UNA PROPUESTA PARA DESARROLLAR PENSAMIENTO ALGEBRAICO DESDE LA BÁSICA PRIMARIA A TRAVES DE LA ARITMÉTICA GENERALIZADA.

Natalia Astrid Guzmán Bautista

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Bogotá, Colombia

2013

UNA PROPUESTA PARA DESARROLLAR PENSAMIENTO ALGEBRAICO DESDE LA BÁSICA PRIMARIA A TRAVES DE LA ARITMÉTICA GENERALIZADA.

Natalia Astrid Guzmán Bautista

Trabajo de investigación presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director (a):

Myriam Margarita Acevedo Caicedo

Profesora Titular

Departamento de Matemáticas.

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Bogotá, Colombia

2013

Resumen

En la mayoría de los diseños curriculares de matemáticas del nivel básico se puede observar que los conceptos, procedimientos y lenguaje del álgebra se introducen de manera explícita a partir del grado octavo, los estudiantes pasan repentinamente de estudiar operaciones y relaciones entre números a operar con expresiones algebraicas y manipular variables. Este hecho origina variedad de obstáculos epistemológicos y cognitivos en la transición de la aritmética al álgebra, obstáculos que han sido ampliamente estudiados por grupos de investigadores de diferentes países.

Estos obstáculos y sus posteriores consecuencias, podrían atenuarse, como sugiere un importante grupo de investigadores, si esta transición no parte del estudio sin significado de la sintaxis del álgebra en octavo grado, sino del uso paulatino y con sentido del lenguaje algebraico desde la primaria.

La propuesta didáctica que se presenta en este trabajo pretende justamente desarrollar el pensamiento algebraico de los niños desde la básica primaria. Para consolidarla se revisaron en primer lugar momentos claves de una etapa histórica muy importante en la construcción del sentido y significado de la variable, **la retórica**, fase que podría desarrollarse de manera natural desde el trabajo aritmético inicial pero que se ignora o se trabaja superficialmente en las aulas; a pesar de ser primordial para la posterior introducción del lenguaje simbólico. Y desde el punto de vista didáctico se estudiaron los marcos teóricos de dos investigaciones actuales, que plantean la incorporación de procesos algebraicos vinculados al estudio de patrones numéricos y geométricos desde los niveles iniciales: Early – álgebra y Pre- álgebra.

Aparte de la propuesta descrita y sus referentes didácticos y epistemológicos este trabajo incluye una descripción analítica de algunas de las etapas de la historia del álgebra relacionadas con la introducción y desarrollo del concepto de variable y con el proceso de evolución del lenguaje simbólico formal, y presenta un análisis de la introducción de los primeros conceptos algebraicos en textos de básica primaria y secundaria.

Palabras clave: Variable, lenguaje simbólico, pensamiento algebraico, variación, regularidad, patrón, early – álgebra, pre- Álgebra,

Abstract

In most math curricula basic level we can see that the concepts, procedures and language of algebra are introduced explicitly from the eighth grade, students spend studying suddenly transactions and relationships between numbers to operate with expressions Algebraic and manipulate variables. This fact originates variety of epistemological and cognitive obstacles in the transition from arithmetic to algebra, obstacles that have been extensively studied by research groups from different countries.

These barriers and their consequences could be mitigated, as suggested by a large group of researchers, if this transition is not without significance in the study of the syntax of algebra in eighth grade, but the gradual and meaningful use of language from elementary algebra.

The methodological approach presented in this paper aims to develop algebraic thinking just of children from elementary school. To consolidate were revised first key moments a very important historical stage in the construction of meaning and significance of the variable, rhetoric, and phase could be developed naturally from the initial arithmetical work but ignored or superficially works the classroom, despite being central to the subsequent introduction of symbolic language. And from the educational point of view the theoretical frameworks studied two current research, incorporating posed algebraic processes linked to the study of numerical and geometric patterns from initial levels: Early - Pre-algebra and algebra.

Apart from the proposal described and its didactic and epistemological concerning this work includes an analytical description of some of the stages in the history of algebra related to the introduction and development of the concept of variable and with the process of formal symbolic language evolution, and presents an analysis of the introduction of the first texts algebraic concepts in basic primary and secondary.

Keywords: Variable, symbolic language, algebraic thinking, variation, regularity, pattern, early - algebra, pre-algebra.

Contenido

Pág.

Resumen..V

Lista de tablas X

Introducción 1

1. Marco Histórico -Epistemológico: 5

El desarrollo del lenguaje simbólico y el concepto de variable 5

1.1 Etapa Retórica... 6
1.2 Etapa Sincopada 9
1.3 Etapa Simbólica 11

2. Didáctica de la variable y su vínculo con la aritmética. 14

2.1 Pre - algebra 16
2.2 Early - algebra...17
2.2.1 Del entorno de aprendizaje. 18
2.3 PRE – ÁLGEBRA VS. EARLY ALGEBRA. 20

3. Análisis de textos. La variación y la variable. 22

3.1 La variación en los documentos del MEN (Ministerio de Educación Nacional).22
3.2 La Variable en libros de texto...25

4. Propuesta Metodológica para el desarrollo del pensamiento algebraico desde la básica primaria...30

4.1 Actividad 1: “Triangulo de Sierpinsky” 32
4.2 Actividad 2: “Diagonales de los Polígonos”...36
4.3 Actividad 3: “El salto de la rana” 39
4.4 Actividad 4 “Misioneros y Caníbales”...43

5. Conclusiones y recomendaciones 47

5.1 Conclusiones 47
5.2 Recomendaciones...49

A. Anexo 1: Tabla 3-1: Listado de libros de texto analizados.................................50

B. ANEXO 2: tabla de contenido, texto escolar, “Símbolos 4” Ed. Voluntad. 2005 51

A. Anexo 3: tabla de contenido, texto escolar, “Símbolos 5” Ed. Voluntad. 2005 ..53

A. Anexo 4: tabla de contenido, texto escolar, “Matemáticas 5” Ed. Escuelas del futuro. 2005 54

A. Anexo 5: tabla de contenido, texto escolar, “Hipertexto 6” Ed. Santillana. 201055

A. Anexo 6: Ejemplo ejercicios, texto escolar, “Matemáticas 5” Ed. Escuelas del futuro. 2005 56

Bibliografía 57

Lista de tablas

Pág.

Tabla 1-1: Etapa retórica: aportes por civilización. 7
A. **Anexo 1**: Tabla 3-1: Listado de libros de texto analizados. 47

Introducción

A menudo, junto con la apatía de los estudiantes hacia las matemáticas, se encuentra un sinsabor en los niños cuando mencionan sus experiencias o las de otros frente al álgebra. La imagen de esta área, es la de un conjunto de algoritmos que hay que memorizar, tal es el caso de las reglas de factorización o las técnicas para despejar ecuaciones. Estas últimas temáticas, son las que comúnmente se abordan en las aulas de clase y su manipulación es considerada por docentes y estudiantes como sinónimo de saber álgebra.

En cursos superiores se observan en consecuencia diversidad de problemas. Son ejemplos de ellos, el análisis incorrecto de representaciones graficas, la no diferenciación de variables dependientes e independientes o de variables continuas o discretas, algunos estudiantes representan con trazos continuos cualquier situación de modelación funcional que se le presenta sin importar el carácter de las variables. Un problema fundamental de la enseñanza del álgebra, que motiva dificultades como las anteriores y que mencionan diversas investigaciones, es la forma árida, abstracta, descontextualizada y alejada del mundo concreto en que se presentan las diferentes temáticas que generalmente son tratadas como independientes y sin una clara estructura. Los estudiantes memorizan conceptos, procedimientos y algoritmos, sin ninguna comprensión de su significado y sin construcción de sus relaciones.

> *Esto se debe en parte a que este contenido matemático se enseña por lo general a partir de fuentes limitadas de significados, usualmente se toma como base el dominio numérico, dejando de lado ideas importantes que se interconectan con otros dominios matemáticos, como el geométrico. Además pocas veces los problemas algebraicos son basados en la cotidianidad. ROJANO (2004)*

Los problemas anteriormente mencionados se originan desde luego en las dificultades que tienen los estudiantes cuando se introducen al estudio formal de álgebra, no logran dar significado a la variable y por ende no están en capacidad de usarla en contextos de aplicación. Esto lleva a pensar que las dificultades del álgebra se deben a la naturaleza abstracta de sus elementos. Collis (1999) dice que esta dificultad no sólo se da con las letras a un determinado nivel, sino que está muy relacionada con el tamaño de los números en otros niveles. Cree que el pensamiento concreto permanece mientras está restringido a la experiencia concreta, y que se llega al pensamiento formal en el momento en el que se pueden manejar elementos abstractos y operaciones

Bajo esta perspectiva, se daría lugar al paso de lo concreto a lo abstracto, o como Piaget lo llama de la percepción a la representación. Esto no sólo se presenta al enseñar nociones espaciales y geométricas también se presenta en la enseñanza del álgebra, puesto que el mejor camino con estudiantes de los niveles básicos es ir desde lo concreto, lo manipulativo o lo intuitivo para llegar a la simbolización que en este caso sería lo abstracto.

Lo anterior se reafirma en numerosas investigaciones didácticas como la desarrollada por Kieran (2007) quien luego de hacer un cuidadoso análisis del tema, intenta buscar la forma de construir significados para los símbolos y su manipulación a través de situaciones reales. En este mismo sentido Mason (1985) plantea que el álgebra no debe enseñarse como un programa separado de otras áreas como la geometría o la aritmética.

> *La visualización y la manipulación de figuras conducen a los estudiantes a la construcción de fórmulas algebraicas. Mason (1985)*

Sobre el problema de la construcción de significado de los conceptos, objetos y relaciones fundamentales del álgebra, se reportan numerosas investigaciones que serán analizadas en el trabajo. Pero es importante resaltar aquí que la mayoría de ellas mencionan que para lograr un buen trabajo algebraico es necesario fortalecer la transición de la aritmética al álgebra. El común denominador de estas investigaciones es el ámbito cognitivo para el aprendizaje del álgebra.

Una posible herramienta para lograr esta transición, es trabajar continuamente con regularidades y patrones en contextos aritméticos y geométricos que conduzcan a los estudiantes a proponer generalizaciones y dar significado a la variable, concepto fundamental para el aprendizaje del álgebra. Es muy importante en consecuencia desde el nivel primario potenciar el razonamiento algebraico para contribuir al desarrollo de la idea de la letra como variable, y una de las alternativas podría ser inicialmente la actividad lúdica.

A partir de un marco teórico epistemológico y didáctico se propondrá en este trabajo una secuencia de actividades y/o talleres que potencien los procesos de generalización y dé significado a la variable, donde los niños desde la verbalización de una regularidad puedan ir enriqueciendo el lenguaje hasta apropiarse del rigor que implica el uso de símbolos.

1. Marco Histórico -Epistemológico:

El desarrollo del lenguaje simbólico y el concepto de variable

A menudo, cuando indagamos por el desarrollo histórico del álgebra, nos encontramos con referencias acerca de la evolución del lenguaje algebraico, evolución que está ligada desde luego a la introducción y formalización del concepto de variable, en la que se enfatizará en este trabajo, y que se logró a lo largo de varios siglos con los aportes de distintas civilizaciones.

El conocimiento y análisis de estos desarrollos no solamente es fundamental para enriquecer el trabajo en el álgebra escolar sino que permite entender el papel de ésta en la modelación y solución de problemas de las diferentes áreas.

A continuación se describen someramente las tres etapas del desarrollo del lenguaje simbólico (retorica, sincopada y simbólica), que mencionan Collete (1998) o en Kline (1991), entre otros.

1.1 Etapa Retórica.

Según Nesselman, (quién asignó los nombres a cada etapa del desarrollo del lenguaje simbólico en 1842) en ésta los problemas eran resueltos a través del lenguaje natural. En ella se ubica el trabajo algebraico de tres importantes civilizaciones babilónica, egipcia, y griega. En la siguiente tabla se relacionan los aspectos más destacados de estos desarrollos ligados específicamente con la introducción y significado de la variable y citados o identificados por (Mankiewicz, 2005), (De la Peña, 2009) e historiadores como Boyer C o D´Ambrosio.

