entre magnitudes de diferente naturaleza para medir una magnitud con respecto a otra de diferente tipo, sin embargo, por lo cual la cantidad que representa esta relación es dimensional, pues no carece de unidad de medida.

Este concepto se puede ilustrar mediante un ejemplo relacionado con el método que utilizó Eratóstenes para calcular las dimensiones de la Tierra:

En el modelo circular se pueden establecer relaciones entre las longitudes de los arcos y las amplitudes de los ángulos que subtienden a dichos arcos (Figura 39).

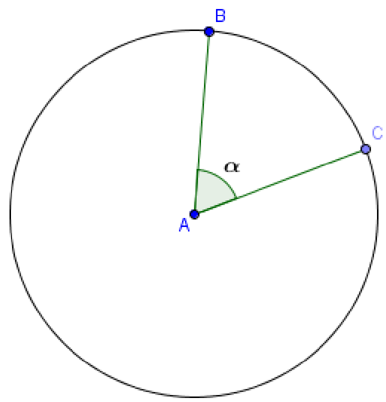


Figura 39.
El ángulo ***BAC*** de amplitud ***α*** subtiende un arco de longitud ***BC***.

En este sentido, se puede establecer el cociente: ***BC/α***, interpretada como la cantidad de longitud medida con respecto al ángulo o amplitud que la subtiende.

Para el caso de la medición de las dimensiones de la Tierra hecha por Eratóstenes, la longitud del arco, entre las ciudades de Siena y Alejandría era de ***5000*** estadios y el ángulo que subtendía a esos ***5000*** estadios de longitud era de ***7.2°.*** Esto se puede interpretar como la tasa "longitud por unidad de amplitud", que expresa una relación con magnitudes de diferente naturaleza: ***5000 e / 7.2°***

Así mismo, Eratóstenes sabía que la longitud de arco o circunferencia total de la Tierra, era la longitud relacionada o subtendida por un ángulo de 360°, lo cual se puede expresar como: $x_e / 360°$

Estableciendo la proporción, en este caso, entre dos tasas, fue posible que Eratóstenes calculara la longitud de la circunferencia de la Tierra, obteniendo una cantidad dimensional, en términos de unidades de longitud (estadios):

$$5000\,e / 7.2° = x_e / 360° \quad \Rightarrow \quad x = 5000\,e \cdot 360°/ 7.2° \quad \Rightarrow \quad x = 250000 \text{ estadios}$$

3.2.3 El concepto de cuerda

El concepto de cuerda es importante para la propuesta dado que sobre éste se efectúan las mediciones de la longitud para establecer las razones entre segmentos que dependen de un ángulo.

La cuerda se define como aquel segmento de recta cuyos extremos son los dos puntos de la curva que la contiene (Figura 34).

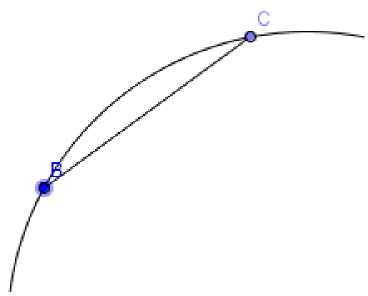


Figura 40.
La cuerda ***BC*** es el segmento cuyos extremos son los puntos ***B*** y ***C*** pertenecientes a la curva que contiene a dicha cuerda

Para la propuesta interesan particularmente las cuerdas en el círculo, como función del ángulo formado entre dos de los radios (Figura 41) y en consecuencia el tratamiento sistemático de este fenómeno para la elaboración de las tablas de cuerdas. En el mismo sentido, interesan en particular algunas de las propiedades de las cuerdas en el círculo:

1. *Las cuerdas son equidistantes del centro si y sólo si sus longitudes son iguales.*
2. *La mediatriz de una cuerda pasa por el centro del círculo.*
3. *La cuerda de mayor longitud posible para un determinado círculo es cualquiera de sus diámetros*[64]*.*

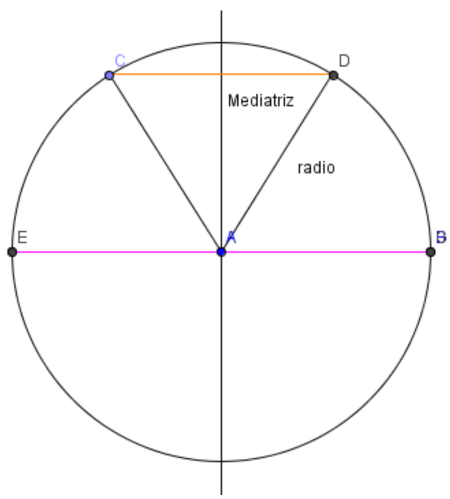


Figura 41.
La cuerda ***CD*** es subtendida por el ángulo ***CAD***. La mediatriz de dicha cuerda pasa por el centro ***A*** del círculo. La cuerda ***EB*** equivale al diámetro pues es la mayor posible al ser subtendida por el ángulo ***EAB*** cuya amplitud es ***180°***

3.3 Los conceptos de razón, ángulo y cuerda en trigonometría

Como se ha mencionado en apartados anteriores, estos tres conceptos son de gran importancia para el nacimiento de conceptos como razón, función e identidad trigonométrica.

[64] En http://es.wikipedia.org/wiki/Cuerda_(geometr%C3%ADa)

Se sabe por las referencias en *El Almagesto*, las primeras tablas trigonométricas fueron construidas por Hiparco de Nicea, con lo cual se evidencian las primeras ideas intuitivas relacionadas con los conceptos básicos de la trigonometría plana. La construcción de estas tablas, tanto por Hiparco como por Ptolomeo radica en el manejo, con fines astronómicos, del sistema sexagesimal, las razones entre magnitudes (en consecuencia la semejanza de triángulos) y el teorema de Pitágoras dentro de modelos circulares, para adaptar los conceptos de razón, ángulo y cuerda en dichos modelos, relacionarlos y desarrollarlos mediante la construcción de las tablas en las cuales posteriormente se fundamentaría cualquier estudio de carácter astronómico.

Así, para la primera tabla trigonométrica y, tomando el principio de la semejanza de triángulos mediante la razón entre segmentos ya trabajada por Tales, Hiparco tomaba los valores de la función cuerda para cada 7½° y, siglos más tarde Ptolomeo adoptó el mismo método pero con valores de la función cuerda de ½ grado en ½ grado. Este proceso se explica geométricamente a continuación:

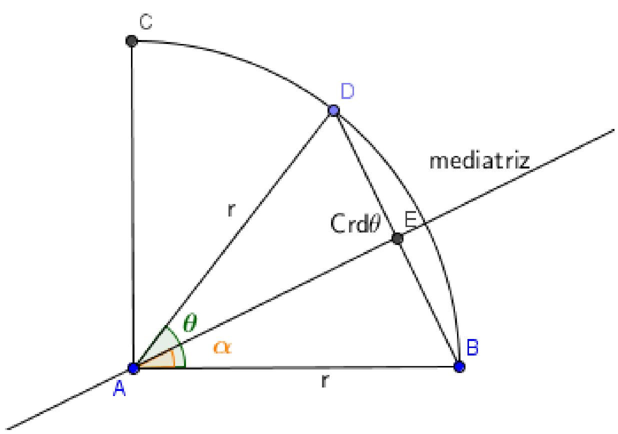


Figura 42.
Construcción geométrica de la cuerda ***BD***, o cuerda C***rd θ*** (en función del ángulo ***θ***).

La cuerda ***BD*** subtendida por el ángulo ***θ***, que se denota aquí como ***Cdr θ*** es el segmento determinado por los dos radios que limitan el ángulo ***θ***. La razón entre la cuerda y el radio está dada en función de un único ángulo ***θ***, por lo cual, en términos trigonométricos la razón en cuestión se puede expresar como: ***Crd θ = 2r sen (θ/2)***

Esta expresión es fácil de explicar si se habla en términos de la semi – cuerda ***s*** como la mitad de la cuerda del ángulo ***θ***. Como se observa en la construcción geométrica (Figura 42), la mediatriz de la cuerda ***BD***, por definición pasa por el punto medio de ***BD*** (punto ***E***), haciendo que la cuerda mencionada sea equivalente a dos semi – cuerdas congruentes: ***ED*** y ***EB***. De igual manera, como toda mediatriz de una cuerda pasa por el centro del círculo o semicírculo que la contiene, entonces biseca al ángulo ***θ*** en dos ángulos congruentes; a cada ángulo se le llamará semi – ángulo y se denotará como ***α***, de lo cual se obtiene la expresión: ***θ = 2α***. Finalmente, por ser la mediatriz perpendicular a la cuerda ***BD***, forma ángulos rectos con la cuerda en mención, razón por la cual se obtienen dos triángulos rectángulos congruentes ***EAD*** y ***EAB***.

Teniendo definida la semi – cuerda, es posible expresar la razón entre la semi - cuerda y el radio como ***s / r*** en función del semi – ángulo, obteniendo la función semi - cuerda que es equivalente a la función seno actual: ***sen α = s/r***, en tanto que la razón seno de un ángulo se define como la relación entre la longitud del cateto opuesto al ángulo y la de la hipotenusa en triángulos rectángulos.

Como ***α = θ / 2*** y ***s = ½ crd θ*** en términos del ángulo ***θ*** y su cuerda se obtiene:

$$\mathrm{Sen}\,(\theta/2) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Crd}\,(\theta / r) \;\Rightarrow\; \mathrm{Sen}\,(\theta/2) = \mathrm{crd}\,(\theta/2)r \;\Rightarrow\; \mathrm{crd}\,\theta = 2r\,\mathrm{Sen}\,(\theta/2)$$

Así, la trigonometría antigua que aparece claramente referenciada en *El Almagesto*, fue construida a partir de las bases geométricas de la función cuerda.

De igual manera, tomando la altura en función del semi – ángulo, se puede determinar el origen de la razón coseno, entendida como la relación entre la longitud del cateto adyacente al ángulo y la de la hipotenusa en un triángulo rectángulo. Es decir, en términos de la construcción geométrica (Figura 42), si se denota ***h*** como la altura de la cuerda se tiene:

$$\mathrm{Cos}\,(\theta/2) = h / r \;\Rightarrow\; h = r\,\mathrm{Cos}\,(\theta/2)$$

En términos más generales, que permitirían el paso del concepto de razón trigonométrica al de función trigonométrica, es importante señalar que efectivamente las funciones trigonométricas nacen de las razones geométricas cuando hay claridad frente al concepto de semejanza, en particular, de triángulos rectángulos. Aunque ésta idea fue mencionada anteriormente, se tiene en cuenta en este punto dado que no importa el tamaño del triángulo rectángulo, pues si se construyen triángulos rectángulos en proyección rectangular de dos rectas que se intersecan, y si se habla de una de esta como recta oblicua y de la otra como recta horizontal y, si sobre cada punto de la recta oblicua elegido arbitrariamente se trazan rectas perpendiculares, en términos del teorema de Tales se estarían trazando las proporciones que solamente dependerán de la abertura angular. Aquí no es necesario el valor de la longitud del radio, podría ser unitario o no, porque la idea de semejanza se puede llevar a una generalización para cualquier círculo, objeto geométrico que constituye un buen referente para la medición de los ángulos. Es así que se exporta la idea de semejanza de triángulos al Teorema de Pitágoras en la representación en un círculo unitario, obteniendo la identidad trigonométrica pitagórica: "*El cuadrado de la semi - cuerda más el cuadrado de su altura es igual al cuadrado del radio. Si el radio es unitario, entonces la suma de los cuadrados de la semi – cuerda y de su altura siempre es igual a 1"* (Figura 43).

