

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
SEDE MEDELLÍN

**Unidad didáctica para el proceso de  
generalización y solución de ecuaciones,  
utilizando métodos informales, como apoyo  
para el sexto grado**

**Edith Marcela Velásquez García**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias  
Programa de Maestría en Enseñanza de las ciencias exactas y naturales  
Medellín, Colombia  
2014

**Unidad didáctica para el proceso de  
generalización y solución de ecuaciones,  
utilizando métodos informales, como apoyo  
para el sexto grado**

**Edith Marcela Velásquez García**

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:  
**Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales**

Director:

Carlos Julio Echavarría Hincapié

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Programa de Maestría en Enseñanza de las ciencias exactas y naturales

Medellín, Colombia

2014

A mi madre y abuela por su apoyo y  
desmesurada paciencia.

## **Agradecimientos**

A mi director, Carlos Julio Echavarría Hincapié por su apoyo, constante colaboración y valiosas sugerencias.

A mi amiga Noreyda Flórez licenciada en física Matemáticas, por su apoyo cuando lo necesitaba.

A todas y cada una de las personas que hicieron posible la realización de este trabajo.

## Resumen

Este trabajo presenta una unidad didáctica para desarrollar en el aula con alumnos de sexto grado en el proceso de realización generalizaciones y acercamiento a la solución de ecuaciones lineales con una incógnita, utilizando métodos de solución informales. El trabajo busca posibilitar en los alumnos el fortalecimiento de su autonomía en el proceso de aprendizaje y disciplina de estudio, y por consiguiente un mejor desarrollo de las competencias básicas del pensamiento variacional, a su vez que contribuye al desarrollo de la capacidad crítica, analítica e imaginativa del estudiante, elementos fundamentales en un sujeto participativo de la sociedad. Es entonces como el presente trabajo refleja la intención de buscar nuevas alternativas en la enseñanza y aprendizaje de conceptos tan importantes tales como igualdad, ecuación, expresión algebraica, para los estudiantes de sexto grado en su iniciación al álgebra.

**Palabras clave:** unidad didáctica, generalización, ecuación lineal, incógnita, autonomía, pensamiento variacional, álgebra.

## Abstract

This work presents a tutorial to develop in the classroom with sixth graders. This guide is about the subject of making generalizations and approach to the solution of linear equations with one unknown quantity, using informal methods of solution. The work aims to enable students to strengthen their autonomy in the process of learning and discipline of study, and therefore a better development of the basic skills of variational thought, at the same time, it contributes to the development of critical, analytical and imaginative

abilities of the students, essential elements in a person who participates in a society. Then, this work reflects the intention to look for new alternatives in teaching and learning important concepts such as equality, equation, algebraic expression, for sixth graders in their initiation to the algebra.

**Keywords:** tutorial, generalization, equation linear, unknown quantity, autonomy, variational thought, algebra.

# Contenido

<b>Resumen</b> .....	<b>V</b>
<b>Introducción</b> .....	<b>1</b>
<b>1. Marco teórico</b> .....	<b>4</b>
1.1. Referente teórico .....	4
1.1.2. Solución de problemas .....	6
1.1.3. Unidades didácticas .....	8
<b>1.2. Referente disciplinar</b> .....	<b>10</b>
1.2.1. Concepto de generalización .....	10
1.2.2. Concepto de ecuación lineal con una incógnita .....	11
1.2.3. Métodos de solución de ecuaciones .....	12
<b>2. Objetivos</b> .....	<b>13</b>
2.1. Objetivo general .....	13
2.1.1. Objetivos específicos .....	13
<b>3. Unidad didáctica</b> .....	<b>14</b>
<b>4 Conclusiones</b> .....	<b>33</b>
<b>Bibliografía</b> .....	<b>35</b>

## Introducción

Este trabajo surge de una búsqueda de alternativas en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el grado sexto, orientada a contribuir al desarrollo de la capacidad de utilizar conceptos, representaciones y procedimientos matemáticos para interpretar y comprender su entorno social, es así como el presente trabajo aborda un proceso como es la realización de generalizaciones y el planteamiento simbólico de las mismas, además de buscar un acercamiento a las ecuaciones lineales con una incógnita y a su solución mediante procesos informales.

El proceso de transición del aritmética al álgebra trae consigo muchas dificultades para los estudiantes ya que son varios los años de trabajo con símbolos numéricos, superando dificultades y tratando de asimilar y aplicar correctamente propiedades, operaciones y demás, y de un momento a otro se encuentran que todo lo que han aprendido por así decirlo, es posible hacerlo con letras, y su mundo se voltea de cabeza.

En el análisis de resultados obtenidos por los estudiantes colombianos del grado tercero de primaria y primero de bachillerato en el Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo, SERCE (UNESCO, 2009), se encontró que el pensamiento variacional se encuentra por debajo de los demás pensamientos abordados en matemáticas. En relación al pensamiento variacional se evalúa el reconocimiento de regularidades y patrones; la identificación de variables, la descripción de fenómenos de cambio y dependencia; la noción de función y la proporcionalidad directa en contextos aritméticos y geométricos. El porcentaje de respuestas correctas para el grado tercero de primaria fue de 35,92% y para el grado sexto fue de 33,68%. En el estudio se sugieren cambios de metodologías en la manera como se les presenta la información a los estudiantes, en el caso de situaciones problemáticas sugieren, que estas posean un contexto cotidiano, la presentación de los datos debe poseer un lenguaje coloquial ya que favorece su

interpretación y sugieren que la presentación u organización de la información sea hecha en tablas ya que favorece la observación de regularidades. (UNESCO, 2009)

Con el presente trabajo se pretende posibilitar en los alumnos el fortalecimiento de su autonomía en el proceso de aprendizaje y disciplina de estudio, y por consiguiente un mejor desarrollo de las competencias básicas del pensamiento variacional, a su vez que contribuya al desarrollo de la capacidad crítica, analítica e imaginativa del estudiante, elementos fundamentales en un sujeto participativo de la sociedad. Por ello el contenido en la unidad didáctica es de fácil entendimiento, con un vocabulario claro de uso común, pertinente, contextualizado, pretendiendo que con esto sean los alumnos quienes decidan las formas de describir, registrar y comunicar sus procedimientos y que luego sean ellos quienes realicen, posterior a un debate con el profesor, el análisis de la pertinencia de las representaciones o descripciones realizadas y puedan realizar las respectivas correcciones.

La unidad busca que el estudiante en el desarrollo de la misma pueda ejercitar y a su vez verificar su evolución en el proceso de aprendizaje, y que los conocimientos que vaya adquiriendo logre complementarlos ya sea por iniciativa propia u orientado por el profesor, que ellos sean quienes dirijan su aprendizaje, que no sean receptores pasivos si no que sean partícipes activos, fortaleciendo así su autonomía como elemento fundamental para todo el proceso académico al cual deberán enfrentarse más adelante. Se hace necesario cambiar el mecanismo donde el conocimiento solo va en una dirección, profesor → alumno, por el contrario se quiere un trabajo donde el estudiante aprende por su propio esfuerzo, pero con la presencia del docente para complementar y orientar, profesor ↔ alumno.