Es de resaltar que las primeras civilizaciones a pesar de usar exclusivamente el lenguaje retorico, tuvieron un primer acercamiento al significado de la variable; acercamiento que se puede apreciar en la solución de los problemas encontrados en las tablillas y papiros.

Tabla 1-1: Etapa retórica: aportes por civilización.

ETAPA RETORICA (2800 a.c– 250 d.C)			
	Civilización babilónica (2000 - 300 a.C)	Civilización egipcia (siglos XX y X a.C)	Civilización griega (2800 a. C)
En cuanto al lenguaje algebraico	Se destacaron en la resolución de ecuaciones de primero, segundo y tercer grado, aunque en las tablillas se describen sus procedimientos sin usar variables. Al acercarse a encontrar el valor de $\sqrt{2}$, descubrieron la relación entre el lado y la diagonal del cuadrado. Según ARBELAEZ (1998)[1] en una tablilla babilónica aparece el problema de determinar la constante por la que se debe multiplicar 30 (not. sexag.) el lado de un cuadrado para obtener la diagonal 42,25. Usando ensayo y error concluyen que esta constante es 1,245110 es decir, obtienen una aproximación al número irracional $\sqrt{2}$.	Calcularon varias raíces cuadradas, efectuaron potencias, e incluso obtuvieron la solución de ecuaciones de primero y segundo grado. Le dan el nombre de *aha.* a la incógnita (valor desconocido): Resolvieron problemas como los siguientes: *“a aha, si se le añade la cuarta parte, resulta 15. ¿Cuál es esa cantidad?”*[2] *A través del método de la falsa posición razonan de la siguiente manera:* Cuenta con 4, el cuarto es 1 total 5. Cuenta con 5 para encontrar 15. 1 5 2 10 El resultado es 3 Multiplicar 3 por 4 *“¿Cómo dividir 100 en dos partes para que la raíz de una de ellas sea los ¾ de la otra?”* Usan de nuevo el método de la falsa posición, es posible plantear que dan significado a la variable como incógnita pero no utilizan para ella una representación simbólica.	Usaron procesos geométricos para solucionar situaciones algebraicas. La idea de cambio y variable no era ajena para los griegos, aunque no fue estudiada desde un punto de vista cuantitativo. No hay consideración general sobre la idea de variable, dependencia o función, pues las aproximaciones cuantitativas y cualitativas están aún disociadas. Sin embargo Diofanto hace interesantes aproximaciones al trabajo con expresiones algebraicas y avanza significativamente en el uso del lenguaje sincopado.

[1] Véase Arbeláez Gabriela, Número y magnitud. Una perspectiva histórica. Pág. 43
[2] Véase Tatón René, Historia General de las Ciencias. Vol. 1

Analizando el cuadro anterior, es posible concluir que a pesar de no contar con un lenguaje simbólico estas civilizaciones lograron avances significativos tanto en lo referente al álgebra como en las matemáticas en general. Trabajaron aspectos básicos del álgebra aunque no expresados con el rigor, ni la generalidad actual, tal es el caso de las ecuaciones lineales y las de segundo grado.

Estas civilizaciones resolvieron problemas cotidianos como el reparto de panes, granos o animales o la compensación de productos. A medida que se complejizaban estos problemas las soluciones verbales empezaron a ser dispendiosas y extensas. Surge entonces la necesidad de abreviar o acortar tanto los enunciados, como las soluciones de estos problemas introduciendo un lenguaje más económico.

El trabajo y avances en el desarrollo del pensamiento algebraico que se aprecia en el análisis de la etapa retórica, a pesar de carecer de un lenguaje simbólico, sugiere la posibilidad y la pertinencia didáctica de actividades que lo potencien antes de introducir formalmente los conceptos del álgebra el aula. La propuesta enfatizará precisamente en el razonamiento e interpretación de situaciones usando el lenguaje natural sin necesidad de introducir el lenguaje simbólico formal.

En este sentido es importante resaltar que lo primordial en niveles iniciales es el desarrollo del lenguaje como modo de describir, argumentar y como herramienta para resolver problemas, Booth (1983) comenta lo siguiente:

> *"La habilidad para describir verbalmente es un método que no trae consigo necesariamente la habilidad para simbolizar ese método matemáticamente".*

Esta habilidad para describir que tenían en la época retórica y que les permitió grandes avances, también la poseen los niños en primaria, por ello es pertinente aprovechar esa posibilidad del pensamiento de los niños para construir generalizaciones.

> *"La generalización es una de las raíces del álgebra" (Mason 1996).*

1.2 Etapa Sincopada

Esta fase se inicia con el trabajo de Diofanto (250 d.C) y va hasta finales del siglo XIV d. C. Se caracteriza por incluir en la solución de problemas algunas abreviaturas o sincopas para lograr economía en el lenguaje. Estas sincopas son usadas en lugar de las incógnitas o valores desconocidos.

Civilizaciones como la china, hindú y árabe lograron grandes avances en el estudio del álgebra, pues se vieron motivados por varias necesidades, entre otras para explicar el funcionamiento de diversos fenómenos físicos, especialmente los relacionados con la astronomía.

- La civilización Hindú, alcanzo debido a la necesidad de abreviar, una simplificación trascendente. Aproximadamente en el siglo V, se suprimió cualquier referencia a las palabras que usaban para nombrar las potencias y los números. Esto es, las sincopas se hacen más notorias al encontrar una eficiente notación decimal posicional y en particular el uso del cero que heredamos de los hindúes. Por ejemplo "*sunya*" quería decir "cero" o "vacío", así para escribir el número 301 (no en palabras sino abreviando):

Eka sunya tri
Uno vacio tres[3]

- La civilización árabe, no solo adopta el cero y los otros nueve símbolos hindúes que representaban los números naturales, sino que también adoptaron su sistema posicional. Este sistema posicional es uno de los ejemplos más relevantes de lo que se podría denominar la economía del pensamiento de la especie humana. También permite el establecimiento de algoritmos para la suma y el producto.

[3] Véase, Gómez Bernardo, Numeración y cálculo. Pág. 48

En Europa, el desarrollo del álgebra corrió al tiempo que la creación de los números indo arábigo. El fraile Lucas Pacioli público "*Summa de arithmetica, geométrica, proportioni et proportionalita",* considerado el primer libro específico sobre álgebra. El álgebra de Pacioli fue considerada una mezcla de explicaciones retoricas y algebraicas, por ello es un ejemplar del lenguaje sincopado. A la incógnita se le denominaba *"cosa*" en latín y "*coss"* en alemán. Muchos de los símbolos que ahora reconocemos como algebraicos se empezaron a utilizar con poca costumbre en esta obra y posteriormente en Alemania hacen populares y estándares los signos para las operaciones, claro está esto ocurre en la etapa simbólica.

La transición total desde el álgebra retórica, a través de diversas sincopas individuales, hasta un álgebra simbólica estandarizada tardo varios siglos. Malissani (1999) comenta que Bombelli utilizó un lenguaje sincopado, simbolismo que comparte posteriormente con Viette, y que sin embargo las abreviaturas debían significar lo mismo y este proceso de unificación tardo tiempo, de igual forma entre 1500 y 1600 fueron introducidos casi todos los símbolos y abreviaturas que conocemos hoy.

A pesar de los grandes avances logrados durante estas dos etapas, retórica y sincopada, aún es escaso el desarrollo algebraico; se encuentra entonces la necesidad de recurrir a otros lenguajes o bien hacer uso de la geometría, para sustentar las premisas, usar el lenguaje natural u otros métodos o argumentos aritméticos para la solución de problemas. Es el caso de la inclusión de abreviaturas pero los cálculos se desarrollan aún en lenguaje retorico, lo que quiere decir que el lenguaje sincopado no era auto- suficiente.

De otra parte, las etapas retórica y sincopada marcan un importante paso transitorio entre el pensamiento aritmético al algebraico. Se introducen los primeros niveles de los procesos de generalización, a su vez se incluyen pocas abreviaturas con las que se avanza hacia el uso de un simbolismo algebraico. Un ejemplo de ello es cuando en la secundaria les contamos a los niños que 10 milímetros equivalen a un centímetro y les escribimos expresiones como la siguiente:

$$10\ mm = 1\ cm$$

En este ejemplo se ve como el uso de las letras toma un sentido de abreviaturas o etiquetas. Se ve entonces un incipiente lenguaje simbólico cuando los niños escriben expresiones similares.

1.3 Etapa Simbólica

Se inicia a partir de siglo XV con los trabajos de Tartaglia, Cardano, Viette, Galileo, Descartes, Wallis, Peacock, Boole, Newton, Leibniz entre otros. En esta última etapa se usan de manera sistemática las letras para las cantidades y los signos para las operaciones.

El lenguaje simbólico se usa para resolver ecuaciones y para demostrar reglas generales. Nace la geometría analítica para dar paso al cálculo infinitesimal, progresa el estudio de funciones al abordar ecuaciones y sus graficas con variables X e Y y la relación de dependencia entre estas, además se define el término función.

> *Con Viète se produjo el cambio más significativo en la construcción del lenguaje simbólico. Este autor fue el primero que utilizó sistemáticamente las letras para todas las cantidades (la incógnita, sus potencias y los coeficientes genéricos) y los signos para las operaciones, empleaba este lenguaje simbólico tanto en los procedimientos resolutivos como en la demostración de reglas generales. (Malisani 1999)-*

Viette genera un cambio fundamental en el lenguaje simbólico, pues hasta el momento solo se habían utilizado abreviaturas del lenguaje natural, ahora cobra importancia el uso de variables para representar potencias, este hecho representa un gran avance en el desarrollo del lenguaje simbólico.

Inicialmente se introdujeron signos para las operaciones y con ellos se dio paso a la inclusi*ón paulatina del lenguaje simbólico.*

En Alemania Jordan Nemorarius utilizo los signos p y m, para indicar el “más” y el “menos”. El guión (-) para señalar el menos en la resta fue introducido en los textos *alemanes de los siglos XV y XVI parece ser que fue tomado de los libros de contabilidad de los comerciantes quienes lo utilizaban para simbolizar sus faltantes. En este mismo sentido para simbolizar los excesos usaban el signo (+). En 1631 el inglés Oughtred utilizo (x) para la multiplicación y un poco después Harriot uso el punto para la misma operación. Harriot también incorpora los signos > y <. Descartes se limito a escribir las dos cantidades juntas, por ejemplo ay es el valor de a multiplicado por el de y. También el introdujo la notación para las potencias como* a^3 *en lugar de a.a.a. Con Vieta se generalizo el uso de la raya para la fracción. El signo (=) apareció en 1657 introducido por Recorde. Rahn crea el signo (÷) en 1659.*[4]

Con el trabajo de diferentes matemáticos se inicia entonces un avance mucho más significativo del álgebra y de otras disciplinas que la empiezan a usar para modelar y describir. Descartes por ejemplo logro vencer el obstáculo que presentaba en la etapa sincopada, para trabajar con potencias pues uso las potencias como números y no como objetos geométricos, así x^2 ya no era un área, sino un número elevado a la segunda potencia, su equivalente geométrico lo explico con la parábola y no con el cuadrado. Esto hace que cobren sentido las potencias mayores que 4. Uso las primeras letras del alfabeto como coeficientes y las últimas para las variables. Con sus logros para la geometría y el álgebra, liberó a la geometría de las restricciones de la utilización de la regla y el compás; definió los ejes coordenados y las fórmulas para la distancia entre puntos.

Peacock (1830) publicó en su obra un intento para separar el álgebra aritmética del álgebra simbólica, los elementos de la primera eran números y operaciones aritméticas, mientras que la segunda es una ciencia que trata de combinaciones de signos y símbolos las cuales son independientes de los valores específicos de los símbolos en sí.[5]

[4] Véase, Malisani Elsa, Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión histórica. Pág. 10

[5] Véase, Mankiewicz Richard, Historia de las Matemáticas. Del cálculo al caos. Pág. 136

Boole (1854) estableció tanto la lógica formal como la nueva álgebra. En el álgebra de Boole las variables no denotan números sino actos mentales, también les asigno significados específicos a los símbolos 1 y 0: 1 era el universo y 0 la nada.