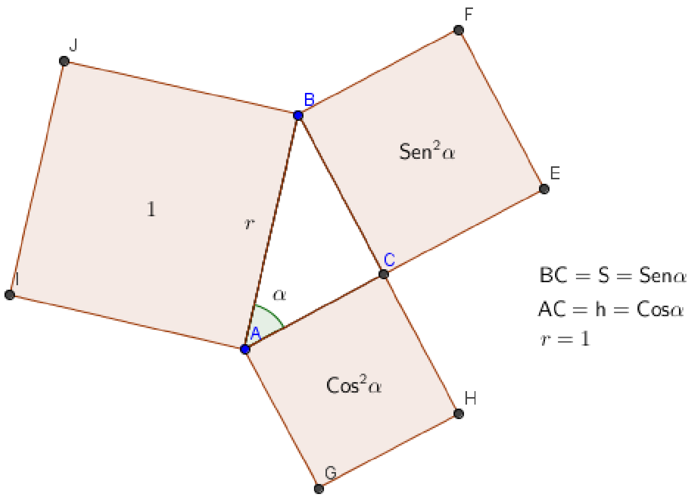


Figura 43.
Identidad pitagórica fundamental para la semi – cuerda (***S***) y su altura (***h***).

En el lenguaje trigonométrico, para el radio 1, la identidad trigonométrica quedaría: ***Sen²(θ/2) + Cos²(θ/2) = 1*** (Figura 44 *a*), o en términos del ángulo ***α = θ/2*** se puede expresar como ***Sen² α + Cos² α = 1*** (Figura 44 *b*).

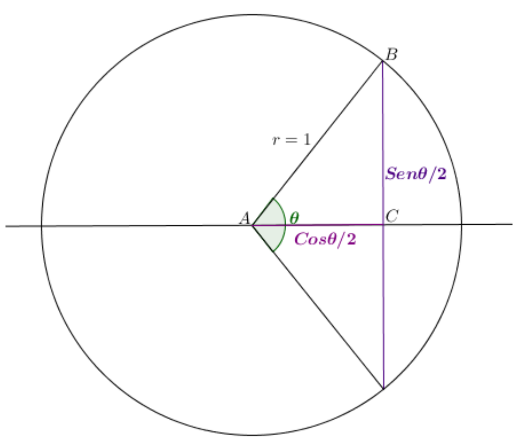


Figura 44 *a*.

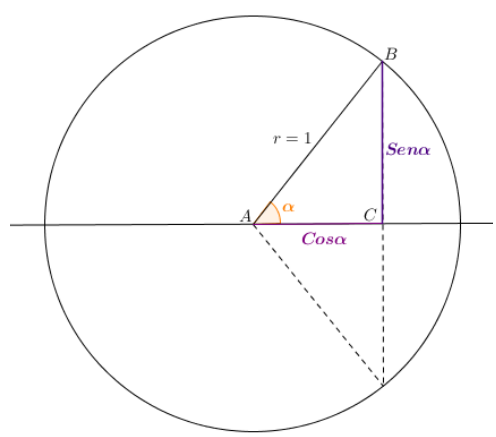


Figura 44 *b*.

III. COMPONENTE DIDÁCTICA

4. *La enseñanza del conocimiento matemático*

En términos de la teoría de situaciones didácticas[65], la enseñanza de las matemáticas requiere de conocimientos matemáticos específicos en los docentes para diseñar y/o construir situaciones de enseñanza que posibiliten los procesos de interacción entre los alumnos y una situación, que a su vez permita la apropiación de determinado conocimiento (Brousseau, 1993). Así, para que exista dicha apropiación, la situación o situaciones planteadas deben calificarse como un verdadero reto para los estudiantes, en otras palabras, deben estar enmarcadas en el método de resolución de problemas.

4.1 ¿Qué es un problema?

El método de resolución de problemas propuesto por G. Polya[66], está basado en el aprendizaje de las matemáticas por medio del descubrimiento y de la aplicación de estrategias propias o métodos heurísticos para solucionar situaciones que impliquen conocimiento matemático. El método promueve el acercamiento al conocimiento matemático mediante el desarrollo de estrategias. En este sentido y para evitar interpretaciones erróneas, es importante distinguir entre lo que es un "ejercicio" y lo que es un "problema", ya que comúnmente, en las prácticas escolares se habla de ambos términos indistintamente. Así, para resolver un ejercicio se aplica un procedimiento mecánico o rutinario por medio del cual se obtiene una respuesta, mientras que para resolver un problema, hay que primero entender el problema o situación, reflexionar sobre éste y seguir una serie de pasos, por ejemplo de ensayo y error, luego configurar una estrategia, comprobar que ésta funciona y así dar una respuesta o solución. La creación de una estrategia de solución propia es lo que distingue al ejercicio del problema, sin embargo, esta distinción depende de la persona que se enfrenta a la situación; lo que puede ser problema para una persona, no necesariamente lo será para otra. Cabe señalar que el método de resolución de problemas no excluye la actividad de hacer ejercicios, dado que los procesos mecánicos y rutinarios son validos para los procesos de memoria, de aprendizaje ciertos conceptos, propiedades y procedimientos que eventualmente pueden llegar a ser útiles en el momento de definir estrategias de solución a determinado problema.

4.2 La teoría de las situaciones didácticas

Según Brousseau (1993), una situación didáctica se puede definir como el modelo de interacción de un sujeto con un medio, que determina un conocimiento que le servirá al sujeto para alcanzar un estado favorable en el medio con el cual interactúa. En consecuencia, una situación didáctica está formada por todas las interacciones que se

[65] Teoría propuesta por Guy Brousseau hacia finales de los años 60´s, momento en el que se gestó la didáctica de las matemáticas en Francia, bajo la necesidad de abordar científicamente los aspectos vinculados a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
[66] En http://ficus.pntic.mec.es/fheb0005/Hojas_varias/Material_de_apoyo/Estrategias%20de%20Polya.pdf

dan entre los alumnos, el entorno y el profesor, que tienen como objetivo general lograr que los alumnos aprendan. Ésta concepción de situación didáctica está enmarcada desde un punto de vista piagetano del aprendizaje; en términos de Brousseau (1993):

"el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje"

Así mismo, la situación didáctica requiere de una serie de conocimientos previos que posibilitarán al estudiante los procesos de construcción y adquisición de un nuevo conocimiento que le permita alcanzar los estados favorables ya mencionados, en otras palabras, la configuración de estrategias de solución a un problema que finalmente se puedan validar e institucionalizar. Uno de los objetivos de la situación didáctica es trascender o evolucionar a ser situación a-didáctica, es decir, lograr que el estudiante asuma el problema como propio y que el profesor se despoje del problema guiando el aprendizaje a partir de preguntas orientadoras, sin abandonar el objetivo de lograr el aprendizaje.

La teoría de situaciones didácticas caracteriza cuatro tipos de situaciones: acción, formulación, validación e institucionalización, cada cual con un objetivo de enseñanza especifico.

4.2.1 Situaciones de acción

Son las relaciones establecidas entre el alumno y el medio, donde el alumno ejecuta los pasos de la resolución de problemas de manera individual. Estas situaciones requieren de entender el problema, de la aplicación de los conocimientos previos del estudiante en una estrategia de solución propia y de reflexionar frente al potencial de dicha estrategia para resolver el problema. Para el caso particular de esta propuesta, las situaciones de acción son todas aquellas actividades en donde el estudiante debe hacer un trabajo individual, como establecer una unidad de medida para la longitud, efectuar mediciones de longitud y amplitud, y aplicar sus esquemas culturales y conocimientos previos relacionados con los conceptos de razón, proporción, semejanza, ángulo y cuerda para resolver una situación.

4.2.2 Situaciones de formulación

Son situaciones en las cuales el alumno comparte, explica y comunica sus acciones a los demás alumnos, buscando un lenguaje adecuado para que los demás entiendan dichas acciones. Las situaciones de formulación en la propuesta corresponden a aquellas actividades grupales (tres o cuatro estudiantes) donde explican, comparan y sistematizan los resultados obtenidos en las mediciones realizadas, buscan, encuentran y corrigen errores en las estrategias tanto propias como de sus compañeros de grupo. En este punto, los estudiantes reproducen las acciones, abordando el problema en forma colectiva.

4.2.3 Situaciones de validación

Son situaciones en las que los alumnos deben reunirse en grupos y establecer acuerdos frente a las estrategias de solución al problema que consideren como las más adecuadas. En el caso de ésta propuesta, las situaciones de validación están enmarcadas en las actividades de socialización de los grupos, donde cada grupo de estudiantes comunica las estrategias, pero explica cuidadosamente la estrategia usada al abordar el problema en forma colectiva. El objetivo final es precisamente validar aquellas estrategias adecuadas, que solucionen el problema y que resulten ser más comprensibles y sencillas en el momento de solucionar algún problema futuro relacionado con el mismo conocimiento.

4.2.4 Situaciones de institucionalización

Son las situaciones en las cuales se hace un tratamiento más formal del conocimiento adquirido en las demás situaciones. En esta etapa el rol del profesor juega un papel importante, en el sentido que es él o ella quien retoma la validez de las estrategias y da a conocer la estrategia que mejor describe al conocimiento adquirido. Las situaciones de institucionalización son como situaciones de enseñanza tradicionales, pero la gran diferencia es que el profesor verifica, formaliza y pone en común un conocimiento que tiene sentido y es significativo para los estudiantes, en tanto que ellos ya han interactuado con este de manera informal y espontánea. La institucionalización debe establecer las relaciones entre las producciones de los alumnos y el saber cultural y no debe desvincularse de las actividades hechas en las sesiones de trabajo de la propuesta didáctica; debe sistematizar, ordenar y retomar los hallazgos y producciones de los estudiantes a fin de comunicar y formalizar el conocimiento[67].

Para el caso de la propuesta, las situaciones de institucionalización se dan en las actividades que formalizan los conceptos de ángulo, razón y cuerda en la construcción de modelos geométricos, expresiones geométricas y el paso de la geometría de dichas construcciones y expresiones al lenguaje trigonométrico y a la generalización de los conceptos de razón y función trigonométrica.

[67] En este caso, el saber cultural refiere a los aspectos históricos y epistemológicos que originaron los conceptos de razón y función trigonométrica y su potencial como herramienta didáctica para el aprendizaje de dichos conceptos. La elaboración de las tablas de cuerdas constituyen un hecho histórico importante para la formalización y extrapolación de las construcciones geométricas en el círculo en el sentido trigonométrico.

IV. PROPUESTA DIDÁCTICA

5. Secuencia didáctica

Las actividades de la secuencia didáctica están enmarcadas en la teoría de situaciones didácticas y en la metodología de resolución de problemas, acordes con el uso y adquisición del conocimiento matemático en diferentes contextos. Para el caso particular de esta propuesta, las actividades requieren en su diseño y realización de un contexto astronómico mediante el cual el desarrollo de los conceptos de ángulo, razón y cuerda funcionan como soluciones esperadas para la construcción, más allá de las tablas de cuerdas, de los conceptos de razón trigonométrica y función trigonométrica.