# 1. Marco teórico

## 1.1. Referente teórico

### 1.1.1. Aspectos básicos del conocimiento matemático en la escuela

En los lineamientos curriculares se plantea que es primordial relacionar los contenidos del aprendizaje con la experiencia cotidiana. En concordancia con este planteamiento se deben tener en cuenta para la organización curricular tres aspectos: los conocimientos básicos, los procesos generales y el contexto. (Myriam & otros, 2007)

Conocimientos Básicos: referidos a los procesos cognitivos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y a los sistemas propios de las matemáticas (sistemas simbólicos, sistemas de representación, estructuras). Los pensamientos relacionan los procesos cognitivos de los estudiantes cuando se enfrentan en la actividad matemática a la construcción y uso de tópicos matemáticos específicos o cuando se enfrentan, con los sistemas simbólicos y de representación característicos del conocimiento matemático. Los pensamientos son: el pensamiento numérico y los sistemas numéricos, el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, el pensamiento métrico y los sistemas de medida, el pensamiento variacional y los sistemas analíticos y el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos.

- Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos: Comprensión de los números y de la numeración. Significado del número. Estructura del sistema de numeración. Significado de las operaciones en contextos diversos, comprensión de sus propiedades, de su efecto y de las relaciones entre ellas y uso de los números y las operaciones en la resolución de problema diversos.
- Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos: Construcción y manipulación de representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones.

- Pensamiento Métrico y Sistemas de Medida: Construcción de conceptos de cada magnitud, procesos de conservación, estimación de magnitudes y de rangos, selección y uso de unidades de medida, y patrones.
- Pensamiento Aleatorio y Sistemas de Datos: Interpretación de datos, reconocimiento y análisis de tendencias, cambio y correlaciones, inferencias y reconocimiento, descripción y análisis de eventos aleatorios.
- Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos: Reconocimiento de regularidades y patrones, identificación de variables, descripción de fenómenos de cambio y dependencia (conceptos y procedimientos asociados a la variación directa y a la proporcionalidad; a la variación lineal, en contextos aritméticos y geométricos, a la variación inversa, al concepto de función).

Procesos Generales: tienen que ver con el aprendizaje y se proponen el razonamiento, planteamiento y resolución de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración y ejercitación de procedimientos.

- Razonamiento: Dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones. Justificar estrategias y procedimientos, formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, explicar usando hechos y propiedades, identificar patrones, utilizar argumentos para exponer ideas.
- Planteamiento y Resolución de problemas. (Permea la totalidad del currículo, contexto en el cual se aprenden conceptos y herramientas): Formular y plantear problemas a partir de situaciones dentro y fuera de las matemáticas, desarrollar y aplicar diversas estrategias para resolver problemas, verificar, interpretar, generalizar soluciones. (Jaramillo & Mejía, 2001)
- Comunicación. Expresar ideas de diversas maneras, comprender, interpretar y evaluar ideas presentadas en formas diversas.
- Modelación: Identificar matemáticas específicas en un contexto general (situación problemática real), formular y visualizar un problema en formas diversas, identificar

relaciones y regularidades, traducir a un modelo matemático, representar por una fórmula o relación, solucionar, verificar y validar

- Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos: calcular, predecir el efecto de una operación, calcular usando fórmulas o propiedades. Graficar, transformar (medir, seleccionar unidades apropiadas, seleccionar herramientas apropiadas).

Contextos: Tienen que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende. La expresión contexto, tal como se expresa en los Lineamientos Curriculares, no se refiere exclusivamente a la recreación ficticia, en el espacio escolar, de situaciones relativas al entorno social y cultural que rodean a la institución educativa, sino que ante todo, hace referencia a la creación de situaciones tanto referidas a las matemáticas, otras ciencias, el entorno social y cultural, etc., como a situaciones hipotéticas a partir de los cuales los alumnos puedan pensar, formular, discutir, argumentar, construir conocimiento.

## **1.1.2. Solución de problemas**

Es común que los estudiantes aborden los problemas matemáticos que se les plantean sin una estructura, saltándose un proceso indispensable como es el análisis, tantean, suponen, buscan pistas, lo que convierte la solución del problema en algo adivinatorio. Es por ello que se han realizado numerosos trabajos y muchas personas han dedicado su trabajo a desarrollar estrategias de solución de problemas, estructuradas buscando que la solución de problemas sea un proceso ordenado que los alumnos sean competentes en este aspecto indispensable, no solo en las matemáticas, también para la vida misma.

George Pólya destacado matemático que realizó varios aportes a la matemática principalmente en el desarrollo de estrategias en la solución de problemas, en su libro *Cómo Plantear y Resolver Problemas* introduce su método de cuatro pasos, esto no se restringen únicamente a problemas matemáticos, ya que puede ser a cualquier campo de la vida, por ellos y otras razones ha tenido su estrategia de solución de problemas tanta aceptación. Veamos cuales son los pasos de esta estrategia (Cristian, 2006):

✓ Comprender el problema

En este punto el estudiante debe formularse una serie de preguntas que lo conduzcan a determinar la incógnita, los datos relevantes. En este punto el docente tiene un papel fundamental de orientar ya que debe asegurarse que el estudiante tiene una idea clara y global del problema.

✓ Idear un plan

Luego que se tiene una idea global del problema el estudiante debe proponer una posible solución para el problema. Hacer relaciones con situaciones semejantes que ya haya abordado y que se asemejen al problema a solucionar.

✓ Ejecutar el plan

El estudiante en la ejecución del plan debe verificar cada uno de los pasos que va realizando, si son correctos o no, verificando que no haya incongruencias, por lo mismo es posible que el estudiante deba devolverse o darse su tiempo para retomar el problema, pues quizás el primer análisis que haya hecho no estuvo correcto y al momento de ejecutar el plan se evidenció.

✓ Comprobar resultados

Es donde el estudiante se devuelve a leer el problema retoma lo que el problema desea que encuentre y lo compara con lo hallado por su plan. Corrobora si la respuesta es lógica confrontarla con el contexto del problema.

En los *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* (MEN) se afirma que es en los problemas donde la matemática cobra sentido ya que logra ligarse con el entorno y fusionarse con la cotidianidad, dejando de verse abstracta y de difícil acceso para el común de la población. Es por ello que al análisis y solución de problemas matemáticos debe dárseles una mayor participación en el proceso educativo como se encuentra en los estándares *“...el estudio y análisis de situaciones problema suficientemente complejas y atractivas, en las que los estudiantes mismos inventen, formulen y resuelvan problemas matemáticos, es clave para el desarrollo del pensamiento matemático en sus diversas formas”*.

### 1.1.3. Unidades didácticas

Nos aproximaremos a la definición de unidad didáctica apoyándonos en algunos trabajos que han realizado expertos en el tema:

Para Manuel Area (Area, 1993) La unidad didáctica es “segmento o porción de enseñanza y aprendizaje significativo, con entidad en sí mismo configurado en torno a un tema, centro de interés o eje organizador. Puede variar en su longitud, extensión o relevancia”

Lorenzo García (García, 1997) La define como “conjunto integrado, organizado y secuencial de los elementos básicos que conforman el proceso de enseñanza-aprendizaje con sentido propio, unitario y completo que permite a los estudiantes, tras su estudio, apreciar el resultado de su trabajo”.

