UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Aplicación de la ingeniería didáctica como metodología para favorecer el desarrollo de competencias a partir de los sistemas de ecuaciones lineales

Víctor Darío García Daza

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ingeniería y Administración

Palmira, Colombia

2014

Aplicación de la ingeniería didáctica como metodología para favorecer el desarrollo de competencias a partir de los sistemas de ecuaciones lineales

Víctor Darío García Daza

Trabajo final presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director

Ph.D. Jaime Eduardo Muñoz Flórez

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ingeniería y Administración

Palmira, Colombia

2014

A mi madre, a mi esposa y en especial a mis hijos Bryan y Lina.

Resumen

La metodología de la ingeniería didáctica resultó pertinente para mejorar las competencias matemáticas de los estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Humberto Raffo Rivera de Palmira, quienes en los resultados de las últimas pruebas SABER, realizadas por el MEN de Colombia, mostraron que solo resolvían problemas rutinarios, no analíticos, producto de la enseñanza tradicional. Esta sustentó el diseño y aplicación de una secuencia de “realizaciones didácticas”, que se fundamentó en la organización de enseñanza, propuesta por Douady, para dar amplitud al concepto Sistemas de Ecuaciones Lineales 2x2, sobre el cual se centró la intervención, a modo de pretexto, para adquirir las competencias comunicativas, de razonamiento, y resolución de problemas cotidianos. El análisis de resultados fue cualitativo, se realizó mediante el estudio de caso, bajo el sustento de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau al final se compararon con respecto a los indicadores del Ministerio de Educación Nacional de Colombia, poniendo de manifiesto, la transición del pensamiento numérico al pensamiento variacional en los estudiantes.

Palabras clave: Ingeniería didáctica, realizaciones didácticas, sistemas de ecuaciones lineales, TSD, competencias matemáticas.

Abstract

The methodology of teaching engineering is appropriate to improve the mathematical skills of ninth grade students of the School of Palmira Humberto Raffo Rivera, that in the results of the latest “SABER” tests, performed by the “MEN” of Colombia, shows that they resolved only routine problems as a result of traditional education. This supports the design and implementation of a sequence of "educational achievements", based on the new organization of teaching, given by Douady, to give scope to the concept of 2x2 systems of linear equations, in which the intervention focused, as pretext to acquire communication skills, reasoning and routine problem solving. The analysis of the results was qualitative, performed using the case study, supported by the Brousseau´s theory didactic situations, finally this results were compared with respect to the indicators of the Ministry of National Education of Colombia, highlighting the transition of variational thinking to numerical thinking in students.

Keywords: Engineering teaching, educational achievements, systems of linear equations, TSD, math skills**.**

Contenido

Lista de figuras

Pág.

Lista de tablas

Pág.

Lista de Símbolos y abreviaturas

Abreviatura	Término
DH-O	Dialéctica herramienta-objeto
IEHRR	Institución Educativa Humberto Raffo Rivera
RRS	Registros de representación semiótica
SEL	Sistema de ecuaciones lineales
TSD	Teoría de situaciones didácticas
MEN	Ministerio de Educación Nacional de Colombia
BID	Banco Interamericano de Desarrollo
TIMMS	Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias
ICFES	Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior

Introducción

En los diferentes sistemas educativos del mundo, se realizan pruebas internas y externas, con el fin de reconocer las fortalezas y debilidades en cada uno de ellos y realizar los respectivos planes de mejoramiento. Este trabajo se originó del análisis de los resultados (ver anexo A) de las pruebas SABER en matemáticas, realizadas por el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES), a estudiantes del grado noveno de la institución Educativa Humberto Raffo Rivera de Palmira (IEHRR), en las que se encontró que alcanzaron buen nivel en la componente algorítmica que corresponde al desarrollo del pensamiento numérico, pero presentan muy bajo desempeño en otras competencias matemáticas, que implican desarrollo en el pensamiento crítico como son la interpretación, el razonamiento, la inferencia, modelación y solución de problemas; estos resultados ubicaron la institución en el promedio de las otras instituciones educativas del municipio de Palmira y ligeramente por encima del promedio de las instituciones a nivel nacional.

Se refleja la situación anterior, en la participación de los estudiantes Colombianos y de otros de países latinoamericanos, como Paraguay y Republica Dominicana, que han ocupado los últimos lugares en las pruebas internacionales TIMSS[1], de los últimos años. Preocupados por ésta situación, especialistas en educación del Banco Interamericano de Desarrollo (BID), adelantaron una investigación[2], que

---

[1] TIMSS corresponde a la sigla en inglés para Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias, se trata de una prueba internacional desarrollada e implementada cada cuatro años por la Asociación para la Evaluación de los Logros Educativos (IEA por sus siglas en inglés), de Holanda.

[2] Investigación que retoma el mismo instrumento de codificación del reconocido estudio de video TIMSS de 1995 y 1999, que filmó las aulas de octavo grado de Australia, República Checa, Japón, Hong Kong, Holanda, Alemania y Estados Unidos, que está disponible en varias sitios, entre otros, el del Departamento de Educación de Estados Unidos http://nces.ed.gov/timss/video.asp),citado por Nauslund-Hadley, Emma

responde al porqué los estudiantes de estos dos últimos países, presentan pobre desempeño; acerca del estudio, (Nauslund-Hadley, Emma, 2008), publica un artículo en el que se indica que el factor más importante que incide en el desempeño de los estudiantes, es el método de enseñanza, ya que en los países de avanzada, dedican tres veces más de tiempo a actividades, relacionadas con la aplicación de conceptos, comparado con el tiempo que dedican al desarrollo procedimental, o algorítmico; a diferencia de los países con bajo desempeño, que en sus actividades dan preponderancia al manejo algorítmico repetitivo en un 40%, y el resto del tiempo lo dedican a otras actividades, como escribir del pizarrón, apuntar definiciones, memorizar conceptos matemáticos y repetir mecánicamente, aunque en el mismo artículo citando a (Pesek y Kirsner 2000, zacaros 2006), se menciona que:

> "…algunos expertos del BID, sostienen que cierta cantidad de operaciones rutinarias es necesaria como base para avanzar hacia la solución de problemas más complejos, otros han observado que la memorización inicial de fórmulas, obstaculiza el aprendizaje significativo posterior".

En concordancia con los resultados presentados, y con el fin de investigar y mejorar los métodos de enseñanza-aprendizaje, se toma como referente para el presente trabajo, la metodología propuesta en la Ingeniería Didáctica, Artigue (1995), que se desarrolló para dar sustento a la teoría constructivista de situaciones didácticas Brousseau (1981), en ésta se promueve un completo estudio preliminar que incluye análisis epistemológico del concepto, análisis cognitivo y análisis didáctico para el diseño de situaciones o instrumentos didácticos. En el presente trabajo condujo a dar importancia no solo a la representación algebraica sino también a otras representaciones a las que se da estatus inframatemático, y que son muy útiles, cuando se articulan, para la comprensión y aprehensión de los conceptos matemáticos.

Fue así como, las teorías de registros de representación semiótica (RRS), de Duval, Raymond, Juego de marcos y dialéctica herramienta–objeto (DHO), de Douady Regine, que proponen ampliar los conceptos matemáticos a partir de realizaciones didácticas, que se fundamentan en las diferentes formas de representación de los mismos, se abordaron para profundizar en la conceptualización de los SEL.

En el análisis epistemológico se encontró que las necesidades que marcaron el desarrollo del concepto sistemas de ecuaciones lineales son fundamentalmente dos, la introducción de símbolos y el desarrollo de procedimientos, estos últimos dependen sustancialmente de los primeros. Las antiguas civilizaciones desarrollaron métodos para resolver ecuaciones, usando el lenguaje natural, lo cual hizo muy lento el desarrollo matemático hasta los inicios del simbolismo con Diofanto (siglo III apróx.), para superar esa fase el hombre debió usar medios o representaciones diferentes al lenguaje natural, que sustenten sus elaboraciones, como por ejemplo, para indicar la suma, los Egipcios dibujaron figuras de piernas caminando en un sentido, los Griegos lo hicieron a través de la construcción de segmentos de recta, con lo cual surge la idea de realizar un estudio acerca del papel que pueden cumplir las diferentes formas de representación, en la enseñanza, como respuesta a la situación de bajo desempeño de los estudiantes.

Al respecto Duval (2004) menciona que con la propuesta de coordinación de diferentes representaciones, no solo se logran aciertos sino también una modificación en la cualidad de las producciones. Este salto cualitativo en el desarrollo de "competencias" y de los "resultados" está ligado a la coordinación de los sistemas semióticos que logren los alumnos.

Por tanto, el presente trabajo se centró en la diversidad de representaciones que ofrecen los sistemas de las de ecuaciones lineales, en la utilización de sus posibilidades propias, en su comparación por la puesta en correspondencia y en sus "traducciones" mutuas, como lo manifiesta Duval.

Tal trabajo supone una completa modificación de actitudes, en los actores del proceso; los alumnos deben más activos y apropiarse del problema y el docente debe ser motivador hacia el logro, debe diseñar la situación de tal forma que pueda controlar el rumbo del aprendizaje, para ello debe realizar su análisis a priori, y motivar al estudiante, tratando en lo posible de intervenir solo en caso de extrema necesidad, para llevarlos al saber actual, como lo indican las teorías constructivistas citadas.

En los capítulos uno y dos se describen la justificación, objetivos y el marco referencial en el cual se sustenta el trabajo, teniendo como guía la fase preliminar que propone la ingeniería didáctica, es decir la presentación de las dimensiones histórico – epistemológico, cognitiva y didáctica, ésta última incluye el análisis de las dificultades que se presentan en el aprendizaje de los SEL. Al final se presentan los referentes teóricos, a partir de los cuales se diseñó, aplicó y validó la secuencia enseñanza - aprendizaje.

En el capítulo tres, se describe la metodología usada y las consideraciones resultantes del análisis preliminar, tenidas en cuenta para el diseño de la secuencia y su aplicación, esta se presenta finalmente, en un esquema de forma global, en el que se tienen en cuenta, actividades de reafirmación y construcción de conceptos que desarrollan el pensamiento variacional, en los que normalmente se presentan dificultades de aprendizaje, como se manifiesta en varias investigaciones y en particular la de Panizza (1996).

En ese esquema, se puede observar el tratamiento semiótico que se da al concepto SEL, que está centrado en los marcos numérico, geométrico y algebraico, con el fin de provocar el funcionamiento cognitivo necesario para la producción de una actividad matemática, es decir, necesario para el direccionamiento de la gestión matemática que se propone a los alumnos o que se espera que ellos pongan en marcha.

En el capítulo cuatro, se realiza el análisis apriori detallado de cada una de las actividades que se propusieron al estudiante, con el fin de tener en cuenta las variables microdidácticas, sobre las cuales intervino el profesor para llevar el control acerca de lo que se esperaba de las producciones de los alumnos. Posteriormente se describe la fase experimental, especificando inicialmente las condiciones a cumplir por los alumnos y profesor durante la aplicación de la secuencia.

El análisis de los resultados, se realizó mediante la descripción de estudios de caso, a partir de las observaciones del profesor, registros fílmicos y fotografías en las que se detallan las situaciones de acción, formulación y validación de las construcciones más significativas de los estudiantes, para determinar cualitativamente el nivel del logro y las dificultades presentadas.

Además para recopilar la información, se utilizó una rejilla con variables cualitativas que indican si el estudiante usa o no, o lo hace con dificultades, las diferentes formas de representación; este se hace con el fin de determinar el avance en el aprendizaje de los estudiantes en cada una de las seis situaciones.

Igualmente se realizó el análisis a posteriori, que se confrontó con él a priori, para validar cada una de las seis situaciones planteadas internamente y por tanto el diseño de la secuencia.

En las conclusiones escritas en el capítulo cinco, se manifiesta que la aplicación metodología de la Ingeniería didáctica en la IEHRR, resultó pertinente para alcanzar los objetivos propuestos.

El diseño de la secuencia, desarrollo a través de cada una de las actividades, las competencias de razonamiento, en la componente variacional, la modelación y resolución de problemas cotidianos, en sus diferentes formas de representación. Cada formulación se sustentó con los conocimientos nuevos adquiridos por los estudiantes en actividades anteriores, en un ciclo que parte de los conocimientos antiguos en la búsqueda de lo nuevo, como lo plantea Douady en su teoría Herramienta-objeto.

Se recomienda mejorar y replicar a futuro el diseño de la secuencia, usando para ello las TICS, sobre todo para la visualización e interpretación de los sistemas de ecuaciones lineales y su compatibilidad; además el uso de estas herramientas les sirve como actividad preparatoria para el aprendizaje de la geometría analítica en décimo grado.

1. Descripción del problema

Las pruebas internacionales, PISA y TIMMS, tienen como objetivo conocer las competencias que desarrollan los estudiantes en la secundaria; al comparar los resultados de los países participantes, se pueden explicar las diferencias observadas en función de las distintas características de los sistemas educativos, siendo el método de enseñanza y la formación docente, los factores que más inciden en el desempeño de los estudiantes.

Al respecto, el Banco Interamericano de Desarrollo (BIC) realizó una investigación, encontrando que en países latinoamericanos con bajo desempeño en las pruebas Timss como Paraguay y Republica Dominicana, se usa como método de enseñanza en matemáticas, la repetición de procedimientos y algoritmos, dejando de lado la comprensión conceptual y el desarrollo del pensamiento crítico en el estudiante, con poco estímulo para asociar ideas, experiencias, patrones y explicaciones, a diferencia de los países de mejor desempeño como el Japón que dedica mayor porcentaje de tiempo en el aula a estas actividades, al respecto Näslund-Hadley (2012) en su artículo, “Las repeticiones mecánicas aniquilan la innovación y la curiosidad”, escribe:

> *“Los docentes que son parte de la muestra del estudio del BID, se apoyan fuertemente en la presentación de los procedimientos matemáticos combinados con repetición mecánica, práctica y memorización de conceptos. Los observadores del BID encontraron que los estudiantes dedicaron del 30 al 40 por ciento del tiempo a operaciones de cálculo rutinarias y a la incorporación de números en fórmulas. La mayor parte del tiempo restante se destinaba a apuntar definiciones, copiar del pizarrón, repetir mecánicamente y memorizar conceptos matemáticos. Solamente una fracción del tiempo efectivo de clases se asignó a actividades que requieren destrezas de pensamiento crítico (aplicación de conceptos), estas observaciones señalan un énfasis casi exclusivo en el desarrollo de la comprensión del procedimiento,*

lo cual es muy distinto de lo que se observó, en el estudio de video TIMSS, en las aulas de octavo grado de los países con mejores logros. En Japón, los estudiantes destinaron el 44 por ciento del tiempo de clase efectivo a inventar soluciones nuevas y sólo el 15 por ciento a aplicar conceptos (Stigler y otros 1999).”

Los estudiantes colombianos, presentaron bajo desempeño en las pruebas internacionales Timss (2007), en especial los de grado octavo, ya que alcanzaron en matemática un puntaje promedio de 380, correspondiente al puesto 50 entre los 59 países participantes, observándose que los estudiantes de los países que la anteceden tienen ventaja en el dominio cognitivo que subyace en la aplicación de los conceptos y el razonamiento matemático[3].

En cuanto a las evaluaciones internas en Colombia, el ICFES es la entidad responsable de realizar pruebas periódicas, llamadas pruebas saber para tercero quinto y noveno grado, que tienen como objetivo retroalimentar a las instituciones educativas, para que formulen y ejecuten planes de mejoramiento, es así como en el análisis de los resultados de las pruebas saber de matemáticas, aplicadas a los estudiantes del grado noveno de la institución educativa Humberto Raffo Rivera de Palmira (IEHRR) en 2006, se encontró que un gran porcentaje de los estudiantes, también muestran regular o poco desarrollo en las competencias de razonamiento, modelación de la representación verbal a la algebraica o gráfica y solución de problemas, componentes numérico variacional y aleatorio, como producto del método de enseñanza tradicional.

Por otro lado, se ha observado que estudiantes de grado décimo de la institución conocen y aplican algoritmos para encontrar la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2, mostrando buen dominio procedimental, pero con dificultades para

[3] ICFES. Publicación de resultados de la pruebas TIMMS 2007. Disponible en: //icfesdatos.blob.core.windows.net/datos/Resultados%20de%20Colombia%20en%20TIMSS%202007%20Resumen%20ejecutivo.pdf, página 10, tomado el 13 de diciembre de 2012.

contextualizar este saber matemático, en situaciones problema o reconocer en donde lo aplican.

Por lo tanto, se toma como temática, los sistemas de ecuaciones lineales y sus formas de solución, propuesto para noveno grado, como punto de partida para desarrollar competencias tales como el razonamiento numérico, la formulación de modelos y la resolución de problemas; es así como, el trabajo plantea resolver la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo enseñar los sistemas de ecuaciones lineales y su solución, mediante una secuencia didáctica que esté soportada en teorías constructivistas, como estrategia para desarrollar competencias matemáticas, de tal forma que el estudiante pueda asociarlos para resolver situaciones donde estos se requieran?

1.1 Justificación.

La comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales, los métodos de solución y su aplicación en la resolución de problemas, que empieza a gestarse en el grado noveno, es quizá uno de los logros más importantes a alcanzar por el estudiante, ésta secuencia conceptual es una herramienta fundamental que se usa en otras disciplinas; siendo en la educación secundaria un elemento en construcción, que se profundiza en la educación superior con el álgebra lineal.

Además, el componente numérico variacional que está implícita en los sistemas de ecuaciones, se puede aprovechar para el desarrollo de competencias comunicativa, de razonamiento y de resolución de problemas que están estrechamente relacionadas a todos los contextos reales, es evidente entonces la necesidad de desarrollarlas en el estudiante, en un mundo en el que se deben realizar, abstracciones, inferencias y pensar de forma lógica.

Por tanto, es muy importante que el estudiante de la institución, articule el aprendizaje algorítmico, que es su fortaleza actual, con la solución de situaciones reales o de su contexto, en las cuales presenta insuficiencia; para ello es fundamental que sea él quien construya el concepto, al respecto se presenta a continuación la siguiente afirmación (Juan E. León)[4] :

> *"El ser humano tiene la disposición de aprender –de verdad- sólo aquello a lo que le encuentra sentido o lógica. El ser humano tiende a rechazar aquello que no le encuentra sentido. El único autentico aprendizaje es el significativo, el aprendizaje con sentido. Cualquier otro aprendizaje será puramente mecánico, memorístico, coyuntural: aprendizaje para aprobar un examen, para ganar la materia, etc. El aprendizaje significativo es un aprendizaje relacional. El sentido lo da la relación del nuevo conocimiento con: conocimientos anteriores, con situaciones cotidianas, con la propia experiencia, con situaciones reales, etc."*

Se propone con éste trabajo, cambiar el enfoque pedagógico tradicional en el que el profesor es el actor principal del proceso enseñanza aprendizaje y el estudiante es receptor pasivo; por el enfoque de pedagogía activa o constructivista que usan los países que están a la vanguardia según las pruebas internacionales, con el objetivo de mejorar el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes de la institución.

Por tanto se hace necesario diseñar y aplicar, una secuencia que amplié el concepto SEL 2X2, favorezca su aprendizaje y desarrolle otras competencias matemáticas además de las algorítmicas, en un proceso dinámico del cual éste proyecto será la primera aproximación.

En consecuencia, se realiza una experiencia usando la metodología de la Ingeniería didáctica, para validarla en el contexto de la institución educativa Humberto Raffo Rivera y promover su uso en la enseñanza de las matemáticas.

1.2 Objetivos

1.3 Objetivo general

Validar la pertinencia de la ingeniería didáctica, como metodología que favorece el desarrollo de competencias durante el aprendizaje de los sistemas ecuaciones lineales, su solución y aplicación, a través de una secuencia de enseñanza aplicada a un grupo de estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Humberto Raffo Rivera de Palmira.

1.3.1 Objetivos específicos

- Diseñar una secuencia de enseñanza que contemple las condiciones de los estudiantes de la Institución Educativa Humberto Raffo Rivera, usando la metodología de la ingeniería didáctica.
- Aplicar la secuencia de enseñanza a un grupo de estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Humberto Raffo Rivera de Palmira, para favorecer el aprendizaje y el desarrollo de competencias a partir de de los sistemas de ecuaciones lineales, su solución y aplicación.
- Validar internamente la ingeniería didáctica (secuencia de enseñanza y su aplicación) confrontando el análisis *a priori* con el análisis *a posteriori* de acuerdo con los registros que se efectúen al grupo intervenido.

2. Marco referencial

2.1 Marco contextual

La institución educativa Humberto Raffo Rivera de la ciudad de Palmira es de carácter técnico industrial, con 66 años de antigüedad, en la actualidad cuenta con 2800 estudiantes provenientes de todos los barrios y corregimientos del municipio de Palmira.

Además de disponer en su infraestructura con amplios espacios para la enseñanza de ocho especialidades: Mecánica Industrial, Electricidad, Ebanistería, Metalistería, Dibujo Técnico, Construcciones Civiles, Mecánica Automotriz y Fundición, es también sede de los laboratorios integrados, servicio que ofrece a la comunidad educativa de Palmira y sus corregimientos.

El grado noveno cuenta con 11 grupos de 35 estudiantes en promedio; el grupo 9:6 con el cual se realizará la experiencia, está compuesto por 36 estudiantes, 32 hombres y 4 mujeres, entre los 13 y 15 años de edad.

Por ser institución de carácter técnico, a la parte de la especialidad se le asignan 6 horas a la semana y a la parte académica 24 horas a la semana; correspondiéndole al área de matemáticas, comprendida, por algebra, geometría y estadística; 4 horas semanales.

En consecuencia y a pesar del poco tiempo asignado, para las actividades matemáticas, con el método de enseñanza tradicional en la IEHRR, los estudiantes de noveno, alcanzan niveles de desempeño que se ubican en el promedio de resto de instituciones de Palmira y ligeramente superior a las del resto de la nación, en los niveles de competencia numérico o algorítmicos, pero con deficiencias en las competencias de razonamiento, modelación, traducción del lenguaje natural al algebraico y resolución de problemas que se relacionan con el razonamiento matemático, comportamiento que es el común en las instituciones educativas de Colombia, se observa en el anexo A.

De acuerdo con el plan de la asignatura, el docente, en el proceso enseñanza-aprendizaje de los SEL 2x2, inicia con el método de la representación gráfica, que desarrolla superficialmente (ésta se profundizará en décimo grado), pero con el cual se puede complementar y ampliar el concepto, ya que permite el uso procedimientos analíticos, no rutinarios, que favorecen el desarrollo de otras competencias, que son evaluadas anualmente el MEN.

Posteriormente enfatiza y profundiza en los diferentes métodos de solución algebraicos, lo que implica dar la explicación, realizar ejemplos y proponer actividades de ejercitación algorítmicas.

En concordancia, para realizar el plan de mejoramiento, se aplicó el presente trabajo, durante el desarrollo de la asignatura de Matemática, para dar cumplimiento a la temática correspondiente a los sistemas de ecuaciones lineales, propuesta en el grado noveno, usando para ello un bloque de dos horas para la fase experimental y la siguiente hora para realizar la socialización de las construcciones e institucionalización.

2.2 Marco teórico

2.2.1 Dimensión histórica-epistemológica

Investigar acerca de la evolución de los sistemas de ecuaciones lineales (en adelante SEL), implica averiguar acerca de las formas de comunicación y representación de los procedimientos usados para resolver ecuaciones desde la antigüedad, de las resistencias o debilidades que conducen a la necesidad del desarrollo simbólico que los potenció y cuya consecuencia fue la construcción del algebra; la importancia de esta búsqueda radica en el encuentro con las dificultades que presentan los estudiantes para su comprensión, a partir de las cuales se pueden tomar decisiones para su enseñanza-aprendizaje, ya que también se encuentra como fueron superadas a través de la historia.

La principal resistencia se presenta en la transición del lenguaje natural al simbólico, es decir, la construcción y formalización del lenguaje algebraico, que se dio desde aproximadamente el 2000 a.C. con los babilonios y egipcios, hasta Viéte 1500 d.C. en Europa, al respecto Katz (2004), manifiesta que:

> *"..... Siempre hay que recordar que ninguno de los pueblos antiguos tenía el simbolismo para las operaciones o incógnitas que usamos hoy en día. Sin embargo, los escribas eran capaces de resolver problemas usando técnicas puramente verbales”.*

Actualmente se tienen varios papiros, en los que se evidencia el desarrollo matemático de la antigua civilización egipcia, como son: el papiro de Moscú (1850 a.C.), y el papiro de Rhind (1650 a.C.), en este último, el escriba Ahmes resolvió 87 problemas cotidianos, algunos relacionados con la agrimensura, en los que planteo ecuaciones en lenguaje natural, designando la incógnita como un montón; esta fase retórica, transcurre en un periodo de tiempo muy extenso, que termina cuando el matemático griego Diofanto (siglo III d.C.), propone el lenguaje sincopado, denominado así por el uso de abreviaturas para representar incógnitas en la solución de ecuaciones, al respecto, Katz (2004), afirma lo siguiente:

> *“…Los egipcios y los babilonios escribieron las ecuaciones y soluciones en palabras. Diofanto, sin embargo, introdujo abreviaturas simbólicos para los distintos términos que intervienen en las ecuaciones".*

Mucho tiempo después se llega a comprender la importancia que tiene el uso de los símbolos, estos permiten generalizar la solución de problemas que son similares, Diofanto no alcanza tal concepción, resolvía las ecuaciones de forma diferente a las actuales, tomando cada problema en forma particular, mediante complejos razonamientos aritméticos, asumiendo el valor para las incógnitas como describe, Katz (2004), en el siguiente texto:

> *"… la solución de cada problema comenzó con la suposición de que la respuesta x, por ejemplo, se había encontrado, las consecuencias de este hecho fueron seguidos hasta el punto donde un valor numérico de x se pudo determinar mediante la resolución de una ecuación simple. La síntesis, que en este caso es la prueba de que la respuesta satisface las condiciones deseadas, nunca fue dada por Diofanto, ya que sólo desarrollaba cálculos aritméticos".*

Con los árabes, se presenta un período de estancamiento en cuanto al desarrollo del simbolismo, pero se avanza en la construcción de procedimientos, Al-khuarismi, (siglo X, d.C.), tratando de evitarlos números negativos, introdujo uno de los más significativos, actualmente muy usado, la transposición de términos en las ecuaciones, que le permitía manejar, usando el lenguaje natural, las cantidades negativas (a las que no le daba sentido) para transformarlas en positivas de acuerdo a la necesidad.

En la investigación realizada por Malesani (1996) se afirma que en el siglo XII, Leonardo Pisano introdujo en Occidente los procedimientos aritméticos utilizados por los árabes y como consecuencia, las características del álgebra árabe se transmitieron a Europa y tuvieron una fuerte influencia durante más de tres siglos. Acerca de la construcción simbólica, menciona que en las obras de Leonardo y sobre todo en el tratado de ábaco llamado *Trattato d'Algibra* (Anónimo del Siglo XIV) se puede observar que los desarrollos algebraicos utilizaban fundamentalmente el lenguaje natural, aunque ya se comienza a evidenciar una cierta tendencia hacia el simbolismo, porque el autor usa sistemáticamente ciertos nombres especiales para denominar la incógnita y sus Potencias, como se describe a continuación:

x cosa (o chosa):
x2 censo
x3 chubo
x4 censo di censo
x5 chubo di censi
x6 censo di chubo (chubo di chubo)

Con el transcurso del tiempo, estos símbolos que designaban la incógnita o cosa, y los que designaban las potencias y operaciones, fueron abreviados o modificados; Malesani (1996), manifiesta que fue finalmente François Viète (1540-1603), quién produjo el cambio más significativo en la construcción del lenguaje simbólico; utilizó sistemáticamente las letras para designar, la incógnita, sus potencias, los coeficientes genéricos y los signos para las operaciones, empleaba este lenguaje simbólico tanto en los procedimientos resolutivos como en la demostración de reglas generales: En este sentido el nuevo lenguaje era autosuficiente y auto explicativo, desarrollándose así los cambios conceptuales necesarios en la transición del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico. Vale la pena recordar que mucho antes de Viéte, para hacer demostraciones matemáticas, los antiguos babilonios y egipcios usaban figuras pictóricas o diagramas, después los griegos usaron otros tipos de lenguaje, como el geométrico que implementó Euclides, finalmente Diofanto realizaba un tratamiento muy elaborado, enteramente matemático, sin hacer las demostraciones, como se manifestó anteriormente.

Malesani (1996) concluye, tomando citas de *(Kline, pág. 305; cfr. Colin y Rojano, pág. 126).*

> *"Viète llamaba a su álgebra simbólica logística especiosa en oposición a la logística numerosa: consideraba el álgebra como un método para operar sobre las especies o las formas de las cosas, y la aritmética, la numerosa, como una técnica que se ocupaba de los números. De este modo el álgebra se transformó en el estudio de los tipos generales de formas y de ecuaciones, porque lo que es aplicable al caso general es válido para los infinitos casos particulares"*

De éstas conclusiones, que emergen del análisis de las evidencias (textos antiguos) encontradas por estos investigadores, se puede inferir que el uso de símbolos para representar situaciones o problemas dados en lenguaje natural, permitió facilitar y generalizar el desarrollo de procedimientos de solución y sus demostraciones, el costo es el aumento en el nivel de abstracción. Para construir el lenguaje simbólico, el hombre tardó un periodo de tiempo muy extenso, en el que se superaron dificultades cognitivas y procedimentales, asunto fundamental, que se debe reconocer y replantear con los estudiantes, cuando confronten el uso del algebra, pues muy a menudo no le dan la real significación.