Morgan (1830) incorporo el símbolo para la igualdad, en el que en una expresión $x=y$, los símbolos x e y deben tener el mismo significado. Publicó el libro titulado *"Trigonometría y álgebra doble"* en el que "*álgebra doble*" se refiere a la naturaleza binaria de los números complejos como opuesta al "*álgebra simple"* de los números reales. Él, intento extender el sistema de los números complejos bidimensionales a tres dimensiones.

La importancia de esto no solo estaba en la creación de una nueva álgebra sino en la libertad que daba a las matemáticas para construir álgebras posteriores. A su vez en este período, el álgebra no solo se libraba del marco de la geometría, sino que también la geometría quedaba liberada de los conceptos espaciales. Tanto el álgebra como la geometría fueron tratadas cada vez más como conceptos puramente abstractos, en los que el álgebra elemental por un lado y la geometría bi y tridimensional eran meros casos especiales.

De igual forma durante la etapa simbólica, y a diferencia de las dos etapas anteriores, lo fundamental ya no era expresar, sino operar ese nuevo sistema de símbolos sin recurrir a otros lenguajes. El lenguaje simbólico es ahora auto – suficiente[6], se explica aún sin hacer uso de la retórica.

---

[6] Véase, Malisani Elsa, Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión histórica. Pág. 7

2. Didáctica de la variable y su vínculo con la aritmética.

ESTADO ACTUAL DE LA INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA SOBRE EL PROCESO DE VINCULACION DE LA ARITMÉTICA AL ALGEBRA

Son numerosos los artículos (o reportes de investigación e innovación) que se encuentran en revistas nacionales e internacionales en torno a la transición de la aritmética al álgebra. Estos incluyen propuestas para pasar o traducir de una forma de representación a otra, construir modelaciones, generalizaciones, pasar del lenguaje natural al simbólico entre otras. A continuación se presenta una breve reseña de los marcos planteados en las investigaciones y de las propuestas didácticas reportadas.

En los 80 y 90 las investigaciones apuntaban a presentar listas de los errores más comunes de los niños al enfrentarse al algebra y a resaltar aquello que los estudiantes no lograban hacer. Trabajos como el de Ruano (1980) o Soccas (1987)[7], entre otros, son prueba de ello.

[7] Véase, Ruano Raquel y otros, Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra.

A principios de los 90 se comenzaron a reportar nuevas orientaciones para la educación algebraica y el desarrollo del pensamiento algebraico. Los trabajos de investigación de aquel momento planteaban que la enseñanza requería de un cambio, indicando que de tener buenas orientaciones, los niños podrían hacer más de lo que se pensaba. A finales de los 90 se intenta incorporar tecnologías para la enseñanza del álgebra, y se hacen consideraciones respecto a los preconceptos de los niños y sus capacidades naturales para la generalización (Mason 1996).

En las más recientes investigaciones se intenta incorporar la enseñanza del álgebra en los primeros años de la educación básica siguiendo el modelo teórico de la Escuela Soviética de que el aprendizaje precede al desarrollo.

Sin embargo la discusión está aún abierta desde diferentes perspectivas, una de ellas y la que concierne a esta propuesta, se centra en analizar los procesos cognitivos de los niños, y a partir de este análisis determinar si es posible y positivo iniciar el desarrollo del pensamiento algebraico desde la básica primaria, incluyendo tópicos en el currículo que amplíen y enriquezcan la visión de las matemáticas en estos niveles de escolaridad.

Frente a este aspecto Carraher, Schlieman (2001), sostienen que el álgebra se presenta a los niños tardíamente, menospreciando en algunos casos sus habilidades.

> *Se ha retrasado la introducción escolar al álgebra por concepciones erróneas acerca de la naturaleza de la aritmética, del álgebra y de la capacidad de los niños para tratar con ella. La aritmética es algebraica, porque proporciona elementos para construir y expresar generalizaciones (aritmética generalizada.). Carraher, Schlieman (2001),*

Se identifican en la revisi*ón* dos propuestas para la incorporación temprana del álgebra. Una de ellas denominada “Early- álgebra”, planteada por Carraher & Schlieman (2007), que abarca el razonamiento algebraico y sus relaciones, para alumnos de Educación Primaria, la segunda la propuesta llamada “Pre- álgebra”. Las dos propuestas que se describen a continuación pretenden mitigar las dificultades que se presentan en los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra.

La identificación de diferentes concepciones y aplicaciones del álgebra ha sido utilizada para proponer diferentes enfoques en la introducción y enseñanza del álgebra escolar, como la resolución de clases específicas de problemas, el estudio de estructuras algebraicas, las reglas para la trasformación y resolución de ecuaciones, la generalización de leyes de los conjuntos numéricos o la introducción del concepto de variable o de función. (Bednarz 1996).

2.1 Pre - algebra

Esta propuesta se asume como una *preparación* de los estudiantes para abordar a futuro los planteamientos algebraicos provenientes de la educación secundaria, consideran que los niños necesitan un período prolongado para comprender el álgebra y que por tanto es importante hacerlos avanzar paulatinamente. Se propone que en los últimos años de la primaria y/o primeros de la secundaria se haga un pequeño entrenamiento y posteriormente los niños harán un análisis epistemológico de esta ciencia. La propuesta se fundamenta en dos hechos:

- Tradicionalmente el álgebra se relaciona tan solo con la presencia de símbolos algebraicos, y no se intenta ir más allá de la escritura y la formalización de la aritmética generalizada.

- Según los estadios del desarrollo cognitivo, el álgebra esta fuera del alcance de los primeros años de la educación básica.

A partir de estas premisas, “pre- algebra” desarrolla una propuesta clasificando actividades que contradicen este segundo hecho y que ratifican el primero. Dichas actividades están relacionadas con el planteamiento y resolución de ecuaciones, con la generalización de patrones y con el concepto de variable y función.

Las actividades consideradas pre – algebraicas, están relacionadas con el planteamiento y resolución de ecuaciones, tratamiento de las generalizaciones, patrones numéricos y geométricos y funciones.

Diferentes han sido las propuestas de trabajo en Pre-Álgebra, un buen ejemplo, aparte de las consideraciones del NCTM (1989), es el Proyecto “ArAl Project” (Malara y Navarra, 2003), sobre la búsqueda de caminos aritméticos que favorecen el pensamiento Pre-Algebraico.

2.2 Early - algebra

Los orígenes de esta propuesta se encuentran de forma análoga a la anterior, es decir, en Pre - Álgebra. Sus mentores encontraron algunos aspectos en los que Early – álgebra (E.A) parece incidir:

- Encuentran preocupante la insatisfacción con la actual y tradicional forma de enseñanza de las ciencias y en particular de álgebra.
- Reconocen la importancia de entrenar la mente, esto es, de incorporar en las clases actividades que promuevan y/o estimulen el razonamiento y el análisis por parte de los estudiantes.
- Las matemáticas en general no son accesibles para los niños, menos aún el álgebra.
- Parten además del supuesto de que los niños son capaces de hacer más de lo que se supone pueden lograr.

El E.A se plantea la introducción de modos de pensamiento algebraicos en la matemática escolar, particularmente en los últimos años de la primaria y los primeros de la secundaria, en otras, pretende la “algebrización” del currículo. El eje principal es no generar ningún salto o ruptura entre la aritmética, el álgebra y la geometría. Para ello proponen cultivar hábitos de pensamiento a través de la observación de patrones, relaciones y propiedades, así como el hacer predicciones, modelizar, discutir, argumentar, comprobar cualquier idea o conjetura, entre otras acciones del pensamiento. Para ello, se requiere de un ambiente de aprendizaje diferente del tradicional (que será descrito más adelante).

Esto facilitaría la comprensión de las matemáticas, daría sentido al lenguaje algebraico y se estarían haciendo evidentes los diferentes modos de pensamientos naturales en un aula de clase.

El NCTM (National Council or Teachers of Mathematics), ha entrado a apoyar la propuesta E.A considerándola como “generalización de la aritmética”. Este último (NCTM) propone crear actividades en donde este se desarrolle simultáneamente el pensamiento aritmético con el algebraico para los primeros años de la secundaria.

Parten de la dualidad proceso/objeto, esto es, los niños pueden resolver problemas algebraicos sin hacer uso de la notación, pues acciones como la observación, la predicción, la exploración, argumentación y discusión, entre otras, son propias del pensamiento de los niños, solo basta con orientarlas, y hacer que los niños representen los que observan. Con seguridad sea cual sea la representación que usen estarán próximas a ser expresiones algebraicas.

El hecho fundamental de la propuesta E.A, es que el aprendizaje precede al desarrollo, por tanto solo basta con orientar las formas de pensamiento innatas de los niños para lograr construir expresiones y modelos. Para optimizar estas formas de pensamiento es indispensable contar con un entorno de aprendizaje determinado y que se describe a continuación.

2.2.1 Del entorno de aprendizaje.

Las actividades que se plantean a los niños tienen que ver con la propuesta de problemas interesantes para ellos, quienes constituidos en grupos, se embarcan en la búsqueda *colectiva* de soluciones. Con esta dinámica se quiere propiciar la conversación como fuente de conocimiento y la argumentación como herramienta determinante en las construcciones disciplinarias.

Además de impulsar la conversación entre los niños, donde cada grupo debe plantear una solución posible al reto propuesto, también debe haber una labor docente en busca de aquellas cosas motivantes para ellos. Muchos pedagogos insisten en resaltar la estrecha relación que existe entre el juego y el aprendizaje, varios sugieren asumir el juego como forma natural de aprendizaje en los niños y además recomiendan usar materiales didácticos con el fin de que la manipulación de estos deje alguna moraleja en los estudiantes. Desde esta mirada, se convierten entonces el juego y los materiales en mediadores de procesos, que incentivan, generan conocimientos y *crean ambientes de aprendizaje* adecuados para los niños.

Erick de Corte (1995) luego de exponer su experiencia educativa, en donde analiza diferentes aportes de la mente para mejorar la práctica educativa, se plantea tres interrogantes, Primero, ¿qué tipos de conocimientos, estrategias cognitivas y cualidades afectivas deben ser aprendidos, de manera que los alumnos tengan disposición para aprender a pensar y resolver problemas con habilidad? Segundo, ¿qué tipo de procesos de aprendizaje deben ser llevados a cabo por los alumnos para lograr la pretendida disposición, incluyendo la mejora de categorías de conocimientos y habilidades? Y, tercero, ¿cómo pueden crearse ambientes de aprendizaje lo suficientemente dinámicos y poderosos para lograr en los alumnos una disposición para aprender a pensar activamente?

Su estudio detecta cuatro componentes que se requieren para aprender, pensar y resolver problemas con habilidad: un cuerpo teórico organizado y flexible; métodos heurísticos; habilidades meta cognitivas; aspectos afectivos; actitudes, motivos y emociones. Cobra especial importancia la meta cognición, ya que su desarrollo favorece la transferencia de habilidades adquiridas en un dominio del conocimiento hacia otros. Estos pilares para el aprendizaje autónomo remiten al análisis de la naturaleza del aprendizaje. Así, enuncia algunas de sus características: proceso constructivo, acumulativo, autorregulado, intencional; se produce en un contexto particular, es interactivo y cooperativo. A partir de las dos categorías analizadas se destaca un análisis acerca de los ambientes de aprendizajes poderosos y dinámicos.

A manera de conclusión, en el estudio se dice que un individuo aprende a través de un proceso activo, cooperativo, progresivo y auto dirigido, que apunta a encontrar significados y construir conocimientos que surgen, en la medida de lo posible, de las experiencias de los alumnos en auténticas y reales situaciones.

La posición del alumno cambia, puesto que progresivamente debe asumir la responsabilidad de sus propios procesos de aprendizaje. Cambia la posición del docente, quien deja de ser la única fuente de información y se convierte en un activo participante de la comunidad de aprendizaje, pues define un clima estimulante en el plano intelectual, que funciona como modelo para la definición y solución de problemas; realiza preguntas desafiantes; propicia la ayuda necesaria a sus alumnos, y favorece en ellos la auto conducción de sus aprendizajes.