Antonio Corrales define unidad didáctica de una forma mucho más amplia “instrumento de trabajo de carácter unitario que permite al profesor presentar su práctica educativa de forma articulada y completa para desarrollar unos procesos de enseñanza- aprendizaje de calidad ajustados al grupo y al alumno” (Corrales).

La unidad didáctica es una forma de planificar el proceso de enseñanza-aprendizaje alrededor de un elemento de contenido que se convierte en eje integrador del proceso, aportándole consistencia y significancia. Esta forma de organizar conocimientos y experiencias debe considerar la diversidad de elementos que contextualizan el proceso (nivel de desarrollo del alumno, medio sociocultural y familiar, Proyecto Curricular, recursos disponibles) para regular la práctica de los contenidos, seleccionar los objetivos básicos que pretende conseguir, las pautas metodológicas con las que trabajará, las experiencias de enseñanza-aprendizaje necesarios para perfeccionar dicho proceso (Escamilla, 1992).

Después de diversas definiciones de unidad didáctica se pueden destacar algunos aspectos relevantes de esta como son, el facilitar el profesor su labor ya que es una herramienta que puede ser llevada a una gran variedad de estudiantes ajustándose a su ritmo de aprendizaje y a su vez permitir en el estudiante desarrollo de su autonomía,

permite que haya un trabajo colaborativo ya que el conocimiento se construye en conjunto, es una herramienta que contiene, actividades de aprendizaje, contenido, evaluación entre otras.

De acuerdo al trabajo de varios autores existen diversos tipos de unidades didácticas y diversas clasificaciones que se realizan principalmente observando el énfasis que en ellas se haga, se hará referencia a una clasificación en particular que se forma de acuerdo al enfoque curricular que se siga al momento de realizar el diseño de la unidad didáctica, Ilustración 1 (Bolaños & Molina, 1990).

**Unidades de experiencia.** Este tipo de unidades por el contrario de la anterior, enfatizan en el alumno como centro del proceso por ende dan énfasis en las experiencias de aprendizaje primando las necesidades e intereses de los alumnos por sobre los contenidos.

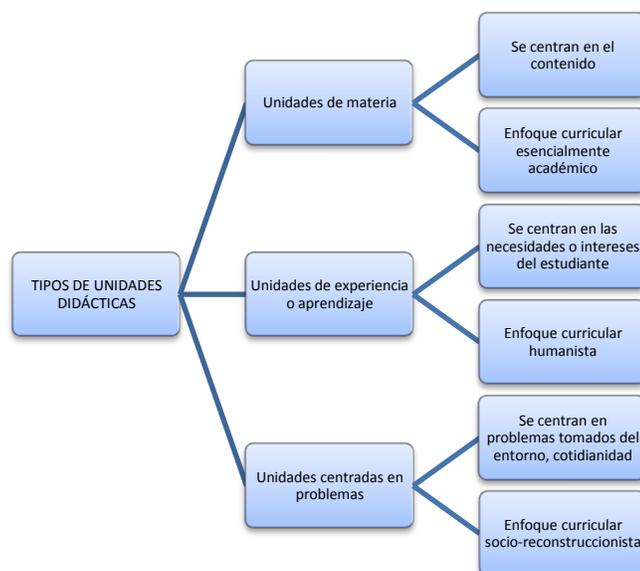


Ilustración 1. Tipos de unidades didácticas

**Unidades de materia.** En este tipo de unidades enfatiza en los contenidos y el orden lógico que a ellos se les dé, no se le da mucha importancia a las experiencias de aprendizaje.

**Unidades centradas en problemas.** Este tipo de unidades se trabaja bajo un currículo que da realmente importancia a la relación entre la escuela y la comunidad, ya que sus

experiencias de aprendizaje giran en torno a las problemáticas que la comunidad vive, buscando que el alumno se visualiza como un elemento integrador de la misma.

## **1.2. Referente disciplinar**

### **1.2.1. Concepto de generalización.**

La generalización como la define el grupo Azarquiel “traducción del lenguaje ordinario al lenguaje algebraico”, es un proceso que está inmerso en muchos de los contenidos de matemáticas, construcción de proposiciones, resolución de problemas y otros tantos aspectos de las matemáticas. La generalización es uno de los procesos con mayor presencia en la enseñanza de las matemáticas y alrededor de esta se han hecho muchos trabajos. El lenguaje natural a través de la historia ha permitido que el hombre exprese y precise lo que piensa y siente, pero este lenguaje frente a diversas situaciones donde requiere de la generalización el hombre carece de herramientas, como lo expresa el grupo Azarquiel “lo que proporciona en muchos casos mayor potencia al lenguaje algebraico con respecto al natural es, precisamente, la posibilidad de expresar lo general utilizando símbolos. Los símbolos y las reglas usuales para utilizarlos aumentan su funcionalidad y permiten expresar las relaciones con mayor precisión y simplicidad, mezclar información sobre distintas relaciones, etc.” (Grupo-Azarquiel, 1993)

Pero generalizar no solo es importante al momento de identificar el patrón en secuencias numéricas o en secuencias de figuras, lo es también contar con diversas formas de expresar esta. Radford habla de tres tipos de generalización, caracterizados por los medios de expresión usados en el proceso (Rojas & Vergel, 2013) :

Generalización factual. Los medios de expresión son los gestos y las palabras.

Generalización contextual. En este punto el estudiante usa palabras claves, ya se observa una lógica en el proceso.

Generalización simbólica. Las palabras claves son reemplazadas por símbolos.

El grupo Azarquiel plantean tres pasos para realizar un proceso de generalización:

- Identificación de la regularidad, la diferencia, la relación.

En este punto se busca que el alumno identifique lo presente en cada situación y lo que es común entre ellas, lo que no varía, y con esto hallar una regla que resuma todas las situaciones. En este punto luego de encontrar la regla el alumno deberá comprobar si esta se aplica o cumple para todos los casos.

- Su expresión verbal.

En este paso el alumno el alumno describe de diversas formas la regularidad percibida. Este proceso resulta para el alumno un poco traumático por ello es necesario que exista un ambiente de respeto y de escucha en el grupo de trabajo.

- Su expresión escrita de la manera más breve posible.

Esta ya es una fase avanzada en el proceso de generalización, pues es en ella donde se evidencias las contradicciones con mayor facilidad, ya que permite menor ambigüedad. La expresión escrita puede estar conformada por palabras y dibujos, o bien solo palabras, o solo símbolos. Cuando un alumno apenas se esta iniciando en el proceso de generalizar debe animársele a que haga uso de todos estos elementos.

### 1.2.2. Concepto de ecuación lineal con una incógnita.

Una *ecuación* es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas y que solo se verifica o es verdadera para determinados valores de las incógnitas.