Para alcanzar tal desarrollo simbólico, Malesani (1996) determina tres fases en la que se describe la transición del lenguaje natural al lenguaje algebraíco:

- FASE RETORICA: anterior a Diofanto de Alejandría (250 d.C.), en la cual se usa Exclusivamente el lenguaje natural, sin recurrir a algún signo;

- FASE SINCOPADA: desde Diofanto (siglo III) hasta fines del Siglo XVI, en la cual se introducen algunas abreviaturas para las incógnitas y las relaciones de uso frecuente, pero los cálculos se desarrollan en lenguaje natural.

- FASE SIMBÓLICA: introducida por Viète (1540-1603), en la cual se usan letras para todas las cantidades y signos para representar las operaciones, se utiliza el lenguaje simbólico no sólo para resolver ecuaciones sino también para demostrar reglas generales.

Además de la evolución del lenguaje simbólico, usado para representar situaciones problema, es importante hacer el análisis de los métodos de solución de las ecuaciones, y sistemas de ecuaciones, que están implícitas en ellas; son de especial interés el método de la falsa posición, que emplearon en la fase retórica los egipcios, y retoman los árabes después, para desarrollar el método de la doble falsa posición, los procedimientos se describen a continuación, con el fin de recoger información valiosa, para analizar cómo fue el desarrollo del pensamiento matemático del hombre desde la antigüedad y reconocer, cuales fueron y como superó los obstáculos y dificultades.

- El método de la falsa posición

El procedimiento se encuentra en el papirus de Rhind (aproximadamente, 1650 a.C.), su autor, el escriba egipcio Ahmes, lo aplicó para resolver varios de los 87 problemas que contiene, estos se pueden modelar actualmente con ecuaciones lineales y en algunos casos con sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones de segundo grado.

En este papiro, aparecen problemas de ecuaciones del tipo: $x + (1/n)\ x = b$, con n y b, enteros positivos, además $x \in E$, siendo E el conjunto numérico que usaban los egipcios, compuesto por los números naturales no nulos, la fracción 2/3 y las fracciones del tipo 1/n con n entero positivo. Para resolverlo asumían un valor para la incógnita (de ahí su nombre de falsa posición o reguli falsi) con el que determinaban el valor del miembro izquierdo de la ecuación, para luego plantear una proporción directa con los "resultados" errados o falsos que obtenían, lo que les permitía encontrar el "montón", designación que le daban a la incógnita.

A continuación, Malesani (1996), presenta el problema número 24 del papiro de Rhind, tomado de (Cfr. Guillemot, p. 3), de la siguiente manera:
"Encontrar un número que sumado a su séptima parte sea igual a 19".

> *El mismo traducido al lenguaje simbólico del álgebra moderna corresponde a la ecuación: $x+ (1/7)\ x = 19$. Que Ahmes, resolvió de esta manera:*

1- *Adoptó la falsa posición 7, esto es $x = 7$ y obtuvo: $7 + (1/7).7 = 8$ en vez de 19.*
2- *Dividió 19 por 8 y al resultado lo multiplicó por 7, es decir, aplicó la proporcionalidad directa: "$x: 7 = 19:8.$"*

Del problema anterior, se puede observar la dificultad de los egipcios para manejar las fracciones, por lo que generalmente planteaban términos con fracciones de la forma 1/n, de tal forma que se pudieran simplificar fácilmente.

- El método de la doble falsa posición

En el procedimiento consideraban dos valores particulares para la incógnita, de aquí el nombre de doble falsa posición, es así como, de forma similar al método anterior, efectúan los cálculos necesarios para encontrar las diferencias con los valores indicados en la ecuación inicial y por último aplican un esquema equivalente a la fórmula de interpolación lineal actual. Este método se usaba generalmente en la resolución de ecuaciones de primer grado con la incógnita en ambos miembros de la ecuación, sistemas lineales de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado, Malesani (1996).

Las antiguas civilizaciones, egipcios, babilonios y griegos. unas más que otras, presentaron dificultades en el desarrollo del pensamiento matemático, debido al lenguaje utilizado, que fue su principal resistencia, además de los sistemas de numeración incompletos, en los que no se representaba el cero, por ello siempre planteaban situaciones no nulas, la pobre o ninguna concepción de los números negativos, además, en su campo numérico solo se tenía en cuenta algunas fracciones, como se muestra en los métodos de la falsa posición, lo que hizo lento su desarrollo procedimental, al contrario de los chinos e hindúes quienes los reconocían y realizaron elaboraciones superiores y desarrollaron procedimientos más complejos. Sin embargo a pesar de este marco, se pudo encontrar que resolvieron situaciones problema que se pueden modelar actualmente con ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales y en algunos casos ecuaciones. Todo lo anterior determina las dificultades y resistencias en la búsqueda de soluciones a problemas, en un marco histórico evolutivo del algebra de 3500 años.

2.2.2 Dimensión cognitiva

- **2.2.2.1 Análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos en el aprendizaje de los SEL.**

Un referente que se toma como de guía para el análisis de las concepciones de los estudiantes, es la investigación realizada por Panizza Mabel, Sadovsky Patricia y Sessa, Carmen (La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito*”*,1999) en la cual se acopian los resultados de otras de sus investigaciones, que desde 1994, buscan identificar condiciones de apropiación del álgebra elemental en alumnos de primero, tercer y cuarto año (14 a 16 años) de la escuela secundaria Argentina, usando como metodología la encuesta exploratoria, observación de clases y entrevistas a docentes y alumnos.

A continuación, se menciona uno de los hallazgos encontrados en alumnos de primer año, en la que el álgebra se introduce a través de las ecuaciones de primer grado con una incógnita:

> *"… a partir del conjunto de tareas que los alumnos realizan, elaboran una concepción según la cual la ecuación es una igualdad numérica y las letras son números a develar".*

Según Panizza (1994), este hallazgo confirma la apreciación realizada en "El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica", de Kieran (1989), quién había anticipado que:

> *"Presumimos que las concepciones primitivas de los niños de lo que es una ecuación, no contiene en general, la idea de que tengan términos literales a ambos lados del signo igual, las ecuaciones de ese estilo carecen de sentido*, *a la vista de la presunta concepción ingenua de los niños, de una ecuación como un hecho numérico ligeramente disfrazado con la falta de algún componente".*

En la investigación se realizó también una entrevista a estudiantes, que han trabajado antes con funciones lineales y sistemas de ecuaciones con dos variables, ésta arrojo que los estudiantes una vez escrita la ecuación con dos variables se apoyaron en sus conocimientos de ecuación con una variable y de sistemas lineales, extendiendo básicamente una propiedad y un procedimiento, las representaciones mentales que tienen los alumnos acerca de los problemas que se resuelven con ecuaciones, les hacen ver el en el contexto del problema la búsqueda la solución única.

Los resultados de ésta investigación, reafirman a otras realizadas acerca del mismo fenómeno, como lo menciona Panizza citando a Vergnaud (1987) cuando manifiesta:

> *"… los alumnos piensan que lo que está a cada lado del signo igual en una ecuación, es una cuenta indicada cuyo resultado debe tener algún significado, el igual es en muchos casos, un signo de escritura para separar las dos informaciones o cantidades, como una coma".*

Las anteriores conclusiones, conducen a considerar la construcción de la noción de variable, no solo desde la enseñanza de las funciones, sino también en el trabajo con las ecuaciones, para reconocer la noción de dependencia, al fijar valores a una de las variables para encontrar los de la otra (y=f(x)) y posteriormente construir la noción de covariación (codependencia), con la posibilidad de reconocer infinitas soluciones para el caso de una ecuación con dos variables.

2.2.3 Dimensión didáctica

- **2.2.3.1 El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos**

En la institución IEHRR, para la temática previa a los SEL 2x2, se está complementando la enseñanza, con el texto de Matemática de la Editorial Santillana, grado noveno. El texto plantea el estudio gráfico y algebraico de la ecuación lineal de la forma ax+b=c, y la ecuación lineal en forma general, ax+by+c = 0, y sus transformaciones.

Se continúa con el método gráfico de solución de SEL 2x2; se hace el análisis de compatibilidad y después se desarrollan los métodos de solución algebraicos, usando el método tradicional de enseñanza. La función del docente radica en dictar la definición y explicar realizando ejemplos típicos, para ello se apoya en el texto guía de Baldor, Aurelio[5], mientras el rol del estudiante consiste en resolver una serie de ejercicios, tomados del texto; su acción radica en repetir el proceso algorítmico realizado por el profesor, que en ocasiones debe resolver nuevamente, para aclarar y afianzar los procedimientos.

En la descripción anterior, se observa que el concepto se va construyendo de forma monotemática, primero mediante la representación gráfica y luego mediante la representación algebraica, sin contrastar estas dos formas de representación, que aparecen dispersas en el desarrollo del currículo propuesto para el grado noveno.

Coincide este método de enseñanza, con el descrito en el informe de la investigación realizada por el BID, a sistemas educativos de países con bajo desempeño en las pruebas internacionales en el área de matemática, en el que manifiestan que estos resultados, se deben a la aplicación en el aula solo de procedimientos algorítmicos para construir gráficas y resolver ecuaciones, lo que carece de significado para el estudiante; esta forma de enseñanza - aprendizaje es rutinaria, repetitiva e incompleta, contraria a la hipótesis de Duval.

Existe un salto en la enseñanza del concepto SEL 2x2, ya que se parte del saber actual, que se presenta mediante el modelo algebraico, sin desconocer en éste lenguaje su gran importancia como herramienta para la resolución de diferentes tipos de problemas, pero que genera dificultades en la interpretación y falta de

[5] Dr, AURELIO BALDOR, Fundador, Director y jefe de la cátedra de Matemáticas del Colegio Baldor, La Habana, Cuba

significación, en el estudiante, cuando no se articula con otros lenguajes, en la resolución de problemas.

Al respecto Guzmán (1990), citado por Segura de Herrero (2004), menciona que:

> *“algunos libros de texto y algunos profesores apuntan al desarrollo algorítmico, no trabajan los pasajes del registro algebraico al verbal, ni del gráfico al algebraico, a pesar de que el paso entre registros de representación semiótica resulta necesario a un objeto matemático. Esto no se trata de una opción pedagógica, sino de un aprendizaje obligado”.*

Como se aprecia, la instrucción que reciben los estudiantes de sus profesores es algorítmica, ya que es la estrategia óptima para la resolución de problemas, por lo tanto no se buscan estrategias diferentes a la del modelo algebraico. Pero esta instrucción se queda corta, cuando se usa como estrategia pedagógica en la aprehensión de un concepto, ya que conduce al estudiante solo a desarrollar ciertas habilidades cognitivas.

Igualmente, Segura de Herrero (2004), describe algunas críticas a la enseñanza tradicional, realizadas por Ramírez (1997), en su trabajo, “El uso de la calculadora graficadora y la resolución de problemas algebraicos, en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas”.

> *“Generalmente la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas se aborda por medio de esquemas abstractos que elaboran los profesores o que son copiados de algún libro de texto. Además diserta sobre el status inframatemático de la representación y resolución gráfica de sistemas de ecuaciones lineales, al que se refiere como un método válido y representativo de resolución”.*

Es necesario que el aprendizaje sea significativo, proponiendo una situación real que permita la construcción del objeto SEL, desde el lenguaje natural (coloquial), lo que obligará a usar diferentes tipos de representación como tablas, gráficos, símbolos en la búsqueda de su solución óptima, enriqueciendo así la comprensión del concepto y a la vez favoreciendo el desarrollo de otras competencias matemáticas, además de las concernientes a las del desarrollo puramente algorítmico.

En conclusión, además de la enseñanza de procedimientos algorítmicos, se debe asegurar el real aprendizaje de los conceptos, para garantizar la correcta y oportuna aplicación del mismo en la resolución de los problemas.

2.2.4 Teorías constructivistas

Acerca de la formación de conocimientos, en su propuesta de la nueva organización de enseñanza, Douady (2008), adopta la hipótesis de Piaget según el cual " los conocimientos no proceden de la sola experiencia de los objetos ni de una programación innata preformada del sujeto, sino de construcciones sucesivas con elaboraciones constantes de estructuras nuevas", menciona Duady, que para Piaget el equilibrio es el factor fundamental del desarrollo cognoscitivo", ya que manifiesta que "durante los periodos iniciales existe una razón sistemática de desequilibrio, que es la asimetría de las afirmaciones y negaciones", manifiesta Douady, que la equilibración progresiva es un proceso indispensable para el desarrollo, cuyas manifestaciones se modifican en el sentido de un mejor equilibrio en su estructura cualitativa como en su campo de aplicación.

En otros términos, Douady (2008), manifiesta que el proceso de formación del conocimiento según lo anterior sería el siguiente:

> "…*comienza con la asimilación, que será, tarde o temprano trabada por perturbaciones: las compensaciones obtenidas se traducirán en una nueva construcción cuyas regulaciones, que caracterizan sus fases, serian a la vez, compensadoras, teniendo en cuenta la perturbación (implicando así la formación al menos virtual de la negación) y*

formadoras en relación a la construcción, y esto hasta la constitución de una nueva estructura equilibrada el desarrollo posterior de procesos análogos".

A nivel del aprendizaje, manifiesta Douady que en la medida que ciertos errores aparecen como un factor de equilibrio (contradicción por ejemplo), comprendemos que pueden tener un rol productivo. Esto se produce sobre todo en una situación colectiva donde tenemos necesidad de validación. En efecto, para explicar y desechar errores, debemos construir argumentos para convencer (reequilibración).

Por tanto, la enseñanza tiene la obligación de organizar tan eficazmente como sea posible, un juego de desequilibrios y reequilibrios al nivel de las concepciones de los niños. Este juego puede evolucionar según los momentos, de manera individual o colectiva.

Se debe buscar una nueva forma de enseñanza, que se ajuste al estudiante, para apropiarlo de la cultura matemática, no solo en el aprendizaje de un "saber matemático", sino también en la capacidad de aplicarlo, que implica ser competente sobre todo en situaciones ante las cuales no se tiene preestablecido un procedimiento.

En consecuencia, la labor del docente no se debe limitar solo a explicar conceptos, él además de diseñar las actividades previamente para cumplir con los objetivos propuestos, deberá ser innovador, mediador, promoviendo y motivando al estudiante para que construya el conocimiento, se trata de cambiar poco a poco la práctica tradicional, incorporando nuevas tendencias pedagógicas, donde se tiene presente la realidad del estudiante, sus intereses, sus necesidades, su forma de ver el entorno físico y social, su edad y conocimientos, apuntando a la acción y a despertar el interés por aprender.

- **2.2.4.1 Teoría de situaciones didácticas (TSD)**

Una de las teorías constructivistas que responde a las expectativas anteriores y está a la vanguardia en la educación matemática, es la teoría de situaciones didácticas (TSD) de Guy Brouseeau[6], que busca las condiciones para una génesis de los conocimientos matemáticos, a través de dos niveles, uno mediante la interacción del estudiante, con un medio previamente diseñado, sin la ayuda del profesor, denominado nivel a-didactico (el docente juega el rol de motivador y cuestionador de las construcciones), y otro donde el docente lo institucionaliza a partir de lo realizado por el estudiante, denominado nivel didáctico; la teoría da cuenta del conjunto de estas interacciones y fenómenos que ellas inducen. En el siguiente texto, Godino (2010), describe que es una situación didáctica:

> *"En la Teoría de Situaciones Didácticas de G. Brousseau, se define que una situación didáctica es un conjunto de relaciones explícita y/o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos, algún entorno (que puede incluir instrumentos o materiales) y el profesor, con el fin de permitir a los alumnos aprender -esto es, reconstruir- algún conocimiento. Las situaciones son específicas del mismo"*

La hipótesis básica de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau, se fundamenta en que el acto de conocer está 'situado' en un sistema de restricciones que retroalimentan las acciones erradas o acertadas del sujeto sobre ellas, por lo tanto, el didácta debe seleccionar las variables apropiadas sobre las que actuará el estudiante, ya que de la situación a plantear depende el éxito y el aprendizaje del conocimiento en juego; Godino (2010) retoma el planteamiento que hace Brousseau de lo que se debe hacer al respecto.

> *"Brousseau propone realizar un 'estudio epistemológico' del concepto para elaborar situaciones adaptadas para la enseñanza de un concepto matemático dado. Dicho estudio comprende investigar sobre, los significados del concepto dentro de la estructura de la teoría actual; las condiciones históricas y culturales de la emergencia del concepto, sus*

[6] Brousseau, Guy. Investigador líder en Educación matemática, aportante de la teoría de situaciones didácticas. Disponible en: http//zonadenumerosymas.blogspot.com/2009/03/quien-es-guy- brousseau.html

variadas formas intermedias, concepciones y perspectivas que crearon 'obstáculos' con respecto a la evolución del concepto, visto desde la perspectiva de la teoría actual, problemas que llevaron a una 'superación' de estos obstáculos y permitieron un desarrollo posterior; el estudio de la psicogénesis del concepto (o su 'epistemología genética'), un 'análisis didáctico', esto es un estudio de los significados del concepto pretendido y/o transmitido por su enseñanza, actualmente o en el pasado (incluyendo el estudio de la transposición didáctica o una comparación con los resultados de los análisis 'estructurales' e 'histórico).

En consecuencia, para un concepto matemático cuya enseñanza se pretende, la tarea inicial del didacta consiste en realizar el análisis epistemológico de éste, los obstáculos y dificultades cognitivas y didácticas que fueron superadas y marcaron su desarrollo; se debe aclarar que no se pretende que el estudiante lo recapitule desde sus orígenes; lo que sí debe realizar el didacta y es muy importante para él, porque tendrá elementos con los cuales podrá tomar decisiones para diseñar el medio o instrumento que presentará a sus estudiantes.

Según Brousseau, un obstáculo es una concepción que ha sido en principio eficiente para resolver algún tipo de problema, pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito previo se resiste a ser modificado o a ser rechazado: que son constantes y resistentes. Para superar tales obstáculos se precisan situaciones didácticas diseñadas para hacer a los alumnos conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones y para ayudarles en conseguirlo.
Brousseau (1983), citado por Godino (2010), da las siguientes características de los obstáculos:

- *Un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento;*
- *El alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto que encuentra con frecuencia;*
- *Cuando se usa este conocimiento, fuera del contexto genera respuestas incorrectas. Una respuesta universal exigiría un punto de vista diferente;*

- *El alumno resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce y al establecimiento de un conocimiento mejor. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.*
- *Después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándolo, de forma esporádica.*

Brousseau, manifiesta que frente a la teoría psicológica que atribuye los errores de los alumnos a causas de tipo cognitivo, se admite que la posibilidad de que tales errores puedan ser debidos a causas epistemológicas y didácticas, por lo que la determinación de este tipo de causas proporciona una primera vía de solución.

Se trata entonces de reconocer los obstáculos o dificultades, que al superarse, produjeron el desarrollo del concepto, para que el estudiante los enfrente y proponga las soluciones en un intento por llegar a la solución óptima (la actual); muy diferente este aprendizaje del tradicional que lo intenta “construir” a partir de las concepciones de hoy, produciendo insuficiencias o vacíos en el aprendizaje.

Además, en las relaciones estudiante, objeto de aprendizaje, docente, Godino J., (2010), manifiesta que Brousseau identificó varios tipos de estados, que crean el esquema general de una 'secuencia didáctica' o situaciones que provocan una 'génesis artificial' de un concepto matemático, estas son:

- *Situaciones centradas sobre 'la acción', donde los estudiantes hacen sus primeros intentos por resolver un problema propuesto por el profesor;*

- *Situaciones centradas sobre la 'comunicación', donde los estudiantes comunican los resultados de su trabajo a otros estudiantes y al profesor;*

- *Situaciones centradas sobre la 'validación', donde se deben usar argumentaciones teóricas más bien que empíricas; y*

- *Situaciones de institucionalización, que tienen por finalidad establecer y dar un status oficial a algún conocimiento aparecido durante la actividad de la* *clase. En particular se refiere al conocimiento, las representaciones simbólicas, etc., que deben ser retenidas para el trabajo posterior*.

La última situación es responsabilidad del docente, quien para determinar el estado de avance en las construcciones realizadas, debe analizar, comparar y socializar las estrategias usadas y validarlas si es el caso; en concordancia institucionaliza los conceptos hacía los que apuntó inicialmente, al respecto Brousseau, citado por Saiz I, Acuña N (2006) menciona lo siguiente:

> *"En un proceso de aprendizaje por adaptación, cuando los alumnos logran desarrollar una estrategia que resuelve el problema, el conocimiento que subyace a este no se les revela como un nuevo saber: si pudieron resolver el problema, es, para ellos, porque sabían hacerlo. Los alumnos no tienen la posibilidad de identificar por sí mismos la presencia de un nuevo conocimiento, y menos aún el hecho de que dicho conocimiento corresponde a un saber cultural. Esto requiere de un proceso de institucionalización, que cae bajo la responsabilidad del maestro".*

En consecuencia, se deben realizar estudios de transposición didáctica, que se ocupa, entre otras cuestiones por detectar y analizar esta clase de diferencias y hallar las causas por las cuales se producen, con objeto de subsanarlas, evitar que la enseñanza deje vacíos o transmita significados inadecuados sobre los objetos matemáticos.

Transferir la relatividad del saber al contexto requerido, es denominado transposición didáctica y se refiere según, Chevallard (1985), autor de ésta teoría, a la adaptación del conocimiento matemático para transformarlo en conocimiento para ser enseñado, a continuación se presenta un texto que él considera esencial en la didáctica.

> *¿Qué es la transposición de los saberes? O, mejor dicho: ¿por qué hay transposición de los saberes? La respuesta es a priori muy simple y se*

> *puede explicitar en algunos puntos. Primer punto: los saberes nacen y crecen en ciertos "lugares" determinados de la sociedad. (La producción de los saberes es algo complejo, que supone una "ecología" particular.) Segundo punto: las necesidades sociales hacen que los saberes producidos deban vivir también en otros lugares de la sociedad. (La cosa es todavía más compleja y oscura: así, casi cada objeto de uso cotidiano "contiene" hoy día, de manera invisible para el usuario, matemáticas "cristalizadas", y un montón de otros saberes más.) Tercer punto: para poder vivir "lejos" de sus lugares de producción, los saberes sufren transformaciones que los adaptan a las ecologías "locales" correspondientes. (De este modo, los objetos matemáticos que manipulan ingenieros, economistas o geógrafos deben empezar a vivir "en asociación" con otros objetos, que el matemático ignora y que, por lo menos culturalmente, parecen propios de estos ámbitos específicos de la práctica social).*

El ejemplo de la escuela es, en este caso, fundamental, aunque no sea único, porque ni las matemáticas, ni la gramática por ejemplo, han sido "producidos" para los niños y niñas. Sin embargo, estos saberes viven –más o menos, mejor o peor– en la escuela de hoy día. Para estar presentes, para poder ser estudiados, se requiere una transposición, que supone a su vez un inmenso trabajo transpositivo.

Estos saberes no deben quedarse en el cuaderno, deben convivir con el estudiante, de tal forma que los puedan aplicar en su cotidianidad; para ello el didacta debe proponer entonces la enseñanza a partir de situaciones que sean significativas para ellos. Por último, se debe tener en cuenta en el proceso enseñanza aprendizaje, las relaciones implícitas entre el profesor y el estudiante a partir de las funciones que cumplen; para profundizar en el asunto, se incorpora el concepto de contrato didáctico, que Brousseau (1986), citado por Godino (2010) define como:

> "*un conjunto de reglas - con frecuencia no enunciadas explícitamente - que organizan las relaciones entre el contenido enseñado, los alumnos y el profesor dentro de la clase de matemáticas."*

Para el actual trabajo se prevén dificultades para cambiar el contracto didáctico que está implícito en la enseñanza tradicional que se imparte en la IEHRR, por el propuesto en la teoría de las situaciones didácticas; culturalmente el estudiante espera que el profesor le entregue sus conocimientos, el decide si los toma, dependiendo del grado de motivación que tenga, su problemática y necesidades particulares; además conviven con él, una gran cantidad de distractores y la cultura mediática le sugiere el logro de objetivos de manera rápida y fácil, sin realizar grandes esfuerzos, en contraposición al fundamento de la teoría de situaciones didácticas que exige disciplina y esfuerzo.

Brousseau (1983), citado por Godino J (2010), plantea las dificultades de tipo didáctico que se pueden presentar ante el cambio de metodología de enseñanza:

> *"El aprendizaje por adaptación al medio, implica necesariamente rupturas cognitivas, acomodaciones, cambio de modelos implícitos (concepciones), de lenguajes, de sistemas cognitivos. Si se obliga a un alumno o a un grupo a una progresión paso a paso, el mismo principio de adaptación puede contrariar el rechazo, necesario, de un conocimiento inadecuado. Las ideas transitorias resisten y persisten. Estas rupturas pueden ser previstas por el estudio directo de las situaciones y por el indirecto de los comportamientos de los alumnos".*

Por lo tanto en la enseñanza, se deben considerar los condicionantes cognitivos, culturales, sociales, fisiológicos del estudiante, al igual que el estudio de las nuevas metodologías para adaptarlas o complementarlas en el en el aula, de tal forma que éste cambio no resulte traumático.

Menciona Douady, R., (2008), que la TSD.

> *"… da una clasificación de las situaciones de clase pero no da condiciones sobre los problemas susceptibles de servir eficazmente como contenidos en esas situaciones, dicho de otro modo, no estudia particularmente las relaciones entre contenidos y situaciones".*

Por lo tanto, en el presente trabajo la TSD, será un apoyo para el análisis de los fenómenos ocurridos en el aula, que serán determinados por la propuesta o instrumento didáctico.

- **2.2.4.2 Nueva organización de la enseñanza**

Para construir una enseñanza diferente, restituyendo el sentido a los instrumentos que los alumnos utilizan, asegurando a los objetos una presentación institucional, Douady (2009), caracteriza otra organización de la enseñanza, en la que el enseñante, tiene en cuenta la construcción del saber de los alumnos por los alumnos mismos, ésta se fundamenta en tres puntos:

> *-Desde el punto de vista cognoscitivo, la dialéctica instrumento – objeto[7]; la dialéctica viejo-nuevo y el juego de marcos.*
>
> *-Desde el punto de vista de los intercambios del alumno con el medio, en el seno del cual evoluciona el concepto, la organización se apoya, en las tres formas de dialéctica: acción, formulación y validación, descritas en la TSD y también en las intervenciones del enseñante en momentos bien elegidos por él.*
>
> *-Finalmente desde el punto de vista del contrato didáctico, se requiere de una institucionalización de conocimientos y un medio para que el estudiante controle por si su aprendizaje.*

- **2.2.4.3 Dialéctica herramienta-objeto**

El funcionamiento de la dialéctica herramienta-objeto (DHO), propuesto por Douady (2008), está caracterizada por la organización esquemática siguiente:
Dado un problema inicial.

Fase a) “antiguo”

[7] En algunas traducciones aparece como instrumento - objeto

La primera etapa consiste en la puesta en marcha de un objeto conocido como instrumento explicito para iniciar un procedimiento de resolución del problema o por lo menos de una parte del problema. Es decir se moviliza lo “antiguo” para resolver parcialmente el problema.

Fase b) búsqueda

En la segunda etapa, el alumno encuentra dificultades para resolver completamente su problema, ya sea porque su estrategia es muy costosa (en cantidad de operaciones, en riesgo de errores, en incertidumbre sobre el resultado…) o porque esta estrategia no funciona más. Se orienta al alumno para que busque otros medios mejor adaptados a su situación. Reconocemos allí el comienzo de una frase de acción. El alumno puede entonces poner en marcha implícitamente instrumentos nuevos, por la extensión de campo de validez, o por su naturaleza misma. Esquemáticamente hablaremos en esta etapa de “nuevo implícito”. Desde la óptica de los alumnos, las concepciones en juego (si es posible colectivamente) en ese momento, entrarán en conflicto o en resonancia con las antiguas. Los errores o contradicciones pueden convertirse en las posturas de procesos dialecticos de formulación y validación para resolver los conflictos y asegurar las integraciones necesarias. Pero puede ser también que convicciones contradictorias queden sin respuesta siendo fecundas (cf. II de la búsqueda de un cuadrado de área dada).

Fase c) explicitación

En la etapa anterior algunos elementos tuvieron un rol importante, casi decisivo y son susceptibles de ser apropiados para ese momento del aprendizaje. Están formulados en términos de objetos o en términos de prácticas; con su condición de empleo circunstancial. Se trata de “nuevo explícito” susceptible de reempleo y familiarización.

Intervención del maestro

Puede suceder que durante el transcurso de las fases b) o c), el maestro se dé cuenta de que la situación peligra con bloquearse si no interviene o que lo descubra demasiado tarde y tenga que desbloquearla. Según su análisis de la situación didáctica, debe tomar la decisión de intervenir o no, y si es necesario, tendrá que elegir el momento y la forma de la intervención respetando la libertad de acción de los alumnos (incertidumbre).

Fase d) institucionalización

El maestro pasa, desde ese momento, a una etapa de institucionalización de lo que es nuevo y retiene con las convenciones en curso, eventualmente definiciones, teoremas y demostraciones. Esto nuevo que se retiene está destinado a funcionar, posteriormente como antiguo.

Fase e) familiarización-reinversión

A continuación damos a los alumnos los diversos problemas destinados a provocar el funcionamiento como instrumentos explícitos de lo que ha sido institucionalizado, a desarrollar hábitos y destrezas, a integrar el saber social con el saber del alumno. Esos problemas simples o complejos solo ponen en juego lo conocido.