La secuencia consta de seis actividades en total: una actividad de introducción y cinco actividades, estructuradas de la siguiente manera:

- ★ Nombre de la actividad
- ★ Tipo de situación didáctica involucrada
- ★ Objetivo general
- ★ Objetivos específicos
- ★ Tiempo de ejecución
- ★ Conceptos a trabajar
- ★ Conocimientos previos
- ★ Materiales
- ★ Descripción de la actividad
- ★ Sugerencias

5.1 Actividad N. 1 Introducción: Cine – foro "Ágora"[68]

Tipo de situación didáctica: Introducción y contextualización

Objetivo general: Contextualizar a los estudiantes frente a las problemáticas científicas de la sociedad alejandrina, en lo relacionado al conflicto entre las visiones geocéntrica y heliocéntrica del universo y sus consecuencias para el desarrollo posterior en matemáticas y astronomía.

Objetivos específicos:

- ★ Reflexionar sobre la importancia de la experimentación, la observación y la creación de teorías para el avance de la ciencia.
- ★ Establecer características y diferencias entre los modelos geocéntrico y heliocéntrico

[68] Ágora es una película española dirigida por Alejandro Amenábar, estrenada en España a finales del año 2009. Narra la historia de la filosofa neoplatónica, matemática y astrónoma Hipatia, hija de Herón de Alejandría.

- ★ Reconocer la importancia de los aportes de la matemática (*Las Secciones Cónicas* de Apolonio, *Los Elementos* de Euclides, *El Almagesto* de Ptolomeo) de la astronomía y de la filosofía para el avance de la ciencia.

Tiempo de ejecución: 2 sesiones (3 horas).

Conceptos: Errante, estrella, movimiento, trayectoria, medición, experimento, círculo, elipse, geocentrismo, heliocentrismo.

Conocimientos previos: Ubicación de Alejandría, ciencia, neoplatonismo, religión, creencia, filosofía.

Materiales: Video beam, película Ágora, presentación en ppt. (*Anexo 1*).

Descripción de la actividad: Los estudiantes verán la película Ágora. Posteriormente se realizará un foro, apoyado en una presentación de ppt., en el cual se plantean algunos interrogantes relacionados con el contexto y la problemática en general que se presenta en la película y que generarán la discusión. Durante el foro, los estudiantes participarán respondiendo a las preguntas planteadas y a otras que puedan surgir sobre la marcha de la discusión, que en su mayoría están relacionadas con los modelos del universo, los experimentos para probar el movimiento de la Tierra, las problemáticas científicas de la época relacionadas con matemáticas y astronomía y los rasgos característicos culturales de la civilización griega del periodo alejandrino (*Ver Anexo 1*).

Sugerencias: Es recomendable, más no necesario, que los estudiantes tengan un conocimiento previo sobre la problemática religiosa y social de la época en la cual se desarrolla la película, de tal forma que no se pierda el objetivo de contextualizar al estudiante. Se sugiere hacer énfasis en el carácter científico de la película, más allá de las situaciones sociales, políticas, sentimentales y religiosas que aparecen en el transcurso de ésta.

5.2 Actividad N. 2: Las pirámides de Giza… ¿Cómo saber su altura?

Tipo de situación didáctica: Acción y formulación

Objetivo general: Potenciar el concepto de razón entre longitudes por medio de la medición de los catetos de triángulos rectángulos semejantes, utilizando un contexto histórico desde el cálculo de las alturas de las pirámides de Egipto con los métodos utilizados por Tales de Mileto.

Objetivos específicos:

- ★ Realizar una construcción geométrica con regla y compás como representación de las alturas y las longitudes de las sombras de las pirámides, usando rectas perpendiculares a una recta dada y sus intersecciones con una recta oblicua.
- ★ Reconocer las características y los elementos que componen los triángulos rectángulos semejantes con respecto a la congruencia de los ángulos y a las relaciones de proporcionalidad entre sus lados.

- ★ Construir una unidad de medida para medir la longitud de los lados de los triángulos rectángulos y establecer razones y proporciones entre éstos.

Conceptos a trabajar: Triángulo rectángulo, semejanza, unidad de medida, medición, razón, proporción.

Conocimientos previos: Base, altura, hipotenusa, rectas intersecantes, paralelismo, perpendicularidad, circunferencia, ángulo o abertura, operaciones básicas entre números racionales.

Materiales: Video beam, presentación en ppt. (*Anexo 2*), lectura (*Anexo 2.1*), guía de trabajo individual (*Anexo 2.2*), hojas blancas tamaño oficio, tiras de papel blanco, lápiz, regla o varilla sin escala, compás de precisión, ½ pliego de cartulina.

Tiempo estimado de ejecución: Tres sesiones de clase (4 ½ horas).

Descripción de la actividad: La actividad se divide en 5 partes. De la parte 1 a la parte 4 se desarrollarán situaciones de acción y trabajo dirigido, y la parte 5 constituye la situación de formulación.

Parte 1: Por medio de una breve presentación en ppt. (*Ver Anexo 2*), se hará una exposición a los estudiantes sobre la historia de Tales de Mileto, tomando como pretexto la predicción de eclipses, y enfatizando en la medición de las alturas de las pirámides de Giza en Egipto a partir de la medición de las sombras proyectadas en el piso por acción del Sol. Posteriormente se entregará a cada estudiante una lectura (*Anexo 2.1)* que refuerza lo visto en la presentación.

Parte 2: Luego de realizar la lectura, cada estudiante, por medio de trabajo dirigido, hará la construcción de rectas perpendiculares a una recta dada y una recta oblicua a la recta dada, obteniendo triángulos semejantes, en una hoja blanca. Terminada la construcción, cada estudiante debe escribir por qué la construcción está bien hecha, identificando los elementos que forman el triangulo rectángulo, las propiedades o condiciones que se requieren para que los triángulos rectángulos sean semejantes y el Teorema de Tales, ya enunciado en la presentación hecha para la parte 1.

Parte 3: Posteriormente, en grupos de tres estudiantes, reproducirán la construcción de triángulos rectángulos semejantes que se hizo en la parte anterior, pero ahora en ½ pliego de cartulina, luego se entregará a cada estudiante una tira de papel blanco. Se indicará a los estudiantes que deben establecer una unidad de medida arbitraria inventada por cada uno, que permita medir la longitud de los catetos de los triángulos dibujados en la cartulina (representaciones de las alturas y las sombras). En la hoja blanca donde se realizó individualmente la construcción de triángulos rectángulos semejantes, cada estudiante debe escribir bajo cuales criterios establecieron su unidad de medida.

Parte 4: Cada estudiante, de manera individual, efectuará mediciones en los catetos de los triángulos de la construcción hecha en grupo utilizando su unidad de medida establecida. Con los datos obtenidos debe completar la guía de trabajo (*Ver Anexo 2.2, tabla 1*) y teniendo los datos organizados, cada estudiante establecerá las razones entre las longitudes de las sombras (bases) de los triángulos y las alturas, entre las alturas y entre las sombras, y luego efectuando los cocientes (en esta parte el estudiante debe aplicar el algoritmo de la división), y con los datos obtenidos para las razones y sus respectivos cocientes, deben completar la segunda tabla (*tabla 2*). Finalmente deben establecer las proporciones obtenidas, en términos de los catetos a_1, a_2, b_1 y b_2 de los triángulos semejantes.

Parte 5: En los grupos, cada estudiante explicará a sus compañeros del grupo lo que hizo para determinar la unidad de medida y los procedimientos que realizó para medir los catetos de los dos triángulos y establecer las proporciones entre estos. Luego deben comparar los resultados obtenidos en las 2 tablas (*Anexo 2.2*). Finalizando esta parte, en grupos deben responder las preguntas ¿qué diferencias encuentras?, ¿qué similitudes encuentras?

Sugerencias: Es importante revisar con antelación los conocimientos previos de los estudiantes, especialmente para el caso del manejo de operaciones básicas entre fraccionarios y/o números decimales. Si no hay un manejo especialmente del algoritmo de la división por parte de los estudiantes, o si en este sentido el grupo es heterogéneo (unos lo manejan, otros no), se sugiere hacer una explicación del algoritmo antes de realizar la actividad.

5.3 Actividad N.3: ¿Cuál será la altura del poste? Midiendo sombras y estimando alturas… así como Tales

Tipo de situación didáctica: Formulación y validación

Objetivo general: Calcular el valor de la altura de un poste de luz utilizando relaciones de proporcionalidad entre los catetos de triángulos rectángulos semejantes.

Objetivos específicos:

- ★ Realizar un experimento en un día soleado, trazando simultáneamente las sombras de una varilla o gnomon y las sombras de un poste en diferentes momentos.
- ★ Realizar procesos de medición de longitudes utilizando un patrón de medida definido.
- ★ Comunicar y comparar las estrategias de solución al problema de hallar la altura del poste, sabiendo que la altura permanece invariante a pesar del cambio en las longitudes de las sombras y del ángulo con el cual éstas se proyectan en el piso.

Tiempo de ejecución: 2 sesiones de clase (3 horas)

Conceptos a trabajar: Medición, razón, proporción.

Conocimientos previos: Ecuaciones de primer grado con una incógnita, ángulo, puntos cardinales, operaciones básicas entre números racionales, razón, proporción, semejanza, sistema métrico decimal, mediana y promedio.

Materiales: Palos de balso redondos de 90 cm de largo, plastilina, nivel, soporte universal, pliegos de papel *"kraft",* cinta adhesiva industrial, cinta de enmascarar, varilla o regla metálica sin escala, luz solar, marcadores de distintos colores, tiza, reloj, poste de luz, brújula, cuaderno para anotaciones, cinta decorativa de papel color blanco, tiras de papel milimetrado de longitud 30 cm, y guías de trabajo grupal (*Anexo 3*).

Descripción de la actividad: La actividad está dividida en tres partes. La primera parte es de experimentación y toma de datos, la segunda parte es de medición y de creación de estrategias de solución al problema; estas dos partes se enmarcan dentro de las situaciones de formulación por su carácter grupal y de trabajo en equipo. En la tercera parte se hará una socialización del trabajo en grupos y se sistematizarán las estrategias y resultados obtenidos en la medición, en la estrategia que soluciona el problema y en las respuestas obtenidas; por eso su carácter es de validación.