Una *ecuación lineal con una incógnita* es de la siguiente forma  $ax + b = c$  donde  $x$  es la incógnita y  $a, b$  y  $c$  son números conocidos (con  $a \neq 0$  para que exista la ecuación). La *solución* de una ecuación son los valores de las incógnitas que satisfacen la ecuación, es decir sustituidos en lugar de las incógnitas, convierten la ecuación en identidad. Las ecuaciones de lineales con una incógnita tienen una sola raíz (solución)

### 1.2.3. Métodos de solución de ecuaciones

Varias investigaciones han descrito dos tipos de conocimientos matemáticos, conocimiento informal y formal. El primero es adquirido por el niño fuera del contexto escolar, es un conocimiento aplicado, utilizado para resolver problemas de la cotidianidad. El conocimiento formal constituido por símbolos conceptos, reglas, propiedades y algoritmos. (Reverand, 2004)

#### a) Métodos informales. (Grupo-Azarquiel, 1993) (Kieran & E, 1989)

En este punto encontramos enfoques de resolución intuitivos como

- *Cadenas o diagramas de flechas.* Donde se piensa un número y se realizan las operaciones dadas y luego con una segunda persona que desconoce el número pensado y sus resultados parciales, parte del número final obtenido en dirección contraria con el fin de obtener el número pensado por la primera persona.

Con esta actividad se busca el acercamiento a las operaciones inversas y al concepto de ecuación



- *Identidades aritméticas.* Este tipo de actividades permiten acercarse al concepto de ecuación intuitivamente, además refuerza el concepto de solución como el número que hace verdadera la identidad. Es un método de sustitución donde el estudiante tantea probando con los números que sean necesarios.

#### b) Métodos formales (Grupo-Azarquiel, 1993) (Kieran & E, 1989)

Los métodos formales de resolución de ecuaciones incluyen la transposición de términos, es decir si cambiamos el número de lado de la ecuación este también cambia de signo.

La transposición está considerada por algunos estudiosos de las matemáticas como una versión abreviada del procedimiento de realizar la misma operación en ambos lados de la

ecuación, lo que se asemeja mucho al trabajo que se realiza con las balanzas. El procedimiento de ejecutar la misma operación en los dos lados de una ecuación pone el énfasis en la simetría de una ecuación; este énfasis está ausente en el procedimiento de transposición.

Las balanzas trabajan el concepto de igualdad físicamente, apoyándose en el principio de equilibrio de masas en ambos platos. Este tipo de actividades permite trabajar con incógnitas a ambos lados de la ecuación, lo que con otras actividades se hace un poco más complejo para el estudiante.

## **2. Objetivos**

### **2.1. Objetivo general**

Elaborar una unidad didáctica, como estrategia metodológica para facilitar al alumno de grado sexto, la adquisición del conocimiento, desarrollo de habilidades y competencias en el proceso de generalización y solución de ecuaciones lineales con una incógnita a partir de métodos informales.

#### **2.1.1. Objetivos específicos**

- Plantear al alumno problemas, en contextos variados, que permitan generalizarse mediante ecuaciones lineales con una incógnita.
- Diseñar actividades direccionadas a propiciar en los estudiantes el aprendizaje autónomo e independiente y que presente el conocimiento asequible para el estudiante.

### 3. Unidad didáctica

#### Presentación

Son varios los referentes que permitirían ver cómo estamos a nivel de matemáticas en el país, en el plan de mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas 2012-2015, el análisis que se realizó por la Red Matemática de Antioquia de los resultados en las olimpiadas del conocimiento en Antioquia se encontró en relación a los contenidos en álgebra muchas dificultades, especificando casos donde el estudiante debía realizar la construcción de una ecuación lineal, sólo 22.569 estudiantes equivalentes al 36%, contestaron en forma correcta, y se resalta que el grado 10 superó al 11. En el estudio se sugiere “Leer más para mejorar la comprensión de textos matemáticos y hacer más ejemplos de construcción de modelos básicos como los lineales”. (Red Matemáticas de Antioquia, 2013)

En los grados superiores a través de las prueba saber entre otras se han evidenciado muchas falencias en los estudiantes en el aspecto algebraico ya que es un tema en el cual se les inicia quizás bruscamente en los grados séptimo, octavo pero con más fuerza en este último y es esto lo que conduce a reflexionar sobre la necesidad de iniciar trabajos en las competencias que fortalecen el pensamiento variacional desde las grados inferiores, para lograr un buen desarrollo de estas competencias y que los estudiantes de grados superiores no sientan este tema como nuevo, si no por el contrario que lo sientan muy familiar porque lo vienen trabajando con antelación. Las pruebas SABER de los grados 5° y 9° evalúan las competencias que han desarrollado los alumnos hasta quinto y hasta noveno, entre las competencias que se valoran están razonamiento y argumentación (pensamiento numérico-variacional), comunicación, representación y modelación (pensamiento geométrico-métrico) y el planteamiento y resolución de problemas (pensamiento aleatorio). En área de matemáticas el desempeño relativo de los estudiantes de ambos grados es inferior al de lenguaje y ciencias. La comparación entre los resultados alcanzados por los estudiantes de quinto y noveno grados en matemáticas muestra una situación muy preocupante en ambos casos, pues únicamente una proporción cercana a la cuarta parte (25% y 22%, respectivamente) logra o supera los desempeños esperados. (ICFES-INFORME, 2009)

Teniendo como referencia los Lineamientos Curriculares y los Estándares de Competencias, donde desde quinto se busca que los estudiantes identifiquen patrones de variación y en sexto se busca que describan, representen y den solución a generalizaciones simples. Es por ello que la presente unidad didáctica tiene como finalidad lograr alcanzar lo anteriormente mencionado con el grado sexto, a través de actividades dotadas de significado dentro del contexto del joven, donde él sea quien construya el concepto, producto del hacer. Donde el trabajo no sea tan operativo si no más intuitivo y de análisis. Con las actividades se busca promover la interacción en el aula y propiciar la participación, que sea un proceso reflexivo y colaborativo entre los alumnos. Se buscará reforzar la lectura y escritura en ellos, así mismo permitirá que los alumnos den explicaciones organizadas, formulen argumentos y realicen análisis lógicos. La unidad se apoyará en los conocimientos e intereses de los alumnos.

## Objetivos

- Reconocer y describir, patrones de variación numéricos, geométricos y gráficos, en forma verbal, simbólica y/o por medio de tablas.
- Representar generalizaciones de relaciones entre números naturales, usando ecuaciones.
- Construir y solucionar expresiones que representen situaciones de variación generalizada, mediante procesos de ensayo y error.

## Contenidos

- Generalización y representación de la generalización utilizando expresiones algebraicas.
- Ecuación lineal con una incógnita.
- Métodos informales para resolver ecuaciones lineales con una incógnita.

## Metodología

Cada actividad fue diseñada pensando en motivar y despertar el interés de los alumnos y propiciar el aprendizaje en estos a partir de sus descubrimientos y experiencias personales, buscando que este sea un aprendizaje significativo, que no sea mecánicamente almacenado, sino que se integre a su estructura lógica de manera permanente. Las actividades se desarrollaran en su totalidad dentro del aula, y en grupos dependiendo de la misma.