Fase f=a) complejidad de la tarea o nuevo problema:

Quedan por utilizar los nuevos conocimientos dentro de una situación compleja que implica otros conceptos conocidos o buscados por el aprendizaje.
El nuevo objeto es susceptible de convertirse en un antiguo para un nuevo ciclo de la dialéctica instrumento-objeto.

Es así como, la autora del cambio de marcos, propone la dialéctica herramienta – objeto; en su transcurso, los conceptos matemáticos juegan alternativamente el papel de herramienta para resolver un problema, y de objeto tomando un lugar en la construcción de un conocimiento organizado, Douady (1993, pág.34).

- **2.2.4.4 Cambio de cuadros o marcos**

Un “cuadro o marco”, está constituido por objetos de una rama de las matemáticas, de las relaciones entre los objetos, de sus formulaciones eventualmente diversas y de las imágenes mentales asociadas a esos objetos y a esas relaciones, la palabra marco debe tomarse en el sentido usual que se tiene cuando se habla de marco algebraico, marco aritmético, marco geométrico, entre otros Douady (1993).

Manifiesta Douady, que el concepto del cambio de marcos se refiere a la posibilidad de formular, analizar y resolver un problema “transfiriendo el problema de un marco (por ejemplo, numérico) a otro marco (por ejemplo, geométrico), es así como, las traducciones de un marco a otro conducen al enriquecimiento del marco de origen y de los marcos auxiliares; consiste en hacer intervenir el saber enseñado en diferentes contextos: la realidad física, representaciones gráficas, el dominio numérico, la geometría.

El cambio de cuadros o marcos, para Douady (1993) es “un medio para obtener formulaciones diferentes de un problema que sin ser necesariamente equivalentes por completo, permiten un nuevo acceso a las dificultades encontradas y a la puesta en acción de herramientas y técnicas que no se imponían en las primeras formulaciones”.

Otra teoría que esta la vanguardia en la enseñanza aprendizaje y de la cual se pueden plantear algunas de sus hipótesis, para el diseño de la secuencia, es la teoría de los registros de representación semiótica RRS, de Duval Raymond, que se presenta a continuación.

Condiciones sobre los problemas susceptibles de comprometer una D.H.O. (Dialéctica Herramienta - Objeto)

Según Douady (2008), se presentan las siguientes condiciones, para el diseño de los problemas a presentar a los estudiantes:

El enunciado tiene sentido en el campo de conocimientos del alumno.

El alumno debe poder considerar lo que puede ser una respuesta al problema.

Esto es independiente de su capacidad para concebir una estrategia de respuesta o una validación de una proposición de respuesta.

Teniendo en cuenta sus conocimientos, el alumno puede emprender un procedimiento, pero la respuesta no es evidente, esto quiere decir que no puede suministrar una respuesta completa sin desarrollar una argumentación que lo conduzca a preguntas que no sabe responder inmediatamente.

El problema es rico, lo que significa que la red de los conceptos implicados es bastante importante, pero no demasiado para que el alumno pueda administrar su complejidad, sino solo, por lo menos en equipo o dentro de la colectividad clase.

El problema está abierto por la diversidad de preguntas que el alumno puede plantear o por la variedad de estrategias que puede poner en marcha y por la incertidumbre que se desprende con respecto al alumno.

Las últimas condiciones eliminan un recorte del problema en preguntas demasiado pequeñas.

El problema puede formularse en dos marcos diferentes, teniendo cada uno su lenguaje y su sintaxis y cuyos significados constituyentes forman parte, parcialmente del campo de conocimientos del alumno.

El conocimiento buscado por el aprendizaje es el medio científico de responder eficazmente al problema.

Las hipótesis de Douady

La organización que propone Douady, por su carácter interactivo (instrumento-objeto, cambios de marcos) obliga al alumno a tratar una información a menudo abundante, que emana de varias fuentes y que se expresa indistintamente, con correspondencias (voluntariamente) parciales entre los diversos modos de expresión.

La situación es por construcción, motivo de desequilibrio; la búsqueda para mejorar las correspondencias y la argumentación desarrollada con este fin, son medios de reequilibración. Esto conduce a Douady (2008) a plantear la siguiente hipótesis:

Construir efectivamente conocimientos haciendo jugar la dialéctica herramienta - objeto en dos marcos, por lo menos, respetando sin embargo los umbrales de dos tipos.

Existe una masa crítica heterogénea de conocimientos antiguos y de hábitos, culturales y técnicos (los pre requeridos) bajo forma de instrumentos explícitos en un campo conceptual dado, que permite al alumno adentrarse en la resolución de un problema relevante de ese campo, y por consiguiente, comprometer la dialéctica herramienta-objeto.

- **2.2.4.5 Teoría de registros de representación Semiótica**

Ésta teoría, Duval (1988), define los registros de representación semiótica (RRS) como un medio de expresión, que se caracteriza por sus signos propios y la forma en que éstos se organizan, es decir, un registro está constituido por signos en el sentido más amplio de la palabra: trazos, símbolos, íconos, que están asociados de manera interna y externa. De manera interna, según los lazos del contexto y de pertenencia a una misma red semántica. De manera externa, según las reglas de combinación de signos en expresiones o configuraciones; estas reglas son propias de la red semántica involucrada.

En el artículo, “Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica”, escribe Segura de herrero, (2004), tomando como referente a Duval (1999), lo siguiente:

> “… *para que un sistema semiótico (entendido como el conjunto de signos y reglas que representan objetos, donde los signos son las unidades elementales del sistema y las reglas ordenan las asociaciones de signos) pueda ser un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis:*
>
> *1. La formación de una representación identificable como imagen de un registro dado.*
>
> *2. El tratamiento de una representación a través de un proceso interno, que implica sus transformaciones en el mismo registro donde ha sido formado.*
>
> *3. La conversión de una representación que conlleva su cambio (externo al registro de partida), hacia una de otro registro, conservando la totalidad o solo una parte del contenido de la representación inicial.”*

Manifiesta Segura de Herrero que Según Duval, de estas tres actividades, sólo las dos primeras, son tomadas en cuenta en la enseñanza, por tanto, el conocimiento que se imparte es parcial respecto de lo que representa, e indica que los distintos registros son complementarios, ya que de un registro a otro no se tienen los mismos aspectos de un objeto. En consecuencia propone la tercera actividad, bajo la hipótesis que la conceptualización de un objeto matemático, implica la coordinación de al menos dos registros de representación.

Su hipótesis se fundamenta en que el conocimiento matemático tiene ciertas características, que lo diferencian de las otras disciplinas; por ejemplo, el objeto SEL y su solución, no es accesible por la percepción directa, como lo son la mayoría de objetos; el reconocimiento de estos debe pasar necesariamente por la articulación de varios registros de representación semiótica, Duval (1999), manifiesta que:

“El cambio de registro constituye una variable que se revela fundamental en didáctica: facilita considerablemente el aprendizaje, pues ofrece procedimientos de interpretación”. .

En contraposición a las consideraciones anteriores, la enseñanza tradicional se propone tema a tema, de forma dispersa, con lo cual al final se pierde la significación, se dejan vacíos o se producen confusiones. Es así como, no basta una serie de problemas o ejercicios para que el estudiante maneje con responsabilidad un sistema de ecuaciones lineales; es imprescindible en la enseñanza del concepto, fomentar la movilidad y articulación de sus diferentes registros semióticos, como lo manifiesta Duval.

Para el presente trabajo, se propone entonces una secuencia que coordine el aspecto semiótico, para evitar vacíos conceptuales y falta de significación en la construcción del objeto SEL 2x2 y su solución.

2.2.5 Dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Los sistemas de ecuaciones lineales 2x2, relacionan dos ecuaciones lineales simultáneas, en las cuales existen dos incógnitas, que generalmente se simbolizan como x y y, estas representan dos valores para los cuales ambas ecuaciones tienen solución.

Stanley I, Grossman (1996), los generaliza de la siguiente forma:
"Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas x y y:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\
a_{21}x + a_{22}y &= b_2
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Donde a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2, son números dados. Cada una de estas ecuaciones es la ecuación de un línea recta. Una **solución** al sistema (1) es un par de números denotados por (x, y), que satisface (1). Las preguntas que surgen en forma natural son: ¿tiene (1) algunas soluciones, y, si así es cuántas?

En los procedimientos se usan dos hechos importantes del álgebra elemental:

Hecho A Si a=b y c=d, entonces a + c =b + d
Hecho B Si a=b y c es cualquier número real, entones ca=cb

El hecho A establece que si se suman dos ecuaciones, se tiene un tercera ecuación correcta. El hecho B establece que si se multiplican ambos lados de una ecuación por una constante, se obtiene una segunda ecuación válida se debe suponer que $c \neq 0$ ya que aunque la ecuación 0=0 es correcta, no es muy útil".
Geométricamente corresponden a dos líneas en el plano cartesiano. De acuerdo a como se ubican éstas en el mismo (una con respecto a la otra), se pueden clasificar en[8]:

Incompatibles: se reconocen porque las líneas son paralelas, el sistema no tiene solución, es decir no existen valores para los cuales se cumplan ambas ecuaciones.

Compatibles: Si el sistema tiene solución, en cuyo caso se clasifican en:
Determinados: Si la solución es única y corresponde a la pareja ordenada (x,y), que indica el punto donde gráficamente las líneas se cruzan.

Indeterminado: Si tiene infinitas soluciones o parejas ordenadas (puntos), que cumplen con ambas ecuaciones, en este caso se tienen dos ecuaciones equivalentes que representan la misma línea recta, es decir las rectas son coincidentes.

Muchos problemas cotidianos que requieren la determinación de dos o más cantidades desconocidas pueden ser resueltos por medio de un sistema de ecuaciones lineales; al decodificar el texto, las cantidades desconocidas se representan con letras, por ejemplo: x, y, etc. y se establece un sistema de ecuaciones que satisfagan las dos condiciones del problema. La resolución de este sistema se puede realizar por diferentes métodos algebraicos; en el presente trabajo se enfatizó en el de reducción a sumas y restas, del cual se reconstruyo el algoritmo en la situación tres.

También se pueden resolver mediante el método gráfico, seleccionando las variables para cada uno de los ejes, tomando la variable independiente en el eje

[8] Tomado de http://es.wikipedia.org/wiki/sistema_de_ ecuaciones lineales

horizontal (x) y la dependiente en el eje vertical (y), existen varios métodos para realizar la gráfica.

Su importancia radica en encontrar de forma rápida y eficiente mediante diferentes métodos, la solución a problemas que presentan dos condiciones que se relacionan con las mismas dos componentes (como los que se presentaron en las situaciones cinco y seis). Encontrar la solución mediante otra estrategia demanda realizar construcciones muy elaboradas que además demandan demasiado tiempo. En contraposición, se puede decir que el método algebraico generaliza el problema para cualquier valor de las variables, por tanto facilita encontrar la solución del problema, de la siguiente forma.

Se reafirma la apreciación anterior, con lo manifestado por MORRIS Kline (pág. 260), acerca del pensamiento de Descartes al respecto.

> "A Descartes lo que le impresionó especialmente del algebra fue que mejoraba la eficiencia del razonamiento. Mecaniza el pensamiento, y así produce casi en forma automática resultados que de otro modo serían difíciles de establecer, fue descartes quien percibió el valor del algebra con nitidez y llamó la atención hacia él".

Su dificultad en la aplicación radica en la interpretación del problema y el reconocimiento de las variables en juego, con las cuales se puede realizar su modelo algebraico, ya que generalmente se presenta en lenguaje cotidiano o natural, para ello se requiere la competencia matemática de solución de problemas en el que se debe traducir una realidad a una estructura matemática.

3. Marco metodológico

La ingeniería didáctica responde al cómo diseñar y cómo aplicar una secuencia de enseñanza, bajo la teoría de situaciones didácticas (TSD) de Brousseau, que aparece a mediados de la década de 1980 en Francia y permite pensar en las relaciones entre la investigación y la acción en el aula.

Ésta metodología propone un completo programa de investigación para la didáctica de la matemática que implica estudios epistemológicos, para el diseño de instrumentos o situaciones didácticas y su aplicación, comparación del diseño con los procesos que tienen lugar de hecho para su mejoramiento y estudio de las condiciones de reproductibilidad del mismo.

La Ingeniera didáctica busca interrelacionar los tres elementos del triángulo didáctico: maestro, alumno y saber, de acuerdo a una secuencia de fases, de tal forma que el diseño de la situación o instrumento didáctico juegue el papel central, pues es a partir de ella, que el estudiante construirá el conocimiento.

Al respecto, Artigue (1995), menciona que el sentido del trabajo matemático llevado a cabo debe ser claramente percibido y que los conocimientos construidos en un contexto particular deben ser relacionados por el docente con los saberes matemáticos institucionales, tanto en sus contenidos como en sus formas de expresión.

Es así como, el diseño de una secuencia de situaciones, para que los estudiantes desarrollen competencias matemáticas, tomando como objeto de estudio los sistemas de ecuaciones lineales y su solución, fue uno de los retos en el presente

proyecto que se validó al final, después de confrontar los análisis a priori y a posteriori.
Se plantean en éste capítulo, las características de la investigación, el contexto del grupo intervenido y los procedimientos que fueron efectuados para el diseño, aplicación y validación de la secuencia de enseñanza, teniendo presente la Ingeniería Didáctica, como referente metodológico que sustentará la organización de enseñanza propuesta por Duady, para el diseño de la secuencia y la TSD de Brouseau para el análisis de los fenómenos ocurridos en el aula, durante la aplicación de la secuencia.

3.1 Tipo de investigación

Se trata de una investigación de tipo cualitativo, que se realizó mediante el estudio de caso, para validar la pertinencia de la Ingeniería Didáctica en el diseño y aplicación de una secuencia didáctica, que favoreció el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes de noveno grado de la básica secundaria, ésta metodología tiene como característica, "realizaciones didácticas" constructivistas, para llevar al aula de clase. Se sustentó en la concepción, realización, observación y análisis de una secuencia de enseñanza en el tema de los SEL 2X2 y su solución, a partir de un análisis preliminar detallado, que tuvo en cuenta el contexto de los estudiantes, el análisis histórico –epistemológico, el análisis didáctico y el cognitivo, para profundizar en el afianzamiento de conceptos teniendo como referente, la nueva organización de enseñanza que propone Douady, con la teoría, juego de marcos, dialéctica herramienta –objeto, que se complementó con la TSD para el análisis de los resultados, además de la teoría RRS de Duval, que sirvieron de apoyo para la reconstrucción del objeto de estudio citado.

3.2 La micro ingeniería didáctica

Artigue (1995) menciona, que se distinguen por lo general dos niveles: el de la micro-ingeniería y el de la macro-ingeniería, dependiendo de la importancia de la realización didáctica involucrada en la investigación. Anota además que las investigaciones de micro-ingeniería son más fáciles de llevar a la práctica, sin embargo, si bien ellas permiten tener en cuenta de manera local la complejidad de los fenómenos de clase, no la dejan de unir con la complejidad esencial de los fenómenos asociados con la duración de las relaciones entre enseñanza y aprendizaje.

Por lo tanto, el nivel del presente estudio es de micro-ingeniería didáctica, por tratarse de una temática en particular, que se implementó en el aula, mediante seis situaciones didácticas, aplicadas en el transcurso de tres meses, sin alcanzar el nivel de una ingeniería didáctica, que puede demandar varios años en el proceso de maduración de campos matemáticos, que involucran muchos conceptos.

3.3 Estudio cualitativo de caso

Para el análisis de las observaciones y validación del proceso, se tuvieron presente como indicadores, las estrategias y los diferentes tipos de representación usados por los estudiantes para dar solución a las situaciones que se les planteó, estos son la evidencia del avance en el desarrollo de sus competencias matemáticas, en una transición que va del pensamiento numérico al pensamiento algebraico; éste análisis es diferente de otros tipos de investigación que requieren análisis de variables estadísticas cuantitativas, para la comparación de grupos de control con grupos no intervenidos, al respecto Artigue, M.(1995, p.37), menciona acerca de la validación de procesos desarrollados mediante la Ingeniería Didáctica:

> “La metodología de la Ingeniería didáctica se caracteriza también, en comparación con otros tipo de investigación basados en la experimentación en clase, por el registro en el cual se ubica y por las formas de validación a las que está asociada. De hecho, las investigaciones que recurren a la experimentación en clase de sitúan por lo general dentro de un enfoque comparativo con validación externa, basada en la comparación estadística del rendimiento de grupos experimentales y grupos de control. Este no es el caso de la ingeniería didáctica que se ubica, por el contrario, en el registro de los

estudios de caso y cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori”.

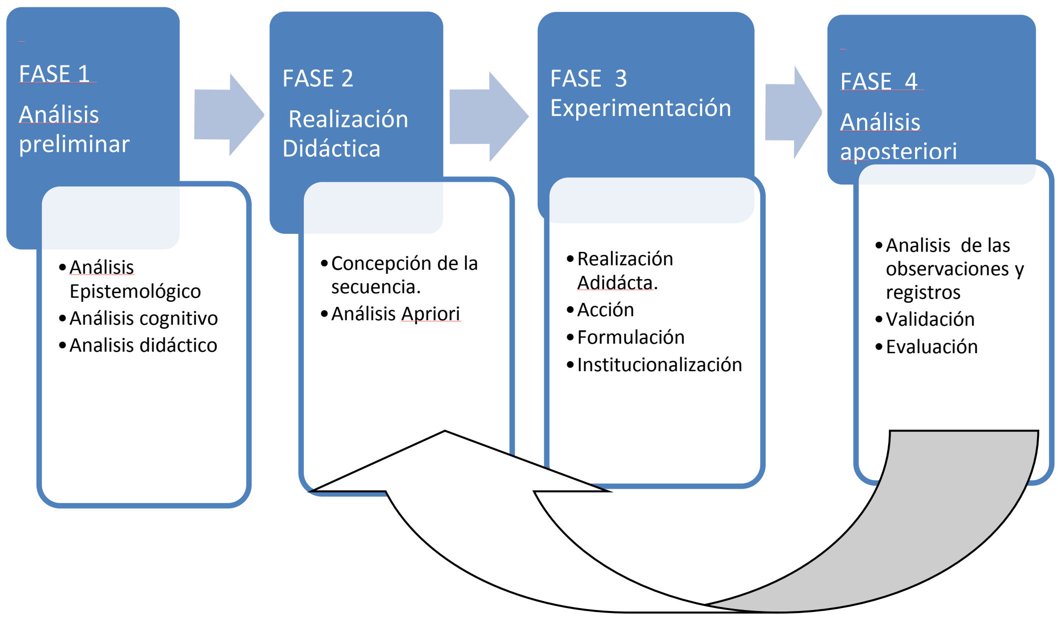
Como se manifiesta al final de la cita anterior, el método de estudios de caso se aplica a la ingeniería didáctica para realizar el análisis a posteriori y validación de cada una de las situaciones que componen la secuencia didáctica; se fundamenta en la observación de la complejidad de fenómenos que se dan al interior del aula de clase, estos se registraran mediante videos y en las producciones escritas de los estudiantes.

También se tabularon los resultados de los grupos en cada una de las sesiones experimentales, de acuerdo a la teoría, juego de marcos de Duady, que se fundamenta en el uso de los diferentes marcos para construir el conocimiento. Estos resultados permitieron reconocer el avance de los grupos en la transición del pensamiento numérico al algebraico y el alcance en los niveles de competencias comunicativas, de razonamiento y de resolución de problemas, usando los indicadores de competencias presentados en el instructivo oficial del Ministerio de Educación Nacional de Colombia, que fueron diseñados para hacer los planes de mejoramiento en las diferentes instituciones educativas (ver anexo A del MEN).

3.4 Fases de la ingeniería didáctica

Con el fin de validar la pertinencia de la ingeniería didáctica como metodología apropiada, para mejorar las competencias matemáticas de los estudiantes de la IEHRR, a partir de la conceptualización de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2, y además desarrollar los objetivos específicos propuestos que coadyuvan a tal fin, se implementaron las cuatro fases propuestas por Artigue (1995), en la ingeniería didáctica; estas son: análisis preliminar, concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, experimentación, análisis a posteriori y evaluación, como se muestra en el diagrama de flujo siguiente:

Figura 3-1: Fases de la ingeniería didáctica



3.4.1 Fase 1: **Análisis preliminar**

Esta fase se realizó teniendo en cuenta los objetivos de la investigación, se basa no solo en un cuadro teórico general y en los conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio, sino también en algunos análisis que se realizaron en un primer nivel de elaboración; Artigue, M. (1995, p.38), estos fueron:

- Búsqueda, en diferentes fuentes documentales, del desarrollo histórico-epistemológico del objeto matemático a estudiar; en este caso en particular, de los Sistemas de ecuaciones lineales y los obstáculos que lo promovieron.
- Análisis cognitivo: de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- Realización del análisis didáctico, indicando como se aborda actualmente la enseñanza del objeto matemático y sus efectos.
- Análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva.

Manifiesta Artigue (1995), que algunos de estos análisis tendrán predominancia sobre los otros, lo cual se evidenciara en las fases posteriores, y que la poca importancia que se le otorga a lo cognitivo no es típica de los análisis preliminares de las ingenierías, debido a la dificultad para encontrar las restricciones relevantes sin ambigüedad del registro cognitivo, además, que por el contrario uno de los puntos de apoyo esenciales reside en el análisis preliminar detallado de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y errores más frecuentes.

3.4.2 Fase 2: La concepción y el análisis a priori

En esta segunda fase, se tomó la decisión de actuar sobre las variables didácticas de comando no fijadas por las restricciones, estas son de dos tipos:

- Las variables macro didácticas o globales, concernientes a la organización global de la ingeniería.

- Las variables micro didácticas o locales concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o de una fase.

Se debe reconocer la dependencia que tienen estos dos tipos de variables citadas, Brousseau, citado por Artigue (1995) enfatiza que:

> *"hay que asegurarse constantemente de la capacidad de concepción general para permitir la intervención, la organización y el devenir de las situaciones locales".*

El análisis a priori se utilizó para predecir comportamientos o fenómenos en el aula, para llevar el proceso de forma controlada y garantizar el cumplimiento de los objetivos propuestos; al respecto, Artigue manifiesta que este análisis se debe concebir como un análisis de control de significado, es decir, sirve para determinar en qué, las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. La validación de las hipótesis está, en principio, indirectamente en juego en la confrontación entre los análisis a priori y a posteriori.

Para el diseño de cada situación, como lo plantea Douady R.(1995, p.78), se describió el objeto de estudio, se hizo el análisis matemático y didáctico del enunciado, exponiendo las variables sobre las cuales se puede influir, las escogencias y las razones de tales selecciones, también los resultados que se esperan de los estudiantes. Este procedimiento, se repitió en el análisis a priori de las situaciones siguientes.

A continuación Díaz, H (2004), describe los cuatro pasos para la elaboración del modelo de cambio de cuadros o marcos propuesto por Douady.

Primer paso: determinar el objeto de estudio.

Se describen los objetos que van a aparecer de manera explícita e implícita en el problema planteado, además se mencionan los cuadros que intervienen en el proceso (numérico, algebraico, geométrico, funcional y otros)

Segundo paso: definición de los objetivos para la selección del tema.

Planteamiento de los objetivos matemáticos y didácticos que se esperan lograr con la implementación del modelo, los cuales deben estar en función del problema matemático a plantearse posteriormente, para el surgimiento de los conceptos previos y nuevos.

Tercer paso: seleccionar las operaciones matemáticas y sus justificaciones.

Es así como en el presente trabajo se realizó el planteamiento de cada uno de los problemas y se tomaron las decisiones acerca del tipo estrategias y teorías a utilizar, como también de las preguntas orientadoras que sirvieron de guía para que el estudiante fuera desentrañando y construyendo conocimientos nuevos a partir de los ya conocidos.

El problema a resolver se propuso con la condición que todos los alumnos pudieran abordarlo con sus conocimientos previos, cuatro de ellos desde el lenguaje natural, sin imponer ningún procedimiento. Aquí las preguntas orientadoras jugaron un papel muy importante, éstas buscaron causar desequilibrios, para que el alumno realizara cambios de marco (teoría juego de marcos de Douady) en la búsqueda de reequilibrios, que dan solución al problema, (fundamento de la teoría de Piaget), su consecuencia es la ampliación o profundización del concepto inicial.

El profesor debe estar consciente de los tipos de competencias que entran en juego en cada una de los marcos para resolver el problema, estas pueden ser de dos tipos: las que se supone que el estudiante tiene para abordar el problema y las que le ayudan a resolverlo.

Cuarto paso: Reconstrucción del modelo aplicado (institucionalización local).

Después de haber realizado todas las tareas propuestas, el profesor seleccionó los hallazgos de los estudiantes, aquello que es matemáticamente interesante y que puede volver a utilizarse, aquello que actúa de forma directa o preliminar sobre los objetos de enseñanza, o en forma de práctica de campo sobre los objetos del programa.

Fue así como, al final de cada situación, el profesor expuso a partir de las construcciones de los estudiantes, lo que es nuevo, ligándolo al saber institucional, señalando lo que es esencial y lo que es secundario en el proceso, evitando en todo caso develar el objetivo global que se tiene con la secuencia a diseñar, que en este caso es el álgebra, como estrategia óptima para la resolución de los SEL 2x2, que solo explicará al final de la secuencia, se hace con fin de evitar en gran medida causar ruidos en el proceso de investigación, acerca de las competencias por ellos desarrolladas.

Se estructuró para que el alumno, tuviera la oportunidad de expresar una situación problema o concepto matemático en al menos dos marcos (numérico o gráfico) que al articularse, produzcan el avance al marco algebraico. Manifiesta, Douady (2008), que se pretende, que los estudiantes resuelvan al menos parcialmente, la situación problema, los descubrimientos, serán usados posteriormente en situaciones similares o más complejas, en la fase de reinversión.

Según la propuesta, el Juego de marcos llevará a realizar la formulación y validación de la estrategia de solución, al respecto Douady (1995, pág 77), manifiesta:

> "las interconexiones entre los diferentes cuadros o los cambios en un punto de vista o registros al interior de un cuadro, realizados para avanzar en un problema, son medios de los cuales se manifiesta la sutileza del pensamiento"

3.4.3 Fase 3: Experimentación

Se realizó de acuerdo con los siguientes pasos:

- Antes de la aplicación de la secuencia didáctica, se explicó la forma de trabajo, las funciones a cumplir por parte del profesor y el rol de los estudiantes.
- Aplicación de la secuencia didáctica
- Observación de los fenómenos que ocurren en el aula, con toma de registros fílmicos y escritos, durante la aplicación de cada una de las situaciones planteadas.
- Observación y recolección de las producciones escritas de los estudiantes.

3.4.4 Fase 4: Análisis a posteriori y validación

Artigue (1995), manifiesta que el análisis a posteriori se realiza a partir de los datos recogidos; hacen parte de estos, las observaciones realizadas en la fase experimental de la secuencia de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase.

Para este trabajo en particular se realizó el análisis a posteriori y validación, de la siguiente forma:

- El análisis a posteriori y la validación de cada situación, fue cualitativo se realizó mediante el estudio de caso (ver ítem 3.4), en él se describen los fenómenos didácticos ocurridos en el aula durante la fase de experimentación, las construcciones y los casos en que se detectaron obstáculos y dificultades conceptuales y/o procedimentales, las observaciones realizadas por el profesor y los videos que se consideraron como los más significativos del proceso, que muestran las fases de acción, formulación y validación, estos se evidenciaron con las fotos de las elaboraciones escritas de los estudiantes; al final este análisis se contrastó con los propósitos planteados en el respectivo análisis a priori de cada una de las situaciones.

- De igual manera, para mostrar el avance en el desarrollo de competencias matemáticas, se realizó la tabulación de los hallazgos y producciones de los grupos de estudiantes, en cada una de las situaciones planteadas, teniéndose como indicadores las estrategias usadas, que muestran el grado de desarrollo en el pensamiento variacional del estudiante, estos datos se contrastan con las competencias a desarrollar, que presenta el MEN, en el instructivo (anexo A), diseñado para realizar el plan de mejoramiento académico en las diferentes instituciones educativas oficiales de Colombia .

La secuencia fue diseñada para ir construyendo mediante cada una de las situaciones planteadas, el concepto de los SEL 2x2 y su solución, usando como estrategia la teoría juego de marcos y dialéctica herramienta-objeto de Douady.
En concordancia, se realizó la validación interna del proceso de aprendizaje, confrontando el análisis a posteriori con él a priori en cada una de las situaciones didácticas, es decir, verificando si al final se cumplieron los propósitos o intenciones de cada una de ellas.

Acerca de la validación de la ingeniería didáctica Artigue (1995), menciona que:

> "La metodología de la ingeniería didáctica se caracteriza también, en comparación con otros tipos de investigación basados en la experimentación en clase, por el registro en el cual se ubica y por las formas de validación a las que está asociada. De hecho, las investigaciones que recurren a la experimentación en clase se sitúan por lo general en un enfoque comparativo con validación externa, basada en la comparación estadística del rendimiento de grupos experimentales y grupos control. Este no es el caso de la ingeniería didáctica que se ubica, por el contrario, en el registro de los estudios de caso y cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación del análisis a priori y a posteriori".

Se debe recordar que el uso de los marcos numérico, geométrico y algebraico, hacen parte de la estrategia que garantiza la conceptualización de objetos matemáticos en el proceso enseñanza-aprendizaje, según la teoría juego de marcos de Douady (2008).

Es muy importante anotar que al final del proceso de experimentación, problema seis, se retomaron las tablas con los resultados de cada situación, para realizar el análisis global de la secuencia, en cuanto a las competencias desarrolladas.