Parte 1: La actividad se realizará en grupos de tres estudiantes, se harán dos montajes para hacer el experimento y tomar las longitudes de las sombras del gnomon y del poste. El montaje consiste en pegar con cinta adhesiva industrial un pliego de papel *"kraft"* en un lugar del piso del patio del colegio, cercano a un poste de luz pero haciendo lo posible para que la sombra del poste no se proyecte en el papel (por lo menos durante la siguiente media hora); para esto es importante que los mismos estudiantes hagan predicciones acerca del fenómeno de las sombras y del movimiento del sol desde un punto de vista geocéntrico. Luego se debe colocar sobre el papel un soporte universal y a éste fijar un palo de balso (que servirá como gnomon) con plastilina teniendo en cuenta que quede fijo y forme un ángulo recto con el piso, para esto se utiliza un nivel. Adicionalmente se colocará sobre el piso una brújula, de tal forma que se pueda calcular la orientación de la sombra y su variación a medida que pasa el tiempo. Teniendo preparado el montaje y previendo que exista sombra del gnomon y del poste, se procede a representar las longitudes de la sombra del gnomon en el papel *"kraft"* con marcadores y de la sombra del poste en el piso con tizas. Para esto, se le asigna una hora (cada 5 minutos) y un color específico a cada grupo, con el fin de marcar la longitud de la sombra del gnomon en el papel *"kraft"* sin confundir el dato con el de otros grupos. Igualmente, cada grupo debe marcar la longitud de la sombra del poste con tiza de diferente color y tomar la medida con una tira de cinta de enmascarar en la cual marcarán el color de su grupo. En el cuaderno se realizaran las anotaciones con respecto al color, la hora exacta y la orientación de la sombra con respecto a la brújula.

Figura 45.
Montaje realizado por un grupo de estudiantes.

Parte 2: Cada grupo, teniendo la tira de cinta de enmascarar que representa la sombra del poste, una tira de cinta decorativa blanca que representa la sombra del gnomon y un palo de balso que representa la altura del gnomon, deberá tomar las longitudes de cada uno de los tres objetos utilizando tiras de papel milimetrado de 30 cm de largo. La unidad de medida que se utilizará es el centímetro y las mediciones se harán con tiras de papel milimetrado. Teniendo los datos correspondientes a las tres medidas de longitud, cada grupo deberá crear una estrategia para obtener el dato de la altura del poste, anterior a esto, es importante que estimen visualmente cuál sería esa longitud. Los datos de medición, de estimación, la estrategia y la respuesta deben ser escritos en la guía de trabajo (*ver Anexo 3*).

Parte 3: Se socializarán los resultados de la observación de acuerdo a cómo es la variación de las sombras con respecto al tiempo y las respuestas obtenidas. Para esto se organizaran los datos en el tablero (*Anexo 3.1*) comparando los datos, haciendo énfasis en la variación de las longitudes de las sombras con respecto al tiempo y en la similitud de valores encontrados para la altura del poste. Cada grupo mostrará a los demás su estrategia de solución al problema y se comprobarán las predicciones y estimaciones hechas antes de la práctica. Finalmente los estudiantes pondrán a consideración el mejor método o estrategia de solución a partir de criterios que se elaborarán producto de la discusión y del común acuerdo. Se les sugerirá tomar los datos obtenidos de la sombra del poste y dejar un solo dato, correspondiente a la mediana o al promedio.

Sugerencias: Antes de realizar el montaje es importante que los estudiantes verifiquen si el poste está bien nivelado con respecto al piso, si no es así, es esencial que reflexionen sobre las implicaciones que puede tener la medida de un ángulo en el error o incertidumbre al momento de obtener una respuesta al problema. Para esto es bueno hacerle ver al estudiante que existen métodos estadísticos que permiten cuantificar el margen de error. Si los estudiantes nunca han utilizado una brújula o no saben de su funcionamiento, es apropiado considerar con antelación alguna actividad práctica que permita aprender sobre el manejo adecuado de la brújula. Así mismo, se puede enfatizar acerca del funcionamiento de los relojes de sol indicando sobre su utilidad solamente en el día y planteando preguntas relacionadas con la medición del tiempo en las noches.

5.4 Actividad N. 4: ¿A qué altura esta la estrella?

Tipo de situación didáctica: Acción y formulación

Objetivo general: Establecer la relación geométrica entre las longitudes de la altura y la base de un triángulo rectángulo en función de un ángulo y exportar dicha relación al concepto de razón trigonométrica.

Objetivos específicos:

- ★ Hacer uso adecuado del medidor de ángulos y del nonio angular para obtener medidas angulares en términos de grados y minutos de arco (sistema sexagesimal).
- ★ Tomar la medida en términos de pasos de la base del triángulo rectángulo que se forma entre el observador (a la altura de los ojos), la distancia del observador a la pared y la distancia del observador a la estrella.
- ★ Establecer la relación geométrica adecuada para hallar la altura de la estrella y hallar dicha altura utilizando la relación tangente del ángulo
- ★ Realizar conversiones entre las medidas de longitud, de pasos a cm ó metros.
- ★ Comprobar experimentalmente la altura obtenida.

Tiempo de ejecución: 2 sesiones de clase (3 horas)

Conceptos a trabajar: Ángulo, razón trigonométrica, función trigonométrica

Conocimientos previos: Sistema sexagesimal, medición de ángulos con grados sexagesimales, razón geométrica, conversión de medidas de longitud, sistema métrico decimal.

Materiales: Trípode con niveles, medidor de ángulos con nonio angular y plomada, metro, cinta adhesiva, estrellas en papel brillante de distintos colores, hojas blancas tamaño oficio, lectura (*Anexo 4*), guía de trabajo *(Anexo 4.1)*

Descripción de la actividad: La actividad se desarrollará en 2 partes. La parte 1 es de trabajo individual y la parte 2 es grupal.

Parte 1: Corresponde a una situación de acción, para la cual se dará a cada estudiante una hoja blanca tamaño oficio, una lectura (*ver Anexo 4*) y una guía de trabajo (*ver anexo 4.1*) en la cual aparece la situación problema a resolver, las indicaciones de los datos que se deben tomar para solucionar el problema y una tabla para organizar los datos. Se sugiere hacer un dibujo de la situación y escribir la estrategia de solución que utilizaría para hallar la altura de la estrella

Parte 2: Es de trabajo grupal y de formulación en la cual los estudiantes formarán grupos de tres personas de acuerdo con el color de su estrella. En esta parte comunicarán y explicarán sus estrategias para hacer el dibujo y para solucionar el problema, compararán sus datos, procedimientos y resultados. Luego deben acordar una representación gráfica de la situación, la estrategia y los procedimientos utilizados para obtener la respuesta, para posteriormente socializar su trabajo con los demás grupos. La actividad terminará comprobando las medidas de las alturas de cada estrella, tomando dichas medidas de manera experimental con un metro.

Sugerencias: Antes de tomar las medidas angulares es importante hacer una explicación de cómo funciona el medidor de ángulos para tomar medidas de amplitud en el orden de los grados y del funcionamiento del nonio o Vernier angular para tomar medidas en el orden de los minutos. Se debe enfatizar en la construcción adecuada de un modelo gráfico que represente el problema y para la situación de formulación, en un lenguaje adecuado para representar las magnitudes a utilizar. Es importante que los estudiantes cuiden su integridad física, dado que deberán subir al segundo o tercer piso del bloque para comprobar la medida obtenida, efectuando la medición directa con el metro de la altura de la estrella.

5.5 Actividad N. 5: Construcción de nuestras primeras tablas trigonométricas… Medidas y relaciones entre cuerdas, radios y alturas.

Tipo de situación didáctica: Trabajo dirigido, formulación, validación e institucionalización

Objetivo general: Promover la construcción de los conceptos de razón y función trigonométrica a partir del reconocimiento de la relación de dependencia del valor de las cuerdas y las alturas, en función de la variación del ángulo en una circunferencia.

Objetivos específicos:

- ★ Reconocer los conceptos de cuerda, semi – cuerda, radio, ángulo, semi – ángulo, razón y mediatriz en la construcción geométrica de las cuerdas por cada 15 grados de amplitud en un modelo circular.
- ★ Efectuar procesos de medición para las alturas, las cuerdas y los ángulos y establecer las razones entre las semi – cuerdas y el radio, las alturas y el radio y, las semi – cuerdas y las alturas con respecto al semi – ángulo que varía de 15 en 15 grados.
- ★ Elaborar tres tablas trigonométricas para cada una de las tres relaciones establecidas, que relacionen la medida del ángulo y del semi – ángulo con las razones obtenidas.

★ Extrapolar las expresiones geométricas en términos de expresiones trigonométricas para el seno, el coseno y la tangente del semi – ángulo

Tiempo de ejecución: 4 sesiones de clase (6 horas)

Conceptos a trabajar: Cuerda, altura, radio, mediatriz, ángulo, semi – cuerda, semi - ángulo, razones y funciones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Conocimientos previos: Razón geométrica, relación trigonométrica, circunferencia, cuerda y sus propiedades, radio, diámetro, ángulo, mediatriz de un segmento, división por mitades, operaciones básicas entre números racionales.

Materiales: Cinco circunferencias de diferentes tamaños dibujadas en papel acetato. (Radios de 35, 30, 28, 25 y 22 cm), marcadores *"sharpie"* color negro, rojo y azul, reglas o varillas sin escala, transportadores, tiras de papel milimetrado de 30 cm cada una, calculadoras científicas, guía de trabajo (*Anexo 5*).

Descripción de la actividad: La actividad está dividida en cinco partes. La primera parte es trabajo dirigido en grupos. De la segunda a la cuarta parte es trabajo grupal formulando las relaciones entre la cuerda y el radio, la semi – cuerda y el radio, la altura y el radio, y la semi – cuerda y la altura. La quinta parte corresponde a la formulación de las relaciones anteriormente establecidas pero en términos trigonométricos y validando las expresiones obtenidas para luego institucionalizar el concepto de función trigonométrica.

Parte 1: Cada grupo recibirá una circunferencia en acetato, tres marcadores *"sharpie"* de colores distintos, una regla o varilla sin escala, un transportador, tres tiras de papel milimetrado y una guía de trabajo (Ver Anexo 5). Los estudiantes deben trazar el diámetro y dos radios sobre la circunferencia utilizando el marcador negro, el transportador y la regla, de manera que el primer radio quede trazado a los 15° del diámetro y el segundo a los -15° del mismo (150°). Con el marcador rojo deben trazar la cuerda que subtiende al ángulo formado por los 2 radios trazados con anterioridad. Deben hacer el mismo procedimiento trazando los radios con color negro y las cuerdas con color rojo para los pares de ángulos de 30° y -30° (120°), 45° y -45° (90°), 60° y -60° (60°), 75° y -75°(30°).

Parte 2: Cada grupo debe llenar la tabla 1 que aparece en la guía de trabajo (*Anexo 5*), razón por la cual deben medir los ángulos, las cuerdas, los radios, y hallar los valores para las semi – cuerdas (dividiendo los valores de las cuerdas obtenidas por la mitad) y los valores para los semi – ángulos (dividiendo los valores de las amplitudes angulares obtenidas por la mitad).
Parte 3: Ésta parte corresponde a la formulación de la razón cuerda/radio con respecto al ángulo y el cálculo (con ayuda de la calculadora) de dicha razón, obteniendo los valores para llenar la tabla 2 de la misma guía.

Parte 4: Ésta parte de la actividad corresponde a la formulación y cálculo de las razones semi – cuerda / radio con respecto al semi - ángulo, altura / radio con respecto al semi - ángulo y semi – cuerda / altura con respecto al semi - ángulo, llenando los datos correspondientes a la tabla 3 de la guía.