En las clases se propenderá porque los alumnos pregunten, reflexionen y expresen abiertamente sus análisis, el docente guiará y complementará a su vez que conduce a que estos se formulen preguntas y construyan conceptos. Finalmente al terminar cada actividad el docente intervendrá facilitando la síntesis del trabajo y las conclusiones finales alrededor de las construcciones que los estudiantes hayan logrado hacer, alcanzando una construcción colectiva de los conceptos trabajados en la actividad.

Las actividades son pensadas para los diferentes ritmos de aprendizaje que pueden darse al interior de un aula de clase, permitiendo que el alumno trabaje a su paso sin presiones por sus compañeros que van adelante o atrás de él en el trabajo, propiciando así que el estudiante fortalezca su autonomía que sea él quien se exija y determine su avance en el proceso.

La unidad se compone de los siguientes apartados:

- ❖ **Trabajemos.** Actividades diseñadas alrededor del objetivo de aprendizaje ya establecido y orientadas al análisis de situaciones que involucran procedimientos y conceptos que se pretenden que el joven conozca e integre a su saber.
- ❖ **Concluyamos.** En este punto nos formularemos una serie de preguntas y la respuesta será construida por todos los participantes de la actividad; será la socialización del conocimiento.
- ❖ **Evaluemos.** Es donde el joven evidenciará si se alcanzó los objetivos propuestos para el conjunto de actividades de la unidad.

## Trabajemos

En este punto de nuestra unidad reconocerás patrones de variación en diversas situaciones, ya sean geométricas, numéricas o gráficas, y describirás estos ya sea por medio de lenguaje común, de una expresión matemática o tablas.

<b>Actividad</b>	Torre de bloques, la que sigue, don Pepe el zapatero, la sopa
<b>Material necesario</b>	Jenga, papel y lápiz, calculadora si lo requiere
<b>Número de personas en la actividad</b>	2
<b>Objetivos</b>	Reconocer y describir, patrones de variación numéricos, geométricos y gráficos, en forma verbal, simbólica y/o por medio de tablas.

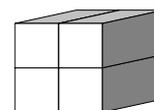
### Actividad: torre de bloques

Construye una torre de 2 bloques por nivel, como se muestra a continuación.

Es así como el primer nivel sería



El segundo nivel sería



1. Completa la información de la tabla donde relaciones la cantidad de niveles con el número de cubos requeridos

Número de Niveles	Bloques necesarios
1	2
2	4
3	
4	
5	
12	
60	

2. Escribe con tus palabras que procedimiento llevaste a cabo para hallar el número de bloques necesarios para el nivel 60.

---



---

3. Analiza detenidamente los datos ubicados en la tabla . ¿Qué diferencias o semejanzas encuentras en los datos?

---



---

4. ¿Cómo calcularías el número de bloques de cualquiera de los niveles? Explica tu respuesta.

---



---

### Actividad: la que sigue

Observa la siguiente sucesión de figuras:

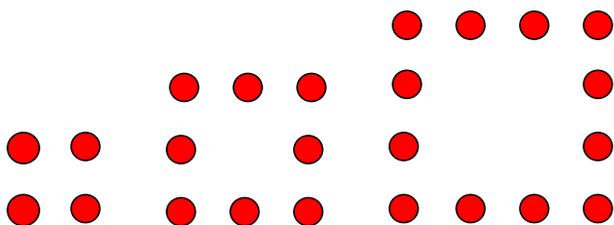


Figura 1

Figura 2

Figura 3

Figura 4

Figura 15

a) Encuentra la figura que corresponde a la posición 4 y a la posición quince. Dibújalas.



b) En total, ¿cuántos círculos forman la figura 4 y quince? Explica cómo obtuviste el resultado.

---



---

c) ¿Cuál de las siguientes reglas podrían servir para encontrar el número de círculos de cualquiera de las figuras de la sucesión?

- Los números pares.
- Multiplicar por 4 el número de la figura.
- Multiplicar por 3 el número de la figura y sumar 1 al resultado.
- Sumar cuatro veces el número de la figura.
- El número de círculos de la figura anterior más cuatro.

Explica tu respuesta. \_\_\_\_\_

---



---

### **Actividad: don pepe el zapatero**

Don Pepe el zapatero tiene un encargo de una cantidad de zapatos para dentro de ocho días, él calculó que haciendo dos pares de zapatos por día alcanza a tener el pedido listo para el día señalado. Completa la tabla con la información proporcionada.

Día	Total de tortas
1	2
2	4
3	6
4	
5	
6	
7	
8	





¿Cuántos pares de zapatos tienen don Pepe al cabo de seis días? Explica tu respuesta.

---



---



¿Cuántos pares de zapatos entregará don Pepe a primera hora en pasados nueve días? Explica tu respuesta.

---



---



Le preguntaron a Don Pepe como realizó el cálculo para saber cuántos pares de zapatos tendría cada día, a lo que contestó “sólo multiplique”. Explica en tus palabras ¿cómo crees que lo hizo?

---



---



¿Cuántos pares de zapatos tendría don Pepe transcurridos quince días, produciendo dos pares de zapatos por día? Explica tu respuesta.

---



---



### **Actividad: la sopa**

En una receta de cocina dice: “Para cocinar una sopa que alcance para 16 personas se necesitan cuatro litros de agua”.

a) ¿Cuántos litros de agua se necesitarán para una sopa para ocho personas? ¿Por qué?

---



---



b) ¿Cuántos litros de agua se necesitarán para hacer una sopa para cuatro personas? ¿Por qué?

---



---



c) ¿Cuántos litros de agua se necesitarán para hacer una sopa para 32 personas? ¿Por qué?

---



---

d) ¿Cómo calcularías la cantidad de agua para hacer la sopa para un banquete para 64 personas? Haz un dibujo y/o tabla que te permita explicarlo.

e) Con los valores de la cantidad de agua que requieres para hacer la sopa necesaria para el número de personas indicado en cada caso, llena la tabla siguiente:

Número de personas	Litros de agua para hacer la sopa
4	
8	
16	
32	
64	

f) Describe el procedimiento que realizarías para encontrar la cantidad de litros que necesitas para hacer la sopa, para cualquier cantidad de personas.

---



---



## Concluycamos

¿Cuál es el lenguaje natural y que ventajas y desventajas observas que tiene en matemáticas?

---

---

¿Cuál es el lenguaje algebraico y que ventajas y desventajas observas que tiene en matemáticas?

---

---

¿Qué es generalizar en matemáticas?

---

---

¿Qué es una expresión algebraica?

---

---

¿Qué entiendes por incógnita?

---

---



## Trabajemos

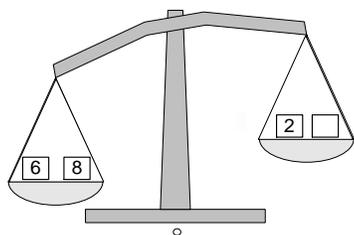
En este punto de nuestra unidad realizaras escribirás y resolverás ecuaciones de primer grado con una incógnita, utilizando diversas estrategias

<b>Actividad</b>	Usemos la balanza, al revés, adivinanzas
<b>Material necesario</b>	Papel, calculadora si lo requiere y lápiz
<b>Número de personas en la actividad</b>	3
<b>Objetivos</b>	Representar generalizaciones de relaciones entre números naturales, usando ecuaciones. Construir y solucionar expresiones que representen situaciones de variación generalizada, mediante procesos de ensayo y error.