Institucionalización

La institucionalización la realiza el docente con el fin de corroborar y/o aproximar las producciones de los estudiantes al objeto de estudio o saberes pretendidos, se recuerda que en esta no se entra en detalles, acerca de la solución óptima de los SEL 2x2, el álgebra, los estudiantes la irán construyendo a medida que transcurra la secuencia y emergerá también al final de la secuencia.

3.5 Diseño de la secuencia didáctica

Figura 3-2: Aspectos que intervienen en el diseño de la secuencia didáctica

Para el primer objetivo específico, el diseño de la secuencia didáctica, se parte del esquema que relaciona: el problema de investigación, el análisis preliminar que se propone en la Ingeniería Didáctica y la hipótesis de investigación.

De acuerdo con el análisis cognitivo, la respuesta al problema de investigación, se encuentra en la aplicación de las teorías constructivistas que se estudiaron y son aplicables mediante la Ingeniería Didáctica, que fue diseñada para a la TSD.

De igual manera, como insumo para el diseño, se recogen las consideraciones pertinentes que surgen del análisis preliminar, en las dimensiones propuestas acertadamente en la Ingeniería didáctica, como son: análisis histórico-epistemológico, análisis cognitivo, análisis didáctico y las dificultades cognitivas que presentan los estudiantes en su aprendizaje.

A continuación se presentan éstas consideraciones y posteriormente el esquema de la secuencia, que muestra las variables macrodidácticas a desarrollar.

3.5.1 Consideraciones tomadas del análisis preliminar

- Del análisis histórico- epistemológico

-El álgebra se origina de la necesidad de resolver situaciones concretas, cotidianas, de índole práctica que eran expresadas en lenguaje natural por parte de los matemáticos de las antiguas civilizaciones; por tanto, inicialmente la búsqueda de la solución se realizaba también mediante el uso del lenguaje natural, que evoluciona luego al lenguaje sincopado o combinación del lenguaje natural con el simbólico; con el paso del tiempo, el desarrollo de éste último facilita encontrar las soluciones a partir de la generalización.

-Los antiguos babilonios y egipcios (1600 al 2000 a.C.), resolvían las situaciones usando procedimientos empíricos en los que aplicaban conceptos de proporcionalidad, después desarrollaron los métodos de la falsa posición y de la doble falsa posición para resolver ecuaciones de la forma: $ax = c$ y $ax + b = c$, respectivamente, éstos consisten en aproximaciones o ensayos iterativos, en que se parte de un valor falso para x, que se corrige para encontrar el resultado, lo que indica que usaban la concepción de que al variar una cantidad en una ecuación generaba cambios en otra cantidad.

- Del análisis cognitivo de los estudiantes

-Douady, R. (1993, p.147), menciona que muy a menudo los progresos eficaces en la resolución de problemas provienen de un cambio de marcos, y a la vez utilizar los nuevos conocimientos como herramientas para atacar un problema, en un proceso cíclico denominado, Dialéctica Objeto –Herramienta (DOH).

-Duval,R, enfatiza en la importancia de usar diferentes formas de representación y la movilidad entre al menos dos ellas, para la asimilación conceptual de un objeto.

- Del análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan la evolución de los SEL.

-En la investigación realizada por Panizza (1998), relacionada con las concepciones y dificultades de los estudiantes, frente al concepto de variación, se concluye que se debe profundizar en las nociones de variable, el significado del signo igual y solución de las ecuaciones; éstas serán prerrequisito para la construcción del concepto sistemas de ecuaciones lineales y su solución.

- En concordancia con Panizza, para entender los sistemas de ecuaciones lineales, se debe construir antes el concepto de función que tiene implícita la noción de variable. El primer logro del estudiante es tener la idea de dependencia y reconocer las variables involucradas.

- Del análisis didáctico

Los estudiantes en la IEHRR, no utilizan la visualización como una herramienta para la resolución de problemas, ya que la instrucción que reciben de sus maestros es algorítmica, lo que conduce al estudiante solo a desarrollar ciertas habilidades cognitivas.

-Con la metodología tradicional conductista, que enfatiza en la ejercitación algorítmica, se observó en los estudiantes buen desarrollo únicamente de la competencia numérica, como lo muestran los resultados de pruebas saber 2006.

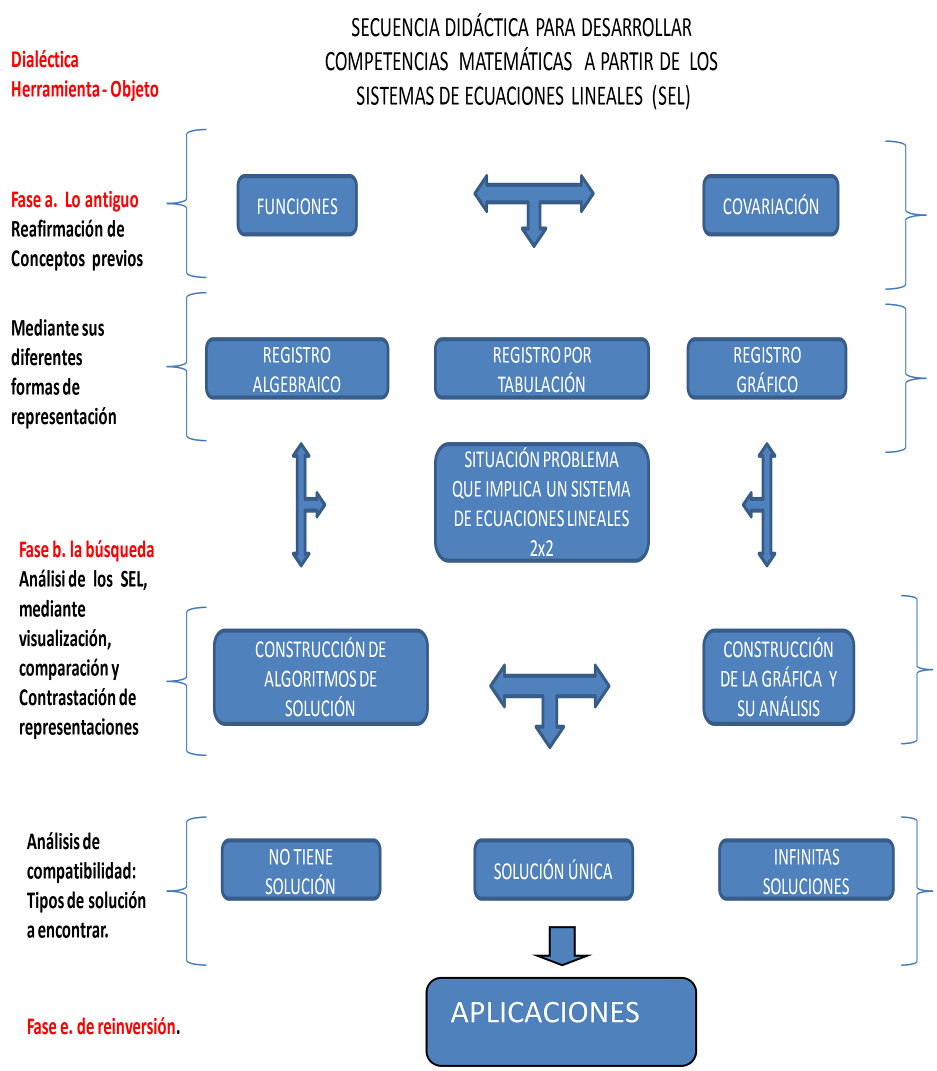
-Para desarrollar las competencias, que indica el MEN, se presentan situaciones cotidianas en lenguaje natural, que motiven al estudiante a interpretar, realizar el análisis, dialogar y tomar decisiones en la búsqueda de la solución, de tal forma que el aprendizaje sea significativo y permita la construcción y apropiación de los diferentes tipos de estrategias que le servirán para la solución de cualquier problema relacionado con los SEL2x2.

Del análisis de los textos

A diferencia de la propuesta de los textos y de la forma actual de enseñanza, en la que se presentan las temáticas dispersas, se debe considerar la transición entre las funciones y sistemas de ecuaciones, a través de una situación dada en lenguaje natural, que permita afianzar y dar significado a las nociones de variable, transformación de ecuaciones lineales y su pasaje a las gráficas cartesianas y viceversa.

A partir de las consideraciones anteriores y teniendo en cuenta el enfoque de la organización de enseñanza que propone Douady, se presenta a continuación, el esquema de la secuencia didáctica, con la selección de las variables de comando que se perciben como pertinentes, con relación a la enseñanza del objeto sistemas de ecuaciones lineales.

Figura 3-3: Esquema con el diagrama de flujo de la secuencia



Como se observa, con la secuencia se pretende inicialmente reafirmar o reconstruir el concepto de función y de la noción de covariación a partir de la visualización que permiten sus diferentes formas de representación.

Posteriormente se plantea la construcción del concepto SEL 2x2, usando situaciones didácticas, que obligan a la construcción de procedimientos de solución algebraicos (método de reducción a sumas y restas), gráficos y su articulación, para visualizar y determinar la compatibilidad de los SEL.

Finalmente se presentan dos situaciones problema, en lenguaje natural, en las que los estudiantes deben aplicar los conceptos adquiridos para darle la solución respectiva, con ellas se determina el grado de conceptualización alcanzado con respecto a los SEL, y el nivel de desarrollo de competencias.

3.5.2 Selección de las variables

Selección de las variables globales o macrodidácticas

-La secuencia diseñada se fundamentará en la teoría juego de marcos (jeux de cadres) y la dialéctica herramienta–objeto, propuesta por Douady .

- Concepción de los SEL 2X2 y su solución, a partir de la representación en los marcos; numérico, geométrico y algebraico y ante todo en la realización del análisis cualitativo que se desprende de la movilidad entre estos tipos de representación.

-Análisis de compatibilidad de los SEL, usando como referente la teoría RRS de Duval,

-Con el fin de validar la secuencia, se proponen al final, dos situaciones problema dadas en lenguaje coloquial, que se pueden representar y resolver mediante un sistema de ecuaciones 2x2 lineales, restringidas al conjunto de los números enteros.

- Se debe reconocer la importancia de los procedimientos algorítmicos, cuando se trata de resolver un problema al cual se le ha realizado su análisis y se ha planteado la estrategia algebraica para buscar su solución.

Para cada una de las situaciones planteadas que componen la secuencia didáctica, se describe el comportamiento de los estudiantes y los fenómenos que se dan interior de cada una de ellas, mediante el estudio de caso, teniendo presente las fases de acción, formulación y validación, que propone Brousseau en la TSD.

La Selección de las variables microdidácticas o locales se describen en el análisis a priori de cada una de las situaciones didácticas, pues a partir de ellas se establecen las posibles intervenciones del docente y lo que se espera del estudiante cada una de ellas.

Se realiza la secuencia, planteando las situaciones didácticas en el orden que indica el esquema experimental anterior, que como se aprecia, tiene como punto de apoyo el análisis preliminar detallado, las concepciones de los estudiantes, los obstáculos epistemológicos, dificultades y errores más frecuentes en la enseñanza de los SEL.

Como se ve, como esta micro-ingeniería didáctica, está diseñada para provocar, de manera controlada, la evolución hacia la concepción del objeto SEL 2X2 y su solución, de una forma más analítica, favoreciendo el desarrollo de las competencias matemáticas de orden superior, indicadas por el MEN, como son el razonamiento, la inferencia, la modelación y resolución de problemas, partiendo de la reconstrucción de conceptos previamente enseñados al estudiante. A continuación se realiza el análisis a priori de cada una de las seis situaciones que componen la secuencia didáctica, teniendo presente las selecciones principales o macro didácticas ligadas al contenido.

3.5.3 Competencias matemáticas a desarrollar de acuerdo al instructivo del MEN[9]

Competencias

1. **Comunicativa:** Capacidad para expresar ideas, interpretar, representar, usar diferentes tipos de lenguaje, describir relaciones. Modelar usando lenguaje escrito, oral, concreto, pictórico, gráfico, y algebraico.
2. **Razonamiento**: Explica el cómo y el porqué de los caminos para llegar a las conclusiones. Justifica estrategias y procedimientos en el tratamiento de situaciones del problema. Formula hipótesis, hace conjeturas, argumentos, explora ejemplos y contraejemplos, prueba y estructura argumentos, Generaliza propiedades y relaciones, identifica patrones, plantea preguntas.
3. **Solución de problemas.** Formula problemas a partir de situaciones dentro y fuera de las matemáticas. Traduce la realidad a una realidad matemática. Desarrolla y aplica estrategias, métodos e instrumentos para la solución de problemas.

Componentes

Numérico-variacional: Significado y comprensión de los números; estructura del sistema de numeración, significado, comprensión, relaciones, efecto y uso de las situaciones problema; variación, funciones y conceptos.

Geométrico y métrico: Construcción y manipulación de representaciones mentales de los objetos del espacio, relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales.

Aleatorio: Interpretación de datos reconocimiento y análisis de tendencia, cambio, correlaciones, inferencias y reconocimiento, descripción y análisis de eventos aleatorios.

[9] Tomadas literalmente del instructivo, anexo A.

4. Resultados y discusión

La presente investigación se basó en el análisis a priori de las seis situaciones diseñadas que componen la secuencia y en la experimentación y análisis a posteriori de cada una de ellas.

A continuación se realiza el análisis a priori describiendo las características de cada situación que incluyen, el objeto de estudio con la especificación de los diferentes marcos o cuadros en los que se puede representar y la intención o lo que se pretende con ella; luego se realiza la presentación y la selección de variables microdidácticas en las cuales puede intervenir el docente de acuerdo con la propuesta de Douady y lo que se espera que el estudiante realice de acuerdo a sus conocimientos previos.

Todo lo anterior se llevó a cabo con el fin de llevar el control del proceso y garantizar el alcance de los objetivos propuestos de la siguiente manera.

4.1 Análisis a priori

A continuación se realiza el análisis a priori de las situaciones didácticas que son prerrequisito para el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales, también de las situaciones propias de la construcción de este concepto y las relacionadas con su aplicación.

4.1.1 Primera situación didáctica

Característica:

Se propone una situación problema, relacionada con el concepto de función para que el estudiante lo reconstruya, y se afiance en el uso de los diferentes tipos de representación. Concretamente, se presentan dos condiciones que correspondan a dos funciones que al tabularlas, graficarlas y/o modelarlas, se reconoce que tienen un punto en común; pudiéndose demostrar que existe un valor, dado a X, para el cual las dos funciones toman el mismo valor Y, es muy importante comprender ésta noción que interrelaciona dos funciones como preámbulo a los sistemas de ecuaciones lineales.

La situación es tomada de una de las pruebas SABER en matemáticas, realizadas por el ICFES (año sin establecer), y adaptada a la cotidianidad del estudiante, con preguntas orientadoras que conllevan al uso de diferentes formas de representación.

Trabajo en grupos de cuatro estudiantes, tiempo estimado: dos horas

Objeto de estudio

Se desea orientar el trabajo desde el lenguaje natural, con la propuesta de una situación que contiene dos funciones, una lineal y otra afín, para que el estudiante reafirme y profundice en su representación en los siguientes cuadros y su articulación.

Cuadro numérico: Realizar reconocimiento de las variables y su tabulación, mediante el uso de las propiedades de las operaciones aritméticas, en particular de la proporcionalidad, Douady, R. (1995, p.73)

Cuadro gráfico: Representación gráfica de funciones lineales y afines, su reconocimiento y análisis.

Cuadro algebraico: modelación de funciones dadas en lenguaje natural y aplicación de procedimientos.

Objetivo:

-Coordinar temas que en la enseñanza tradicional, se abordan y se tratan de forma separada, pero que desde el punto vista matemático sostienen relaciones de significado.

-Realizar el primer acercamiento a los SEL 2x2, proponiendo dos funciones lineales que al graficarlas en el plano cartesiano, se cruzan o que tienen un punto en común, pareja ordenada (x,y).

Intención:

Reafirmación y aplicación de diferentes formas de representación, para reconocer en ellas, estrategias para dar solución a un problema.

Presentación

Suponga que usted es el rector del colegio Raffo Rivera y requiere contratar el servicio de fotocopiadora, ante lo cual se le presentan dos ofertas:

- Fotocopias Puntocom, que cobrará a la rectoría un cargo fijo de $5000 pesos a la semana y $40 pesos por cada fotocopia, y
- Fotocopias Copimáx, que cobrará $50 por cada fotocopia, sin cobrar cargo fijo.

Para responder las siguientes preguntas, lea detenidamente la situación, interprete, formule estrategias y desarróllelas.

a) ¿Cuál es el número de copias para el cual se debe pagar lo mismo a las dos empresas?
b) ¿Cuáles son las variables?
c) Si se requieren 300 copias a la semana ¿cuál de las empresas contrataría?
d) Si se requieren 600 copias a la semana ¿cuál de las empresas contrataría?
e) ¿A partir de cuantas fotocopias contrataría a Copimáx o a Puntocom?
f) ¿Si el colegio pagó por una semana $60.000 a Puntocom cuantas copias más pudo haber sacado contratando a Copimáx?

Selección de variables

Las variables que intervienen en el problema se presentan teniendo en cuenta cada uno de los marcos:

Asociadas al marco algebraico:

- Reconocimiento y representación de las variables.
- Modelación algebraica.

Asociadas al marco gráfico:

- Escogencia de la escala apropiada para cada una de los ejes.
- Selección de los ejes, ubicación de las variables
- Ubicación de puntos y reconocimiento de grafica
- Reconocer el punto de corte con el eje y, para las dos funciones.
- Significado del punto de intersección entre las dos líneas que representan las funciones.
- Interpretación de las diferentes regiones del gráfico.

Asociadas a cuadro numérico:

- Construcción tablas, a partir de los datos suministrados.
- Interpretación de las tablas
- Procedimientos algorítmicos: sustituir las letras del modelo algebraico, por valores numéricos, hacer cálculos.

Lo que se espera de los estudiantes de acuerdo a las variables seleccionadas y las posibles intervenciones del profesor. Douady, R. (1995, p.84)

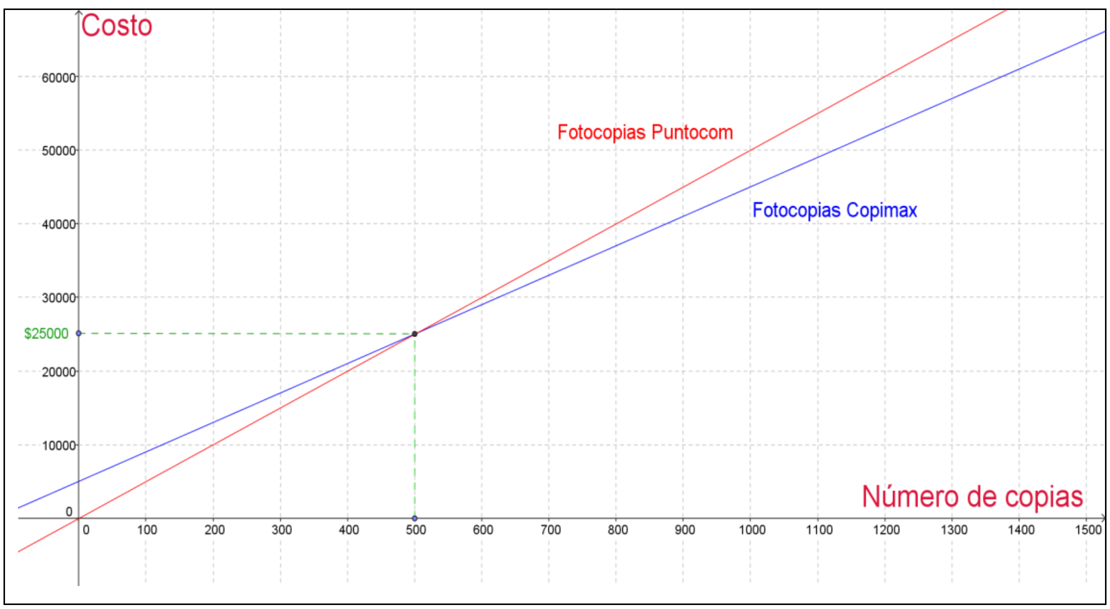
Para dar respuesta a la primera pregunta, se espera que los estudiantes realicen conjeturas, realizando ensayos, en los que suponen el mismo número de fotocopias para ambas empresas, hasta encontrar el mismo costo, 500 copias.

En el caso de no determinar el número de copias pedido, pregunta del literal (a), el instrumento didáctico plantea preguntas de orientación, relacionadas con el reconocimiento de las variables (literal b), y los costos para cierta cantidad de copias que se conoce que están antes y después del punto de intersección o punto de equilibrio, en la gráfica de las dos funciones (literales c y d). Las preguntas encaminan a los estudiantes hacia la construcción de dos tablas, una para cada empresa, que podrán construir suponiendo los mismos valores para la variable independiente (número de copias), y calcular así, el costo según la empresa a contratar; de forma análoga a como lo hacían las antiguas civilizaciones, que desconocían los métodos algebraicos y gráficos, y suponían falsos valores para corregir y encontrar la solución.

La respuesta (a), se encuentra en la comparación de las tablas. Se espera que encuentren que para tomar 500 fotocopias se debe pagar $25000 a cualquiera de las empresas.

De no encontrarse o visualizarse la solución, el docente preguntará, por otra forma de aprovechar las tablas elaboradas, se espera que los estudiantes construyan las gráficas de las funciones y a partir de ellas respondan las preguntas.

Figura 4-1: Gráfica de la función, costo de Puntocom y costo de Copimáx.



El estudiante debe concluir que para un determinado número de fotocopias, contratará la empresa que se representa con la línea que está por “debajo” en el gráfico, ya que los valores a pagar son menores comparados con los de la empresa que indica la línea de “arriba”, el punto de intersección indica el cambio de posición de las líneas de arriba a abajo y viceversa, como se observa en la gráfica, por lo tanto, dependiendo si el número de fotocopias solicitado semanalmente, está antes o después de este punto, se puede seleccionar la empresa que conviene. Además el punto de cruce de las dos líneas, representa que para el mismo número de fotocopias se tienen los mismos costos, teniendo así al primera aproximación a los SEL 2X2.

La pregunta (f), se responde trazando una línea horizontal por el costo de $60.000, el punto de corte con cada una de las líneas que representan las funciones, indicara el número de copias respectivo que muestra la vertical trazada desde estos puntos al eje x, luego se plantea la diferencia entre las copias a sacar.

Se espera también que estudiantes con buen desarrollo del pensamiento algebraico, modelen las dos funciones, es decir, el costo (y), en función del número de copias (x), como se muestra a continuación.

$Y_1 = 40x + 5000$, valor a pagar a Puntocom
$Y_2 = 50x$, valor a pagar a Copimax.

Y resuelvan de la siguiente manera:

Para responder la pregunta del literal (a), que se refiere a la igualdad de costos; se espera que los estudiantes igualen funciones en términos de x (que representa el número de copias), y despejen esa variable, para encontrar la respuesta.

Para responder las preguntas (c,d,) deben sustituir el número de copias indicado, en la variable x, de cada una de las funciones y comparar los costos.

La pregunta (e), se espera que cause desequilibrio en el estudiante y lo lleve a usar la representación gráfica, explicada anteriormente; con esta representación también puede verificar las otras respuestas, de hacerlo así, estará validando la formulación algebraica.

La pregunta (f) pide encontrar el número de copias que tienen costo de $60.000, se espera que los estudiantes sustituyan este valor por y_1 o y_2, despejen x en cada una de ellas y hallen la diferencia en el número de copias.

Los estudiantes pueden articular los marcos de tal forma que se les facilite encontrar las soluciones; por ejemplo, graficar una función lineal, conociendo su modelo algebraico, se puede realizar rápidamente, sin necesidad de tabular, para ello deben conocer los conceptos de pendiente y punto de corte con el eje y.

Institucionalización:

Para responder las preguntas, el docente reafirmará las diferentes estrategias presentadas por los grupos, realizando un análisis cualitativo de sus ventajas, diferencias y movilidad entre los registros de representación, numérico, gráfico y algebraico

Realizará la primer aproximación a los SEL2x2, mostrando en los tres marcos citados, cómo el punto de punto de intersección visto en la gráfica, corresponde a los mismos valores encontrados usando las otras dos representaciones.

4.1.2 Segunda situación didáctica

Características:

Del análisis preliminar se desprende que es necesario el aprendizaje de la noción de covariaciòn, el estudiante debe reconocer una ecuación de la forma Ax = By + C, presenta infinitas soluciones correspondientes a los infinitos puntos de una línea recta; a este logro podrá llegar mediante diferentes estrategias, como la realización de cálculos mentales iterativos, la tabulación y graficación, o mediante la representación algebraica.

La situación es tomada de la que planteó Panizza en su investigación (De la unicidad al infinito, 1996) y adaptada al contexto del estudiante del IEHRR para facilitar su interpretación.

Trabajo en grupo de cuatro estudiantes

Tiempo estimado: 2 horas.

Objeto de estudio

Construir mediante el uso de distintas marcos, la noción de variación, que está implícita en una situación problema con dos variables.

En el marco numérico:
Utilizar las propiedades de las operaciones de los números.

En el marco algebraico:
Modelación algebraica de una situación problema, que se plantea con una ecuación con dos variables y tiene como solución infinitas parejas de puntos.

En el marco gráfico:
Representación en el plano cartesiano de la situación e igualmente encontrar la solución en infinitas parejas de puntos (x,y).

Objetivo:

Representación de una expresión coloquial mediante una tabla, grafica o modelo algebraico, para visualizar que presenta infinitos pares de puntos que son solución de la misma.
Intención: Reconocer que una ecuación lineal con dos variables tiene infinitas soluciones.

Presentación

Mi hermano Alejandro me dice que en la librería “Marden”, 4 lapiceros valen $800 pesos más que 3 cuadernos, ¿cuál es el precio de un lapicero y de un cuaderno?.
Finalmente cuando se construya la solución, y para realizar una aproximación al objeto SEL 2x2, se agregará al problema la siguiente condición para encontrar la solución única.

Que sucede si un cuaderno y un lapicero cuestan ($3700 pesos).

A continuación se presentan las variables didácticas que intervienen en el problema teniendo en cuenta cada uno de los marcos:

Selección de variables

Asociadas al marco algebraico:

- Reconocimiento y representación de variables.
- Modelación algebraica.

Asociadas al marco gráfico:

- Selección de los ejes, ubicación de las variables.
- Escogencia de la escala apropiada para cada una de los ejes.
- El número de puntos a marcar, y reconocimiento del tipo de gráfica.
- Reconocer el punto de corte con el eje y.
- Significado del punto de intersección entre las dos líneas que representan las funciones.

Asociadas al marco numérico:

- Construcción de tablas, a partir de la información suministrada.
- interpretación de las tablas
- Procedimientos algorítmicos: sustituir las letras del modelo algebraico, por valores numéricos para calcular los valores que se piden en el enunciado.

Lo que se espera de los estudiantes y la posible intervención del profesor.

Se espera que los estudiantes encuentren inicialmente solo una solución, mediante cálculos numéricos mentales, concepción errónea o incompleta, Panizza, (1996), es decir, solo un punto o pareja para la cual se cumple la condición. Al final los estudiantes deben comprender que cambiando el valor de una de las variables, cambia también el valor de la otra e inferir la posibilidad de infinitas soluciones para el problema planteado.

De no determinarse en un tiempo prudencial, más parejas de puntos; el profesor, propone el valor de un lapicero, o el valor de un cuaderno, estos valores fueron previamente calculados, y tienen la característica de ser números enteros que cumplen con la condición; lo cual facilita los cálculos para encontrar el costo de su pareja, (lapicero o cuaderno), El proceso se podrá repetir hasta que el estudiante construya y se apropie de la noción de covariación. Esta posibilidad de intervención del profesor, fue planteada por, Panizza, (1996).

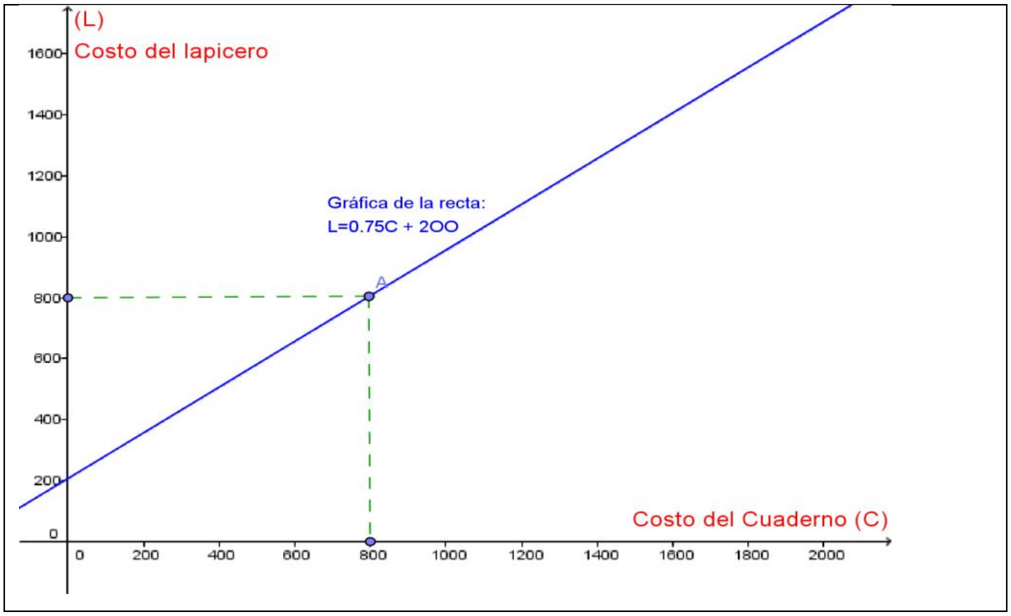
La intención es llevar al estudiante a entender, como cuando varía el costo de un elemento, se produce la variación del costo en el otro, lo que le indicara que se tienen infinitos puntos que cumplen con la condición dada.