Parte 5. La quinta parte de la actividad consiste en exportar las relaciones geométricas con respecto al ángulo y al semi – ángulo, trabajadas en las partes anteriores, al lenguaje trigonométrico en términos de razón trigonométrica y función trigonométrica. Esta parte corresponde a las situaciones de institucionalización para las relaciones seno, coseno y tangente del ángulo medio. Posteriormente se unirán las cinco circunferencias con un gancho mariposa de tal manera que coincidan sus centros y sus diámetros, para explicar que los ángulos son congruentes, independientemente del tamaño de la circunferencia y que por lo tanto las cuerdas, semi - cuerdas, radios y alturas son proporcionales. Adicional a esto se organizarán y socializarán los datos obtenidos escritos en las tablas 1, 2 y 3 haciendo énfasis en la igualdad de razones o proporcionalidad indistintamente del tamaño de la circunferencias, explicando que esto depende única y exclusivamente del ángulo o del semi - ángulo, por lo cual las relaciones seno, coseno y tangente tienen carácter de funciones trigonométricas. Finalmente, con ayuda de los estudiantes, se escribirán las expresiones geométricas obtenidas en función del angulo y del semi – ángulo, en términos del seno, el coseno y la tangente.

Sugerencias: Los estudiantes deben ser muy cuidadosos en el momento de trazar los radios, las semi – cuerdas y las alturas y al llenar las tres tablas propuestas en la guía. Esto se hace dada la importancia de unir las circunferencias de distintos tamaños para hacer más significativos los conceptos de proporcionalidad, semejanza y función que depende de un ángulo y comparar los resultados en las tablas. Por cuestiones de tiempo al realizar la actividad se propone el trazado de cinco cuerdas y el cálculo de las razones haciendo uso de la calculadora, lo cual no es camisa de fuerza, pues se pueden trazar cuerdas por ejemplo cada 3 o 5 grados elaborando tablas con mayor cantidad de valores, sin embargo es necesario utilizar circunferencias muy grandes en tamaño para garantizar medidas angulares muy exactas y en consecuencia, exactitud en las medidas de longitud para las cuerdas y sus alturas. Recordemos que Hiparco tomó ángulos de 7.5 en 7.5 grados (la mitad del ángulo que se toma para esta actividad), por lo cual tuvo que haber trazado 12 cuerdas y calculado las razones con los las longitudes de estas cuerdas, y que Ptolomeo fue más cuidadoso, pues tomo los valores de las cuerdas para ángulos de ½ en ½ grado, es decir, probablemente uso circunferencias más grandes que las usadas por Hiparco o las usadas en esta actividad.

5.6 Actividad N. 6: Encuentre a Pitágoras trigonométrico

Tipo de situación didáctica: Trabajo dirigido, validación e institucionalización.

Objetivo general: Establecer una generalización para las funciones seno y coseno a partir de la construcción de la identidad trigonométrica pitagórica en el círculo unitario.

Objetivos específicos:

- ★ Interpretar las funciones cuerda y altura en términos geométricos y trigonométricos cuando se asigna el valor de 1 al radio de la circunferencia.
- ★ Formular y generalizar el teorema de Pitágoras en términos de las funciones cuerda y altura, en lenguaje trigonométrico seno y coseno.

Tiempo de ejecución: 2 sesiones (3 horas)

Conceptos a trabajar: Función trigonométrica identidad trigonométrica pitagórica.
Conocimientos previos: Razón, semejanza de triángulos rectángulos, razón trigonométrica, Teorema de Pitágoras.

Materiales: ½ Pliego de cartulina, compás, regla sin escala, lápiz, marcadores de tres colores distintos, tiras de papel blanco, papel iris de tres colores distintos, tijeras y pegante.

Descripción de la actividad: Cada grupo de tres estudiantes dibujará un circulo en el ½ pliego de cartulina a partir de la longitud de una tira de papel que corresponderá a la unidad (el radio de la circunferencia). A partir de la circunferencia, la semicuerda, el radio y la altura de la cuerda se hará la construcción del Teorema de Pitágoras, en términos de la semi-cuerda y la altura y luego en su versión trigonométrica. Cada lado del triángulo rectángulo en el círculo unitario se trazará de un color distinto: verde para la semi-cuerda, morado para la altura y negro para el radio. Se hará la construcción del cuadrado de cada lado en términos geométricos y trigonométricos utilizando cuadrados de papel iris de tres colores distintos. Luego se comprobará el teorema de Pitágoras trigonométrico recortando los cuadrados que corresponden a los catetos (semi-cuerda y altura) y haciendo que sus áreas recubran el cuadrado de la hipotenusa (radio). Finalmente, se hará un cierre de la actividad mostrando los trabajos de cada grupo y haciendo énfasis en la comprensión de la expresión simbólica para la identidad trigonométrica Pitagórica y su relación con las funciones trigonométricas seno y coseno.

Sugerencias: Se sugiere que las tiras de papel correspondientes al radio unitario sean de distintos tamaños, haciendo énfasis en la actividad N. 2 donde cada estudiante creó su propia unidad de medida, con el fin de generalizar la identidad para cualquier círculo de radio arbitrario. Igualmente se propone como sesión extra, realizar la medición de los catetos (semi-cuerda y altura) en términos del radio unitario y comprobar con los datos obtenidos el teorema de Pitágoras en términos trigonométricos.

6. Análisis descriptivo de la implementación de la propuesta

En este capítulo se presentan las consideraciones o aspectos más relevantes frente al análisis realizado en el momento de implementar cada una de las actividades de la secuencia didáctica, con un grupo de 18 estudiantes de grados décimo y undécimo (10 niñas y 8 niños) cuyas edades oscilan entre los 15 y 18 años, que voluntariamente participan en el Club de Astronomía de la Institución Educativa Distrital Atabanzha.

El Colegio Atabanzha IED, es una institución educativa de carácter oficial, ubicada en la localidad de Usme, que ofrece servicios educativos desde el nivel preescolar hasta grado undécimo, en las jornadas mañana y tarde. Los 18 estudiantes del Club de Astronomía de la institución en mención pertenecen a la jornada mañana, razón por la cual asisten a las sesiones del Club dos días por semana en jornada contraria, de 12:30 a 2:00 pm., tiempo durante el cual se aplicaron cinco de las seis actividades de ésta propuesta. El club de astronomía viene funcionando en la institución desde el segundo semestre del 2012, por lo cual 14 de los estudiantes del grupo continuaron en el Club y los 4 restantes son estudiantes nuevos: 2 de grado décimo y 2 de grado undécimo. Cabe señalar que las actividades de la propuesta se realizaron durante el primer semestre del año 2013, sin embargo, por ser el Club de Astronomía una actividad informal, algunos de los estudiantes no fueron constantes en su asistencia a las sesiones dispuestas para la aplicación de la propuesta, por lo cual no es apropiado realizar un análisis cuantitativo de los resultados obtenidos. Teniendo en cuenta lo anterior, el análisis que se presenta actividad por actividad se realizó en términos descriptivos, en los cuales se hace mención de los aspectos cualitativos más relevantes frente al desarrollo de conceptos que se involucran en la propuesta en función de los procesos de enseñanza y aprendizaje, al nivel de impacto que tuvo en los estudiantes, a las dificultades encontradas y a algunas recomendaciones generales.

Actividad N. 1 Introducción

La película Ágora resultó ser interesante para los estudiantes, aunque en el momento del foro muy pocos participaron. La actividad sirvió para discutir sobre los modelos geocéntrico y heliocéntrico, el porqué de la lucha entre los dos modelos, el porqué dudar de la situación de inmovilidad de la Tierra que propone el modelo geocéntrico y para hablar de algunos personajes importantes en la historia de la matemática y de la astronomía, como Aristóteles, Aristarco, Hiparco, Apolonio y Ptolomeo según los aportes que hizo cada uno. La actividad tuvo impacto en la medida que muchos estudiantes del club de astronomía se motivaron a realizar observaciones del movimiento del Sol y de las estrellas para corroborar características del modelo geocéntrico y del heliocéntrico, también hicieron consultas por su cuenta sobre Hipatia, descubriendo algunos errores de la película, que se socializaron en la sesión posterior.

Actividad N. 2: Las pirámides de Giza… ¿Cómo saber su altura?

Para la parte 1, en algunos estudiantes fue muy común el hecho de confundir el concepto de congruencia con semejanza; algunos aseguraban que era imposible que los ángulos internos de los triángulos grande y pequeño fueran iguales, pues sus lados son diferentes lo cual hace que los ángulos crezcan. Para aclarar esta situación fue muy importante utilizar un modelo concreto, independiente de la actividad propuesta: un par de triángulos semejantes y un par de triángulos no semejantes recortados, de tal forma que se mostró a todos los estudiantes que al hacer coincidir los ángulos de cada par de triángulos, en los semejantes iban a coincidir exactamente mientras que en los no semejantes esto no ocurriría. Adicional a esto se propuso la medición con transportador de los ángulos internos de los triángulos, obteniendo para los semejantes medidas angulares iguales, haciendo ver que el ángulo no cambia así cambien las longitudes de los lados del triángulo y que esto ocurre solamente cuando los lados crecen o decrecen en una misma proporción; si los lados no se comportaran de esa manera los ángulos se alterarían y ya no serian semejantes. Finalmente, tomando como referencia a Chevallard (1991), la explicación se dio en términos de transposición didáctica[69] usando como pretexto las características que heredan los hijos de los padres: “el padre es más grande que el hijo, pero el hijo heredó de su padre la forma triangular, la medida de los ángulos y además tiene su mismo apellido, si el padre es por ejemplo isósceles rectángulo, el hijo también lo será (con esto me refiero a la misma clasificación de triángulos atendiendo a la medida de los lados y de los ángulos). Una recomendación para tener en cuenta en este tipo de actividades y para que los estudiantes comprendan claramente el concepto de semejanza, es continuar con la construcción de varias perpendiculares a la recta dada, ir midiendo cada vez los ángulos internos de los triángulos que se forman, e ir midiendo los catetos para determinar si todos los triángulos son isósceles rectángulos o escalenos rectángulos.

Para la parte 2, se encontró que los estudiantes no presentan dificultades en los conceptos asociados a las rectas, al círculo, al paralelismo y a la perpendicularidad. Todos lograron hacer la construcción de los triángulos semejantes aunque algunos pocos presentaron dificultades en la precisión de la construcción, específicamente para dibujar círculos, pues dan un uso inadecuado del compás. Donde se encuentran dificultades es en el lenguaje para mostrar los argumentos que permiten describir de la mejor manera un fenómeno, pues para ellos no son tan evidentes las relaciones de semejanza entre triángulos rectángulos.

Para las partes 3 y 4 se propuso construir una unidad de medida propia puesto que se había indagado con anterioridad que la mayoría de estudiantes presenta grandes dificultades para dividir números decimales. Algunos establecieron una unidad de medida en términos de fracciones al dividir por mitades o tercios mientras que otros conservaron el sistema decimal, determinando la mitad como 0.5. Con las medidas hubo algunas dificultades puesto que debían ser muy exactas, a lo cual algunos estudiantes lograron medir sumando fracciones, por ejemplo, sesentaicuatroavas con treintaidosavas partes, pero también presentaban dificultades con la suma entre fracciones y números mixtos. Fue indispensable revisar minuciosamente las unidades de medida de cada estudiante, verificar cómo estaban midiendo y como actividad extra explicar el algoritmo de la división entre decimales y fraccionarios. Algunos estudiantes se rindieron y terminaron utilizaron la calculadora para hallar las razones entre las magnitudes y establecer las proporciones.