### Actividad: usemos la balanza

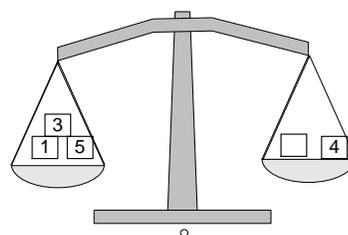
Don Juan el tendero debe usar mucho la balanza para saber cuál es la cantidad exacta que vende de los diversos productos que tiene en su tienda, es por ello que debe aprender a nivelarla, buscando siempre que en cada plato haya la misma cantidad. Escribe una expresión algebraica que simbolice lo que pasa en la balanza.





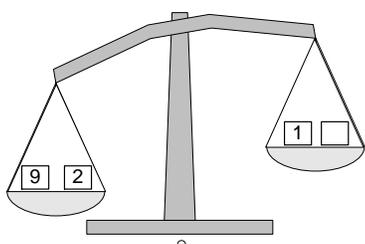
Número que falta:

Expresión:



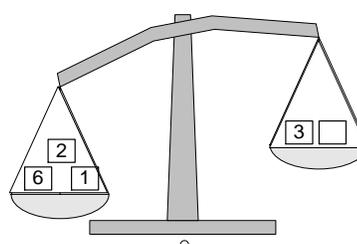
Número que falta:

Expresión:



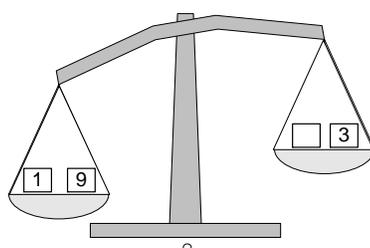
Número que falta:

Expresión:



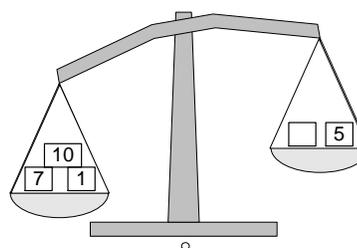
Número que falta:

Expresión:



Número que falta:

Expresión:



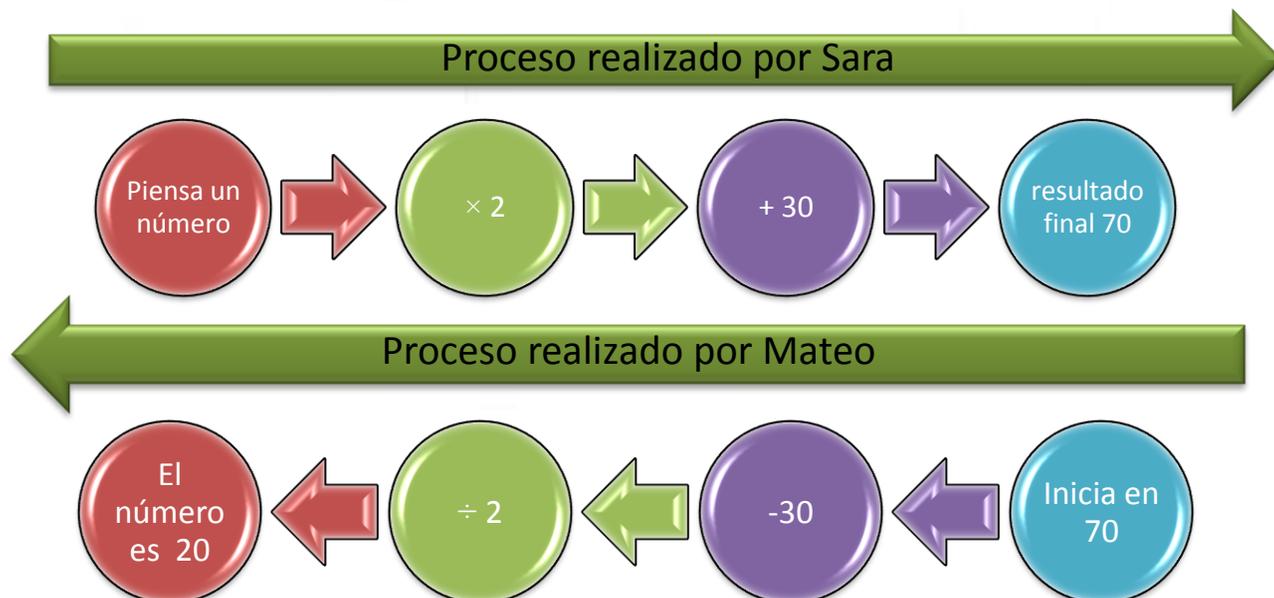
Número que falta:

Expresión:



## Actividad: al revés

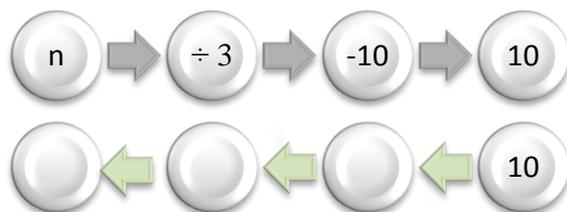
Mateo pidió a Sara pensar un número, que luego lo duplicara y al resultado le agregara 30. Sara le cuenta que el resultado final es 70, entonces Mateo dice: ya sé, el número que pensaste fue el 20. Sorprendida Sara asienta con la cabeza y pregunta ¿cómo lo hiciste? Muy fácil trabajando al revés contesta Mateo, observa:

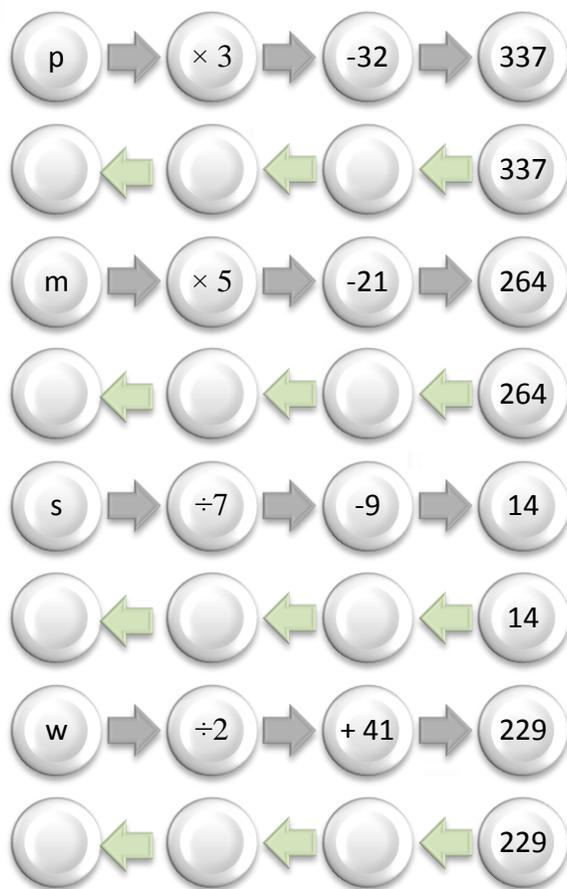


Observa Sara que me devuelvo en las operaciones pero empleando el inverso de estas, tu sumas yo resto, tú multiplicas yo divido, ves que sencillo.