Puede ocurrir que los estudiantes encuentren el algoritmo y formulen el modelo, 4L=3C+800, que los lleve a reconocer y concluir que se trata de una línea recta, que es generada por infinitos pares de puntos que son solución.

De igual forma, con este modelo planteado pueden usar diferentes estrategias, una de ellas es realizar varios ensayos iterativos, dando valores a una de las variables y despejando la otra, encontrando algunos pares de valores que cumplen con la condición, que los lleve a la conclusión.

También el modelo se puede transformar a, L=0.75C+200, que es una ecuación de la recta de la forma, y= bx +c, siendo b la pendiente de la misma y c el punto de corte con el eje y; con ésta representación, se tiene la posibilidad que el estudiante que reconozca el concepto de pendiente de una recta, y el punto de corte con el eje y, infiera a partir de la visualización de ésta nueva ecuación, que se trata de una recta y proceda a graficarla.

Figura 4-2: Gráfica de la ecuación que representa la condición dada.



Se espera que los estudiantes articulen la respuesta en al menos dos representaciones, para profundizar y garantizar el aprendizaje del concepto, “una ecuación lineal con dos variables tiene infinitas soluciones que se pueden representar en el plano cartesiano mediante una línea recta”.

Por último, solo de ser necesario, el profesor puede proponer que construyan una tabla y la gráfica cartesiana que resulte de ésta, se articulen los dos registros, para concluir que se tienen infinitos pares de puntos que son solución del problema y se representan por una recta.

La siguiente tabla, será usada por el profesor en el caso de presentarse bloqueo en la actividad, proponiendo de uno en uno, costos al lapicero para que el estudiante calcule los del cuaderno, hasta hacer la inferencia.

Tabla 4-1: Valores que cumplen con la condición dada.

Valor de un lapicero	\$800	\$1400	\$2000	\$2300	\$2600
Valor de un cuaderno	\$800	\$1600	\$2400	\$2800	\$3200

Posteriormente, se agrega otra condición, con el fin de particularizar la solución

¿Que sucede si un cuaderno y un lapicero cuestan $3700 pesos?
Se espera que el estudiante relacione las dos condiciones dadas, mediante la representación gráfica y encuentre la solución; realizando así, una aproximación a los SEL 2X2.

Institucionalización:

El docente reafirmará las diferentes estrategias presentadas por los grupos, realizando un análisis cualitativo de las ventajas y diferencias, que llevan a concluir que ecuación lineal con dos variables presenta infinitos pares de soluciones.

Finalmente, planteará la solución mediante la tabulación, representación gráfica y la algebraica.

4.1.3 Tercera situación didáctica

Característica

La actividad 3, consiste en el encuentro adidáctico, de los estudiantes con dos igualdades, a las que realizaran transformaciones usando las cuatro operaciones básicas, de tal forma que obtenga como resultado, otra igualdad, lo que permitirá construir de forma análoga, el algoritmo para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales por el método de reducción a sumas y restas; con ésta actividad también se busca ampliar el concepto del signo igual.

La situación está orientada hacia la construcción de algoritmos, usando como herramienta los conocimientos que posee el estudiante acerca de las propiedades de las operaciones con los números enteros.

En la primera fase se trabajará en forma individual, luego se forman los grupos de cuatro estudiantes para comunicar sus construcciones, validarlas y sacar las conclusiones.
Tiempo estimado: 2 horas

Objeto de estudio:

Método de Reducción a sumas y restas para la solución de SEL 2X2.

Objetivos

Realizar un estudio acerca de las transformaciones que se pueden realizar a dos igualdades numéricas, para obtener otra igualdad, aplicando las propiedades de las operaciones con números enteros. (Lo antiguo)

Reconstrucción del método algebraico, de reducción a sumas y restas, para dar solución a SEL 2x2. (búsqueda de lo nuevo)

Intención:

Que el estudiante realice transformaciones algebraicas en un sistema de ecuaciones 2x2, hasta encontrar una ecuación con solo una incógnita, que puede calcular fácilmente y reemplazar luego en una de las ecuaciones iniciales para obtener el valor de la otra incógnita.

Presentación

Relacionar las dos igualdades siguientes, para obtener otra igualdad, usando una de las cuatro operaciones básicas o combinación de ellas (encontrar por lo menos dos igualdades más).

$$\begin{cases} 3 + 2 = 5 \\ 3 - 2 = 1 \end{cases}$$

Mostrar operaciones realizadas y sacar conclusiones

Luego se plantean SEL 2x2, con dos ecuaciones simultáneas triviales,

2. En los siguientes sistemas de ecuaciones lineales encontrar la solución, de forma análoga a las transformaciones anteriores.

a. $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x + 4y = 8 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$

3. Resolver algebraicamente y Graficar los sistemas

a. $\begin{cases} 3x- 2y= -2 \\ 5x+8y=-60 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 4x - y = 5 \end{cases}$

Selección de variables.

- Manejo de las propiedades de las operaciones básicas con números enteros, para realizar transformaciones en igualdades.

- Construcción del algoritmo, de sumas y restas, para dar solución a SEL 2x2, en los cuales una de las variables tiene el mismo coeficiente.

- Construcción del algoritmo, “reducción” a sumas y restas, para dar solución a SEL 2X2, en las cuales los coeficientes son diferentes, transformando una de las ecuaciones a una equivalente, de tal forma que se obtenga un sistema análogo al anterior.

Lo que se espera del estudiante y las posibilidades de intervención del profesor a partir de las variables seleccionadas.

Se espera que el estudiante encuentre otra igualdad numérica relacionando las dos igualdades mediante sumas o restas. (Esta fase se trabaja individualmente).
Para los sistemas de ecuaciones en los cuales una de las variables tiene el mismo coeficiente, se espera que el estudiante sume o reste las ecuaciones, para obtener una ecuación con una incógnita; ésta se puede despejar y calcular su valor fácilmente y luego sustituirlo en una de las ecuaciones iniciales, para encontrar el valor de la otra incógnita, obteniendo así la pareja ordenada (x,y) que es solución del sistema.

Se espera, para el caso en que no se tengan coeficientes iguales en las dos ecuaciones, que el estudiante halle una ecuación equivalente a una de ellas, multiplicando o dividiendo todos los términos de la ecuación por el mismo número, usando el axioma fundamental de las ecuaciones

De tal forma que al sumar o restar de la otra ecuación, se anulen los coeficientes de una de las incógnitas (por ejemplo x), obteniendo una ecuación con solo una incógnita (y), y se repite el proceso mencionado al final del párrafo anterior.

De acuerdo con lo anterior, todo el proceso algorítmico se centra en obtener una ecuación con una variable.

Normalmente el estudiante no sabe si el resultado que encontró es correcto, pregunta que hace frecuentemente a su profesor en las clases tradicionales, se espera que en la fase de validación, lo demuestre sustituyendo los valores encontrados, en cada una de las ecuaciones del sistema y verifique que se cumplan las dos igualdades.

Fase de Institucionalización:

Se recogen las producciones de los estudiantes, se socializan y valida el algoritmo, posteriormente se plantean en clase varios ejercicios de mayor grado de dificultad, que servirán a la vez de reafirmación.

4.1.4 Cuarta situación didáctica

Características

Situación diseñada mediante la teoría juego marcos de Douady, R.,(2008).Se compone de tres fases, en la primera se pretende que el estudiante, reafirme y valide los métodos de solución de SEL 2x2, en la segunda fase se presenta un sistema indeterminado, que se visualiza mediante dos paralelas, en la tercera fase se presenta un sistema con dos ecuaciones que generan la misma línea recta o linealmente dependientes.

En cada una de estas fases incorporan preguntas de orientación, para que el estudiante articule las representaciones algebraica y gráfica, para determinar y reconocer la compatibilidad de los mismos.

Grupos de 4 estudiantes

Tiempo estimado: 2 horas

Objeto de estudio:

Métodos de solución de SEL 2x2.

Objetivos:

- Construcción gráfica de los SEL 2X2, reconociendo la ecuación la pendiente y puntos de corte con los ejes.

- Realizar el análisis y articulación de las representaciones gráfica y algebraica de SEL 2X2, para reconocer su compatibilidad.

Presentación

Encontrar la solución de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, demuestre en dos representaciones diferentes que la solución encontrada es correcta.

1. a. $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 8 \end{cases}$ b. $\begin{cases} y - 2x = 6 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x + 3y = 9 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

2. Encuentre la solución al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4x + y = 8 \\ 4x + y = 4 \end{cases}$$

¿Qué resultado encuentra al usar la representación algebraica?

¿Observe las ecuaciones del sistema y diga en que se diferencian?

¿De qué otra forma podría encontrar usted la solución?

Si plantean la gráfica y lo hacen, se deben responder las siguientes preguntas:

¿Cómo son las rectas? ¿Se cruzan?

¿Cuál es la solución del sistema planteado?

Compare y contraste los resultados obtenidos algebraicamente con el gráfico, escriba las conclusiones.

¿Cómo reconocería usted que un sistema no tiene solución, si le presentan éste en forma algebraica?

3. Encuentre la solución para el siguiente sistema ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 9x+3y = 18 \end{cases}$$

Use la representación algebraica:

¿Encontró la solución?, ¿Qué resultado encontró al usar la representación algebraica?

Observe las ecuaciones y diga cómo se relacionan?

Use el método gráfico:

¿Cuántas rectas encontró?

¿Cuántas soluciones tiene el sistema planteado?

¿Cómo reconoce usted que las dos ecuaciones lineales generan la misma recta?

Relacione las soluciones encontradas mediante el método algebraico con sus respectivas gráficas, escriba las conclusiones.

4. Tengo monedas de $200 y monedas de $50 pesos, en total suman $2000 pesos, si duplico el número de monedas de $200 y de $50, tengo en total $5000. ¿Cuantas monedas de cada denominación tengo?

La intención de éste último problema es llevar a la contradicción, para que el estudiante desde el lenguaje algebraico, la encuentre, usando los conceptos de proporcionalidad recién construidos.

Selección de las variables

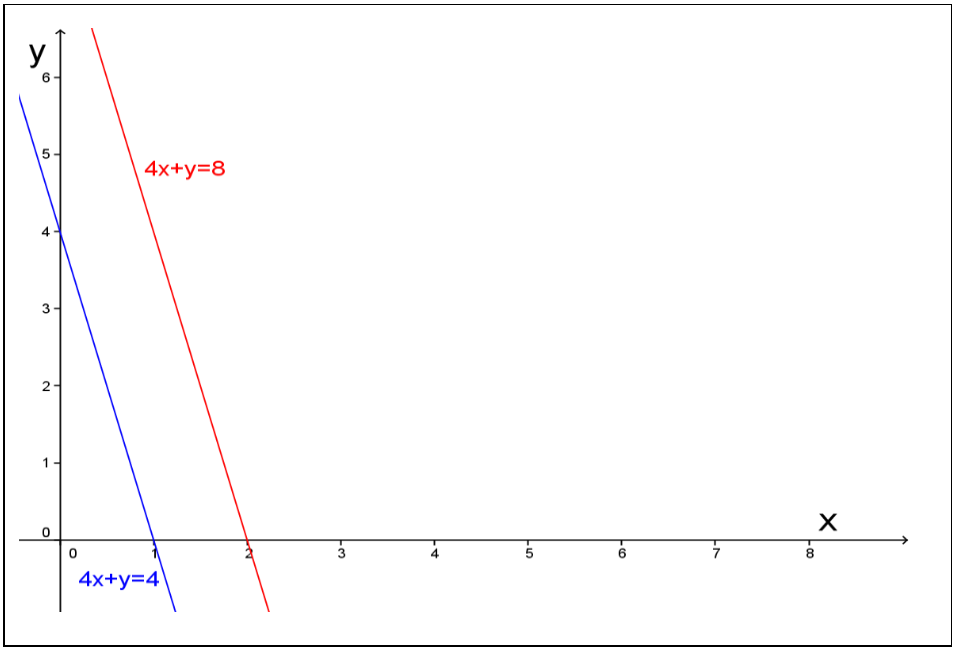
- Comparación de los coeficientes, a, b y c, en dos ecuaciones de la forma: $ax+ by = c$.
- Reconocimiento mediante el modelo algebraico y la visualización de la gráfica, de las condiciones para que dos líneas rectas sean paralelas o representen la misma línea recta.

Lo que se espera del estudiante y las posibilidades de intervención del profesor.

En la primera fase (numeral 1): se espera que los estudiantes usen los procedimientos algorítmicos, construidos en la situación anterior, y los validen mediante la forma de representación algebraica o gráfica.

En la segunda fase (numeral 2): se espera, que los estudiantes al usar la representación algebraica, encuentren la contradicción, $0=4$, (desequilibrio enunciado por Piaget y Brousseau), entonces opten por la estrategia gráfica y obtengan dos líneas rectas paralelas (reequilibrio), que se muestra a continuación.

Figura 4-3: Gráfica de un sistema de ecuaciones indeterminado



En la fase de formulación deben argumentar que dos líneas paralelas nunca se cruzan y por tanto el sistema no tiene solución, lo que se valida con la contradicción encontrada algebraicamente.

En la tercera fase (numeral 3): si los estudiantes usan el método grafico se espera que reconozcan que se trata de la misma línea recta, y concluyan en la situación de comunicación y formulación, que el sistema tiene infinitas soluciones (validación de la situación dos).

Si usan la representación algebraica y realizan en este sistema, diferentes transformaciones mediante las propiedades de los números, nunca podrán obtener una ecuación con una incógnita, llegando a inferir que se trata de la misma línea recta.

Si el estudiante propone la estrategia gráfica y tiene dificultades para realizarla, se le sugiere construir una tabla con algunos valores para las dos variables y ubicarlos en el plano cartesiano.

A priori se prevén dificultades para encontrar la solución de los sistemas dos y tres, por tanto, en caso de ser muy necesario, el docente interviene realizando algunas preguntas orientadoras en momentos específicos que se pueden dar durante la experimentación.

Institucionalización

Se recogen las construcciones de los estudiantes, se procede a socializarlas reafirmando los procedimientos correctos de solución, igualmente se discuten los errores y dificultades.

El profesor resuelve, los sistemas planteados, usando el marco geométrico y algebraico, enfatizando que:

-Al tabular una ecuación lineal con dos variables, se encuentran infinitas soluciones, correspondientes a infinitas parejas de puntos, que generan una línea recta.

-Dos ecuaciones lineales, con coeficientes no proporcionales, al graficarlas se cruzan.

-Dos ecuaciones, de la forma Ax+ By = C, que presentan los coeficientes, A iguales, los coeficientes B iguales, y C es diferente; generan dos rectas paralelas, que se pueden reescribir o transformar a la forma, y= mx + d, donde m es la misma pendiente para ambas y d es diferente e indica los puntos de corte con el eje y, de cada una de las rectas.

-Dos ecuaciones proporcionales, generan la misma línea recta, y se denominan ecuaciones equivalentes, por tano se tienen infinitas soluciones

4.1.5 Situaciones cinco y seis

- **Características**

Las situaciones cinco y seis, plantean dos problemas dados en lenguaje coloquial, para que los estudiantes utilicen los conocimientos construidos en las cuatro situaciones anteriores, que a priori, serán herramientas para plantear la solución. Se espera que modelen y resuelvan un SEL 2x2, ésta es la estrategia ganadora, a la que idealmente deben llegar. Los resultados de estas dos situaciones servirán como referente a tomar en cuenta en la validación de la secuencia didáctica.

Objeto de estudio:
Resolución de problemas mediante SEL 2X2.

Objetivo:

Que el estudiante interprete un problema cotidiano e incorpore como herramienta para su solución, diferentes formas de representación, siendo la estrategia más eficaz, modelar y resolver mediante un SEL 2x2.

- **Variables microdidácticas**

Lectura e interpretación del problema

Hacer conjetura inicial

Reconocer las variables en juego

Plantear estrategia

Resolver el problema

Demostrar que la solución es la correcta y validar su formulación en otra representación.

Conocimientos requeridos para encontrar la solución:

En el marco numérico:

Uso de las propiedades de los números enteros para realizar conjeturas o realizar tabulaciones

En el marco geométrico:

Construcción de gráficas en el plano cartesiano

En el marco algebraico:

Planteamiento, modelación y Solución del problema mediante un SEL 2x2. (Logro alcanzar por los estudiantes, o estrategia de solución ganadora).

- **Presentación de la quinta situación didáctica**

En mi clase hay 35 alumnos a quienes por buen comportamiento se les ha regalado, 2 bolígrafos a cada chica y un cuaderno a cada chico, en total se regalaron 55 artículos, ¿cuántos chicos y chicas hay en el salón?, plantee una estrategia, encuentre la solución del problema y demuestre el resultado.

Lo que se espera de los alumnos y posible intervención del profesor
Posibilidades de acción del estudiante: El estudiante puede plantear el uso de la representación matemática, algebraica o gráfica.

Se espera que los estudiantes interpreten correctamente el enunciado e intenten resolver mediante cálculos mentales, lo que puede dar lugar a plantear como estrategia la construcción de una tabla a partir de ensayos, para ello deben reconocer las dos variables del problema (cantidad de chicos y de chicas) y suponer valores en una de ellas, para calcular la otra, de tal forma que se cumpla con la condición de sumar 35 estudiantes y 55 artículos, a continuación se muestra la tabla con los posibles ensayos a realizar.

Tabla 4-2: Iteraciones a realizar por el estudiante.

N° de chicos	10	12	14	15	16	18	20
N° de chicas	25	23	21	20	19	17	15
Total de artículos	60	58	56	55	54	52	50

Tabla de ensayos en la que se tienen como variables el número de chicos, chicas y artículos, se resalta la solución en color rojo.

Durante la construcción de la tabla, que requiere de un algoritmo para dar cumplimiento a las dos condiciones, puede surgir la posibilidad de plantear un SEL 2x2.

Se espera que estudiantes que han alcanzado buen desarrollo del pensamiento algebraico, puedan plantear directamente el SEL 2X2, que se muestra a continuación.

Sea x es el número de chicas, y el número de chicos, entonces se tiene el siguiente SEL 2x2:

$$\begin{cases} y + x = 35, \text{ número de alumnos} \\ y + 2x = 55, \text{ número de artículos} \end{cases}$$

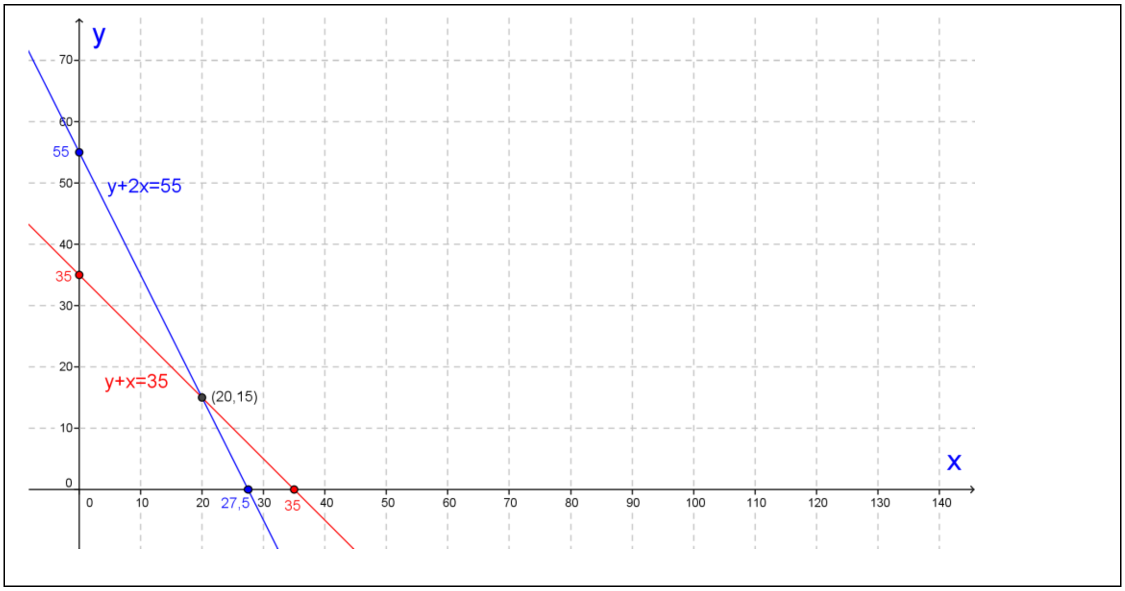
Con este sistema pueden encontrar rápidamente por el método de reducción, la solución, x=10, y=25, que pueden demostrar sustituyendo estos valores en las dos ecuaciones y verificar que se cumplan las igualdades resultantes. Los estudiantes pueden validar este procedimiento mediante los marcos, numérico (ya expuesto) o el geométrico, que se describe a continuación.

Para facilitar la construcción del gráfico, se puede transformar el modelo algebraico, despejando una de las variables en función de la otra.

$$\begin{cases} y = 35 - x \\ y = 55 - 2x \end{cases}$$

Con ésta transformación, pueden tabular fácilmente y ubicar las parejas en el plano cartesiano o también pueden usar el método de corte con los ejes coordenados (suponiendo x=0, y=0) y encontrar dos rectas que se cruzan en el punto, x=20 niñas, y=15 niños, como se muestra a continuación.

Figura 4-4: Solución gráfica del problema planteado.



Se espera que finalmente los estudiantes cotejen y validen sus elaboraciones en diferentes registros.

Institucionalización

El profesor recoge las construcciones de los estudiantes, a partir de estas plantea las diferentes estrategias usadas, valida las correctas e institucionaliza de ser necesario, los marcos numérico, algebraico o geométrico como herramientas para dar solución al problema. Se busca, además de reconocer las diferentes estrategias de solución, que el estudiante amplié su concepto de los SEL 2x2, lo que le da mayores posibilidades para dar solución a problemas cotidianos relacionados con estos.

- **Presentación de la sexta situación**

Se tienen dos cuerdas, una gruesa y una delgada de 100 cm. y 65 cm. de longitud respectivamente, si se hacen nudos simultáneamente en cada una de ellas, la cuerda de 100cm se reduce 10 cm por cada nudo y la cuerda de 65 cm se reduce 3 cm, ¿al cabo de cuantos nudos las dos cuerdas tienen la misma longitud?.

Intención: Que el estudiante resuelva un problema, dado en lenguaje coloquial, usando los marcos, numérico, algebraico o geométrico, se deja el orden de aplicación de los registros a voluntad del estudiante, con el fin de determinar el más usado por ellos en primera instancia y evaluar como los articulan, para encontrar la solución.

Lo que se espera de los alumnos y posible intervención del profesor

Se espera que los estudiantes interpreten correctamente el enunciado, e intenten resolver mediante cálculos mentales apoyados en algún tipo de representación, que pude ser un dibujo o bosquejo de las cuerdas, este puede dar lugar a plantear como estrategia la construcción de una tabla, en la que deben reconocer las dos variables del problema, que son la longitud de las cuerdas y el número de nudos.

Para encontrar la solución ensayar, suponiendo cierta cantidad de nudos, que debe ser la misma, para las dos cuerdas y calcular así, la longitud de cada una de ellas, este procedimiento debe repetirse hasta obtener la misma longitud en las dos cuerdas, a continuación se muestran los posibles ensayos a realizar.

Tabla 4-3: Razonamiento numérico mediante iteraciones.

Número de nudos	0	1	2	3	4	5
Longitud de cuerda gruesa	100	90	80	70	60	50
Longitud de cuerda delgada	65	62	59	56	53	50

Se espera también, que estudiantes que han alcanzado buen desarrollo del pensamiento algebraico, puedan modelar directamente el problema como un SEL 2X2, relacionando las dos condiciones de la siguiente forma:

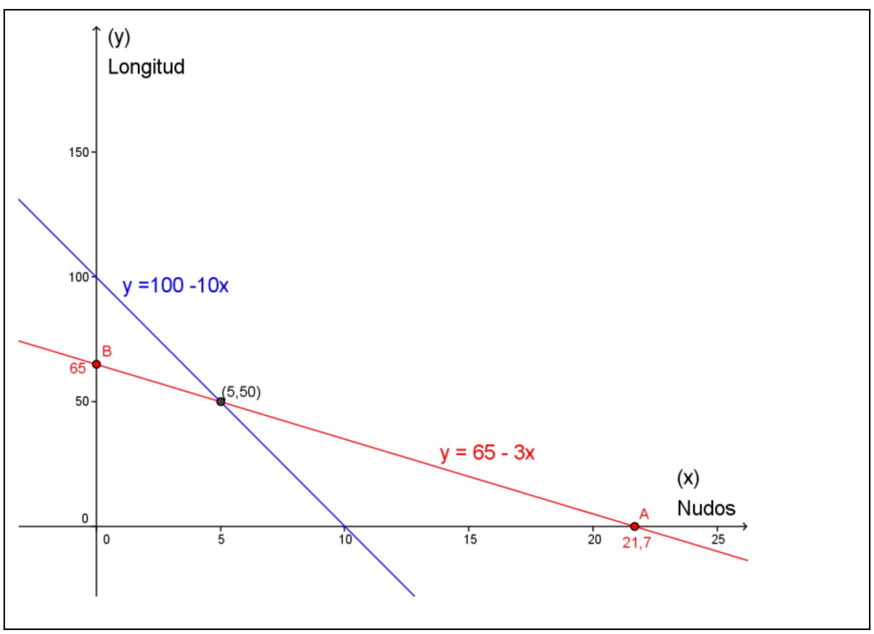
Si **x** es el número de nudos y la longitud de cada cuerda es **y**, se obtiene el siguiente SEL 2X2.

$$\begin{cases} y = 100 - 10x, \text{ para la cuerda gruesa.} \\ y = \ \ 65 - 3x, \text{ para la cuerda delgada} \end{cases}$$

Este sistema se puede resolver rápidamente por el método de reducción, la solución a encontrar es, x=5 nudos, y=50 cm., ésta se puede demostrar sustituyendo los valores en las dos ecuaciones y verificando que se cumplan las igualdades resultantes.

Otra estrategia a utilizar, es construir la gráfica usando diferentes métodos, como son la tabulación, o el punto de corte con los ejes (x,y), de cada una de las ecuaciones.

Figura 4-5: Solución Gráfica del problema seis.



La solución se encuentra interpreteando que la intersección de las dos lineas rectas, el punto x = 5 nudos, y= 50 cm, cumple con las condiciones dadas en el problema.

Institucionalización de las situaciones cinco y seis

Para el análisis se recogen las construcciones de los estudiantes y se procede a socializar y validar las estrategias de solución.

Los estudiantes en sus elaboraciones deben usar las diferentes formas de representación y reconocer, en particular la importancia del uso del algebra como herramienta que facilita la resolución de un problema.

De ser necesario el profesor resuelve usando los marcos numérico, algebraico y gráfico, observando que se encuentra la misma respuesta.

4.2 Experimentación y análisis a posteriori

4.2.1 Primera situación

Presentación en el ítem 4.1.1
Duración (2 horas)
Intención: Que el estudiante use diferentes formas de representar funciones lineales, en la búsqueda de la solución de un problema dado en lenguaje natural (cotidiano), que implica el reconocimiento e interpretación de las variables dependiente e independiente, tabulación, representación algebraica, y representación gráfica.

Luego de la lectura e interpretación del problema, se nota la resistencia de algunos estudiantes al cambio de metodología; después de la fase de acción es aceptada, notándose la apropiación del problema, con la participación voluntaria y positiva, en la discusión de las preguntas planteadas.

Fase a. “antiguo”.

La primera pregunta, ¿cuál es el número de copias para el cual se debe pagar lo mismo a las dos empresas?, generó la búsqueda de diferentes estrategias, que sirvieron de apoyo para responder las siguientes. Inicialmente la mayoría de los estudiantes realizaron un procedimiento mental y al cabo de unos minutos encontraron la respuesta, 500 copias.

En la fase de acción, tabularon el costo contra el número de copias para cada una de las empresas, encontrando el punto donde los valores son iguales, después realizaron el paso al registro gráfico y compararon los costos teniendo como referencia el punto de cruce de las dos rectas.

En la fase de formulación, es interesante anotar que tres de los grupos respondieron las preguntas usando directamente el modelo algebraico y demostraron sus respuestas mediante el método gráfico. Se notó en general buen manejo del concepto funciones lineales

A continuación se presenta el inicio de la fase de acción del grupo siete, la estudiante Paula plantea a su grupo y al docente, la estrategia a seguir:
Paula: Profesor vamos a hacer un cuadro

Docente: ¿cómo así?

Paula: Una tabla

Otro estudiante del grupo: nooo!…., ¿cuántas empresas hay?

Paula: dos…, profesor entonces hacemos dos tablas, una para cada empresa.

Otro de los estudiantes del grupo plantea “sacar las variables”.

Paula manifiesta: debemos sacar las variables para organizar y luego tabular.

Continua Paula: las variables son el número de fotocopias y los costos.

Instantes después responde la primera pregunta, acerca del número de copias
Para el cual el costo es igual con las dos empresas.
Paula: Profesor, son 500 copias y da $25000
Docente: ¿Cómo encontró esos valores?

Paula: Tanteando con algunos valores, encontré que con 500 copias se tiene el mismo costo en ambas empresas.

¿Docente: y ahora como va a resolver las otras preguntas?

Debo la tabla y además graficar

¿Docente: y después de graficar que otra estrategia puede utilizar?