En ese sentido la clase obedece a la búsqueda de un ambiente que supere las dificultades que surgen usualmente, por ello la necesidad de trabajo colectivo, y de plantear situaciones que no tengan caminos de solución rígidos y previamente definidos. La clase entonces puede verse como un proceso en el cual las intervenciones van significando el problema de estudio y que se enriquece a partir de la socialización de las propuestas y de la discusión en general.

2.3 PRE – ÁLGEBRA VS. EARLY ALGEBRA.

Analizando estas propuestas se observa que ambas pretenden la comprensión por parte de los estudiantes del álgebra, sus diferencias son pocas, mientras el objetivo para “Pre – algebra” es facilitar la transición aritmética/álgebra, a partir de las dificultades que suponen son fruto de un trabajo insuficiente entre lo aritmético y lo numérico, para “Early- álgebra” el objetivo es incorporar modos de pensamiento en primaria. Esto supone que para la primera corriente la formalidad del álgebra debe darse en la secundaria y que en primaria debe darse pasos en búsqueda de generalizaciones, en la segunda este rigor debe iniciar desde primaria potenciando las habilidades de los niños.

No está definido cuál de las dos es más pertinente, por ahora se están analizando bajo tres campos de estudio: epistemológico, cognitivo y didáctico. Lo que sí se sabe es que abordar en las aulas por separado la aritmética y el álgebra acentúa las dificultades en el aprendizaje y que además es imperante romper con el proceso operacional y algorítmico predominante.

A partir de este estudio se propone en este trabajo de grado analizar la posibilidad de un cambio curricular para la enseñanza del álgebra. En los talleres que se plantean predomina el proceso no la solución y se espera que los niños puedan hallar generalizaciones representadas según sus posibilidades.

3. Análisis de textos. La variación y la variable.

Para dar inicio al estudio de la propuesta de algunos textos actuales, y de currículos de instituciones, se requiere en primer lugar analizar los planteamientos del MEN (Ministerio de Educación Nacional), expuestos en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, y en los Estándares Básicos de Competencias, puesto que los énfasis y la organización de los contenidos de los textos y currículos, están o deberían estar guiados por las orientaciones dadas por el Ministerio de Educación.

3.1 La variación en los documentos del MEN (Ministerio de Educación Nacional).

Como es bien sabido en los Lineamientos y en los Estándares Básicos los dominios conceptuales se organizan en cinco categorías:

- Pensamiento numérico y sistemas numéricos
- Pensamiento espacial y sistemas geométricos.
- Pensamiento métrico y sistemas de medida.
- Pensamiento aleatorio y sistemas de datos.
- Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Una de las críticas más comunes a esta organización es que hay una sectorización o encasillamiento de estas formas de pensar, que aparentemente no están relacionadas;

aunque el documento hace referencia a la coherencia horizontal y vertical que existe entre los estándares de los distintos pensamientos, pero aún para los docentes de matemáticas no es completamente claro. Para superar esta aparente sectorización la labor de las instituciones o de los docentes debería orientarse a estructurar actividades que vinculen los 5 tipos de pensamiento. Por ello y aunque en este trabajo nos compete desarrollar el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos en los niños, también en las actividades se hará mención al desarrollo de los pensamientos geométrico y numérico.

Veamos ahora que se plantea en los documentos curriculares sobre el pensamiento variacional, y la variación

> *Este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones (…). Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas. (Asocolme, 2003, pág.21)*

El estudio de patrones es fundamental para iniciar el trabajo variacional. Se dice que el reconocimiento de un patrón es la entrada al concepto de variable, pues es allí donde los niños interpretan la letra en un modelo matemático, como un instrumento que determina la variación. Dichos patrones se forman a partir del establecimiento de un criterio que rige la regularidad o la regla de formación. Por ello identificar regularidades en una secuencia y posteriormente generalizar el patrón implica conducir a los niños a conceptualizar la letra como un número generalizado esencial para la noción de variable.

Un camino para trabajar desde niveles iniciales con la variación podría consistir en propiciar el análisis de diversas situaciones matemáticas para identificar en ellas regularidades tanto numéricas como geométricas reconociendo y describiendo los patrones presentes, *"estas exploraciones permiten, en una primera instancia hacer una descripción verbal de la relación que existe entre las cantidades (el argumento y el producto terminado que se lee primero) que intervienen en la transformación" (MEN, 2003)*[13]. Las tablas y gráficas pueden ser utilizadas después de encontrar las regularidades y patrones pues en ellas se recolectan los datos y sirven para evidenciar el cambio que sufren las variables de forma conjunta, esto se debe realizar desde lo concreto y posteriormente se puede formalizar en el sistema cartesiano.

Las orientaciones que se incluyen en los Lineamientos y los Estándares Curriculares hacen énfasis además en que la variación debe ser trabajada en contextos numéricos y geométricos. Los procesos infinitos deben ser introducidos en contextos geométricos" (MEN, 2003)[13], cobrando importancia el reconocimiento de patrones, el registro de regularidades y la construcción de expresiones algebraicas haciendo un paulatino uso del lenguaje matemático. Estas sugerencias permiten ubicar la forma en la que los niños de primaria podrían acercarse a la variación y el análisis de la variable a través del hallazgo de regularidades y la posterior socialización de los modelos hallados por ellos, es decir la aritmética generalizada permitiría este importante tránsito.

> *El estudio inicial de las relaciones entre variables prioriza representaciones visuales o tabulares, distintas a la simbología algebraica, el desarrollo histórico del álgebra ha mostrado la importancia de la visualización como una herramienta fundamental en la formulación de argumentos y formulas algebraicas. (Asocolme 2003)*

De otra parte encontramos coincidencias entre los planteamientos de esta propuesta en su marco teórico y lo que se expone en los Lineamientos Curriculares:

> *El estudio de la variación puede ser iniciado pronto en el currículo de matemáticas. El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica. La organización de la variación en tablas, puede usarse para iniciar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento variacional por cuanto la solución de tareas que involucren procesos aritméticos, inicia también la comprensión de la variable y de las fórmulas. Igualmente, la*

> *aproximación numérica y la estimación deben ser argumentos usados en la solución de los problemas. La calculadora numérica se convierte en una herramienta necesaria en la iniciación del estudio de la variación. MEN (2003)*

Las orientaciones expuestas anteriormente respecto a lo variacional deberían plasmarse en los diseños curriculares de las instituciones y en los textos, sin embargo no se hace aún patente. No aparece por ejemplo el trabajo a partir la aritmética generalizada con los niños de la básica primaria para que posteriormente puedan dar sentido al lenguaje simbólico. Veamos ahora que proponen los textos.

3.2 La Variable en libros de texto

Los libros de texto se constituyen en ocasiones en la directriz que organiza los planes de estudio por ello es importante observar si en realidad hay un trabajo consciente frente al desarrollo del pensamiento algebraico en primaria, que les permita a los niños comprender las expresiones que se le presentan en un lenguaje simbólico De otra parte, los niños desde muy temprano en la escolaridad, se relacionan con situaciones de cambio en su entorno, por ende es relevante observar de qué forma los textos contribuyen al significado de la variación en cada grado de la escolaridad.

Se revisaron alrededor de 20 libros de texto de los últimos años de primaria, y los primeros de secundaria; publicados en años posteriores al 2004 (Ver listado en anexo 1). A partir de sus tablas de contenido se estudiaron las temáticas propuestas en cada uno de ellos y se refleja que son orientados por los Estándares Básicos de Competencias. Se tomaron tan solo algunos de ellos cuyas tablas de contenido se encuentran en los anexos.

En los contenidos propuestos en cada uno de los textos, las actividades a trabajar con los niños se encuentran clasificadas de acuerdo al tipo de pensamiento que se quiera desarrollar, por ejemplo se encuentran en el libro de texto: *"Símbolos 4" ED. Voluntad.* (Ver Anexo 2), en la Unidad 5, denominada "*Decimales",* se encuentran indicadas las operaciones que se deben realizar entre decimales y al final señalan que con la aplicación de estas se desarrollara el pensamiento numérico, métrico y variacional, que no tendría elementos explícitos en relación con los variacional. De forma análoga otros textos exponen un proceso contrario, pues no se parte de las actividades para indicar el tipo de pensamiento, sino que se estipulan los 5 tipos de pensamiento y diseñan actividades propias para tal grado (Ver anexo 3). Sin embargo al revisar la forma como en estos textos pretenden desarrollar el pensamiento algebraico o también denominado allí "variacional", y proponen actividades relacionadas a las operaciones entre conjuntos, sistemas de numeración, (Ver anexo 5) uso del plano cartesiano o en algunos casos, sobre todo en textos para los grados sexto y séptimo, incluyen el manejo de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Ya allí inician usando la sintaxis algebraica, pero sin situación alguna que contextualice la expresión a trabajar, tan solo aparecen ejercicios para despejar incógnitas.

La propuesta para grado cuarto en lo variacional se centra en varios de los textos consultados, en la manipulación de fórmulas o expresiones que involucran variables como $\frac{b\,x\;h}{2}$, cuando se trabaja en el pensamiento geométrico-métrico el área de figuras. O de expresiones similares en donde la letra es un objeto y se requiere evaluar o sustituir por un valor numérico específico según el ejercicio. Lo que indica que no hay un proceso de búsqueda o de comprensión de dicha expresión, solo apareció ante los estudiantes ajena a una construcción o hallazgo por parte de los niños, es una fórmula cuyas letras allí expuestas están aisladas de un contexto. Sin embargo, con una orientación adecuada podría asumirse como un camino hacia la variación en donde los niños identifican la variabilidad conjunta de las variables, es decir, el valor que toma en este caso el área depende de los valores que tome la base y la altura.

Los textos para el grado quinto presentan la letra como un objeto que deben manipular para solucionar ecuaciones sencillas de primer grado, dicha letra es interpretada como una incógnita o número desconocido que debe satisface la igualdad.

Aparecen sin embargo en el texto: *"Símbolos 5" ED. Voluntad,* apartados donde se explicita el significado de la variable:

> "*En este caso la letra es una variable. Al decir "y" es un día de la semana, "y" no tiene significado fijo, sino que puede ser reemplazada por el nombre de cualquier día"*

Ecuación: Igualdad que está condicionada a cierto valor que debe tomar un número que se desconoce.

Estas definiciones, aunque son imprecisas y ambiguas matemáticamente sugieren la introducción informal del concepto de variable. Pero tales notas son precedidas solamente por instrucciones para el despeje de incógnitas y no por una reflexión intuitiva sobre el significado de la variable y la ecuación. Posterior a ello se presentan algunos ejercicios para traducir enunciados del lenguaje natural al lenguaje simbólico, ejercicio valioso dada la intención de esta propuesta, no obstante, a pesar de algunos comentarios y actividades valiosas el énfasis en procedimientos y algoritmos no permite a los estudiantes comprender el significado, intentaran simplemente memorizar una regla.

Es importante hacer una mención especial, al texto "*Matemáticas 5" ED. Escuelas del futuro" 2005,* pues entre más de 20 textos observados, este texto es el único que incluye aunque pocas, algunas actividades donde se analizan patrones a partir del registro en tablas y de análisis de situaciones de variación que conducen a la construcción de modelos algebraicos por parte de los niños. (Ver anexo 7). De esta forma el texto propone conducir al estudiante al concepto de variable a partir del hallazgo de regularidades y posterior generalización del patrón, el uso del lenguaje simbólico se convierte entonces en una conclusión natural de la actividad, no en una fórmula sin sentido. Esto podría ser una muestra de la incipiente corriente que pretende construir desde primaria un vínculo entre los procesos aritméticos y algebraicos. El dominio de la variable en textos como este sería un concepto presente desde la aparición de las expresiones que generalizan operaciones, relaciones y propiedades.

De otra parte, al revisar la introducción de conceptos algebraicos en textos del grado octavo observamos que sin trabajo previo alguno, y con diferencias sutiles entran a definir: "*expresiones algebraicas", como aquellas compuestas por parte numérica y literal, o también llamadas constantes y variables respectivamente,* e inician el trabajo manipulativo u operativo para despejar incógnitas, en algunos proponen ejercicios para mecanizar explícitamente los casos de factorización. Posteriormente para grado noveno se propone en los textos el manejo de funciones sin hacer reflexión específica sobre el significado e interpretación de la variable, y desde luego, este tampoco es un problema para los textos universitarios que asumen conocimiento claro y preciso de las herramientas algebraicas y en particular del concepto de variable e incluyen definiciones como:

> "*a x, se le denomina variable, decíamos que esta toma valores en el conjunto X, significando que podemos identificarla con cualquier elemento de X, al conjunto X, se le denomina dominio de x.*"[8]

En este último caso se incluyen conceptos como dominio y recorrido, pues la finalidad a este nivel es el estudio de la función como relación de dependencia entre variables con el objeto de interpretar y describir la variación.