[69] La transposición didáctica se define como la transformación del saber científico en un saber posible de ser enseñado. CHEVALLARD, Y. *La Transposición didáctica: del saber sabio, al saber enseñado.* 1991

La parte 5 de la actividad fue muy productiva en tanto que fue una actividad grupal en la cual los mismos estudiantes ayudaban a sus compañeros a medir, a establecer razones y a efectuar operaciones. Fue exitosa en la medida que la mayoría de los grupos, con diferentes unidades de medida obtuvieron los mismos resultados en las razones establecidas, aunque algunos estudiantes no eran consientes aún del sentido de la constante de proporcionalidad. Todas las constantes obtenidas y para el caso de las corregidas con calculadora por tener errores en la división, dieron con un margen de error del orden de las centésimas.

El hecho que la mayoría de estudiantes presentaran dificultades con el algoritmo de la división, fue un obstáculo para cumplir con los objetivos de la actividad, por lo cual en cierto momento se permitió el uso de la calculadora para efectuar estos procesos. Las dificultades asociadas a las operaciones básicas entre fracciones, especialmente en la suma de fracciones heterogéneas y números mixtos también constituyeron obstáculos en el momento de cumplir con los objetivos de la actividad.

Actividad N.3: ¿Cuál será la altura del poste? Midiendo sombras y estimando alturas… así como Tales

Dado el carácter grupal de la actividad, resultó ser más exitosa que la anterior, pues las mediciones, establecimiento de razones, operaciones básicas (división y multiplicación) y solución a la ecuación de proporcionalidad fueron ejercicios en los cuales se trabajó en equipo y hubo lugar a la comparación y verificación de resultados. Algo interesante de esta parte fue el hecho de establecer de común acuerdo, en cada grupo, la proporción que se debía utilizar, pues los estudiantes eran consientes de que sólo una de las proporciones trabajadas en la actividad anterior era necesaria para hallar la altura del poste. Tres de los cinco grupos utilizaron la regla de tres simple directa como estrategia de solución al problema de encontrar la altura del poste, por lo cual se puede afirmar que relacionan este procedimiento con el concepto de proporcionalidad. Durante las etapas de validación e institucionalización, el trabajo fue muy productivo y motivador, pues todas las explicaciones estuvieron basadas en los resultados de la experiencia propia de los estudiantes; fue muy emocionante y significativo evidenciar “lo parecido” de las medidas obtenidas para la altura del poste, de hecho, uno de los grupos tuvo errores al despejar la altura del poste en la expresión formulada, por lo cual obtenían un valor muy lejano comparado con el de los otros grupos, lo cual implicó revisar el proceso y evidenciar el error cometido para corregirlo. Antes de finalizar la sesión de validación se sugirió a los estudiantes elegir un prototipo de medida de la altura para el poste, pues las respuestas dadas oscilaban entre los 731,76 cm y los 785,05 cm por lo que los estudiantes decidieron hallar el promedio entre las 5 medidas obtenidas.

Actividad N. 4: ¿A qué altura esta la estrella?

En relación con la experiencia de medir el ángulo de visión de la estrella, los estudiantes en general presentaron dificultad para establecer el valor del ángulo en grados, y aún mayor dificultad para expresar la precisión en minutos con el nonio angular, razón por la cual la docente ayudó a tomar la medida en cuestión. Tanto en el trabajo individual como en el grupal se presentaron dificultades relacionadas con la representación gráfica o dibujo de la situación, a pesar de haber hecho la experiencia de medición. Esto en el sentido que algunos estudiantes en sus representaciones no tenían en cuenta la altura desde la cual se estaba midiendo el ángulo, por lo tanto no median la longitud desde la horizontal imaginaria del punto de visión hasta el piso ni mucho menos la sumaban a la altura calculada de la estrella. Sólo 4 estudiantes de 15 que realizaron la actividad, notaron éste detalle. Durante el trabajo grupal, al observar las representaciones gráficas de los estudiantes se hizo la aclaración en cada grupo por medio de preguntas orientadoras, con el fin de que los estudiantes evidenciaran tal detalle.

Los estudiantes en su totalidad (algunos durante el trabajo individual, la mayoría durante el trabajo grupal) llegaron a establecer la relación o razón geométrica entre la altura y la base del triángulo con dificultades para exportar dicha relación geométrica en función del ángulo medido y por tanto, para construir la relación trigonométrica tangente, a pesar de tener conocimientos previos en torno a dicho concepto. Para que los estudiantes llegaran a formular dicha relación trigonométrica fue necesario orientarles por medio de preguntas como, ¿has solucionado algún ejercicio en trigonometría con las razones seno, coseno o tangente?, ¿podrías adaptar alguna de estas razones a la situación?, para lo cual algunos estudiantes recordaron que lo que relaciona al cateto opuesto con el cateto adyacente en un triángulo rectángulo, con respecto a un ángulo se llama tangente. Al comparar los resultados obtenidos para la altura de cada estrella (las estrellas estaban colocadas en el muro del edificio a diferentes alturas) se llegó a la conclusión que la relación entre la base y la altura, es decir, la tangente, depende del ángulo.

Actividad N. 5: Construcción de nuestras primeras tablas trigonométricas… Medidas y relaciones entre cuerdas, radios y alturas.

La construcción geométrica de la función cuerda fue un trabajo dirigido que motivó y agradó a los estudiantes en general, en la medida que utilizaron materiales como el acetato y los marcadores de colores, lo que les obligó a dibujar cuerdas y a medirlas con mucha exactitud. Para establecer las relaciones entre el semi - ángulo y la semi - cuerda en el caso de la construcción de la tabla de cuerdas de la función seno, no hubo mayor dificultad, pues fue muy positiva la interpretación del significado de la mediatriz de la cuerda en términos de que siempre que ésta divida una cuerda por la mitad, lo hará formando un ángulo recto y pasará por el centro del círculo, por tanto se forman triángulos rectángulos. El reconocimiento de la relación entre la semi - cuerda y el radio que dependen del semi - ángulo fue reconocida inmediatamente como lo que relaciona al cateto opuesto con la hipotenusa por 11 de los estudiantes de los que asistieron constantemente a las sesiones. Solamente 5 de éstos aludieron a ésta relación con el nombre del “seno” y como el trabajo de las construcciones se hizo grupalmente y ya todos tenían un buen grado de conciencia frente a la razón seno y su significado, en el momento de establecer la relación entre la altura de la cuerda y el radio, y entre la semi - cuerda y la altura, reconocieron de inmediato los conceptos de razón coseno y tangente, respectivamente. Por cuestiones de tiempo y más aún, para no hacer un trabajo dispendioso que cansara a los estudiantes, los cocientes se hallaron con calculadora, pues en las actividades anteriores en las cuales se pidió efectuar los algoritmos de la división, la mayoría de los estudiantes expresaron cansancio, y por los errores en dichos algoritmos no se veían los resultados que se esperaban como consecuencia de la relación de semejanza entre triángulos; sin embargo uno de los estudiantes en un grupo inició este trabajo efectuando los algoritmos y comprobando sus resultados con los que obtenían sus compañeros en la calculadora. Ésta parte de la actividad aportó en gran medida a la conceptualización de las relaciones trigonométricas en los estudiantes y algo muy interesante fue que tres de los estudiantes se acercaron a la docente para decir que si se sacaban los cocientes “al revés” se podían establecer las razones cotangente, secante y cosecante.

Lo más significativo de la actividad fue el momento en el cual se socializaron las tablas obtenidas por cada grupo con todos los estudiantes, pues fue impactante para ellos ver que los resultados eran muy similares pues las circunferencias de acetato eran de diferentes tamaños; los errores en los cocientes obtenidos se manifestaron en el orden de las centésimas. Cabe señalar que en ese punto aún no había una plena comprensión del concepto de semejanza a pesar de haberlo trabajado en las actividades anteriores. Fue aun más impactante el hecho de unir los cinco círculos en acetato de tal forma que coincidieran en sus centros (unidos con un gancho mariposa) y los radios trazados de 15° en 15° pues la imagen evidenció la congruencia entre los ángulos centrales y la relación de proporcionalidad entre triángulos semejantes. En este punto se trajo a colación lo realizado en las actividades N.2 y N.3.

Para la mayoría de estudiantes fue más evidente que el ángulo era el mismo y que finalmente no importaba el tamaño de la circunferencia, aspecto que se puede considerar un aporte para cambiar la concepción errónea de pensar que si los lados que forman un ángulo aumentan, el ángulo también aumenta y por tanto, en los triángulos semejantes, el más grande tiene ángulos más grandes.

Finalmente, en la etapa de institucionalización, además de plantear la función cuerda en términos de la función seno y del planteamiento de las funciones coseno y tangente, se hizo una charla trayendo a colación los aportes realizados por Hiparco de Nicea y Ptolomeo, personajes cuyos nombres se habían mencionado en la actividad de introducción, pero específicamente en relación con la construcción de las tablas de cuerdas, los mecanismos que implementaron y su importancia para realizar cálculos astronómicos. Del mismo modo se enfatizó en la utilidad de los instrumentos tecnológicos utilizados en diversas épocas hasta la actualidad para ahorrar tiempo en la construcción de tablas de valores que posibilitan el estudio de la astronomía de posición.

Actividad N. 6: Encuentre a Pitágoras trigonométrico

Esta actividad no fue aplicada por dificultades de tiempo, sin embargo se aplicará en algunas sesiones del Club de Astronomía, que se realizarán en el segundo semestre del presente año.

V. CONCLUSIONES

- ★ Se diseñaron seis actividades para la propuesta con base en una revisión histórica y epistemológica muy detallada de los conceptos de razón, ángulo y cuerda, que se relacionan con los métodos de construcción de las tablas de cuerdas presentes en *El Almagesto* de Ptolomeo y que corresponden a los pilares de los conceptos de la trigonometría plana elemental.

- ★ Se realizó una revisión histórica y epistemológica de la astronomía y la trigonometría, con el fin de determinar los conceptos previos que originaron la necesidad de construir una tabla de cuerdas, cuyos valores corresponden a la tabla de la función seno actual y en consecuencia a la posibilidad de construir tablas para las funciones coseno y tangente.

- ★ Se lograron identificar las necesidades de los antiguos como Hiparco y Ptolomeo, de elaborar tablas de cuerdas y de considerar una geometría esférica para establecer modelos que permitieran hacer cálculos del posicionamiento de los astros en la esfera celeste.

- ★ Se elaboró un marco conceptual para relacionar los aspectos disciplinares, epistemológicos – históricos y didácticos, que fundamentaron el diseño y la implementación de la propuesta

- ★ Se diseñó una secuencia de actividades teniendo en cuenta el marco conceptual, la metodología de resolución de problemas y la teoría de situaciones didácticas en el marco de la didáctica francesa.

- ★ De las seis actividades diseñadas se aplicaron las cinco primeras, de las cuales se puede decir que aportaron significativamente a la conceptualización de la razón, la proporción, la semejanza en triángulos rectángulos y las relaciones de dependencia con respecto al concepto de ángulo, además de contribuir a la conceptualización de las razones trigonométricas y las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente

- ★ Los problemas que surgieron, y que en gran medida obstaculizaron el desarrollo de conceptos como proporción y semejanza fueron asociados al poco manejo por parte de los estudiantes, de los algoritmos de la división entre números decimales, la suma de fracciones y números mixtos y la división entre cantidades enteras con más de una cifra en el denominador. Por esta razón, y como el objetivo de las actividades no era aprender a efectuar algoritmos, se adaptaron las actividades posteriores permitiendo el uso de la calculadora.