Paula: Pues, esa es la respuesta. (Indica acertadamente que se puede responder la pregunta a partir de esas representaciones)

Docente: puede usar también el modelo algebraico.

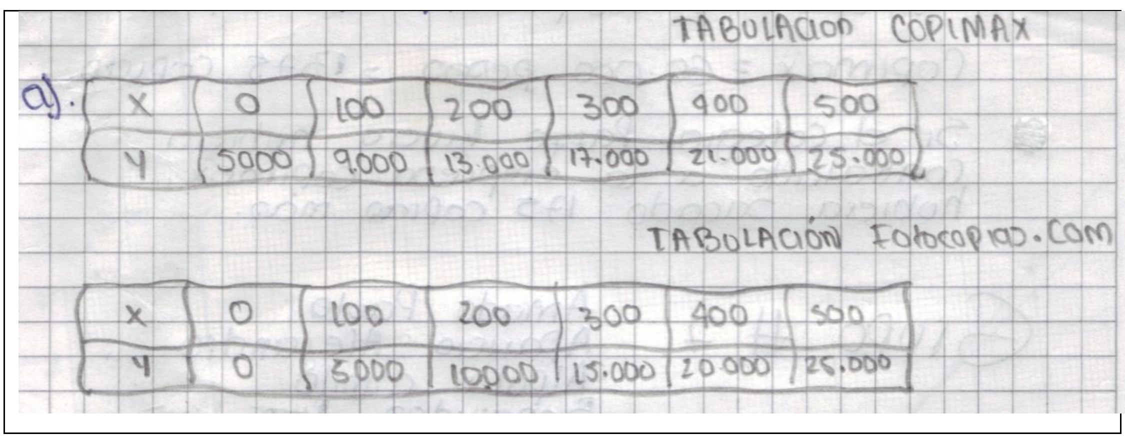
Paula: ¡ah la ecuación!

Otro estudiante del grupo interviene: profesor es la función (el estudiante corrige a Paula a partir de su concepción acerca de función).

Docente: la función, exacto la función para cada una de las empresas, usando el modelo algebraico.

Paula: el costo es la variable dependiente (y), el número de copias es la variable independiente (x)

Figura 4-6: Tabla construida por el grupo de Paula



TABULACION COPIMAX

a).

x	0	100	200	300	400	500
y	5000	9000	13.000	17.000	21.000	25.000

TABULACIÓN Fotocopiad.com

x	0	100	200	300	400	500
y	0	5000	10000	15.000	20.000	25.000

Del dialogo anterior se realiza el siguiente análisis.

Los estudiantes al proponer la tabla, pusieron en marcha "lo antiguo", es decir, los conocimientos que poseen, previo a la aplicación de la secuencia, según la dialéctica herramienta – objeto, (DHO), de Douady. (2008)

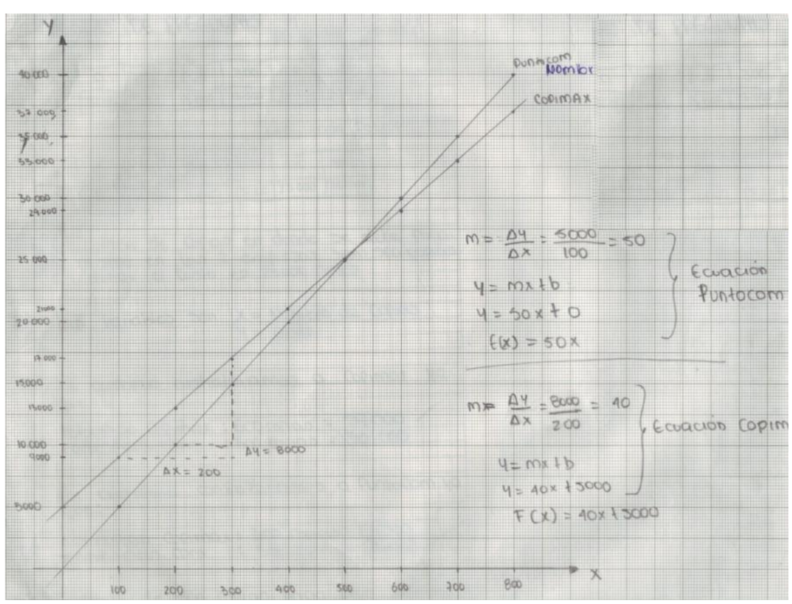
Llama la atención la estudiante Paula, quién encontró rápidamente, mediante razonamiento mental, al tanteo, el resultado 500 copias, como respuesta a la primera pregunta, lo que le sirvió para tabular de 100 en 100 el número de copias.

La pregunta, a partir de cuentas copias contrataría a puntocom o a copimáx?, crea desequilibrios; en la fase de búsqueda de la solución, los estudiantes plantean la representación gráfica, pero en su en su construcción tienen dificultades y llaman al docente nuevamente.

Paula: profesor no nos dan líneas rectas.
Al revisar las gráficas, el profesor detecta un error; al proporcionar los datos de los costos en el eje (y) del plano cartesiano, para cada $5000 toman como unidad de medida un lado de la cuadricula, pero al representar $9000 toman dos unidades, correspondientes a dos lados de la cuadricula.

Los estudiantes corrigen el gráfico y respondan las otras preguntas, que verifican con la tabla, a continuación se muestra la gráfica que construyeron:

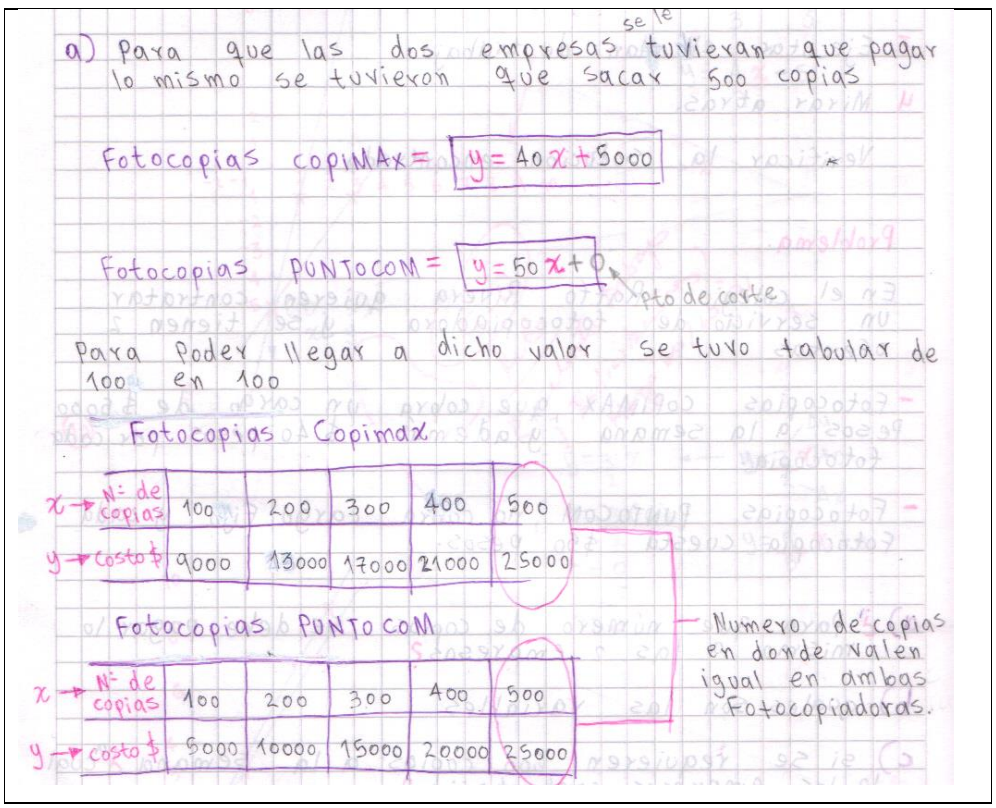
Figura 4-7: Gráfica con la validación del grupo de Paula.



En la gráfica se observa, la construcción a partir de las líneas rectas y sus características, el modelo algebraico de cada una de las funciones lineales, (una afín y otra que pasa por el origen), reconocen la noción de pendiente de una recta, realizan la transición de ecuación lineal de puntocom y ecuación lineal de copimáx a sus respectivas funciones (se observa la simbología f(x) y F(x)), y validan los resultados de acuerdo con la tabla construida, anotando que solo representan simbólicamente los ejes coordenados, olvidando nombrar o escribir las variables sobre ellos.

El grupo de Henao, al igual que los otros grupos responden la primera pregunta mediante cálculos mentales, luego presentan el modelo algebraico, posteriormente usan la tabulación y la representación gráfica, como estrategias para encontrar la respuesta a ésta y las otras preguntas; a continuación se muestran las formulaciones y la demostración de la respuesta encontrada mediante la tabulación.

Figura 4-8: Construcción de tabla del grupo Henao


a) Para que las dos empresas se le tuvieran que pagar lo mismo se tuvieron que sacar 500 copias

Fotocopias copiMAx = $\boxed{y = 40x + 5000}$

Fotocopias PUNTOCOM = $\boxed{y = 50x + 0}$ pto de corte

Para poder llegar a dicho valor se tuvo tabular de 100 en 100

Fotocopias Copimax

x → N° de copias	100	200	300	400	500
y → costo $	9000	13000	17000	21000	25000

Fotocopias PUNTOCOM

x → N° de copias	100	200	300	400	500
y → costo $	5000	10000	15000	20000	25000

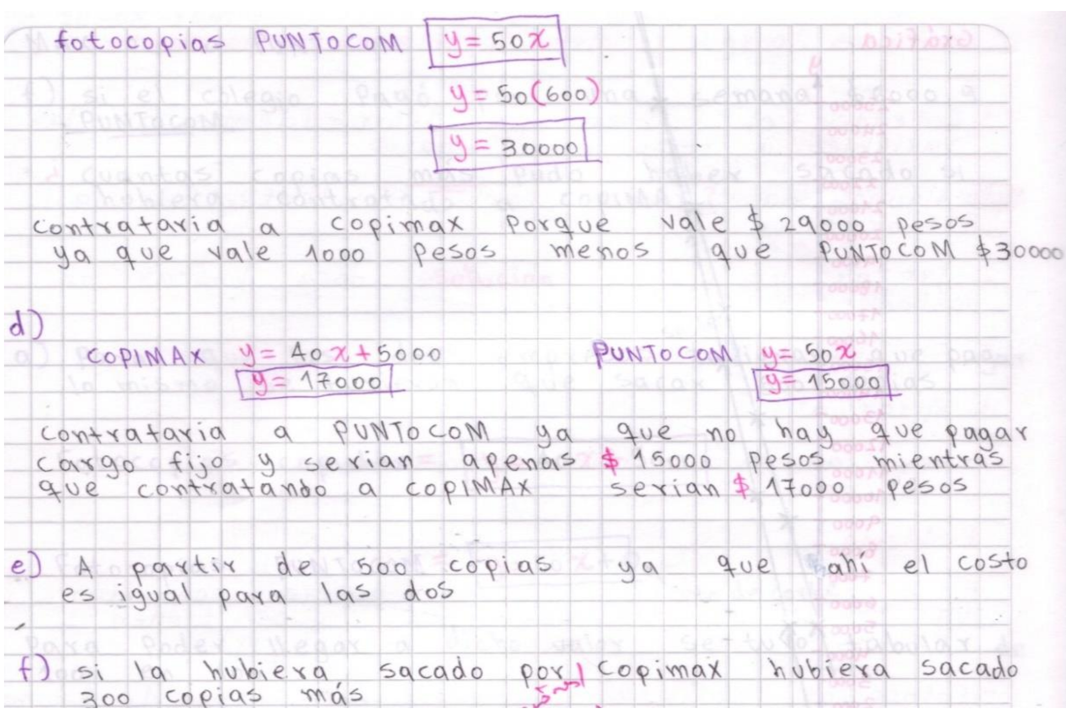
Numero de copias en donde valen igual en ambas Fotocopiadoras.

En la figura, se observa que los estudiantes inician planteando el modelo algebraico de la situación, pero no visualizaron la utilidad que éste brinda para encontrar la solución (a), ya que podían igualar los costos para obtener una ecuación con la incógnita x, fácil de despejar, correspondiente al número de fotocopias.

En la parte inferior se muestra como el grupo opta por la tabulación y valida correctamente la conjetura inicial, encontrando la respuesta prevista, 500 copias, posteriormente construyen la gráfica, con ella resuelven y demuestran las respuestas a las otras preguntas.

Figura 4-9: Validación del grupo Henao, usando estrategia algebraica.

:


fotocopias PUNTOCOM $\boxed{y=50x}$

$y=50(600)$

$\boxed{y=30000}$

contrataria a copimax porque vale $ 29000 pesos ya que vale 1000 pesos menos que PUNTOCOM $30000

d) COPIMAX $y=40x+5000$ $\boxed{y=17000}$ PUNTOCOM $y=50x$ $\boxed{y=15000}$

contrataria a PUNTOCOM ya que no hay que pagar cargo fijo y serian apenas $ 15000 pesos mientras que contratando a COPIMAX serian $ 17000 pesos

e) A partir de 500 copias ya que ahí el costo es igual para las dos

f) si la hubiera sacado por copimax hubiera sacado 300 copias más

Como se observa, los estudiantes reemplazaron en el modelo algebraico, los valores indicados del número de copias y compararon los costos resultantes para responder las preguntas formuladas, notándose la respuesta e) incompleta, estos registros muestran el avance en el nivel de desarrollo del pensamiento algebraico de sus integrantes.

Crónica de intervención del profesor con el estudiante Méndez.

¿El Docente le pregunta: como resolvió la pregunta de la igualdad de costos?

Méndez: Comienzo a suponer valores, hasta que me dé el que yo quiero.

El estudiante cuando supone 500 copias, encuentra el mismo costo para las dos ofertas, $25000.

Docente: Como supusiste que eran 500 copias?

Méndez: "porque al reemplazar éste valor en las dos ecuaciones me da igual.

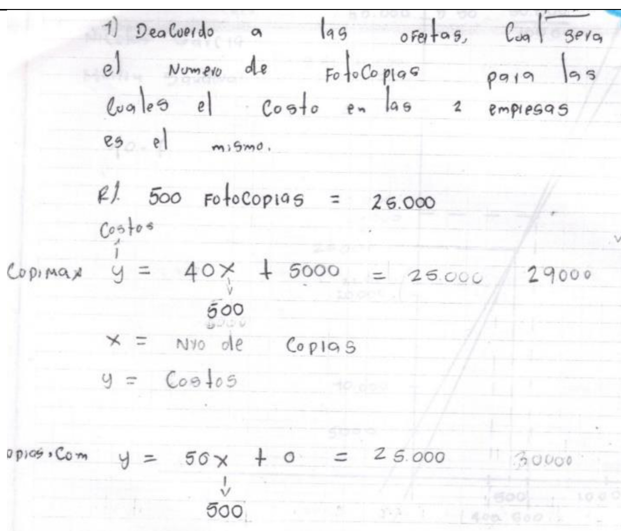
5x4+5 y 5x5= 25"

Docente: lo hiciste mentalmente

Méndez: Si

El estudiante hizo la inferencia a partir del número de copias supuesto (500) y encontró la respuesta, que pudo validar luego cuando usa las otras representaciones, es de anotar el buen desarrollo del pensamiento numérico, cuando realiza las operaciones mentalmente suprimiendo los ceros. Luego el estudiante responde de forma correcta, la primera pregunta, usando la representación algebraica, como se muestra en la figura siguiente.

Figura 4-10: Validación algebraica de Méndez


1) DeaCuerdo a las ofertas, Cual sera el Numero de FotoCopias para las Cuales el Costo en las 2 empresas es el mismo.

R/ 500 FotoCopias = 25.000

Costos

Copimax y = 40x + 5000 = 25.000 29000

500

x = Nro de Copias

y = Costos

opias·Com y = 50x + 0 = 25.000 30000

500

A continuación se presenta la construcción gráfica y las conclusiones del grupo del estudiante Gaviria.

Figura 4-11: Gráfica y conclusiones del estudiante Gaviria

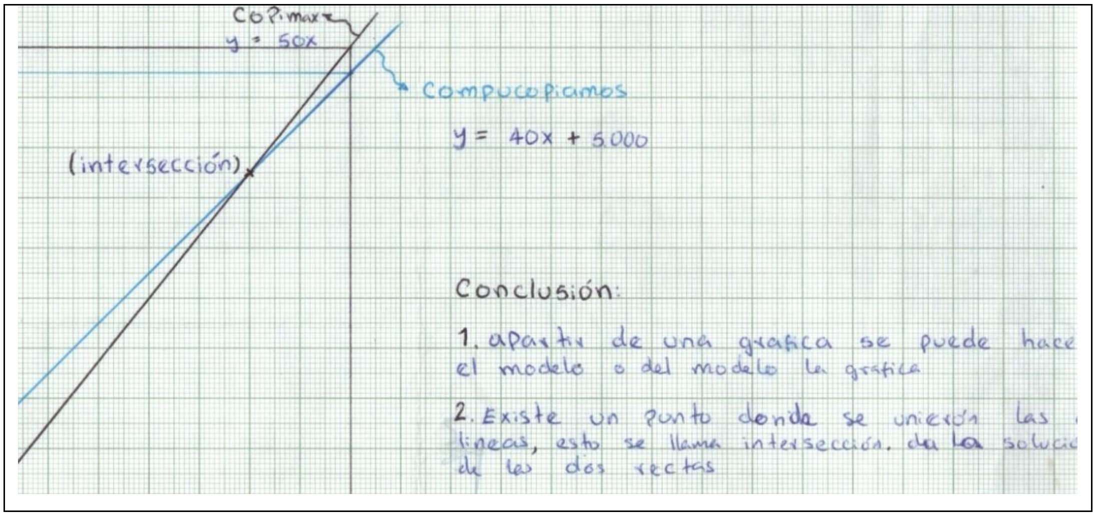
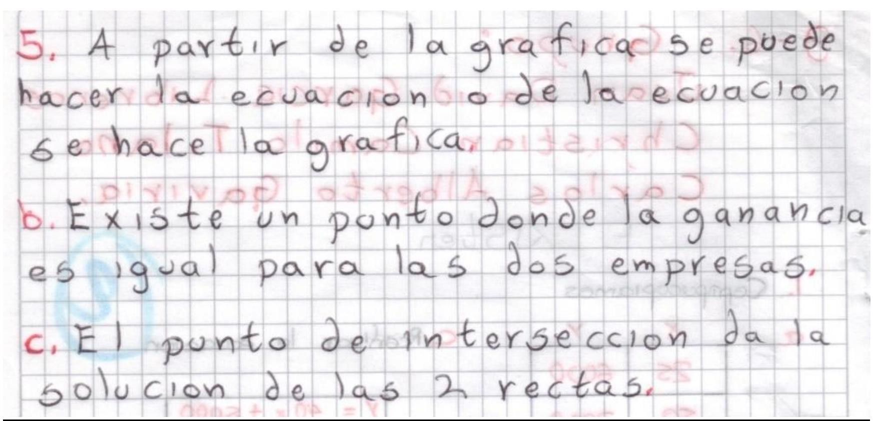


Figura 4-12: Conclusiones del grupo Gaviria



En las construcciones anteriores, se puede ratificar que el cambio de marcos mencionado por Douady (1993), es “un medio para obtener formulaciones diferentes de un problema que sin ser necesariamente equivalentes por completo, permiten un nuevo acceso a las dificultades encontradas y a la puesta en acción de herramientas y técnicas que no se imponían en las primeras formulaciones”.

En el proceso de solución del problema, se observó que los estudiantes, pasaron por las fases características de la dialéctica herramienta-objeto; la construcción de tablas, fue la puesta en marcha de “lo antiguo”. La búsqueda de “lo nuevo”, en este caso fue reconocer que existen otras formas de representación para resolver problemas, que tienen implícito el concepto de función.

Finalmente se observó, que algunos estudiantes presentaron dificultades para reconocer y simbolizar las variables y pasar de la representación numérica a los otros tipos de representación.

La secuencia diseñada, da la oportunidad a estos estudiantes de ir construyendo poco a poco, las diferentes formas de representación de los conceptos matemáticos, que fue el objetivo de la presente situación.

Al respecto, en la descripción de la dialéctica herramienta – objeto, Douady (2009) manifiesta que:
“…no implica que cada ciclo llegue necesariamente a una extensión del saber del alumno, socialmente reconocida. Para un mismo alumno o para un mismo objeto pueden ser necesarios varios ciclos”.

- **Fase de institucionalización**

En esta fase se socializaron las construcciones de los estudiantes, las estrategias, sus ventajas y dificultades; el profesor enfatiza en las diferentes formas de representar la situación que fue planteada, construye cada una de ellas y calcula los costos pedidos, verificando que los resultados son los mismos, analiza el nivel de dificultad y las posibilidades que ofrece cada una de las representaciones, sobre todo en la interpretación gráfica y algebraica, recordemos que según Douady (2008), en la fase de institucionalización:

“…el maestro pasa a una etapa de institucionalización de lo que es nuevo y retiene con las convenciones en curso, eventualmente definiciones, teoremas y demostraciones. Esto nuevo que se retiene está destinado a funcionar, posteriormente como lo antiguo".

Puede decirse que la situación favoreció la profundización del concepto función en sus diferentes formas de representación como se esperaba.

Se reafirma la conclusión anterior mediante la siguiente tabla, en la que se registraron los resultados, de acuerdo con la selección de estrategias y el orden en que fueron desarrolladas, que sirven de indicadores para el análisis a posteriori y su confrontación con el análisis a priori.

Tabla 4-4: Resultados de la primera situación.[10]

Grupo vs Estrategia	**Tanteo inicial**	**Tabulación**	**Gráfica**	**Modelo algebraico**	**Encuentra la solución.**
GRUPO 1	+	+1 opción	+2 opc.	3. solo modela	+
GRUPO 2	+	+2 opción	+3	+1.modela y resuelve	+
GRUPO 3	+		+2	-	+
GRUPO 4	+	+1opción	+2	+1modela y resuelva	+
GRUPO 5	+	+1 opción	+2	-	+
GRUPO 6	+	+1 opción	+2	+1.modela y resuelve	+
GRUPO 7	+	+1 opción	+2	2Solo modela	+
GRUPO 8	+	+1 opción	+2	+1.modela y resuelve	+
GRUPO 9	+	+1 opción	+2		+

Con la situación planteada se cumplió con el objetivo propuesto, tres de los grupos alcanzaron un alto nivel de desempeño, al resolver la situación usando los

[10] Convenciones para interpretar la tabla:

Los números indican el orden en que los grupos seleccionaron cada una de las estrategias.

+: Indica que el grupo de estudiantes resolvió acertadamente mediante la estrategia seleccionada.

Por ejemplo. El grupo Nº6, (en rojo) realizó simultáneamente, como primera opción, la representación algebraica y la tabulación, después validaron mediante la grafica cartesiana, que aparece como segunda opción.

diferentes tipos de representación y movilidad entre ellos para encontrar las respuestas y hacer las demostraciones. Los otros seis grupos también resolvieron acertadamente, pero con menor nivel de desempeño, dos de ellos plantearon también el modelo algebraico pero no lo utilizaron como estrategia para responder preguntas; y los otros cuatro grupos no construyen el modelo algebraico, pero resuelven mediante la interpretación gráfica, que realizan a partir de la construcción de tabla.

4.2.2 Segunda situación

Intención:

Construcción de la noción de covariación, a partir de una condición dada en lenguaje natural, que se puede representar mediante una función lineal, cuya solución se encuentra recurriendo al método iterativo, es decir suponer valores para una variable y calcular el valor de la otra, para construir tabla y graficar; al final el estudiante debe reconocer que se presentan infinitas soluciones correspondientes a los infinitos puntos de una línea recta.

También puede representar algebraicamente la situación, despejar una de las variables en función de la otra y reconocer que se trata de una recta de la forma, $y = mx + b$, o realizar ensayos suponiendo valores en ella, para determinar que existen infinitos pares de valores X y Y que son solución. Al final el docente, anexa otra condición, para convertir la situación en un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, que los estudiantes podrán resolver con la interpretación gráfica.

Situación problema:

Mi hermano Alejandro me dice que en la librería “Marden” 4 lapiceros valen $800 pesos más que 3 cuadernos, y pregunta ¿cuál es el precio de un lapicero y de un cuaderno?

Finalmente cuando se planteen las infinitas soluciones, se agregará al problema la siguiente condición para encontrar solución única.

Que sucede si un cuaderno y un lapicero cuestan ($3700 pesos)

Descripción de las observaciones a partir de los videos y fotos de las construcciones de los estudiantes.

Esta situación se anticipó previamente con el análisis de textos y de la enseñanza tradicional, ya que tradicionalmente se dejan vacíos en la transición de función a ecuación y viceversa, como lo describimos en los siguientes diálogos:

El estudiante Restrepo, inicia presentando al profesor la ecuación. El Profesor, la observa y le pregunta:

Cómo hacer para resolver esa ecuación?

Restrepo: despejar una de las variables.

Al intentarlo, una de las variables le queda en función de la otra, no encuentra la solución, no la asocia o relaciona a la ecuación de la forma, y = mx +b, que se le enseñó mediante el método tradicional conductista

Profesor: que puede usted plantear, para encontrar los valores del lapicero (L) y cuaderno (C), mediante esa ecuación?

El estudiante Varela, presenta la ecuación en términos de x y de y, se le pregunta lo mismo que al anterior estudiante, ante lo cual dice. “Ésta sería como la ecuación general de la situación profesor”

Profesor: Que harías para resolverla?

Estudiante: Hacer una gráfica

Profesor: ¿qué hacer para graficar?

Estudiante: coger puntos.

Se reconoce que todos los planteamientos del estudiante Varela son acertados.

Luego, otro estudiante del grupo plantea el método de tabulación al no encontrar la respuesta.

Profesor: ¿cómo puede usted hacer una tabla?

Responde: definir primero las variables, que es x y que es y.

Posteriormente uno de los estudiantes, encuentra acertadamente mediante cálculo mental una solución, dice que la solución es $800 para cuaderno y $800 para un lapicero.

El docente le pregunta si esa es la única solución.

Después de un determinado tiempo, el docente cree conveniente dar pistas:

El profesor: “ésta es la ecuación que la mayoría encontraron”, escribe en el tablero: 4L= 3C + 800

El profesor pregunta, ¿esta es una ecuación con cuantas incógnitas?

Responden al unísono: dos.

Docente: al despejar una de las variables, se darán cuenta ustedes que le queda en términos de la otra; una forma de resolver es darle valor a una de las incógnitas, por ejemplo (C) y despejar la otra (L) de la ecuación, tabular y graficar.

Otra forma es usar los conocimientos que ustedes tienen de la ecuación lineal para graficarla.

Supongan que un lapicero vale 800, calculen el precio de un cuaderno.

Uno de los estudiantes responde: $800.

Docente: ¿esa será la única respuesta?, ¿Qué pasa si el lapicero vale $2400?

$1600 responden.

Serán esas dos las únicas respuestas

Noooo…

Entonces cual será el valor de un lapicero y el valor de un cuaderno

Uno o dos responden: “depende profesor”, cuando varia el precio de un lapicero varía el precio del cuaderno y viceversa

Profesor: ¿Cuantas soluciones hay?

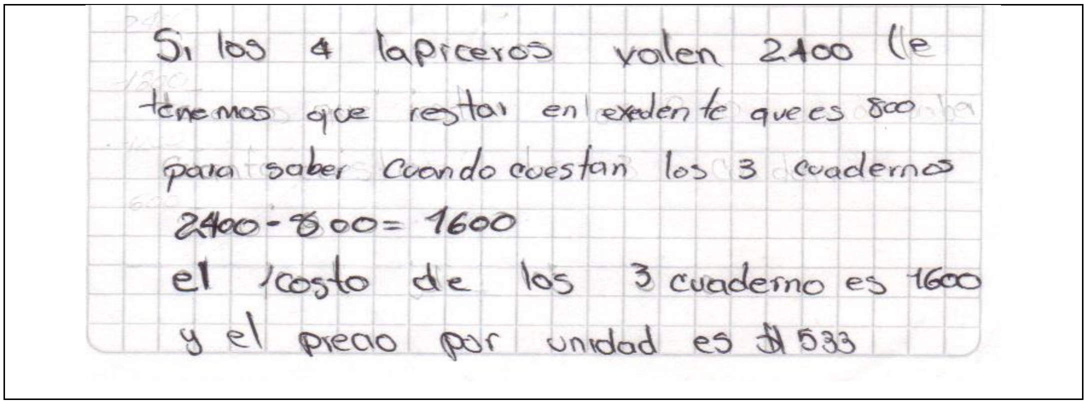
Muchas, que se pueden representar, mediante una ecuación, como lo acabamos de ver.

Pegunta nuevamente el profesor: ¿De que otra forma se pueden representar?