Se propone a este nivel un trabajo riguroso en torno a la función: igualdad de funciones, álgebra de funciones, composición de funciones, gráfica de funciones y funciones de variable real. Esto permite concluir que la finalidad del álgebra escolar es manipular las variables, establecer correspondencia entre ellas y llegar al análisis de la función como relación entre las variables. Se percibe en el análisis de los textos que año a año simplemente cambia el universo numérico, a nivel secundario y universitario, por ejemplo se pasa de trabajar variables discretas a continuas, pero el significado e interpretación del concepto de variable aparentemente no requiere especial mención.

Revisando diseños curriculares de cuarto de primaria hacia adelante, se encontró que a pesar de estar explícito en ellos el término "variación", "ecuación", no hay actividades que pretendan conducir al estudiante a la comprensión de la variable, ni tampoco al uso del lenguaje simbólico, no existe el vínculo entre los razonamientos de índole aritmética, geométrica y algebraica, la mayor aproximación es el manejo de ecuaciones en forma de ejercicios aislados de contexto. Tan solo a partir del grado octavo, se inicia un curso que pretende el dominio algorítmico y casi memorístico de símbolos, apartando esto de actividades que exploren formas de razonamiento en los niños. Se restringe el pensamiento variacional o las aproximaciones al álgebra centradas en los métodos para resolver ecuaciones, al manejo operativo de letras, o al estudio de estructuras, dejando

[8] Véase, Fundamentos de Matemática. Segunda Edición. Universidad Sergio Arboleda. Pág. 358

de lado el estudio de situaciones de cambio, o el razonamiento en torno a situaciones, inclusive en años anteriores de escolaridad. Por tanto la aritmética generalizada no es hasta el momento una herramienta incluida en los currículos o textos para el desarrollo del pensamiento algebraico.

Se ratifica entonces el hecho que los textos son aparentemente elaborados a partir de las sugerencias del MEN expuestas en los Lineamientos y Estándares; al menos desde el punto de vista nominal y organizativo, en cada libro de texto se tienen en cuenta los 5 tipos de pensamiento, sin embargo a pesar de la recomendación del MEN de realizar una iniciación temprana a la variable, por ahora no se está desarrollando.

4. Propuesta Metodológica para el desarrollo del pensamiento algebraico desde la básica primaria

Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, se plantean a continuación algunas actividades que en el contexto de la lúdica podrían potenciar procesos de generalización. Los tópicos que se incluyen en ellas, la estructura y el nivel de complejidad de las preguntas están al alcance de los niños de los últimos grados de primaria.

Actividades como las que aquí se sugieren podrían permitir un acercamiento al álgebra escolar a partir de la aritmética generalizada, como se plantea en Early Algebra (E.A.). La identificación de regularidades, patrones y relaciones, la formulación de hipótesis y el planteamiento de generalizaciones expresadas inicialmente en lenguaje natural potencian el desarrollo de estrategias valiosas de pensamiento matemático y permiten pasar de manera natural y sin rupturas del dominio aritmético al algebraico.

Las actividades se estructuran a partir de juegos y en ellas los niños identifican condiciones proponen regularidades, susceptibles de generalizar. A medida que se complejizan las soluciones verbales que plantean, se va haciendo necesario utilizar sincopas o incluir expresiones simbólicas formales. De esta forma, como se observaba en el trabajo de los matemáticos de la etapa retorica surgiría la necesidad de usar expresiones simbólicas para hacer más económico el lenguaje.

Como se comentaba en los capítulos anteriores, es necesario repensar la organización y énfasis del Pensamiento Variacional y los Sistemas Algebraicos desde la básica primaria, para suavizar la problemática transición de la aritmética al álgebra. Y esto, se puede lograr introduciendo intuitivamente a los estudiantes a este dominio con actividades que permitan dar significado a objetos y símbolos, en particular a un concepto que resulta especialmente álgido, el de variable. Por ello en las actividades propuestas aparte de los aspectos mencionados en el párrafo anterior se intenta presentar una aproximación a la noción de variación ligada a la idea de cambio.

ORIENTACIONES GENERALES:

Para la construcción de las figuras es necesario que todos y cada uno de los chicos dispongan de materiales y puedan trabajar individualmente, posterior a esto, es decir durante el conteo, el maestro debe ir registrando los datos que los estudiantes obtienen en el conteo, y por último en un pequeño lapso de no más de 20 minutos en pequeños grupos de máximo 3 estudiantes, discuten sobre la manera de obtener los patrones de la tabla. En el último momento el maestro traduce simbólicamente las expresiones propuestas por los chicos resaltando la importancia de representar con una letra un número indeterminado (que puede tomar diferentes valores, puede cambiar).

A continuación se describen 4 actividades que bajo estas orientaciones generales pueden desarrollarse con los niños.

1. TRIANGULO DE SIERPINSKY
2. DIAGONALES DE UN POLÍGONO
3. SALTO DE LA RANA
4. MISIONEROS Y CANÍBALES

4.1 Actividad 1: "Triangulo de Sierpinsky"

PROPOSITOS

A lo largo de las actividades se irán ampliando los objetivos; a medida que los chicos progresen en el desarrollo de las mismas y ganen comprensión frente al propósito algebraico de las actividades, en primer lugar los propósitos de esta actividad son:

- Construir tablas para registrar información
- Identificar regularidades a partir del análisis de una tabla.
- Construir modelos verbales para la describir situación.

DESCRIPCION DE LA ACTIVIDAD PARA EL PROFESOR.

Se pide a los estudiantes que dibujen la figura del "tetris" que tiene forma de L, usando la cuadricula del cuaderno y tratando de usar un cuadro a la vez, así:

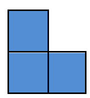
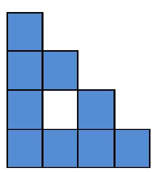


FIGURA 1

Para la construcción de la figura No. 2 se recurre a la forma inicial pero esta vez en cada cuadrito, se construirá una figura como la 1. Es decir repetir la figura 1 tres veces, conservando la forma de "L" Así:



Nuevamente para la siguiente figura se repetirá 3 veces la figura 2 conservando la forma de "L",

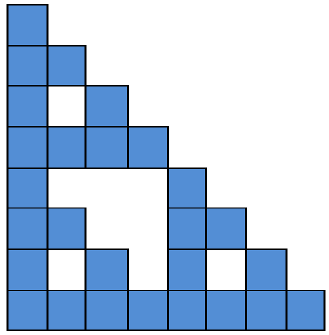


FIGURA 3.

Para la construcción de la figura siguiente siempre se requerirá de la anterior repetida tres veces formando una “L”

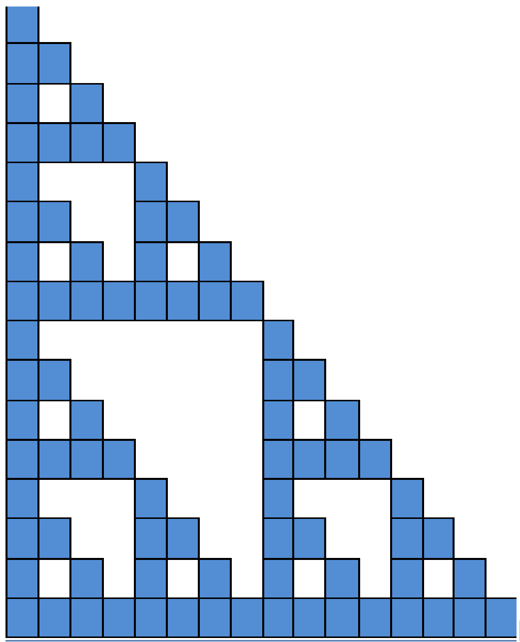


FIGURA 4

Se pedirá a los chicos que continúen dibujando hasta la figura No. 6, posteriormente a esto que encierren cada figura en un cuadro grande con la respectiva cuadricula en el interior, así:

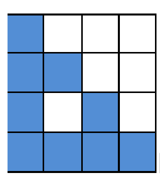


Figura No. 2

Se hará un conteo de la cantidad de cuadros pintados, no pintados y la totalidad de estos, registrando la información en una tabla como la siguiente.

FIGURA	CUADROS SIN PINTAR	CUADROS PINTADOS	TOTAL DE CUADROS.
1	1	3	4
2	7	9	16
3	37	27	64
4			
5			
6			

Con la orientación del maestro se debe completar la tabla sin hacer uso del dibujo, tan solo basándose en las regularidades observadas en la tabla, los chicos aportaran ideas para continuar el proceso, se darán cuenta que para determinar el total de cuadros es necesario saber el dato anterior y multiplicarlo por 4, de manera análoga para el número de cuadros pintados se requiere conocer el valor anterior y multiplicarlo por tres, y para el número de cuadros sin pintar es necesario conocer el valor del total de cuadros y los cuadros pintados y la diferencia entre estos será el valor de los cuadros sin pintar. A este modelo verbal deberán llegar todos los chicos pues la socialización de estas regularidades será dirigida por el maestro y para todos los chicos a manera de exposición apoyada en las ideas de ellos. Puede darse el caso en que los niños encuentren otros modelos diferentes y serán bienvenidos elogiando así la diversidad de estrategias de pensamiento.

A continuación se indagará por la descripción “verbal” de la regularidad, descripción que permite completar la tabla si se pregunta por los valores que corresponden a la figura No 100, obviamente deberán buscar la manera de acortar camino pues sería muy tedioso determinar los 99 datos anteriores para encontrar el dato número 100.

Una vez que los grupos intenten dar solución a la nueva pregunta, se dispondrá un espacio para que comenten sus ideas, el maestro a su vez orienta las ideas y ayuda a llegar a consensos a la totalidad del grupo, seguramente habrá tantas explicaciones y modelos como grupos puedan socializar su intento de solución.

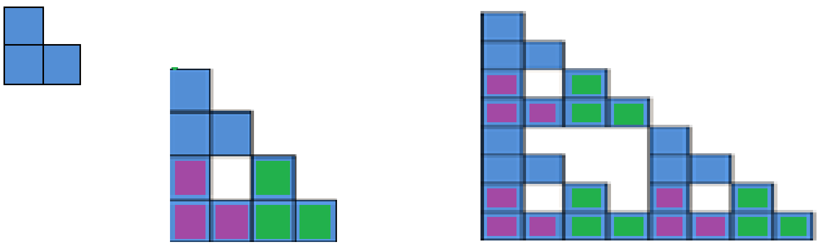
GUIA PARA EL ESTUDIANTE.

"*TRIANGULO DE SIERPINSKY*"

NOMBRE______________________________ FECHA___________

A continuación encontraras una secuencia de figuras. Obsérvalas y continua la secuencia.

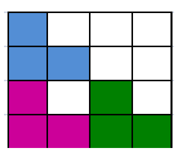
1 2 3



Como puedes ver, en cada figura van aumentando el número de cuadritos, se requiere de la anterior para construir la siguiente, repitiendo tres veces una de las figuras construyes la siguiente, pero siempre se conservan la forma de "L".

1. Dibuja la figura 4, 5 y 6.
2. Encierra todas las figuras en un cuadro grande que las envuelva y traza una cuadricula sobre cada una, así:

Figura 2



3. Cuenta los cuadros en cada figura y completa la tabla

FIGURA	CUADROS SIN PINTAR	CUADROS PINTADOS	TOTAL DE CUADROS.
1	1	3	4
2	7	9	16
3	37	27	64
4			
5			
6			

4. Sin elaborar el dibujo intenta completar la tabla hasta la figura 9, ¿Cómo lo harías?
5. Qué harías si te pidieran encontrar los datos de la figura 100.