Ahora con tu compañero juega a adivinar el número pensado como lo realizado por Sara y Mateo, "Trabajando al revés".

a) En los siguientes diagramas el número pensado está representado por una letra, mediante el proceso "Trabajando al revés", encuentra cuál es este número.





- b) Haciendo uso del método anterior, encuentra el valor que tiene la letra presente en cada expresión.

$$x + 120 = 254$$

$$x - 52 = 27$$

$$3x = 18$$

$$7x = 63$$

$$\frac{x}{3} = 23$$

$$\frac{x}{5} = 10$$

$$7x + 9 = 32$$

$$8x - 48 = 0$$



## Actividad: adivinanzas

Escribe inicialmente la equivalencia numérica del enunciado, y luego procede a escribir una ecuación que le permitiría hallar a cualquier persona, que lea los enunciados, la solución a estos.

a) Tu edad disminuida en el doble de 7.

Respuesta numérica

Ecuación:

b) El dos aumentado en 28.

Respuesta numérica

Ecuación:

c) El triple de la suma de 3 y 8.

Respuesta numérica

Ecuación:

d) El 24 disminuido en su tercera parte.

Respuesta numérica

Ecuación:

e) La diferencia entre el doble de 18 y su sexta parte.

Respuesta numérica

Ecuación:

f) El antecesor de 30.

Respuesta numérica

Ecuación:

g) La edad que tenías hace 7 años, si hoy tienes 15.

Respuesta numérica

Ecuación:





h) La edad que tendrás en 15 años si hoy tienes 13.

Respuesta numérica

Ecuación:



i) Los años que faltan para que cumplas 45 años, si hoy tienes 12 años.

Respuesta numérica

Ecuación:



j) La edad de tú mamá, si ella tiene el triple de la edad de Laura. Laura tiene 12 años.

Respuesta numérica

Ecuación:



k) ¿Qué número es, si su doble es igual a 96?

Respuesta numérica

Ecuación:



l) ¿Qué número soy si mi tercera parte es 45?

Respuesta numérica

Ecuación:



m) ¿Qué número soy si me multiplican por 8 y el resultado es 168?

Respuesta numérica

Ecuación:



## Concluycamos

¿Es lo mismo una igualdad que una ecuación?

---

---

¿Cómo resolverías una ecuación? Da un ejemplo, explicando, paso a paso.

---

---

¿Cómo puedes comprobar que la solución encontrada mediante una ecuación es correcta?

---

---

¿Cuántas soluciones tiene una ecuación lineal de una incógnita?

---

---



## Evaluemos

1. Dibujar la figura 4 y 5, luego de observar las siguientes figuras.



Figura 1

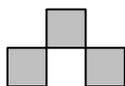


Figura 2

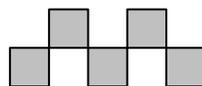


Figura 3



- a. ¿Cuántos cuadros presentará la figura 10?

---

- b. Calcule la cantidad de cuadros que tendría la figura en la posición 100. Explica tu respuesta.

---



---

- c. Escriba una expresión algebraica que permita encontrar la cantidad de cuadros que tiene la figura en cualquier posición.

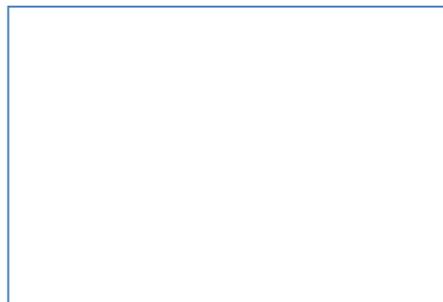
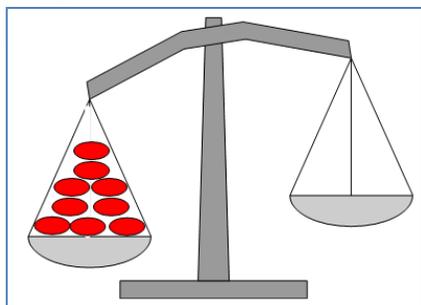
---

2. De acuerdo a las siguientes equivalencias:

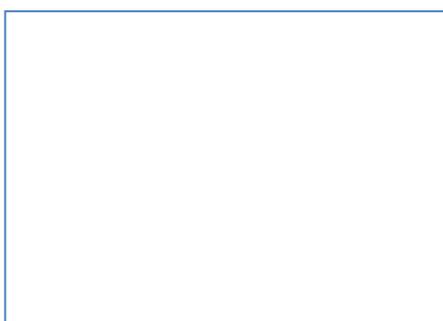


- a) Equilibra la balanza. En el plato vacío deben estar presentes los tres tipos de figuras propuestas. Realiza el dibujo.

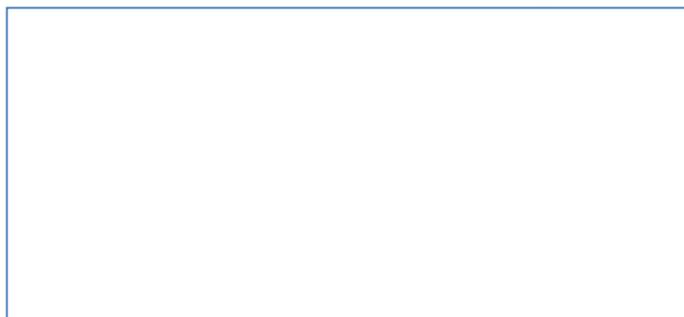
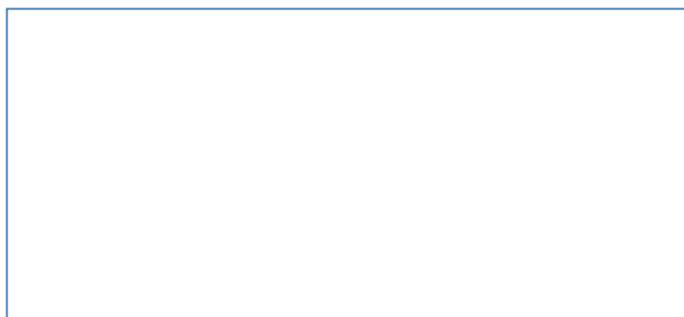




b) Equilibra la balanza con solo óvalos. Realiza el dibujo.



3. Las siguientes balanzas están equilibradas, obsérvalas y plantea la ecuación que llevaría a hallar el valor de la pieza con el peso desconocido.



4. Isabel resolvió la ecuación  $x + 23 = 57$  y determinó que  $x = 27$  ¿tiene razón Isabel? Explica tu respuesta

---

---

---



## 4 Conclusiones

El objetivo fundamental de este trabajo era elaborar una unidad didáctica para el trabajo en el aula en relación al tema de generalizaciones y la introducción a la solución de ecuaciones lineales, pero a su vez fue un trabajo que le permitió al docente adquirir mayor confianza al momento de innovar en el aula de clase en relación a la forma de trabajar los contenidos con los estudiantes.