- ★ En cuanto a la validación de la propuesta, en función de sus aportes, se puede afirmar que contribuye a un reconocimiento de la historia de la astronomía y de la trigonometría como herramienta base para el diseño e implementación de actividades que son significativas para el estudiante y que posibilitan el aprendizaje de conceptos como razón, proporción, semejanza, ángulo, razón trigonométrica, función trigonométrica e identidad trigonométrica, dentro de un contexto de la matemática aplicada al desarrollo de las ciencias, en particular, de la astronomía.

★ Un aporte de este trabajo corresponde a la elaboración de un medidor de ángulos con nonio angular para el sistema sexagesimal, en el sentido de la precisión para efectuar procesos de medición de amplitudes que minimizan los grados de incertidumbre.

★ La experiencia didáctica de aplicar la propuesta fue motivadora en los estudiantes y muy significativa en la medida de ver la utilidad de la trigonometría para la astronomía y especialmente, al descubrir los conceptos trigonométricos por medio de actividades entretenidas en el aula, muy distintas a las que se ven en las clases de trigonometría formales. Según ésta afirmación, en mi concepto, la propuesta de actividades y el diseño de esta utilizando como herramienta la dimensión histórica y epistemológica, constituyen un modelo innovador, un avance y un éxito en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática aplicada.

REFERENCIAS

- BOYER, C. B. *Historia de la Matemática*. Alianza Editorial. Madrid, 1999.
- BROUSSEAU, G. *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática*. Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19. Versión en castellano, 1993
- CHEVALLARD, Y. *La Transposición didáctica: del saber sabio, al saber enseñado.* Aique. Buenos Aires, 2002
- DORCE, C. Ptolomeo*. El astrónomo de los círculos*. Nivola libros y ediciones. Madrid, 2006
- DREYER, J. L. E. A *History of Astronomy from Thales to Kepler*. Cambridge University Press, 1096. Reeditado en Dover Publications. Nueva York, 1953
- EUCLIDES. *Elementos*. Tomo 1 y 2. Traducción al castellano de PUERTAS, M. Editorial Gredos. Madrid, 1991.
- GODINO, J et all. *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros*. En http://redes-cepalcala.org/inspector/DOCUMENTOS%20Y%20LIBROS/MATEMATICAS/DIDACTICA%20DE%20LAS%20MATEMATICAS%20PARA%20MAESTROS.pdf, 2002
- KLINE, M. *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Tomo I. Alianza Editorial. Madrid, 1992.
- MAOR, E. *Trigonometric Delights* (Versión digital). Princeton University Press. 1998. Recuperado de http://press.princeton.edu/books/maor/
- PTOLEMAEUS, C. *The Almagest by Tolemy*. Traducción al inglés de CATESBY T. R. Tomo 16. Encyclopaedia Britannica. Chicago, 1952
- SÁNCHEZ, C. H. *La trigonometría y su relación con la astronomía*. Presentación en ppt. y notas de clase: Introducción a la historia y la filosofía de la matemática. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 2009

Sito – grafía

- O'Connor, J. J y Robertson, E. F. *Hipparchus of Rhodas.* Abril de 1999. En http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Printonly/Hipparchus.html
- O'Connor, J. J y Robertson, E. F. *Pythagoras of Samos.* Enero de 1999. En http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Printonly/Pythagoras.html
- http://es.wikipedia.org/wiki/Aristarco_de_Samos
- http://es.wikipedia.org/wiki/Radio_de_la_Tierra
- http://es.wikipedia.org/wiki/Claudio_Ptolomeo
- http://es.wikipedia.org/wiki/Almagesto
- http://es.wikipedia.org/wiki/Nonio
- http://es.wikipedia.org/wiki/Cuerda_(geometr%C3%ADa)
- http://ficus.pntic.mec.es/fheb0005/Hojas_varias/Material_de_apoyo/Estrategias%20de%20Polya.pdf

VI. ANEXOS

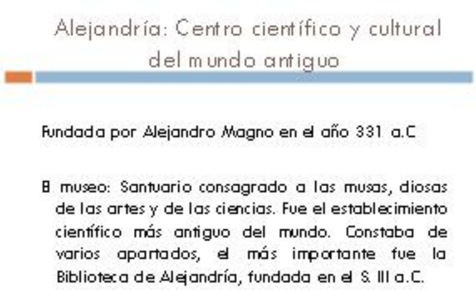
ANEXO 1. PRESENTACION POWER POINT CINE – FORO ÁGORA

1

2

3

4



5

6

La escuela neoplatónica de Alejandría

¿QUÉ ERA LA ESCUELA NEOPLATÓNICA Y QUIÉN LA DIRIGÍA?

¿QUÉ PERSONAS ASISTÍAN A ESTA ESCUELA?

7

Neoplatonismo

Se refiere a diferentes momentos de la historia de la filosofía en que se produjo una revitalización del platonismo.

En Alejandría, S. III, se definió un sistema filosófico que fue enseñado en diferentes escuelas hasta el siglo VI. Este sistema filosófico fue la última manifestación del platonismo en la antigüedad, y constituye una síntesis de elementos platónicos, con aportes de las doctrinas filosóficas de Pitágoras, Aristóteles y Zenón

¿CONOCES ALGUNA DE ESTAS DOCTRINAS FILOSÓFICAS?

8

Religiones

- Griega
- Romana
- Greco – egipcia
- Judaísmo
- Cristianismo

¿PUEDES DESCRIBIR CÓMO ERA EL CONFLICTO ENTRE LAS RELIGIONES CRISTIANA, JUDÍA Y GRECO EGIPCIA?

9

¿Quiénes fueron Teón e Hipatía de Alejandría?

10

Hipatia de Alejandría
355 o 370 d.C – 415 o 416 d.C

- Filósofa neoplatónica, Matemática, Astrónoma
- Se educó con ayuda de su padre, el famoso filósofo, matemático y astrónomo Teón de Alejandría.
- Líder de la escuela neoplatónica. Enseñó matemáticas, astronomía y filosofía a los hijos de la élite alejandrina.
- Usando modelos matemáticos, experimentos físicos y observaciones astronómicas, descubre que existen movimientos de los planetas que no son coherentes con el sistema geocéntrico heredado por Aristóteles, Hiparco y Ptolomeo.
- Consideró la validez del sistema heliocéntrico, planteado con anterioridad por Aristarco de Samos, fundamentado en el movimiento de los planetas alrededor del sol en órbitas elípticas.
- Al parecer se casó con Isidoro el filósofo, pero se mantuvo virgen.
- Muere asesinada por los cristianos, por órdenes probablemente de Cirilo.

11

El Astrolabio

12

Visión geocéntrica del universo

¿QUÉ ES GEOCÉNTRICO?

¿POR QUÉ ALGUNOS ANTIGUOS FORMULARON MODELOS GEOCÉNTRICOS?

13

Modelo geocéntrico del universo

14

Movimiento en Caída Libre
Un motivo para dudar del sistema geocéntrico

¿PUEDES EXPLICAR QUE SUCEDIÓ CUANDO HIPATIA, ESTANDO EN EL BARCO EN MOVIMIENTO, DEJÓ CAER LIBREMENTE UN OBJETO ?

15

No hay perfección en el universo.
Si esto es así… Aristarco tenía razón y las ideas de Aristóteles no son ciertas

¿CUÁLES SON LAS DIFERENCIAS ENTRE UN CÍRCULO Y UNA ELIPSE?

¿CÓMO DIBUJAR UN CÍRCULO?, ¿CÓMO DIBUJAR UNA ELIPSE?

16

Las secciones cónicas de Apolonio

¿CUÁLES FIGURAS PLANAS PUEDES OBTENER AL CORTAR UN CONO DE TODAS LAS MANERAS POSIBLES?

17

Modelo heliocéntrico del universo:
Aristarco de Samos

¿QUÉ ES HELIOCÉNTRICO?

¿POR QUÉ A ARISTARCO SE LE OCURRIÓ PENSAR EN UN MODELO HELIOCÉNTRICO PARA EL UNIVERSO?

18

¿Quién tenía razón?

ACTUALMENTE SABEMOS QUE NUESTRO SISTEMA SOLAR TIENE AL SOL COMO CENTRO DEL SISTEMA, MÁS NO COMO CENTRO DEL UNIVERSO

SIN EMBARGO, LO QUE VEMOS DESDE NUESTRO PLANETA Y EN APARIENCIA, ES UN SISTEMA GEOCÉNTRICO … ESTO NOS DICE QUE A VECES HAY QUE DUDAR DE LAS APARIENCIAS E INVESTIGAR OTRAS IDEAS

19

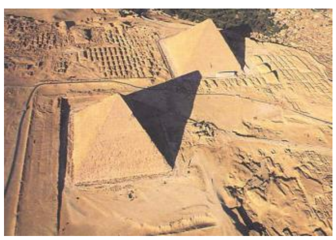
ANEXO 2. PRESENTACION POWER POINT: EL MÉTODO DE TALES DE MILETO

1

Cuenta la leyenda que hacia el Siglo quinto antes de nuestra era, en un viaje a Egipto, uno de los siete sabios griegos, visitó las tres pirámides de Guiza: Keops, Kefrén y Micerino.

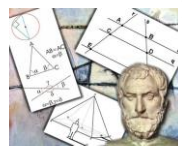
2

Al verlas quedó tan impresionado que quiso saber su altura, así que, por el gran tamaño de éstas y al no poder medir sus alturas directamente, se le ocurrió calcularlas utilizando sus conocimientos sobre las propiedades de los triángulos semejantes, pues él sabía que los rayos del Sol incidían sobre los objetos de ese lugar de la misma manera, por lo que se proyectaban las sombras de éstos en el piso bajo un mismo ángulo.



3

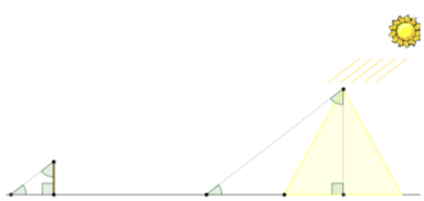
El sabio griego de ésta historia era Tales de Mileto, quien valiéndose tan solo de una varilla, de la luz del sol y por tanto, de la sombra de los objetos proyectada en el piso, logró medir la altura de las tres pirámides. Pero… ¿cómo lo hizo?



Tales de Mileto (630-546 a.C.)

4

Sabiendo que las alturas tanto de la pirámide como de la varilla forman ángulos rectos con el piso y que sus sombras se proyectan bajo un mismo ángulo, notó que se formaban dos triángulos semejantes, pues Tales sabía que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es 180 grados y, como los dos triángulos que se formaban compartían dos de sus ángulos, también compartirían el tercer ángulo.