6. Reúnete con dos compañeros, haz que cada uno exponga su estrategia para completar la tabla y en un párrafo, describe la estrategia que más te gusto de las 3, incluida la tuya, puedes usar ejemplos.

4.2 Actividad 2: “Diagonales de los Polígonos”

PROPOSITOS

Basándose en la actividad anterior que se supone ya habrán construido los chicos un formato de clase y de trabajo a seguir. Para esta ocasión los propósitos serán:

- Dar nombre a los polígonos y precisar el concepto de diagonal de un polígono.
- Construir polígonos de diferente número de lados para obtener información sobre el número de diagonales.
- Conformar grupos de trabajo para la recolección y discusión de la información.
- Construir tablas para registrar información.
- Identificar regularidades observando y comparando datos de la tabla.
- Construir modelos verbales para describir situación.

DESCRIPCION DE LA ACTIVIDAD PARA EL PROFESOR

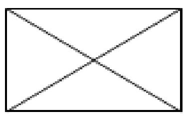
La actividad girara en torno a la pregunta:

- *¿Cuántas diagonales pueden trazarse en un polígono de cualquier número de lados?*

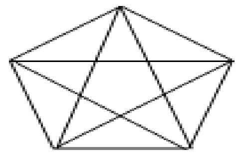
Iniciaran bajo la indicación del maestro dibujando un cuadrilátero, posteriormente un pentágono y así sucesivamente. Es necesario definir previamente la diagonal de un polígono como el segmento que une dos vértices no contiguos (o no consecutivos).

También es necesario aclarar que si se traza una diagonal desde un vértice determinado A hasta un vértice B, es la misma que si se traza de B hacia A.

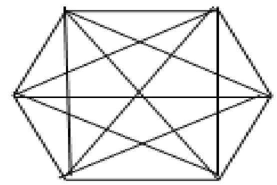
La idea es que logren construir una tabla con la información y que se adelanten a intentar predecir y que se aproximen desde la descripción en lenguaje natural al modelo algebraico de la situación. Paso a paso construirán figuras y tablas como las siguientes:



Cuadrilátero
2 diagonales



pentágono
5 diagonales.



Número de lados del polígono	Cantidad de Diagonales
3	0
4	2
5	5
6	9
7	14
8	20
9	27

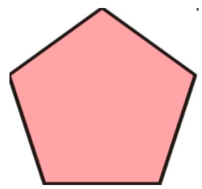
Al igual que con la actividad anterior, se le pedirá a los chicos en primer lugar que completen la tabla sin necesidad de construir los polígonos, posteriormente que intenten construir un modelo para predecir datos de la tabla.

GUIA PARA EL ESTUDIANTE.

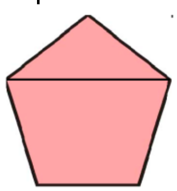
“DIAGONALES DE LOS POLÍGONOS”

NOMBRE____________________________________ FECHA: __________

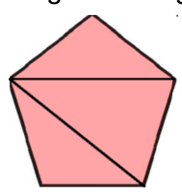
Una *diagonal* en un polígono es: ___________________________________
Observa el ejemplo.



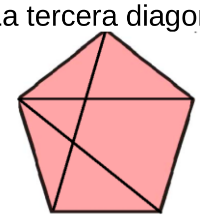
La primera diagonal:



La segunda diagonal

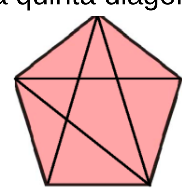


La tercera diagonal



La cuarta diagonal

La quinta diagonal



Traza la quinta diagonal y escribe sobre la línea que aparece al comienzo lo que entiendes por una diagonal, teniendo en cuenta que las líneas trazadas al interior del pentágono son diagonales.

Intenta trazar una diagonal diferente a las anteriores, no es posible verdad. Concluyes que en un pentágono se pueden trazar solo 5 diagonales.

- *¿Cuántas diagonales pueden trazarse en un polígono de cualquier número de lados?*

1. Empieza dibujando un polígono de tres lados (triángulo), luego una de cuatro lados (cuadrilátero), uno de cinco (pentágono) y así sucesivamente.
2. Traza las diagonales de cada uno de ellos.
3. Completa la información de la tabla,

Número de lados del polígono	Cantidad de Diagonales
3	
4	2
5	5
6	
7	

4. ¿Encuentras alguna relación entre el número de lados y el número de diagonales? ¿Cuál?
5. ¿Qué harías para determinar el número de diagonales de un polígono de 47 lados?
6. Describe el procedimiento que usarías para determinar la cantidad de diagonales dependiendo del número de lados del polígono.

4.3 Actividad 3: “El salto de la rana”

<u>PROPOSITOS</u>

- Usar materiales para recolectar la información.
- Conformar grupos de trabajo para la recolección, análisis y discusión de la información.
- Construir tablas para registrar información.
- Identificar regularidades a partir de la observación y comparación de los datos de la tabla.
- Construir modelos verbales para describir la situación.
- Orientar las respuestas de los grupos haciendo énfasis en abreviar la solución.

DESCRIPCION DE LA ACTIVIDAD

Este juego se realiza con fichas de dos colores. Se coloca igual número de fichas, a cada lado de un espacio libre. El objetivo es hallar la menor cantidad de movimientos que permitan intercambiar las posiciones de las fichas.

Las reglas del juego son:

- Mover una sola ficha al espacio inmediatamente vacío (paso)
- Saltar sobre solo una ficha a un espacio vacío situado inmediatamente después de esta.

Aquí los estudiantes al encontrar el menor número de movimientos entran en una interacción continua no solo con la actividad, sino con los compañeros, en una competencia enriquecedora, donde no prima el que primero termine sino el que logre sacar un método diferente al otro. Una característica de este juego es la oportunidad de manipular el material, es decir trabajar en concreto, desarrollando lo intuitivo.

En un primer momento todos los chicos deben iniciar jugando con tres fichas a cada lado, posterior a esto cuando alguno determine la menor cantidad de movimientos y *el grupo valide esta solución como la mejor opción,* se continuará con otra cantidad de fichas a cada lado; por su parte el maestro debe ir registrando los datos obtenidos por los muchachos. Es decir para este caso la recolección de datos es un trabajo en colectivo, general para todo el grupo, todos estarán en búsqueda del mínimo de movimientos para cada caso.

Fichas de cada color	Mínimo de movimientos
1	3
2	8
3	15

4	24
5	35
6	
n	

NOTA: Este juego se ha usado en varias ocasiones en los salones de clase de la Escuela Pedagógica Experimental y fue herramienta de una investigación cuyos resultados arrojaron más de 23 soluciones distintas que dan cuenta de los procesos diversos que hacen los estudiantes producto de las invenciones y descubrimientos particulares y a veces personales. Allí se refleja la diversidad del pensamiento. [9]

Por esto último es posible que los chicos creen diferentes expresiones a la situación, para responder a la pregunta ¿cuántos movimientos se obtendrán de un número n de fichas a cada lado?

ORIENTACIONES GENERALES DE LA ACTIVIDAD:

El juego se presta para que los chicos manipulen las fichas y tengan que llevar un registro de los movimientos, por ende podrán trabajar en parejas o individual, según sus preferencias, en el momento de crear el modelo podrán unir a más compañeros para que se pueda agrandar el debate, para esta parte del trabajo podrán trabajar en grupos de cuatro estudiantes. La sesión de exposición de las propuestas del modelo podrá extenderse para que sea evidente que pueden aparecer diversas expresiones que modelan esta situación. El maestro nuevamente será el moderador de los grupos, orientador de las inquietudes y podrá estar pasando por los grupos tomando nota, haciendo sugerencias y contribuyendo al desarrollo de la actividad.

[9] Tomado del texto “La multiplicidad de los patrones y la inagotabilidad del pensamiento”. Proyecto de investigación El modelaje matemático en estudiantes de educación básica: la validación de los modelos y los procesos de matematización de la experiencia, estudio a partir de dos familias de problemas- Noviembre 2003

GUIA PARA EL ESTUDIANTE.

"SALTO DE LA RANA"

NOMBRE_______________________________ FECHA: _____________________

Reúnete en grupo con dos compañeros más, observa el tablero a continuación, lee las indicaciones, puedes usar fichas de dos colores distintos y armar tu tablero.

○	○	○	○		●	●	●	●

El objetivo del salto de la rana es colocar en el menor número de movimientos posibles las cuatro fichas negras ubicadas en la parte derecha del tablero en la izquierda de este y las blancas que se encuentra en la izquierda a la derecha. Teniendo en cuenta lo anterior se plantean las siguientes reglas:

- Solo se pueden realizar dos movimientos el salto y el paso:
  a. El paso es mover la ficha de una casilla a otra.
  b. El salto es mover la ficha por encima de otra.
- Solo se permite un movimiento por jugada.
- No se permite al saltar dos casillas.

1. Inicia con un tablero en donde haya una ficha de color a cada lado.
2. Ve aumentando el número de fichas a cada lado a medida que encuentren en el grupo el mínimo de movimientos
3. Elabora en una tabla anotando la cantidad de movimientos posibles dependiendo de la cantidad de fichas a cada lado.
4. ¿Cuántos movimientos se podrán realizar en un tablero con 24 fichas de cada color? ¿Cómo lo determinarías?
5. Describe el procedimiento que usarías para determinar el número de movimientos para cualquier número de fichas. Explícalo a los compañeros del curso.

4.4 Actividad 4 “Misioneros y Caníbales”

PROPOSITOS:

- Usar material para recolectar la información.
- Conformar grupos de trabajo para la recolección, análisis y discusión de la información.
- Construir tablas para registrar información.
- Identificar regularidades por observación y comparación de los datos de la tabla.
- Construir modelos verbales para describir la situación.
- Indagar las variables y relacionarlas.
- Orientar las respuestas de los grupos haciendo énfasis en abreviar la solución.

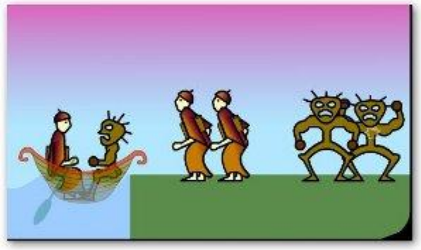
DESCRIPCION DE LA ACTIVIDAD PARA EL PROFESOR

Esta actividad está basada en un juego que circula por internet y que puede ser consultado y manipulado en la siguiente link:
http://es.flashgamehq.com/flash-game/missionaries_and_cannibals

El juego se describe a continuación:
Hay tres misioneros y tres caníbales que quieren cruzar de un lado del río a otro para llegar a un resguardo, en una barca en la cual caben máximo dos personas y además:

1. Ni en el resguardo, ni en la orilla pueden haber más caníbales que misioneros, pues los primeros se comen los segundos.
2. Cada vez que en la orilla opuesta a la salida hay un misionero y un caníbal y la barca está al otro lado, estos se van al resguardo.

¿Cuántos viajes mínimos deben hacer los misioneros y los caníbales para llegar al otro lado del río?



A partir de este enunciado los muchachos pueden empezar a trabajar en pequeños grupos, una vez resuelto el problema se cambiara el número de misioneros y caníbales a cada lado e inicia la recolección de la información completando una tabla como la siguiente:

No. Parejas de misioneros y caníbales	Cantidad de viajes
1	1
2	5
3	9
4	13
5	17

<u>ORIENTACIONES GENERALES DE LA ACTIVIDAD:</u>

Nuevamente se espera que los chicos tomen la iniciativa y el rol protagónico e inicien el trabajo en grupos de estudio donde deban representar la situación y discutir los intentos de solución, posterior a esto el grupo que vaya encontrando soluciones las comunicara al grupo en general y estos decidirán cual es el mínimo número de viajes. Una vez encontrado el mínimo el maestro cambia el número de parejas de misioneros y caníbales e inicia la recolección de la información. Por último los grupos de estudio inician la exploración de una expresión que modele la situación. Una vez encontrada el grupo en general avala o rechaza dicha expresión. Lo que quiere decir que el trabajo en colectivo estará presente en todos los momentos de la clase.

GUIA PARA EL ESTUDIANTE.