El proceso de generalización es de gran significancia para iniciar a los estudiantes en el estudio del álgebra. El inicio temprano con actividades encaminadas a expresar lo general favorece en gran medida el proceso de simbolización y manipulación de expresiones algebraicas.

Para el caso de la solución de ecuaciones por el método de las balanzas, existe varias desventajas, pues en ella las soluciones son siempre positivas; también las ecuaciones que impliquen sustracciones no son fácilmente modeladas. Sin embargo, con la balanza los estudiantes pueden conceptualizar los pasos físicamente como a nivel abstracto.

Para el caso de la solución de ecuaciones donde el estudiante hace uso de las operaciones inversas, el objetivo allí es que él por la práctica y la reflexión descubra las propiedades esenciales de estas expresiones, tema que se enseña como orden o prioridad de las operaciones.

En varias de las actividades del trabajo se propone que el alumno describa o explique en sus palabras que percibe de la actividad que trabaja en el momento, ya que la necesidad de explicar hace aparecer las contradicciones y vacíos en las hipótesis que él haya hecho mentalmente. Por ello adicional a esto el trabajo en grupos pequeños en la etapa de descripción facilita el intercambio de ideas y opiniones, propicia que se realicen

comprobaciones de las suposiciones, reformulación de las mismas y un acercamiento a la solución más acertada.

## Bibliografía

Area, M. (Septiembre de 1993). *Unidades didácticas e investigación en el aula* . Obtenido de <http://manarea.webs.ull.es/wp-content/uploads/2010/06/librounidades.pdf>

Bolaños, G., & Molina, Z. (1990). *Introducción al currículo*. Euned.

Chacel, R. (5 de Diciembre de 2013). *George Polya: estrategias para la solución de problemas*. Obtenido de [http://ficus.pntic.mec.es/fheb0005/Hojas\\_varias/Material\\_de\\_apoyo/Estrategias%20de%20Polya.pdf](http://ficus.pntic.mec.es/fheb0005/Hojas_varias/Material_de_apoyo/Estrategias%20de%20Polya.pdf)

Corrales, A. (s.f.). *Revista digital de educación física*. Obtenido de La programación a medio plazo dentro del tercer nivel de concreción: Las unidades didácticas: [https://www.google.es/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&cad=rja&ved=0CDsQFjAC&url=http%3A%2F%2Fdialnet.unirioja.es%2Fdescarga%2Farticulo%2F3175435.pdf&ei=\\_03CUouMCcO2kQeUxoHoBQ&usg=AFQjCNHsOAqA8GBZ8Bq-k4YcYYbOICsDUA&bvm=bv.58187178,d.eW0](https://www.google.es/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&cad=rja&ved=0CDsQFjAC&url=http%3A%2F%2Fdialnet.unirioja.es%2Fdescarga%2Farticulo%2F3175435.pdf&ei=_03CUouMCcO2kQeUxoHoBQ&usg=AFQjCNHsOAqA8GBZ8Bq-k4YcYYbOICsDUA&bvm=bv.58187178,d.eW0)

Cristian, A. (2006). Las ideas de Pólya en la resolución de problemas . *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*.

Escamilla, A. (1992). *Unidades didácticas, una propuesta de trabajo en el aula* . Luis Vives.

Fiol, L. (1990). *Proporcionalidad directa: la forma y el número*. Madrid: Síntesis.

Flores, R., & Castellanos. (2011). Una propuesta de enseñanza para favorecer la transición de la aritmética al álgebra en alumnos de secundaria. *Didac*, 43-49.

García, L. (1997). *Una propuesta de estructura de unidad didáctica y de guía didáctica*. Obtenido de [http://cvonline.uaeh.edu.mx/Cursos/Maestria/MGIEMV/DisenoMatDidactEV10/materiales/Unidad%203/Lec5\\_%20EstructuraUnidadGuiaDid\\_U3\\_%20MGIEV001.pdf](http://cvonline.uaeh.edu.mx/Cursos/Maestria/MGIEMV/DisenoMatDidactEV10/materiales/Unidad%203/Lec5_%20EstructuraUnidadGuiaDid_U3_%20MGIEV001.pdf)

Grupo-Azarquiel. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis.

ICFES-INFORME. (2009). *Informe saber 5° y 9°*. Obtenido de <https://portal.icfes.s3.amazonaws.com/datos/Informe%20nacional%20de%20resultados%20de%20SABER%205o%20y%209o%202009%20Resumen%20Ejecutivo.pdf>

Jaramillo, A., & Mejía, C. (2001). *Modelos de razonamiento lógico-matemático implementados en situaciones problema, en algunos temas específicos de la matemática*. Medellín: Universidad de Antioquia.

Kieran, C., & E, F. (1989). I aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Investigación y experiencias didácticas* , 229-240.

Lovell, K. (1999). *Desarrollo de conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños*. España: Morata.

Martínez, M. L., Da Valle, N. A., Zolkower, B., & Bressan, A. (Junio de 2002). La relevancia de los contextos en la Resolución de Problemas de Matemática: una experiencia para docentes y sus capacitadores. *Paradigma*, XXIII, 59-94.

MEN. (1998). *Ministerio de Educación Nacional*. Recuperado el 7 de Abril de 2013, de [http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869\\_archivo\\_pdf9.pdf](http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf)

MEN. (s.f.). *Ministerio de Educación Nacional. República de Colombia*. Obtenido de Estándares básicos de competencias en matemáticas: [http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042\\_archivo\\_pdf2.pdf](http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf)

Myriam, A., & otros. (Mayo de 2007). *Instituto colombiano para el fomento De la educación superior –icfes. Fundamentación conceptual Área de matemáticas*. Recuperado el 10 de junio de 2013, de <http://www.iered.org/cmmapserver/servlet/SBReadResourceServlet?rid=1H1GMFTGC-7HNZQR-1KP>

Puig, L. (2013). *Poner un problema en ecuaciones*. Recuperado el 23 de Mayo de 2013, de <http://www.uv.es/puigl/ppe.pdf>

Puig, L., & Fernando, C. (1995). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.  
Red Matemáticas de Antioquia. (2013). *Prueba de Matemáticas Antioquia, errores típicos y recomendaciones. Resultados por colegio*. Medellín.

Reverand, E. (2004). Construyendo la aritmética formal a partir de la informal: un estudio de caso. *Revista de Pedagogía*.

Rojas, P., & Vergel, R. (2013). Procesos de generalización y pensamiento algebraico . *Revista científica* .

UNESCO. (Enero de 2009). *icfes*. Obtenido de <https://portal.icfes.s3.amazonaws.com/datos/Aportes%20para%20enseñanza%20de%20las%20Matemáticas.pdf>

UNESCO. (Enero de 2009). *Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo*. Obtenido de <https://portal.icfes.s3.amazonaws.com/datos/Aportes%20para%20enseñanza%20de%20las%20Matemáticas.pdf>