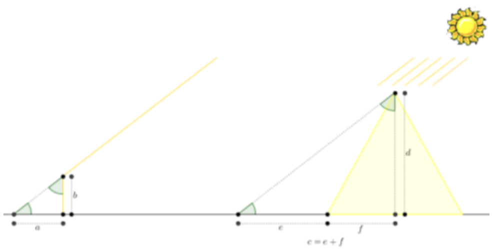


5

Así, llegó a la siguiente conclusión, al medir y comparar las longitudes:

1. *de la sombra de la pirámide más la distancia desde la base de la altura hasta el borde de la pirámide y,*
2. *de la sombra obtenida por la varilla y, conociendo la altura de la varilla, era posible encontrar la altura de la pirámide sin necesidad de subirse a la cima de ésta, de tal suerte que pudiera arriesgar su vida, pues existe una relación entre las longitudes de las sombras de la varilla y de la pirámide más la distancia desde la base de la altura hasta el borde, igual a la relación entre las longitudes de las alturas de los dos objetos.*

6



$a / c = b / d$ $\quad$ $b / a = d / c$

$c / a = d / b$ $\quad$ $a / b = c / d$

7

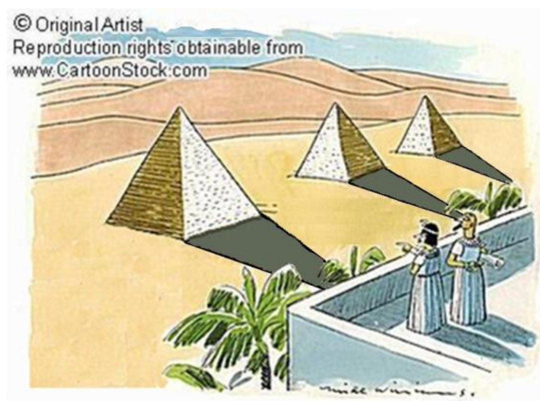
8

Lo que no sabía Tales, era que después, éste método tan simple serviría como una herramienta exitosa para estimar las dimensiones de la Tierra, y por qué no, la distancia a las estrellas.

Sin embargo, había una pregunta que rondaba en su cabeza: ¿Cómo medir la altura de las pirámides sin tener los rayos del Sol, por ejemplo en una noche de luna nueva?

ANEXO 2.1 LECTURA TALES DE MILETO

"El conocimiento proviene de la sombra, y la sombra proviene del gnomon"
Chou Pei Suan-king



Cuenta la leyenda que hacia el Siglo quinto antes de nuestra era, en un viaje a Egipto, uno de los siete sabios griegos, visitó las tres pirámides de Guiza: Keops, Kefrén y Micerino. Al verlas quedó tan impresionado que quiso saber su altura, así que, por el gran tamaño de éstas y al no poder medir sus alturas directamente, se le ocurrió calcularlas utilizando sus conocimientos sobre las propiedades de los triángulos semejantes, pues él sabía que los rayos del Sol incidían sobre los objetos de ese lugar de la misma manera, por lo que se proyectaban las sombras de éstos en el piso bajo un mismo ángulo.

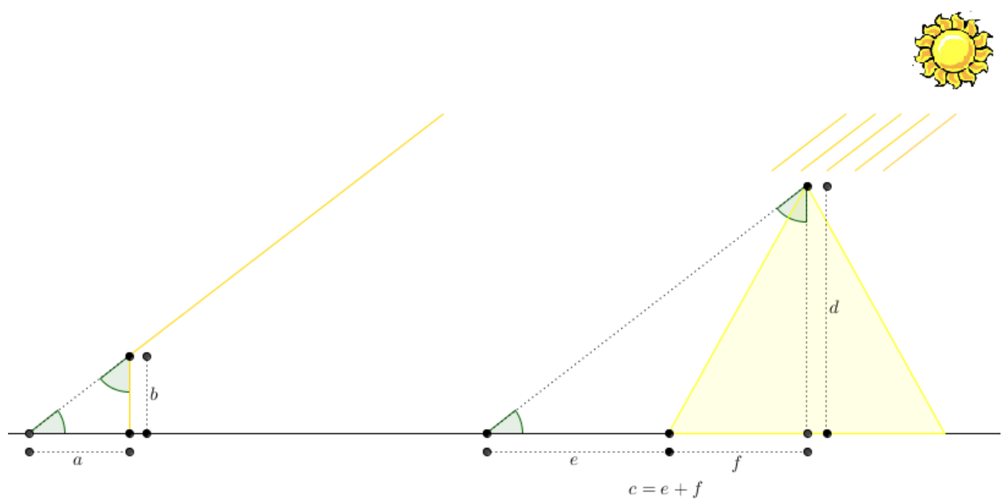
El sabio griego de ésta historia era Tales de Mileto, quien valiéndose tan solo de una varilla, de la luz del sol y por tanto, de la sombra de los objetos proyectada en el piso, logró medir la altura de las tres pirámides. Pero… ¿Cómo lo hizo?

Sabiendo que las alturas tanto de la pirámide como de la varilla forman ángulos rectos con el piso y que sus sombras se proyectan bajo un mismo ángulo, notó que se formaban dos triángulos semejantes, pues Tales sabía que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es 180 grados y, como los dos triángulos que se formaban compartían dos de sus ángulos, también compartirían el tercer ángulo.

Así, llegó a la siguiente conclusión, al medir y comparar las longitudes:

1. De la sombra de la pirámide más la distancia desde la base de la altura hasta el borde de la pirámide y,
2. De la sombra obtenida por la varilla

Y conociendo la altura de la varilla, era posible encontrar la altura de la pirámide sin necesidad de subirse a la cima de ésta, de tal suerte que pudiera arriesgar su vida, pues existe una relación entre las longitudes de las sombras de la varilla y de la pirámide más la distancia desde la base de la altura hasta el borde, igual a la relación entre las longitudes de las alturas de los dos objetos.



Lo que no sabía Tales, era que después, éste método tan simple serviría como una herramienta exitosa para estimar las dimensiones de la tierra, y por qué no, la distancia a las estrellas. Sin embargo, había una pregunta que rondaba en su cabeza: ¿Cómo medir la altura de las pirámides sin tener los rayos del Sol, por ejemplo en una noche de luna nueva.

ANEXO 2.2 GUIA DE TRABAJO INDIVIDUAL

Con la construcción que hiciste para representar las mediciones de Tales de Mileto y utilizando la unidad de medida de longitud que creaste, mide las alturas y las bases de tus dos triángulos. Con los datos obtenidos completa la siguiente tabla:

Tabla 1.

	Cateto a (altura)	Cateto b (base)
Triángulo 1	a_1 =	b_1 =
Triángulo 2	a_2 =	b_2 =

Ahora establece las relaciones que formulo Tales de Mileto entre las bases y las alturas en cada triangulo, efectúa los cocientes y con los datos obtenidos completa la siguiente tabla:

Tabla 2.

	a_1/b_1	a_2/b_2	b_1/a_1	b_2/a_2	a_1/a_2	a_2/a_1	b_1/b_2	b_2/b_1
Razón								
Cociente obtenido								

ANEXO 3. GUIA DE TRABAJO GRUPAL

Utilizando las tiras de papel milimetrado, mide las longitudes del gnomon, de la cinta blanca (longitud de la sombra del gnomon) y de la cinta de enmascarar (longitud de la sombra del poste). Luego Completa con tu grupo las primeras tres columnas de la siguiente tabla:

Altura del Gnomon	Longitud de la sombra del Gnomon	longitud de la sombra del poste	Altura del poste

¿Cuánto crees que puede medir el poste?___________

Ahora utiliza el método de Tales de Mileto para averiguar cuál es la altura real del poste. Realiza los procedimientos que sean necesarios y completa la cuarta columna de la tabla.

ANEXO 3.1 ACTIVIDAD EN EL TABLERO

	GRUPO 1	GRUPO 2	GRUPO 3	GRUPO 4	GRUPO 5
HORA					
Longitud del gnomon					
Longitud sombra del gnomon					
Longitud sombra del poste					
Altura del poste					

ANEXO 4. LECTURA ¿CÓMO MEDIR ALTURAS SIN SOMBRAS?

El método usado por Tales de Mileto para calcular la altura de las pirámides no siempre era útil, pues si era necesario averiguar la altura de un objeto que no proyectara sombra, por ejemplo en las noches, no era posible establecer proporciones entre medidas de longitud. Sin embargo en este método había un elemento de gran utilidad; la medida del ángulo con el cual se proyectaba la sombra de los objetos en el piso, pues como sabemos, las longitudes de las sombras cambian dependiendo del ángulo con el cual el Sol ilumina son objetos.

El ser humano desde la antigüedad se ha preguntado por la distancia a la cual estaban las estrellas, el sol, la luna y los errantes, razón por la cual se vio en la necesidad de calcular alturas de objetos que no proyectaban sombras, pues o están más alejados del sol o sólo son visibles en la noche. Así, algunos astrónomos se dieron en la tarea de elaborar instrumentos como el cuadrante, también llamado medidor de distancias angulares o astrolabio, para medir el ángulo de visión con el cual se podían observar los objetos lejanos y tratar de calcular la altura a la cual estaban.

ANEXO 4.1 GUIA DE TRABAJO INDIVIDUAL

Ahora debes bajar al patio. En el frente del bloque de los salones de bachillerato encontrarás una estrella de color _______ colocada en la pared a una altura desconocida. Ahora debes seguir los siguientes pasos:

Primer paso: Con ayuda de tu profesora y respetando el turno que te corresponde, debes utilizar el medidor de ángulos y la mirilla unida a éste para medir el ángulo de elevación al cual está tu estrella, para esto debes utilizar la plomada unida al medidor y la escala auxiliar que te permitirá medir el ángulo con mayor precisión. Luego debes escribir este valor en la tabla.

Segundo paso: Con el metro, mide la distancia vertical desde el piso hasta donde quedo la mirilla. Escribe el dato en la tabla.

Tercer paso: Debes contabilizar los pasos exactos desde el lugar donde miraste, en línea recta hasta la pared donde está pegada tu estrella. Anota el valor en la tabla.

Cuarto paso: Mientras tus compañeros hacen sus mediciones, mide el largo de uno de tus zapatos con el metro y convierte la medida tomada en pasos a cm o si prefieres a metros. Registra el dato obtenido en la tabla.

Quinto paso: Ahora, la medida de longitud tomada en el segundo paso debes convertirla en pasos. Escribe el dato en la tabla.

Terminadas las mediciones, dibuja la situación utilizando algún modelo geométrico y escribe una estrategia o camino a seguir para calcular la altura de tu estrella. Escribe los procedimientos que consideres necesarios.

Tabla de datos:

Primer paso	Segundo paso	Tercer paso	Cuarto paso	Quinto paso
Medida del ángulo	Distancia vertical del piso a la mirilla	Distancia horizontal del trípode a la pared	Distancia horizontal del trípode a la pared	Distancia vertical del piso a la mirilla
____ ° (grados) ____´ (minutos)	__________ (cm ☐) (m ☐)	_________ p (pasos)	__________ (cm ☐) (m ☐)	__________ p (pasos)

ANEXO 5. GUIA DE TRABAJO GRUPAL

Tabla 1.

Ángulo ($\angle$)	Cuerda (Crd)	Semi – ángulo ($\angle$/2)	Semi – cuerda (Crd/2 = s)

Tabla 2.

Ángulo ($\angle$)	Cuerda (Crd)	Radio (r)	Crd / r

Tabla 3.

Semi – ángulo (∠/2)	Semi – cuerda (s)	s / r	Altura (h)	h / r	s / h