“MISIONEROS Y CANIBALES”

Lee la historia:

Hay tres misioneros y tres caníbales que quieren cruzar de un lado del río a otro para llegar a un resguardo, en una barca en la cual caben, máximo dos personas:

- Ni en el resguardo, ni en la orilla puede haber más caníbales que misioneros, pues los primeros se comen los segundos.
- Cada vez que en la orilla opuesta a la salida hay un misionero y un caníbal y la barca está al otro lado, estos se van al resguardo.

¿Cuántos viajes mínimo deben hacer los misioneros y caníbales para llegar al otro lado del río?

1. Elabora un dibujo de la situación para cada movimiento que se realiza
2. Ahora ubica dos misioneros y dos caníbales y realiza nuevamente el ejercicio
3. Organiza en una tabla la información donde relaciones la cantidad de misioneros y caníbales con la cantidad de viajes.
4. ¿Cuántos viajes deben hacer 19 misioneros y 19 caníbales? ¿Cómo lo resolviste?
5. Describe el procedimiento que usarías para averiguar la cantidad de viajes dependiendo de la cantidad de misioneros y caníbales y exponla ante el curso.

Nota: En cada uno de los juegos expuestos se pueden establecer múltiples generalizaciones, los modelos creados por lo niños deben quedar en una fase inicial de la introducción al algebra, es decir deben poder verbalizar sus modelos, apoyándose en el análisis de regularidades, de patrones y en general de las inferencias que se deduzcan de los datos obtenidos de la manipulación con los juegos.

5. Conclusiones y recomendaciones

5.1 Conclusiones

Una vez terminado el proceso de consulta y análisis de las fuentes y la elaboración de este escrito se pueden resaltar algunos aspectos que se habían explorado al iniciar la construcción de la propuesta y que se reafirmaron en todo el desarrollo.

La introducción y consolidación del lenguaje simbólico formal y de los conceptos básicos del pensamiento variacional no se dio abruptamente sino que llevo siglos de desarrollo y en contraste, en los currículos, textos y prácticas, se enfrenta al estudiante a los conceptos y lenguaje del álgebra, sin previa presentación de un contexto o introducción. Se les muestran métodos y procedimientos para manipularlos sin comprensión sobre su significado.

Es claro desde el análisis de diversas investigaciones entre ellas (Esquinas Ana, 2009) o (Socas Martin, 2011) que a pesar de los esfuerzos de la comunidad de educadores matemáticos, aún se presentan muchas dificultades en los procesos de enseñanza y de aprendizaje del álgebra, especialmente en la transición de la aritmética al álgebra. Para resolver en parte este problema se reportan en la actualidad dos propuestas (Early álgebra y Pre- álgebra) que sugieren alternativas de solución. Las dos propenden por la iniciación temprana al álgebra desde un ámbito netamente retorico y bajo el cual los niños desarrollan simultáneamente el pensamiento aritmético y algebraico a través del hallazgo de regularidades y patrones, para una posterior generalización.

Las actividades expuestas en el aparte 4, fueron diseñadas desde este marco, los niños se aproximan al concepto de variación y de paso le atribuyen sentido a los símbolos; en este proceso se van introduciendo variables y explorando significados desde la intuición y la creatividad y no por un procedimiento predeterminado.

Es importante introducir en nuestras prácticas elementos innovadores al esquema tradicional de clase, donde el maestro transmite información y el estudiante es receptor de esta. En el caso del pensamiento variacional en la básica primaria, esto es posible simplemente proponiendo sistemáticamente situaciones que potencien estrategias como la observación, el reconocimiento de patrones y regularidades y la descripción de estas, actividades que desembocan de manera natural en la generalización, para ello no se requiere usar el lenguaje simbólico formal, basta con usar el lenguaje natural.

Se hacen entonces necesarios escenarios en donde los niños tengan la posibilidad de crear, inventar, argumentar y desarrollar otras tantas estrategias que les permiten desarrollar el pensamiento matemático. Creación de herramientas que faciliten la comprensión del lenguaje simbólico, una alternativa como se comentó antes es a través de actividades que requieran procesos de generalización desde la básica primaria a través de lo que se conoce como aritmética generalizada, esto permitiría potenciar simultáneamente dominios aritméticos y algebraicos.

Por último, cabe aclarar que la experiencia en la aplicación de actividades como las expuestas en este escrito, me lleva a concluir que los niños poseen muchas habilidades, tiene una observación aguda, que les permite encontrar coincidencias, y crean estrategias para resolver situaciones, por tanto son capaces de realizar actividades como estas y que tan solo dependen de las orientaciones del maestro. Por tanto la propuesta metodológica expuesta aquí está al alcance de los niños.

5.2 Recomendaciones

- El trabajo colectivo permite la confrontación de ideas y el enriquecimiento de los argumentos, así mismo la creación de consensos en la clase de matemáticas, construye a su vez una idea de ciudadanía, en el ejercicio de discutir y exponer una puesta en común entre la comunidad que participa. En este sentido el reconocerse frente a los demás es una de las ganancias de este grupo de actividades, donde la argumentación y la discusión son posibles.

- Si la clase de matemáticas se centra en la trasmisión de información, procedimientos y contenidos temáticos se dibujan unas rutas pedagógicas de las matemáticas bien definidas[10], en las que el maestro se desempeña como enseñante (Andrade L y otros 2003). Si la clase se centra en la solución de problemas que asumen de manera colectiva y sin motivaciones como notas, solo bajo el placer de conocer y enfrentarse al conocimiento, el rol de maestro pasa del enseñante al acompañante.[11]

---

[10] Ver artículo: Rutas Pedagógicas de las matemáticas en colegios de Bogotá. En magazín Aula Urbana N. 42. Universidad de los Andes y Universidad Distrital.

[11] Tomado de Informe Final de trabajo de grado: "EL modelaje matemático en estudiantes de educación Básica." Escuela Pedagógica Experimental.

A. Anexo 1: Tabla 3-1: Listado de libros de texto analizados.

	Nombre del texto	Editorial	Año de publicación
1	Símbolos 4.Matemática aplicada	Voluntad	2005
2	Proyecto aprendo. Matemáticas 4	S.M	2008
3	Conexiones Matemáticas 4	Norma	2005
4	Conexiones Matemáticas 5	Norma	2005
5	Símbolos 5. Matemática aplicada	Voluntad	2005
6	Matemáticas 5	Escuelas del Futuro	2005
7	Estrategias en Matemáticas 5.	Libros & Libros S.A	2008
8	Hipertexto 5	Santillana	2010
9	Hipertexto 6	Santillana	2010
10	Aritmética y Geometría 1. Grado 6	Mc Graw Hill	2008
11	Hipertexto 7	Santillana	2010
12	Algebra intermedia I. grado 8	Mc Graw Hill	2008
13	Matemáticas para pensar 9	Norma	2012
14	Algebra y geometría. 1	Mc Graw Hill	1996
15	Fundamentos de Matemáticas. Segunda Edición	Grupo Editorial Iberoamérica de Colombia S.A	1998

B. ANEXO 2: tabla de contenido, texto escolar, “Símbolos 4” Ed. Voluntad. 2005

Tabla de contenido

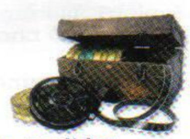
Unidad 1. Conjuntos y sistemas de numeración

Mi ropa
Conexión: Actividades diarias
Estándar: Pensamiento variacional y sistemas analíticos
Pensamiento numérico y sistemas numéricos

Pertenencia y contenencia. 10
Unión e intersección de conjuntos. 12
Diferencia de conjuntos. 14
Sistemas de numeración: egipcio y romano. 16
Sistema de numeración decimal. 18
Lectura y escritura de números. 20
La recta numérica. 22
Relaciones de orden. 24

Unidad 2. Operaciones con números naturales

Lugares famosos
Conexión: Ciencias sociales
Estándar: Pensamiento numérico y sistemas numéricos
Pensamiento métrico y sistemas de medidas
Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos



Adición y sustracción. 36
Propiedades de la adición. 38
Problemas de aplicación. 40
Multiplicación. 42
Propiedades de la multiplicación. 44
Multiplicaciones abreviadas. 46
División de naturales. 48
Relación entre multiplicación y división. 50
Solución de problemas. 52

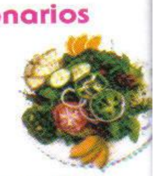
Unidad 3. Teoría de números

El calendario
Conexión: Ciencias Sociales
Estándar: Pensamiento numérico y sistemas numéricos
Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

Múltiplos de un número. 64
Divisores de un número. 66
Números primos y compuestos. 68
Criterios de divisibilidad. 70
Descomposición en factores primos. 72
Máximo común divisor. 74
Mínimo común múltiplo. 76
Problemas de aplicación. 78

Unidad 4. Fraccionarios

¿Qué necesitas comer?
Conexión: Ciencias naturales
Estándar: Pensamiento numérico y sistemas numéricos
Pensamiento métrico y sistemas de medidas
Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos



Las fracciones 90
La fracción de un conjunto. 92
La fracción de una región. 94
La fracción de un número. 96
Clases de fracciones. 98
Fracciones equivalentes. 102
Simplificación y amplificación. 104
Los fraccionarios en la recta. 106
Adición de fracciones homogéneas. 108
Sustracción de fracciones homogéneas. 110
Adición de fracciones heterogéneas. 112
Sustracción de fracciones heterogéneas. 114
Multiplicación de fracciones. 116

A. Anexo 3: tabla de contenido, texto escolar, "Símbolos 5" Ed. Voluntad. 2005

Tabla de contenido

Unidad 1. Conjuntos y plano cartesiano

El espacio
Conexión: Ciencias sociales
Estándar: Pensamiento variacional y sistemas analíticos

Determinación de conjuntos 10
Relación de pertenencia 12
Relación entre conjuntos 13
Unión de conjuntos 14
Intersección de conjuntos 15
Diferencia y complemento 16
Plano cartesiano 18
Matemática... MENTE 20
Prueba saber 22
Juguemos con. 26
Tecnoloco 27

Unidad 2. Valor de posición y operaciones con números naturales

Animales prehistóricos
Conexión: Ciencias sociales
Estándar: Pensamiento variacional y sistemas analíticos

Los números naturales 30
Orden en los números naturales 32
Aproximaciones y estimaciones 34
Adición y sustracción de números naturales 36
Propiedades de la adición 38
Multiplicación y división de números naturales 40
Propiedades de la multiplicación 44
Jerarquía de las cuatro operaciones 48
Ecuaciones en los números naturales 52
Solución de ecuaciones 56
Potenciación de números naturales 60
Radicación de números naturales 64
Logaritmación de números naturales 68
Conjuntos de múltiplos y divisores 70
Criterios de divisibilidad 72
Descomposición en factores primos 76
Mínimo común múltiplo (m.c.m) 79
Máximo común divisor (M.C.D) 82
Matemática... MENTE 86
Prueba saber 88
Juguemos con 92
Tecnoloco 93

Unidad 3. Fraccionarios

Música
Conexión: Ciencias sociales
Estándar: Pensamiento variacional y sistemas analíticos

Fracciones 96
Fracción como comparación y como operador 101
Equivalencia de fracciones 103
Amplificación y simplificación 105
Clasificación de fracciones 107
Comparación de fracciones 109
Adición y sustracción de fracciones 112
Multiplicación de fracciones 116
División de fracciones 120
Fracciones decimales 122
Matemática... MENTE 124
Prueba saber 126
Juguemos con 130
Tecnoloco 131

Unidad 4. Decimales

Contenido vitamínico
Conexión: Ciencias sociales
Estándar: Pensamiento variacional y sistemas analíticos

Expresiones decimales 134
Orden de decimales 136
Aproximación de decimales 138
Adición y sustracción de decimales 140
Multiplicación de decimales 143

.