Con una gráfica, dice el estudiante Rentería, validando así, la construcción conceptual de la situación didáctica anterior. (Fase de reinversión según la DH-O)

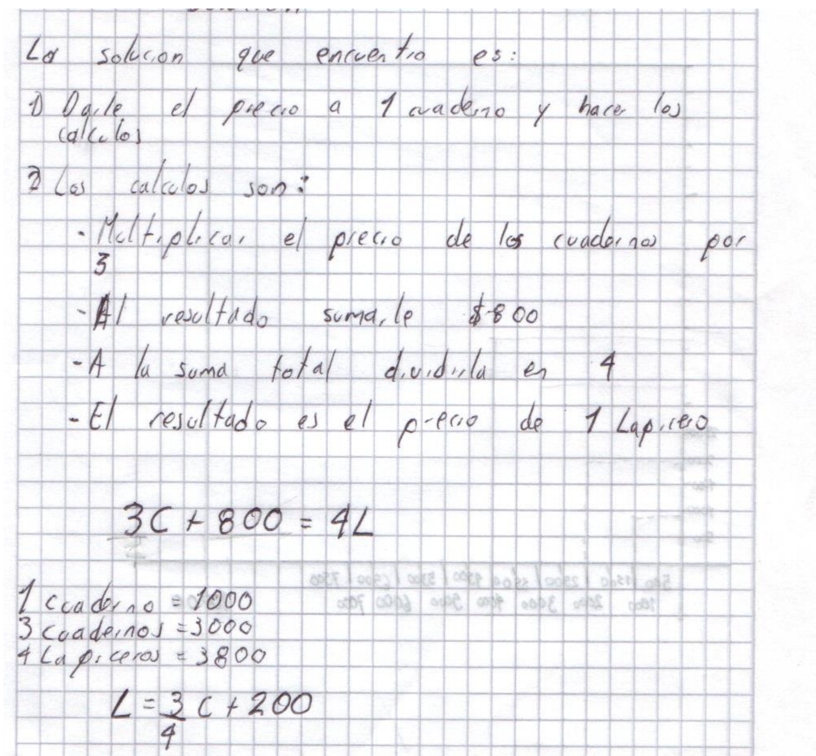
Debe anotarse el beneficio de la contextualización de un problema, para favorecer el aprendizaje de un concepto, como ocurrió al estudiante, López, quien realiza el razonamiento en forma retórica, como se puede observar a continuación, asumiendo el precio real que tiene en el mercado el lapicero, $600 pesos, y a partir de ahí construye su solución al problema, encontrando que el cuaderno tiene como precio $533 pesos, (solución única), concepción errónea, planteada en la investigación de Panizza, (de la Unicidad al Infinito,1996)

Figura 4-13: Solución retórica encontrada por el estudiante López.


Si los 4 lapiceros valen 2400 (le
tenemos que restar el exedente que es 800
para saber cuando cuestan los 3 cuadernos
2400 - 800 = 1600
el costo de los 3 cuaderno es 1600
y el precio por unidad es $533

A continuación, se presenta el proceso de construcción del algoritmo algebraico realizado por el estudiante Núñez, que corresponde a la fase de acción y formulación en la búsqueda de la solución de la situación que fué planteada en lenguaje natural o retórico.

Figura 4-14: Algoritmo y modelo algebraico construido por el estudiante Núñez.


La solucion que encuentro es:
1) Darle el precio a 1 cuaderno y hacer los calculos
2) Los calculos son:
- Multiplicar el precio de los cuadernos por 3
- Al resultado sumarle $800
- A la suma total dividirla en 4
- El resultado es el precio de 1 Lapicero

$3C + 800 = 4L$

1 cuaderno = 1000
3 cuadernos = 3000
4 Lapiceros = 3800

$L = \frac{3}{4}C + 200$

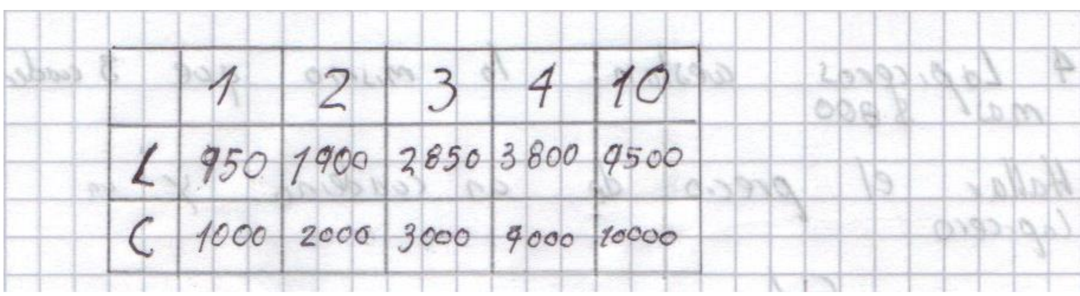
Se nota al final que la ecuación inicialmente encontrada, se despejó en términos de una de las variables, en ésta se puede observar fácilmente el incremento o término independiente (200),

La línea no pasa por el origen de coordenadas y se articula con la existencia del término independiente (b=200), de la ecuación, y= mx + b.

Concepto que no aplicó el estudiante Núñez, quien a pesar de realizar esta construcción, comete el error en la tabulación debido al obstáculo de considerar la variación de los precios de forma proporcional.

Fase de validación: Usando el razonamiento inicial, asume el precio de $1000 pesos para el cuaderno y calcula de forma correcta el precio del lapicero que le da $950 pesos, posteriormente construye la tabla para otros precios supuestos de los cuadernos.

Figura 4-15: Tabla construida por el estudiante Núñez



	1	2	3	4	10
L	950	1900	2850	3800	9500
C	1000	2000	3000	4000	10000

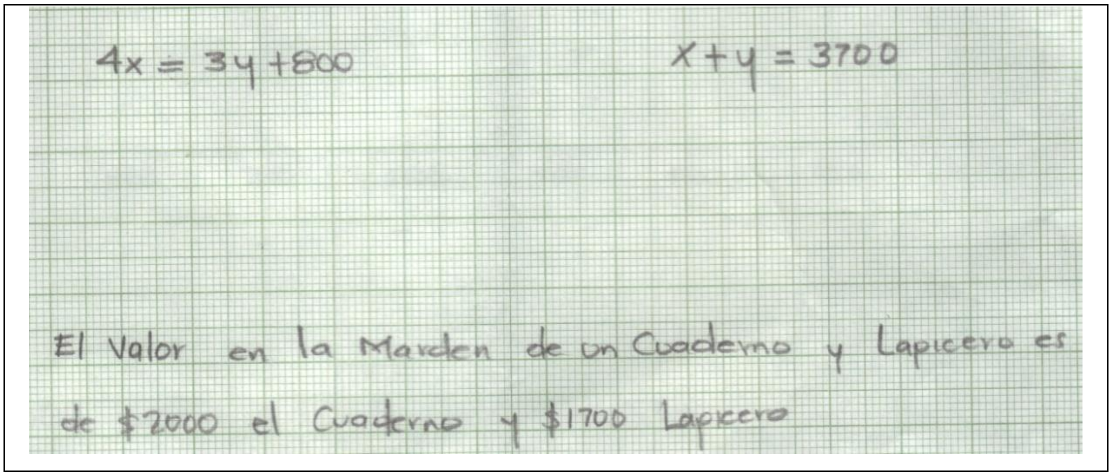
De la tabla, se puede analizar que el estudiante solo usa el algoritmo que planteó para la primera suposición, cometiendo el error de aplicar la proporcionalidad, para los siguientes valores de los cuadernos, multiplicando cada vez por dos, tres, cuatro y diez; al graficar, encuentra puntos en el plano cartesiano que al unir generan una recta que pasa por el origen de coordenadas, y le primer punto por fuera de ella, la anterior situación se repite al revisar los resultados de varios de los grupos,(ver anexos) convirtiéndose éste error, en un obstáculo (los estudiantes están propensos a desarrollar problemas proporcionalmente, doblando, triplicando, etc.) que se visualiza mediante la gráfica.

Posteriormente con el fin de aproximar a los estudiantes al concepto de SEL, el profesor anexa otra condición.

- Un cuaderno y un lapicero cuestan en la “Marden” $3700 pesos.

El grupo del estudiante Gaviria, al igual que los otros grupos, incorpora la nueva condición, que modelaron fácilmente y posteriormente graficaron, como se muestra a continuación, validando así la situación didáctica planteada.

Figura 4-16: Solución gráfica del estudiante Gaviria.



Análisis de resultados

Con la actividad se puso en contradicción el pensamiento del estudiante, que supone inicialmente que la solución es única para resolver cualquier problema, conclusión de Panizza (1999). Para este caso en particular, a medida que va suponiendo valores para una de las variables, siempre encuentra otro valor que cumple con la condición dada, hasta definir que tiene infinitas soluciones que se pueden graficar como una recta, cuyo modelo algebraico es de la forma, y= mx +b.

Llama la atención la presencia de un error que se manifestó en las construcciones de varios grupos, que graficaron la recta pasando por el origen de coordenadas, a pesar de que el modelo algebraico les anunciaba que pasaba por 200. y de haber calculado el primer valor de forma correcta.

De acuerdo con Brousseau, citado por Godino, J., (2010), se trata de un obstáculo, que consiste en que siempre solucionaron problemas mediante el uso de la proporcionalidad, doblando, triplicando, en esta situación aparentemente se puede aplicar esta propiedad matemática a cada miembro de la ecuación como lo hizo la estudiante Nuñez, pero no implica que las variables que están al interior de ellos, también cambien proporcionalmente, es así como la mayoría de los estudiantes encuentra correctamente, mediante el álgebra o algoritmo escritos en forma retórica (que se mostraran más adelante), un par de valores que son solución, suponiendo un valor para uno de los artículos y despejando el otro; pero luego al tabular otros puntos, usan la proporcionalidad, olvidando que una de las variables está afectada por la adición de una constante, el error se propaga a cada uno de los puntos siguientes de la tabla y por ende a la representación gráfica, que construyen después, en la que les resulta una línea recta que pasa por el origen**.**

En la institucionalización se resuelve el problema, usando inicialmente, los valores de la tabla para construir la gráfica, posteriormente se grafica a partir del modelo algebraico, usando la transformación de la ecuación inicial, $4y = 3x + 800$, a:
$y= 0.75x + 200$, y graficar fácilmente usando el concepto de pendiente, y el punto de corte con el eje y, o usando el método de cortes con los ejes.

La actividad también permitió construir la noción de variación lineal, mediante el uso de sus diferentes formas de representación como se observa de las elaboraciones de los estudiantes, a partir de ellas se realiza la siguiente tabla en la que se fijan los niveles de desarrollo de competencias de cada grupo de acuerdo con la estrategia que desarrolló.

A continuación se presenta la tabla resultados, de una situación dada en lenguaje natural, que presenta una condición de codependencia de dos variables, en ella se puede analizar que cinco de los grupos, usan el modelo algebraico para determinar la primera pareja de puntos, de forma correcta, pero tienen dificultades para tabular y graficar, se trata de un obstáculo que Brousseau (1983) define como:
“Es una concesión que ha sido en principio eficiente para resolver un tipo de problema pero que falla cuando se aplica a otro”

Tabla 4-5: Resultados de la situación dos.[11]

Grupo vs Estrategia	tanteo	Modelo algebraico	Tabulación	. Gráfica	solución
Grupo 1		+1 usa , determinan una recta		+2 recta	Infinitas soluciones
Grupo 2	+usa	+1usa,calcula solo un punto		2 error con afín	Infinitas soluciones
Grupo 3	+usa	+1usa,recta	+1usa	+2usa	Infinitas soluciones
Grupo 4	+usa	+1usa,calcula solo un punto	2 error	3 con el error	Solo reconoce variación
Grupo 5	+usa	+1 solo modela	+2 usa	error	Infinitas soluciones
Grupo 6	+usa	+1 usa, calcula solo un punto	2 error duplica del primer punto	3Corte en y 800, error de tabla al duplicar	Infinitas
Grupo 7	+usa	+2 solo modela	1 error duplica del primer punto	3 con errores de tabla	Reconoce variación-
Grupo 8		+Solo modela	1usa con error	2usa con error	
Grupo 9		+Solo modela		2 usa con error	

Muy a menudo los estudiantes usaron ejemplos con repartos proporcionales, con los cuales dieron solución a varios problemas de ejercitación algorítmica, como por ejemplo llenar tablas. Estrategia, a la que recurren muy a menudo los profesores de los grados inferiores, de tal forma que este aprendizaje, se manifiesta posteriormente, como ocurrió en esta situación. De forma positiva porque se reconoce en ella una estrategia, que se debe complementar para que los estudiantes reconozcan el obstáculo. Por lo tanto, una forma de evitar, y

[11]Convenciones :
1: Estrategia usada como primera opción. 2: segunda opción. 3. Tercera opción.
+: la estrategia fue bien planteada.
Ésta tabla se retomará al final del capítulo, como instrumento de análisis para determinar el proceso de desarrollo de las competencias matemáticas.

aprovechar este error en forma pedagógica, es profundizando en el aula el concepto de la función afín, diferenciándolo de la función lineal, en sus diferentes representaciones.

4.2.3 Tercera situación

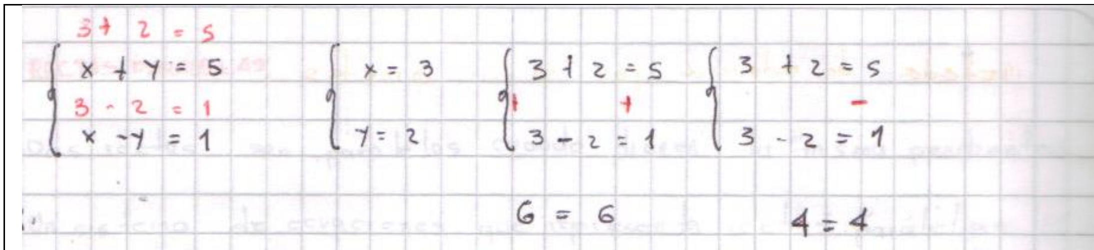
Su presentación se encuentra en el análisis a priori, ítem 4.3
Intención: reconstrucción del algoritmo usado en el método de reducción (a sumas y restas) para la resolución de ecuaciones 2x2, a partir de dos igualdades matemáticas sencillas, con las cuales el estudiante interactuará de tal forma que transforme en otras igualdades, para ello debe utilizar las propiedades de los números enteros aprendidas.

Se plantean dos ecuaciones simultaneas triviales, para solucionar, el estudiante debe encontrar una ecuación equivalente a cualquiera de ellas, multiplicando o dividiendo todos los términos de la ecuación por el mismo número (axioma fundamental de las ecuaciones), de tal forma, que la sumar o restar de la otra ecuación, se obtenga una ecuación con una incógnita, esto se logra buscando siempre, que se anulen los coeficientes de una de las variables; en este punto el estudiante debe reconocer que una ecuación con dos variables presenta infinitas soluciones que se pueden representar como una línea recta. Construcción de la actividad anterior.

Fase a. “antiguo”. (DH-O).

Uso de conocimientos antiguos, (propiedades de los números enteros) de acuerdo con la dialéctica herramienta –objeto (DH-O), propuesta por Douady.
Los estudiantes en la fase de acción, construyen igualdades como la que, describe a continuación el estudiante Urrea:

Figura 4-17: Uso de las propiedades de los números enteros, Urrea



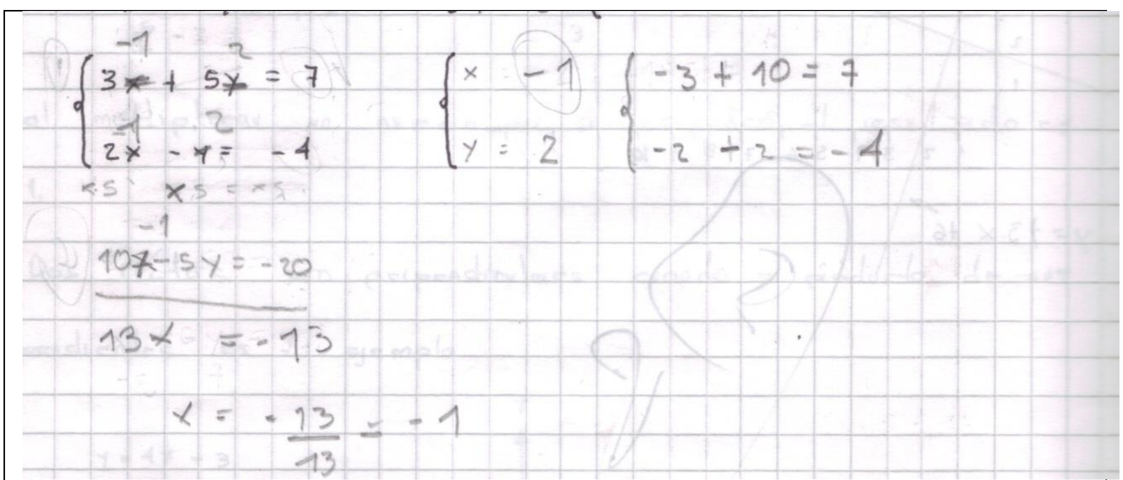
En la gráfica se nota que encontró la solución al problema, de la siguiente manera, relacionó mediante cálculos mentales las dos igualdades (escritas en rojo), y posteriormente encontró las dos igualdades, que se le pedían, sumando y restando las igualdades iniciales.

De ésta forma valida que al sumar o restar dos igualdades, se obtiene otra igualdad y procede a buscar la solución de los sistemas de ecuaciones planteado.

Fase b. "Búsqueda" (DH-O).

Inicialmente encuentran otra igualdad con dos variables, que saben de la actividad anterior tiene infinitas soluciones, luego de varios intentos, el estudiante, Urrea presenta y demuestra la solución para el sistema 2c, como se aprecia a continuación.

Figura 4-18: Reconstrucción del método de reducción del estudiante Urrea



Fase de comunicación y formulación

Docente: ¿Cómo encontró la solución?

Urrea: Multiplico la segunda ecuación por 5, para encontrar una equivalente, 10x-5y= -20, que sumada a la primera desaparezca la incógnita **y**, permitiéndome calcular el valor de **x** que en este caso da, -1.

¿El docente pregunta nuevamente: como calcularía el valor de y?
Urrea: sustituyendo -1, por la incógnita **x** en la ecuación y luego encuentro el valor de **y,** que la cumpla.

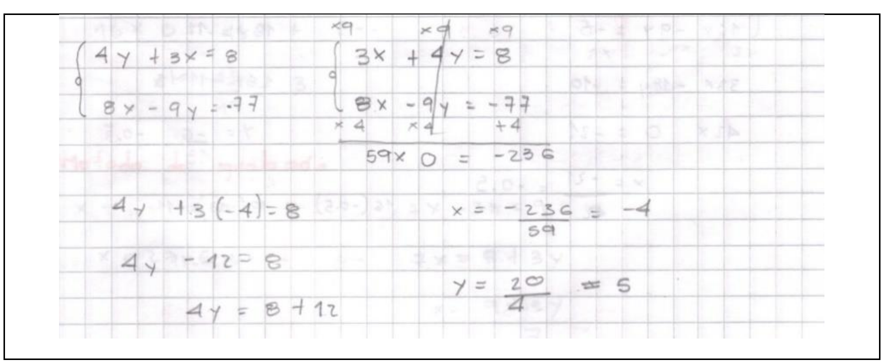
Nótese que la demostración, la hace al tanteo, se nota como sobrepone los valores x= -1, y=2, en la primera ecuación y procede a verificar sustituyendo estos valores en la segunda ecuación, mostrando que también se cumple la igualdad, validando así el algoritmo que encontró; este procedimiento demostrativo se institucionaliza al final.

Fase de reinversión, (DH-O).

A continuación se muestra el avance del estudiante, cuando resuelve un sistema propuesto, que relaciona ecuaciones cuyos coeficientes no son múltiplos entre si y debe encontrar dos ecuaciones equivalentes, se observa como las ordena, y luego transforma los coeficientes de la variable **y,** para anularlos y despejar **x** de la ecuación resultante.

La construcción anterior pone de manifiesto la validez de la teoría de juego de marcos y dialéctica herramienta – objeto, que plantea que mediante ella, el alumno construye el conocimiento por el alumno mismo, Douady (2008)

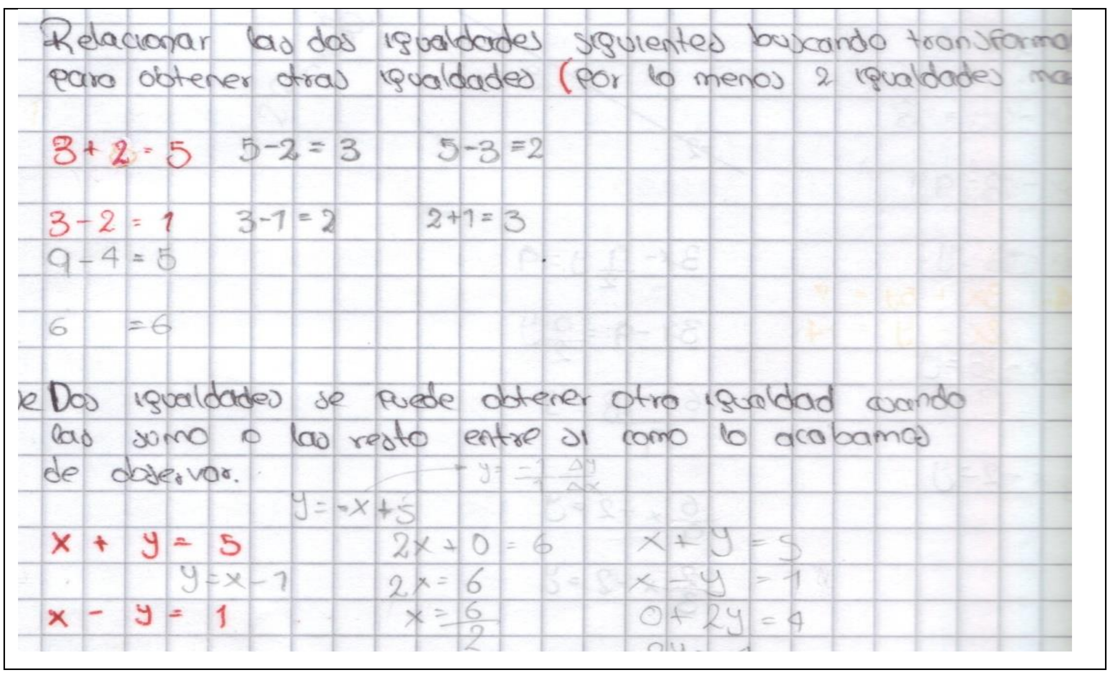
Figura 4-19: SEL 2X2, resuelto por Urrea, usando el método de reducción.



A continuación se describe, la evolución en la construcción del algoritmo del estudiante Escobar, se observa en la fase de acción como realiza algunas transposiciones de un lado al otro de cada igualdad, verificando, la propiedad de simetría y el axioma fundamental de las ecuaciones, y concluye acerca de procedimiento que utilizó para relacionar las dos igualdades y encontrar la otra igualdad. En la segunda parte se nota como utiliza el mismo procedimiento, sumando miembro a miembro las dos ecuaciones, y calcula cada una de las variables, validando de esta forma su construcción.

Se evidencia en la fase de acción, su buen dominio de las propiedades de los números enteros, encontrando seis igualdades, por medio de la multiplicación, suma y resta, presentando alto nivel de competencia numérica.

Figura 4-20: Reconstrucción del método de reducción del estudiante Escobar.



En el procedimiento inferior, se nota como en su búsqueda, el estudiante desconoce, que puede sustituir el valor encontrado en una de las ecuaciones iniciales, para calcular el otro, por eso repite nuevamente restando las ecuaciones, encontrando la respuesta correcta, el estudiante está iniciando su concepción de noción de variación.

Figura 4-21: Formulación del estudiante Escobar, acerca del algoritmo aritmético.

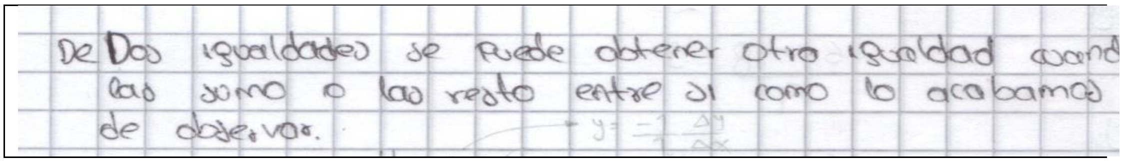
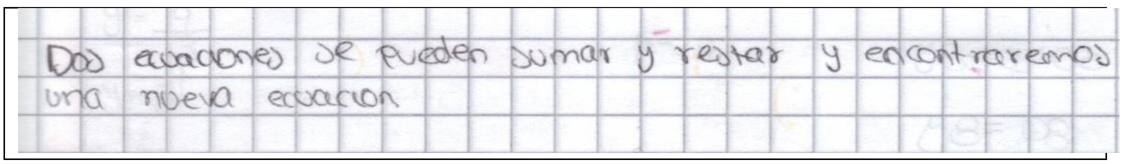

De Dos igualdades se puede obtener otro igualdad cuand las sumo o las resto entre si como lo acabamos de observar.

Figura 4-22: Formulación del estudiante Escobar, acerca del algoritmo algebraico


Dos ecuaciones se pueden sumar y restar y encontraremos una nueva ecuacion

Institucionalización

Se institucionaliza el método de reducción a sumas y restas, el docente retoma el procedimiento realizado por los estudiantes, explicando que consiste en encontrar una ecuación equivalente, a una de las originales, de tal forma que se pueda obtener una ecuación con una incógnita, al sumarla o restarla con la otra ecuación, y así despejar dicha incógnita. Se les explica que el valor que representa la variable anulada se puede encontrar por tanteo, como lo hicieron en la mayoría de los estudiantes en la fase inicial del proceso, pero también se puede despejar después de sustituir el valor encontrado en una de las ecuaciones, se enfatiza igualmente la forma de hacer la demostración al sustituir los valores encada una de las ecuaciones y verificando que se cumplan las dos igualdades, como lo hizo Urrea.

Tabla 4-6: Resultados de la situación tres.

Grupo	Fase de acción: Encuentran la igualdad	Fase de formulación: Construyen algoritmo algebraico
1	+	+
2	+	+
3	+	+
4	+	+
5	+	-
6	+	+
7	+	+
8	+	-
9	+	+

Los grupos de estudiantes, en su totalidad, reconstruyen el método de reducción por sumas y restas usando las propiedades matemáticas o axioma fundamental de las ecuaciones.

De la tabla de resultados se confirma el alto nivel de competencia numérica que poseen, esta situación es ideal para presentarla en aula, ya que permite el razonamiento numérico. Se notó claramente la fase a didáctica mencionada en la TSD por Brousseau (1986), citado por Godino (2010, pág 34). La mayoría de los estudiantes se apropió del problema, pasando por las fases de acción, formulación y validación del algoritmo encontrado.

Fase de reinversión (TH-O).

Posteriormente se propusieron SEL 2x2, más complejos, que los estudiantes desarrollaron de forma correcta, como se observa en la producción que se mostró del estudiante Urrea en la figura 5-14.

4.2.4 Cuarta Situación

Su presentación se encuentra en el análisis a priori, ítem 4.4

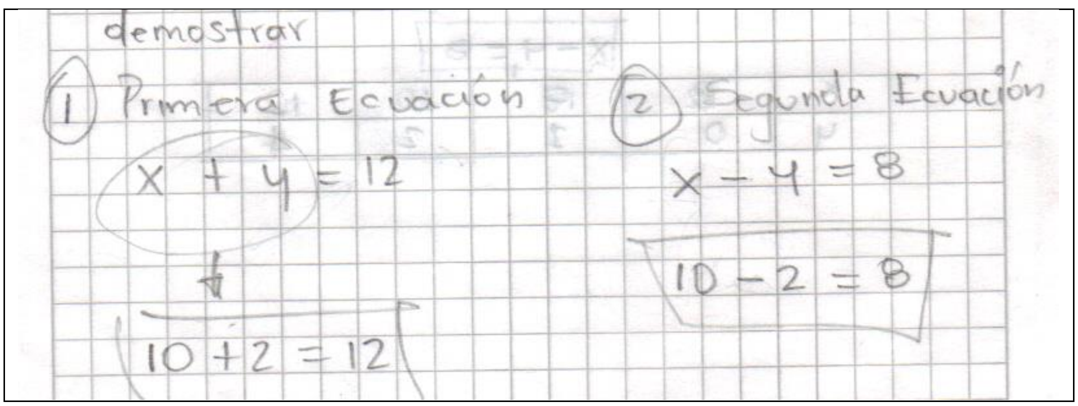
Intención: que el estudiante articule las representaciones algebraica y gráfica, para encontrar la solución de varios sistemas de ecuaciones 2x2 de fácil resolución, comparando y contrastando los resultados, obtenidos en ambos registros, y además visualizar y reconocer las características de compatibilidad, es decir, cuando en el sistema no se tiene solución (sistema indeterminado), se tienen infinitas soluciones (sistema dependiente) o se tiene una solución (sistema determinado).

A continuación se presentan las elaboraciones de la primera fase, cuya intención es la aplicación de los diferentes tipos de representación, y articulación de ellos, con fines de validación de las formulaciones.

Fase a. "antiguo". (DH-O)

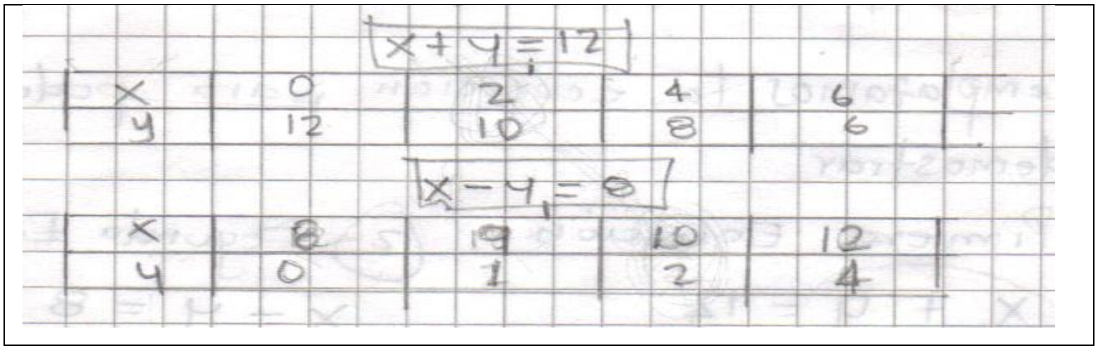
Uno de los estudiantes relaciona las dos ecuaciones del SEL (a), asignando los valores que cree son la solución de las dos ecuaciones, y luego demuestra, verificando en ambas las igualdades; rápidamente y sin necesidad de algoritmos, encuentran que, x=10, y=2, como se muestra en la figura siguiente.