A. Anexo 4: tabla de contenido, texto escolar, “Matemáticas 5” Ed. Escuelas del futuro. 2005

Contenido	Periodo 1 El Mundo del comercio		Periodo 2 El Universo	
	• Lectura matemática		• Lectura matemática	
	El comercio	10-11	Los seres humanos en la Luna	80-81
Pensamiento numérico	• Adición entre números naturales	12	• Múltiplos de un número	82
	• Sustracción entre números naturales	14	• Divisores de un número	84
	• Multiplicación entre números naturales	16	• Criterios de divisibilidad	86
	• División entre números naturales	18	• Factores primos	88
	• Propiedades de las operaciones	20	• Máximo común divisor	90
	• Potenciación en números naturales	24	• Mínimo común múltiplo	92
	• Potencias y raíces	26	• Igualdades	94
	• Los números relativos	30		
	• Solución de problemas		• Solución de problemas	
	Combinar operaciones	32-33	Descomponer en factores y hallar igualdades	96-97
Pensamiento métrico	• Sistema métrico decimal	34	• Perímetro de polígonos	98
	• Instrumentos de medición	38	• Unidades de área	100
	• Unidades de longitud	40		
Pensamiento espacial	• Líneas rectas y segmentos	42	• Construcción de polígonos regulares	102
	• Construcción y medición de ángulos	44	• Área de polígonos regulares	106
	• Paralelismo y perpendicularidad	46		
	• Triángulos y cuadriláteros	48		
	• Ubicación de puntos en el plano	50		
	• Solución de problemas		• Solución de problemas	
	Obtener información de un esquema	52-53	Elaborar un dibujo	108-109
Pensamiento variacional	• Cambio o variación	54	• Igualdades y ecuaciones	110
			• Solución de una ecuación	112
Pensamiento estadístico	• Recolección de datos	58	• Gráficas estadísticas	114
	• Tabulación y análisis de datos	60	• Medidas de tendencia central	116
	• Solución de problemas		• Solución de problemas	
	Deducir patrones de una gráfica	62-63	Construir una fórmula	120-121
Matemáticas y pensamiento	• Cálculo mental		• Cálculo mental	
	Distribuir para calcular productos	64	Factorizar para multiplicar mentalmente	122
	• Conoce tu calculadora		• Conoce tu calculadora	
	Hallar potencias	65	Descomponer un número en factores primos	123
	• Razonamiento numérico	66	• Razonamiento numérico	124
	• Comunicación matemática	66	• Comunicación matemática	124
	• Razonamiento espacial	67	• Razonamiento espacial	125
	• Diversión matemática	67	• Diversión matemática	125
	• Evaluación	68-73	• Evaluación	126-131
	• Prueba saber	74-75	• Prueba saber	132-133
	• Control y seguimiento	76-77	• Control y seguimiento	134-135

4

A. Anexo 5: tabla de contenido, texto escolar

CONTENIDO

UNIDAD 1. Lógica y conjuntos 8

- **Proposiciones** | 10
- **Proposiciones simples** | 10
  - Negación de proposiciones simples
- **Proposiciones compuestas** | 12
  - Conjunción
  - Disyunción
  - Implicación
  - Equivalencia
- **Conjuntos** | 25
  - Determinación de conjuntos
  - Representación gráfica de conjuntos
  - Clasificación de conjuntos
- **Relaciones entre conjuntos** | 28
- **Operaciones entre conjuntos** | 31
  - Unión entre conjuntos
  - Intersección entre conjuntos
  - Complemento de un conjunto
  - Diferencia entre conjuntos
  - Diferencia simétrica
- **Taller 1** | 42
- **En síntesis** | 44
- **Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?** | 45
  - Proposiciones en la interpretación de circuitos eléctricos

UNIDAD 2. Sistemas de numeración 46

- **Sistema de numeración romano** | 48
- **Sistema de numeración egipcio** | 50
- **Sistema de numeración binario** | 52
  - Conversión del sistema binario al sistema decimal
- **Conversión del sistema decimal al sistema binario** | 54
- **Sistema de numeración decimal** | 54
  - Representación de un número en el sistema decimal
  - Representación de los números naturales en la recta numérica
  - Orden en los números naturales
  - Desigualdades en los números naturales
- **Conjunto de los números naturales** | 57
  - Números pares e impares
  - Adición de números naturales
  - Sustracción de números naturales
  - Multiplicación de números naturales
  - División de números naturales
  - Potenciación en los números naturales
  - Radicación en los números naturales
  - Logaritmación en los naturales
  - Polinomios aritméticos
- **Ecuaciones** | 78
  - Solución de una ecuación
- **Inecuaciones** | 80
- **Taller 2** | 82
- **En síntesis** | 84
- **Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?** | 85
  - Los números naturales en el peso colombiano

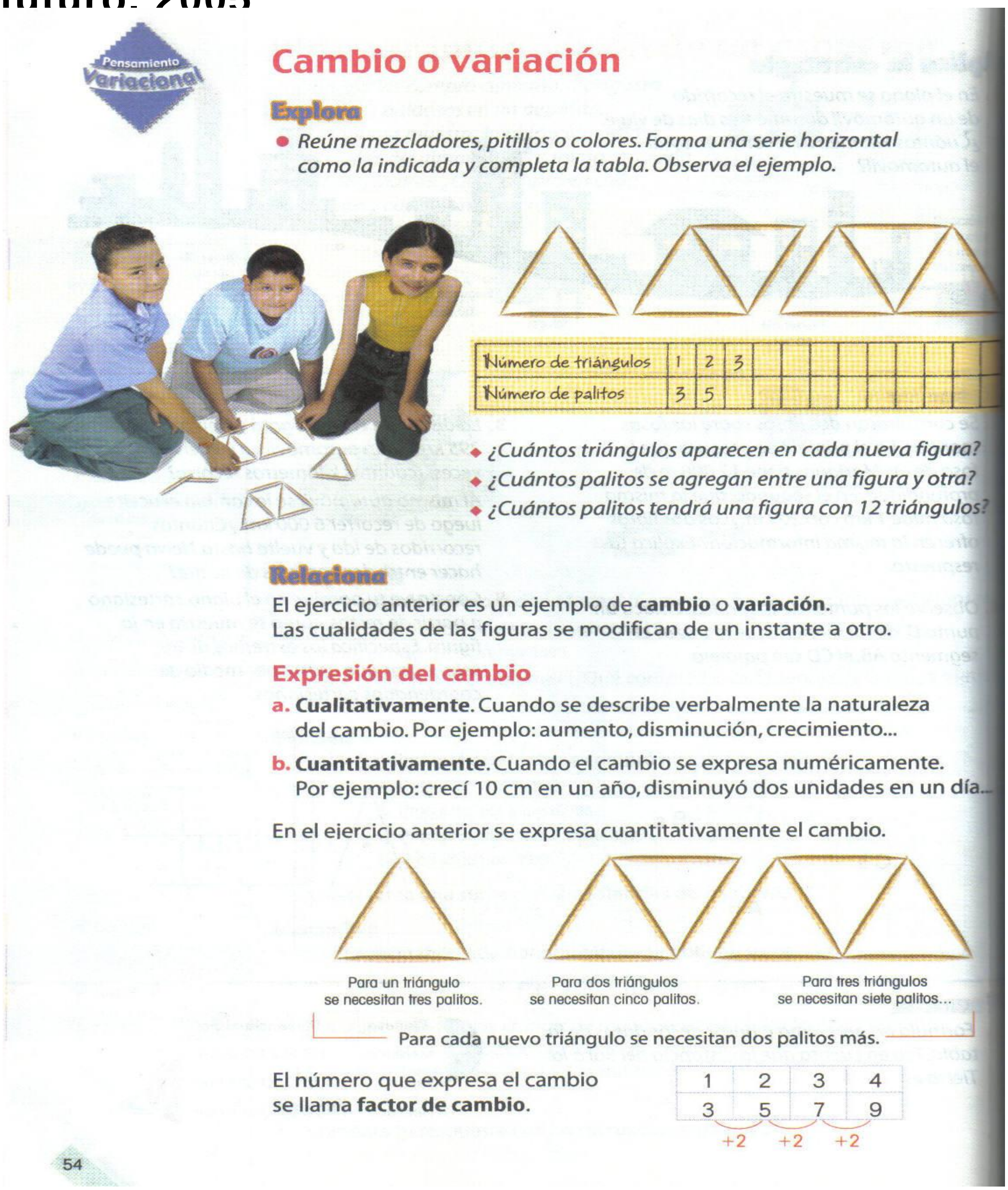
UNIDAD 3. Teoría de números 86

- **Múltiplos de un número** | 88
  - Propiedades de los múltiplos
- **Divisores de un número** | 90
  - Propiedades de los divisores
  - Criterios de divisibilidad
- **Números primos y números compuestos** | 94
- **Números primos** | 94
- **Número compuesto** | 95
  - Factorización de un número
- **Máximo común divisor** | 98
  - Método abreviado para hallar el máximo común divisor
- **Mínimo común múltiplo** | 101
- **Método obtenido para hallar el mínimo común múltiplo** | 102
- **Taller 3** | 104
- **En síntesis** | 106
- **Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?** | 107
  - Los números primos en la criptografía

UNIDAD 4. Fracciones y decimales 108

- **Fracciones** | 110
  - Elementos de una fracción
  - Fracción como cociente
  - Fracción como razón
  - Fracción de un número
  - Clases de fracciones
  - Números mixtos
  - Representación de fracciones sobre la recta numérica
  - Fracciones equivalentes
  - Relación de orden en las fracciones
  - Operaciones entre fracciones
  - Adición y sustracción de fracciones
- **Operaciones combinadas de adición y resta** | 121
  - Multiplicación de fracciones
  - División de fracciones
  - Potenciación de fracciones
  - Radicación de fracciones
  - Operaciones combinadas entre fracciones

A. Anexo 6: Ejemplo ejercicios, texto escolar, “Matemáticas 5” Ed. Escuelas del futuro, 2005



Cambio o variación

Explora

- *Reúne mezcladores, pitillos o colores. Forma una serie horizontal como la indicada y completa la tabla. Observa el ejemplo.*

Número de triángulos	1	2	3								
Número de palitos	3	5									

- *¿Cuántos triángulos aparecen en cada nueva figura?*
- *¿Cuántos palitos se agregan entre una figura y otra?*
- *¿Cuántos palitos tendrá una figura con 12 triángulos?*

Relaciona

El ejercicio anterior es un ejemplo de **cambio** o **variación**.
Las cualidades de las figuras se modifican de un instante a otro.

Expresión del cambio

a. Cualitativamente. Cuando se describe verbalmente la naturaleza del cambio. Por ejemplo: aumento, disminución, crecimiento...

b. Cuantitativamente. Cuando el cambio se expresa numéricamente. Por ejemplo: crecí 10 cm en un año, disminuyó dos unidades en un día...

En el ejercicio anterior se expresa cuantitativamente el cambio.

Para un triángulo se necesitan tres palitos. Para dos triángulos se necesitan cinco palitos. Para tres triángulos se necesitan siete palitos...

Para cada nuevo triángulo se necesitan dos palitos más.

El número que expresa el cambio se llama **factor de cambio.**

1	2	3	4
3	5	7	9
+2	+2	+2	

54

Bibliografía

Castro (19 (De la Peña, 2009)*95) Exploración de patrones numéricos en configuraciones puntuales. Granada. España.*

COLLETE, Jean Paúl. Historia de las Matemáticas Vol. I. Siglo Veintiuno editores. México. 1998. (Gonzalez, 2012)

KLINE M (1991) Historia del Pensamiento Matemático desde la antigüedad hasta nuestros días.

Asocolme. (2002). *Estándares Curriculares para el área de matemáticas.Aportes para el análisis.* Bogotá: Grupo Editorial Gaia.

De la Peña, J. A. (2009). *Algebra en todas partes.* México.

EXPERIMENTAL, E. P. (2000). *Planteamientos en Educación. Vol.2.* Bogotá.

Gonzalez, E. (2012). *Del Lenguaje natural al Lenguaje algebraico.El significado de la variable. Una propuesta didactica basada en el planteamiento y resolucion de problemas,.* bogota.

Mankiewicz, R. (2005). *Historia de las Matemáticas. Del cálculo al caos.* Barcelona: Paidós.

MEN. (1998). *Estandares Curriculares.* Bogotá.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares.* Bogotá.

Rojano, T., & Butto, C. (n.d.). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría.

Socas Martin. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números. Didáctica de las matemáticas. Vol 77* .

UDFJC., G. P. (2002). *LA TRANSICIÓN ARITMÉTICA - ÁLGEBRA.* BOGOTA: COLCIENCIAS.

Waerden.B.L Van Der. (1985) A history of Algebra. German. Springer Verlag