Figura 4-23: Solución aritmética de Gaviria.



La anterior figura, evidencia nuevamente en el estudiante, buen desarrollo de competencias matemáticas en el componente numérico, que se confirma con la tabulación siguiente.

Figura 4-24: Tabulación del grupo Gaviria



$x + y = 12$

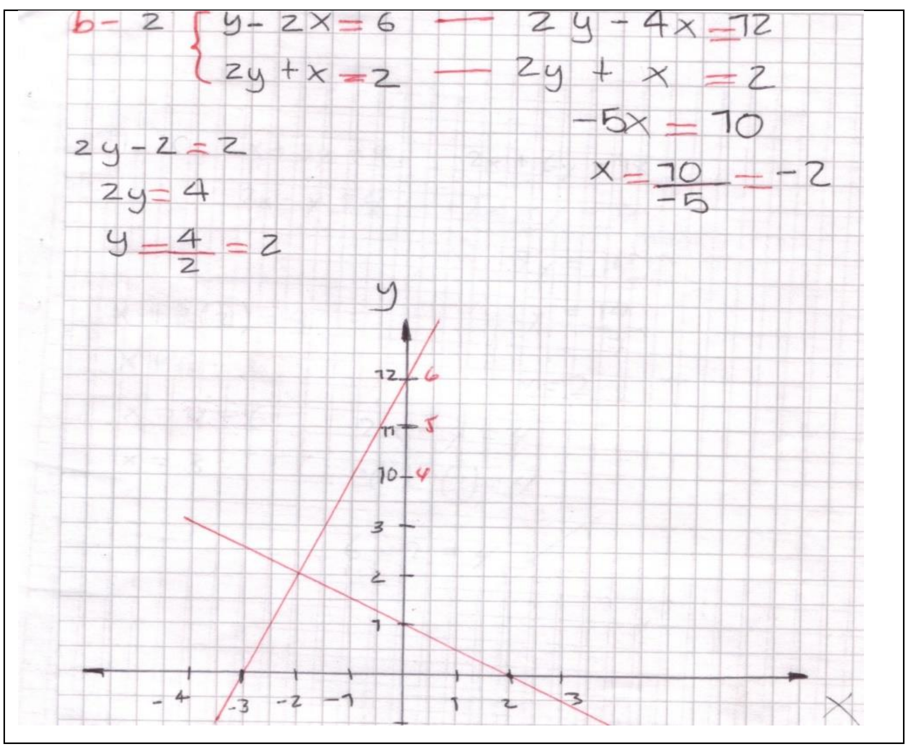
x	0	2	4	6
y	12	10	8	6

$x - y = 8$

x	8	9	10	12
y	0	1	2	4

Simultáneamente otro de los integrantes del grupo (Salas), resuelve realizando ensayos iterativos, que tabula para cada una de las ecuaciones, con los que verifica que el resultado coincide con el encontrado anteriormente, evidenciando buen desarrollo de competencias matemáticas en el componente variacional.

Figura 4-25: Solución gráfica del sistema 1.b, del estudiante Gaviria

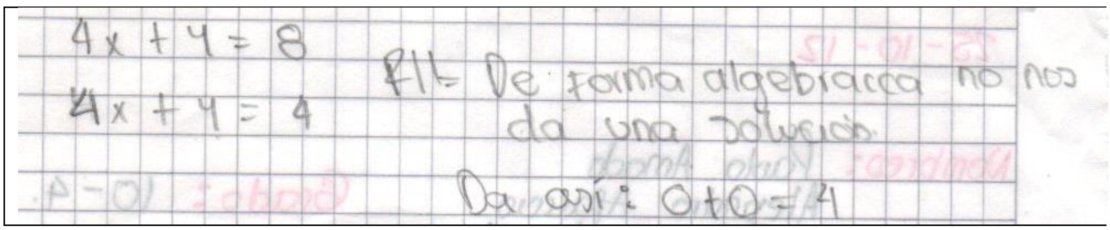


Fase b. búsqueda de lo nuevo.(DH-O)

Descripción de la segunda fase, en la que se tiene como intención, la articulación del registro gráfico y algebraico, recién construidos (lo antiguo), para reconocer las características de compatibilidad de los SEL 2x2.(lo nuevo).

Los estudiantes del grupo de Gaviria, tratan de resolver mediante la representación algebraica, usando el método de reducción; al restar los términos semejantes de las dos ecuaciones, encuentran una contradicción, que se describe en la siguiente figura.

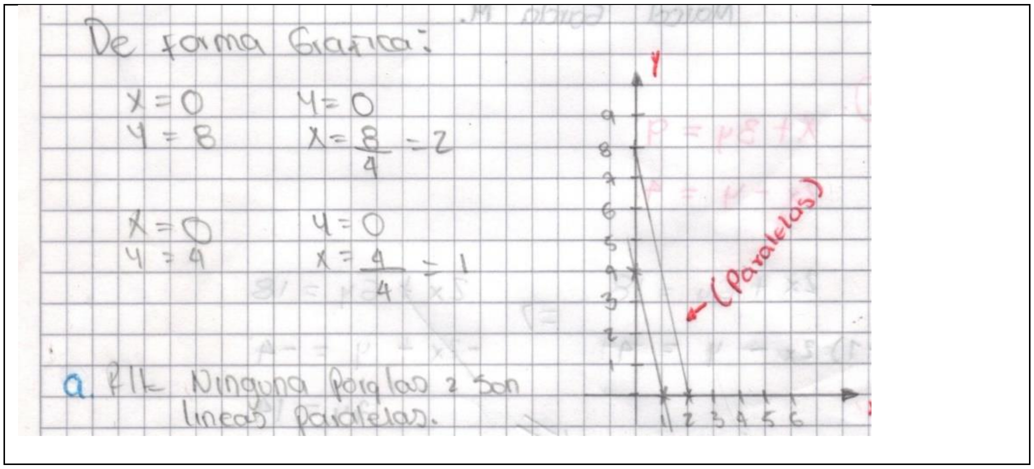
Figura 4-26: Conclusión de Gaviria, acerca del sistema indeterminado.



Conclusión del grupo de Gaviria acerca de hallazgo algebraico, para un sistema de dos ecuaciones (indeterminado) que se diferencian en el término independiente.

Como se observa, los estudiantes realizan el análisis de éste resultado sin encontrar la solución, existe un desequilibrio y deben buscar un reequilibrio, como lo manifiesta Douady (2008), en su teoría, acerca de la formación de los conocimientos, es por eso que seleccionan la representación gráfica, y aplican el método de los cortes con los ejes, como se aprecia en la figura siguiente.

Figura 4-27: Solución gráfica del segundo sistema de ecuaciones.

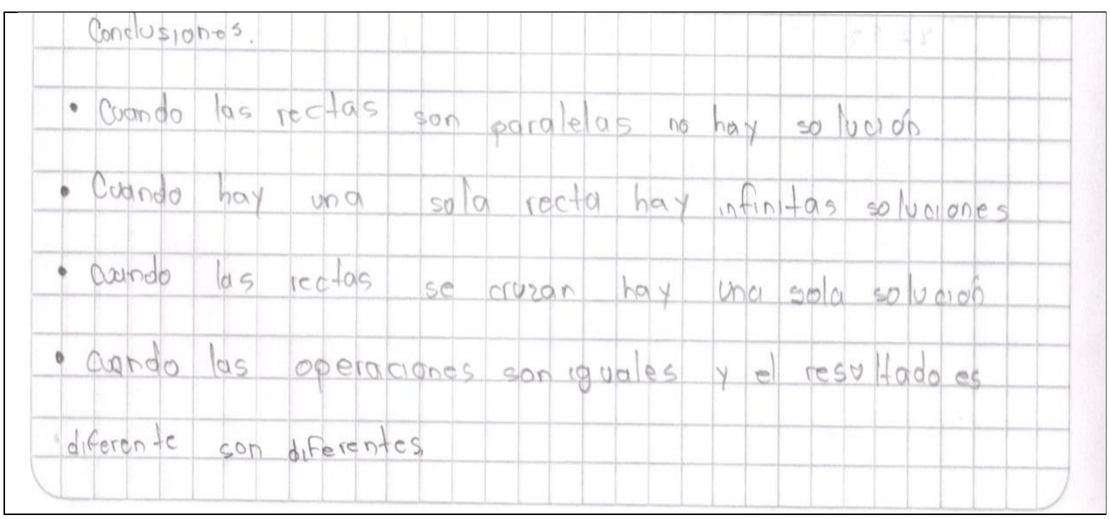


Visualización de un sistema que no tiene solución

En la parte inferior se observa la conclusión, la construcción gráfica causó reequilibrio, es por ello que responden que no existe ninguna solución para el sistema porque las rectas son paralelas. Otros grupos concluyen escribiendo que las rectas no se cruzan y por tanto no hay solución.

A continuación se presentan las conclusiones del mismo grupo, con relación a las otras preguntas.

Figura 4-28: Análisis de compatibilidad del grupo de Gaviria.

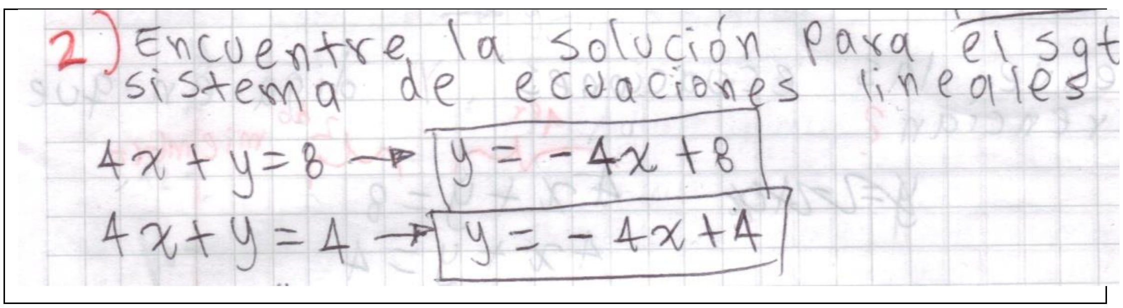


Se observa, que presentan tres conclusiones a partir de la interpretación gráfica, y la última la deducen a partir de la representación algebraica, articulando así, al menos dos registros que son imprescindibles, para el aprendizaje de un concepto, como lo manifiesta Duval, Raymond (1999), citado por Segura de Herrero (2004), estas conclusiones son correctas y se relacionan con la intencionalidad didáctica lo cual valida situación presentada.

A continuación se presentan las elaboraciones del grupo de Henao, a partir de la fase de búsqueda, considerando que está suficientemente clara la elaboración y desarrollo que alcanzó el grupo anterior, en el uso de las diferentes tipos de representación, que era la intención didáctica del primer punto.

El grupo inicia la fase de búsqueda, o reequilibrio, planteando la representación gráfica, para ello transforma las ecuaciones, a la forma general de la línea recta, y = mx +b, con la cual pueden determinar el valor de la pendiente y los puntos de corte con los ejes, validando la segunda situación planteada, en la cual aprendieron a transformar una ecuación lineal de la forma general a otra de la forma implícita, con fines de graficación.

Figura 4-29: Transformación de ecuaciones a la forma general, del grupo Henao



De acuerdo con las nuevas ecuaciones, realizan la gráfica usando la misma la pendiente, m = - 4, y la intersección con el eje y, en 4 y 8 respectivamente, como se muestra a continuación.

Figura 4-30: Gráfica del grupo Henao usando la pendiente e intersección con ejes.

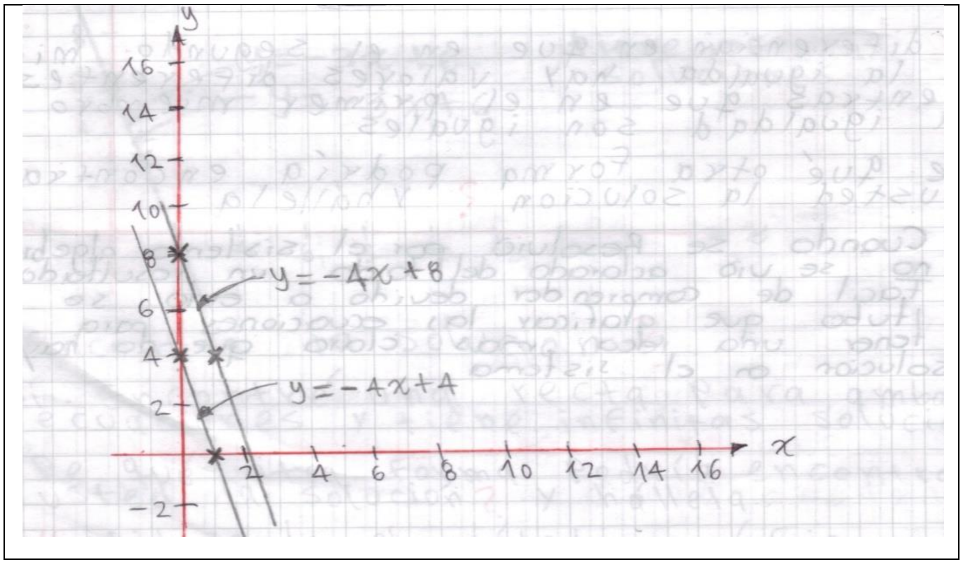


Figura 4-31: Interpretación del gráfico realizada por Henao.

R// No hay solución ya que me dió dos rectas paralelas ó iguales y no me dió rectas que tengan un pto común

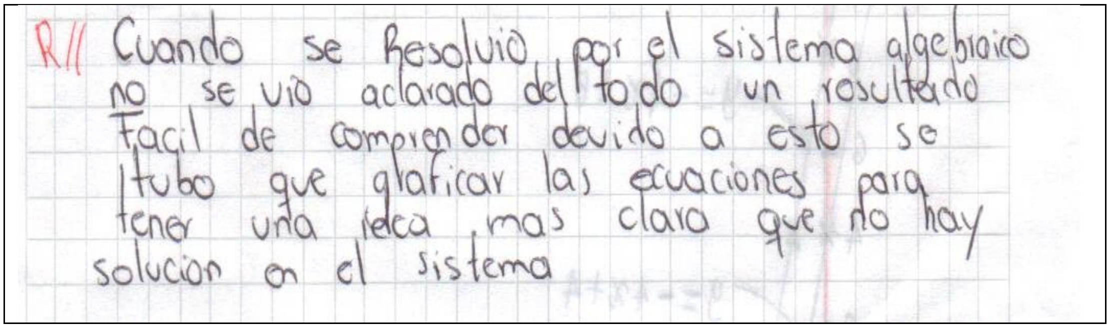
Luego utiliza la representación algebraica para validar el resultado anterior, encontrando:

Figura 4-32: Solución algebraica de Henao a un SEL indeterminado.

$$4x + y = 8 \leftarrow (-1) \left\{ \begin{array}{l} -4x - y = -8 \\ 4x + y = 4 \end{array} \right.$$
$$4x + y = 4$$
$$-\cancel{4x} + \cancel{4x} - \cancel{y} + \cancel{y} = -8 + 4$$
$$0 = -4$$

El grupo realiza el análisis de las dos representaciones construidas, así:

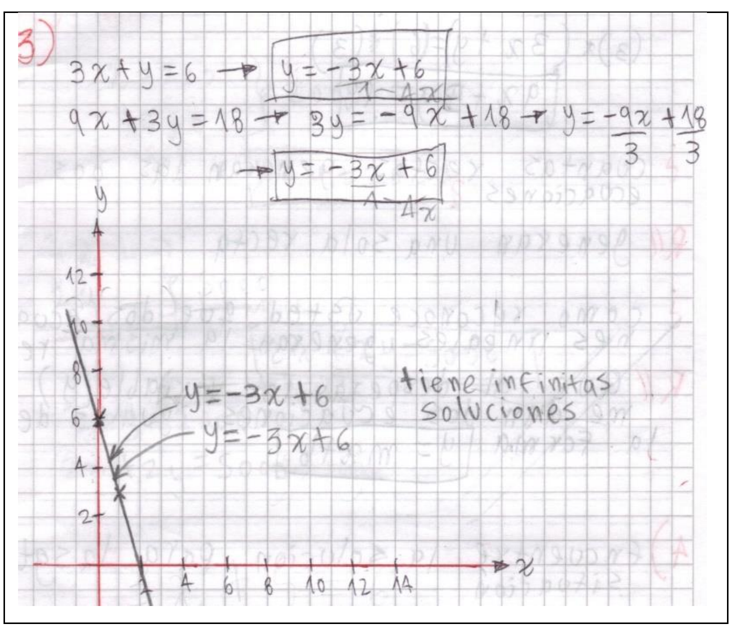
Figura 4-33: Confrontación y articulación de SEL en la representación algebraica y gráfica.



La elaboración de Henao muestra nuevamente, el desequilibrio y reequilibrio, manifestado por Duady (2008), como generador del aprendizaje.

Para la tercera fase: el grupo de Henao, plantea inicialmente, el método algebraico, obteniendo la misma ecuación, ante lo cual seleccionan en la búsqueda del reequilibrio, la estrategia gráfica; en la que encuentran que las líneas se sobreponen, lo que les indica que se trata de la misma recta. Se concluye que el sistema tiene infinitas soluciones, lo cual revalida la segunda situación didáctica propuesta en ésta secuencia, como se observa a continuación,

Figura 4-34: Solución algebraica y gráfica de SEL dependiente, realizada por Henao.

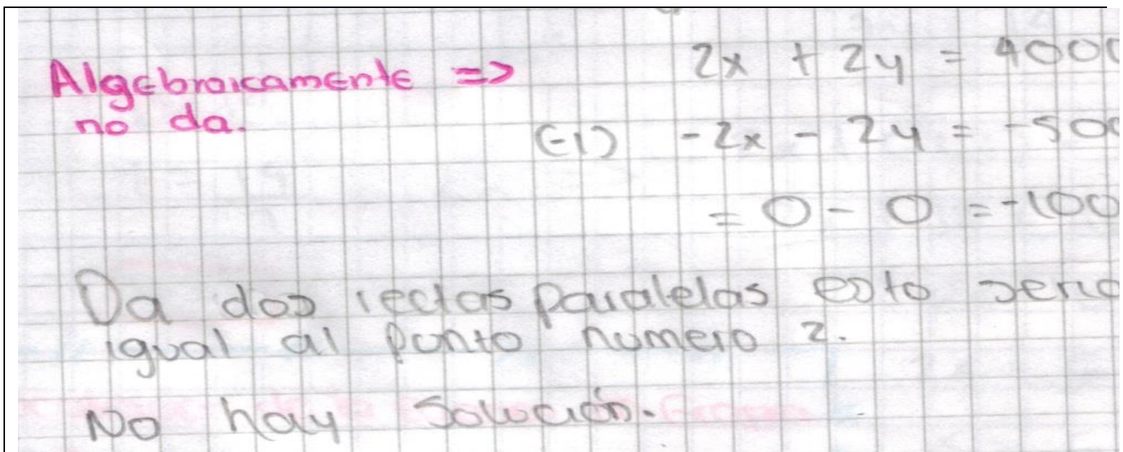


Ésta construcción, confirma la hipótesis de Duval (1999), acerca del uso de al menos dos representaciones para comprender de forma efectiva un concepto.

Validación de grupo Henao

Rápidamente solucionan el último punto, realizan el paso del lenguaje natural al registro algebraico directamente, sin usar la representación gráfica, manifiestan que el problema no tiene solución ya que infieren que generará dos líneas paralelas, como se muestra en la siguiente gráfica.

Figura 4-35: Validación a las formulaciones de compatibilidad del grupo Henao.



La conclusión anterior muestra que la situación planteada, favorece el desarrollo del pensamiento matemático en las componentes argumentativas propositivas y de razonamiento, al igual que el desarrollo de pensamiento superior del estudiante que lo lleva a realizar inferencias como la mostrada, validando nuevamente el objetivo buscado por la organización de enseñanza de Douady (2008), que manifiesta que siguiendo los pasos para el diseño y aplicación de una secuencia según la teoría de juegos de marcos y dialéctica herramienta, los alumnos construyen el conocimiento por los alumnos mismos.

Como se observa, se cumplió la intención didáctica del diseño de la situación planteada, las gráficas y conclusiones expuestas la validan, los estudiantes reconocen mediante la representación gráfica, algebraica y su articulación, la compatibilidad de los SEL 2X2, confirmando las hipótesis de Douady y Duval, al encontrar fácilmente y en particular las soluciones a los dos últimos sistemas indeterminados planteados, realizando la transformación mental del concepto sistemas de ecuaciones lineales en las dos representaciones.

	Solución algebraica	Solución gráfica	Tipo de Solución	Reconocen diferencias
3 sistemas de ecuaciones lineales	Grupos: 1,2,4,6,7,8,9	Grupos: 2,3,4,6,7	Única	Las ecuaciones o los coeficientes de las variables, no son múltiplos ni divisores o iguales entre si.
$\begin{cases} 4x+y=8 \\ 4x+y=4 \end{cases}$	Sin solución Grupos:2,3,4,6,7	Dos paralelas Grupos:2,3,4,6,7	No tiene solución Grupos: 2,3,4,6,7	En miembro derecho:“resultados”, sacan conclusiones: reconocen cuando no se tiene solución.2,4,6.
$\begin{cases} 3x+\ y = 6 \\ 9x+3y=18 \end{cases}$	Una ecuación con dos variables grupos: 1, 2, 4,7.	Una línea recta.1, 2, 4,7.	Infinitos pares de puntos son solución.	Una ecuación es el triple o múltiplo de la otra. Grupos 2, 4, 6, 7.

Tabla 4-7: Resultados de la cuarta situación[12]

4.2.5 Quinta situación problema

Intención: Interpretación y solución de un problema descrito en lenguaje natural que se puede modelar como un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Posibilidades de acción del estudiante: El estudiante puede plantear el uso de la representación matemática (tabulación), algebraica o gráfica.

Situación problema

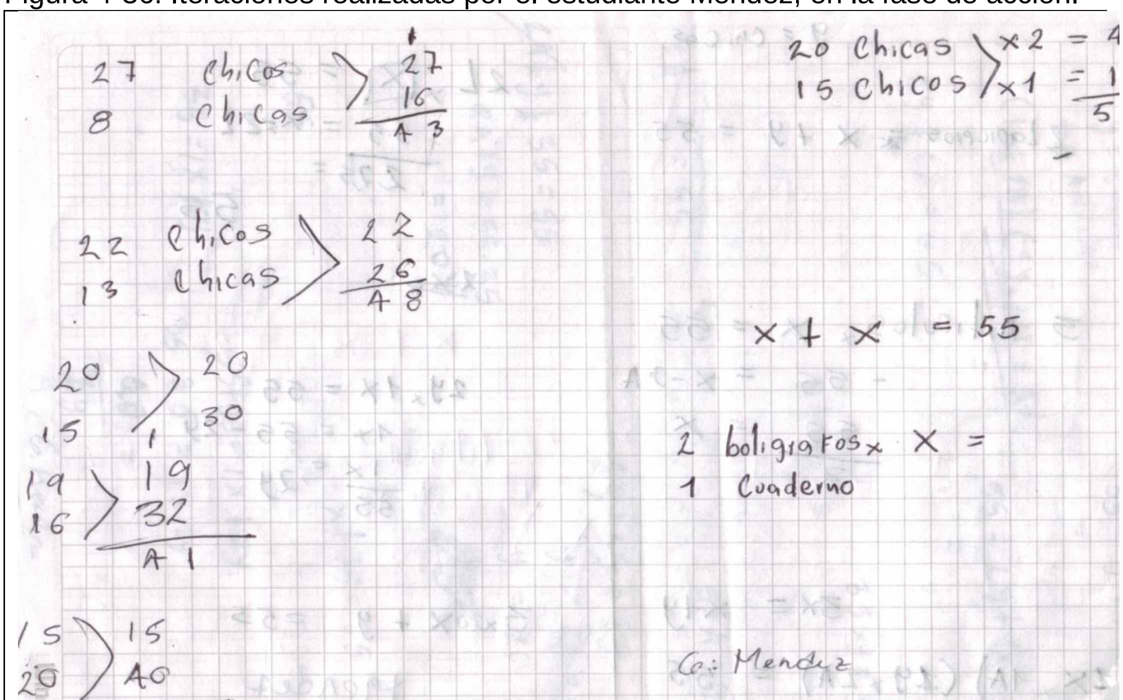
[12] Esta tabla, se tomará al final del capítulo, como instrumento de análisis para determinar el proceso de desarrollo de las competencias matemáticas.

-En mi clase hay 35 alumnos a quienes por buen comportamiento se les ha regalado 2 bolígrafos a cada chica y un cuaderno a cada chico, en total se regalaron 55 artículos, ¿cuántos chicos y chicas hay en el salón?, plantee una estrategia de solución para el problema y demuestre el resultado.

Fase a. antiguo (DH-O)

Al inicio de la sesión se nota que en algunos grupos los estudiantes realizan inicialmente iteraciones[13], el estudiante Méndez, tiene el concepto claro de variación, plantea una estrategia matemática, en la que va dando valores a una de las variables y calcula el valor de la otra variable al tanteo, (usa la construcción de la situación dos como lo antiguo), aproximándose en cada intento al resultado, hasta encontrar la solución, x=20, y=15, es de anotar que en los cálculos tardo aproximadamente (5 minutos), estos se muestran en la siguiente gráfica.

Figura 4-36: Iteraciones realizadas por el estudiante Méndez, en la fase de acción.



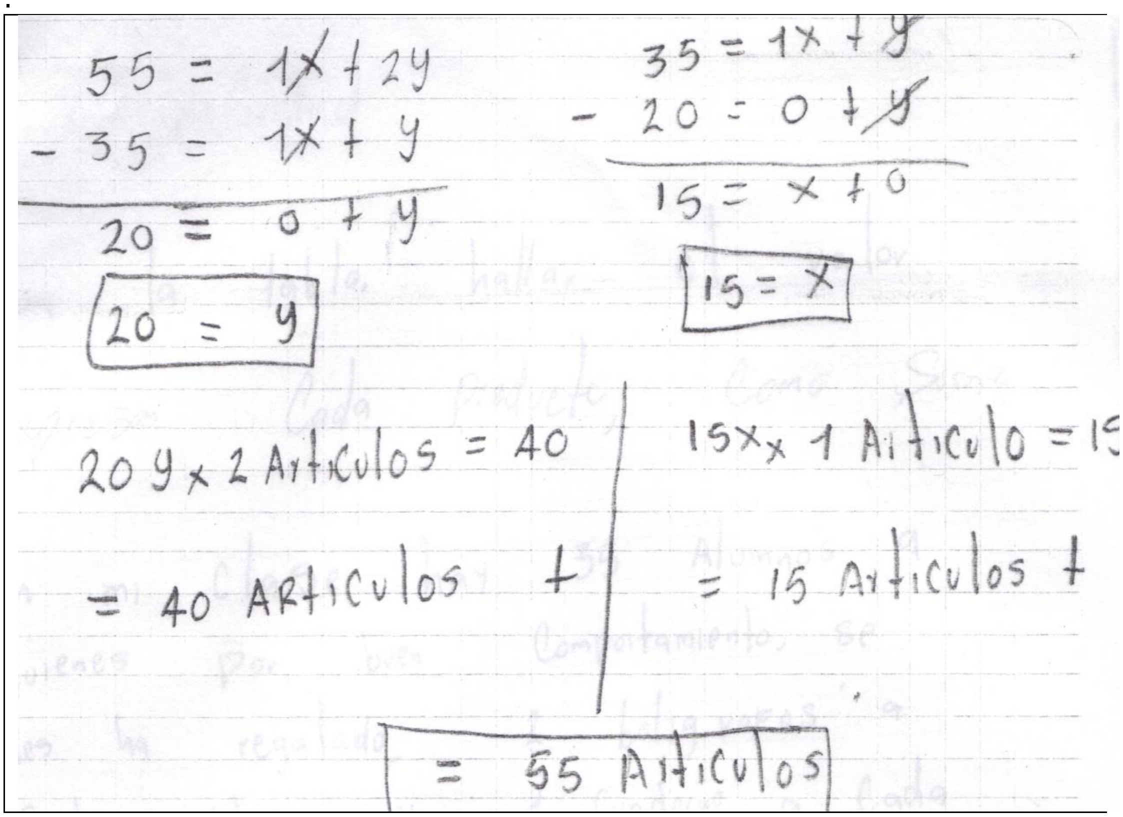
[13] **Iteración:** significa el acto de repetir un proceso con el objetivo de alcanzar una meta deseada, objetivo o resultado. Los resultados de una iteración se utilizan como punto de partida para la siguiente iteración.

Méndez se plantea una estrategia matemática mediante iteraciones, (construcción de la actividad dos), con la cual encuentra rápidamente la solución del problema, como se muestra en la gráfica

Fase b. "búsqueda".

El docente le pide que use otra estrategia para validar la respuesta que encontró; plantea el uso del algebra y modela la ecuación relacionada con el número de estudiantes, teniendo dificultades en plantear la otra, relacionada con el número de artículos, que uno de sus compañeros de grupo, García, pudo encontrar después, y con la que se pudo finalmente plantear un sistema de ecuaciones y encontrar la solución algebraica que se observa en la siguiente figura.

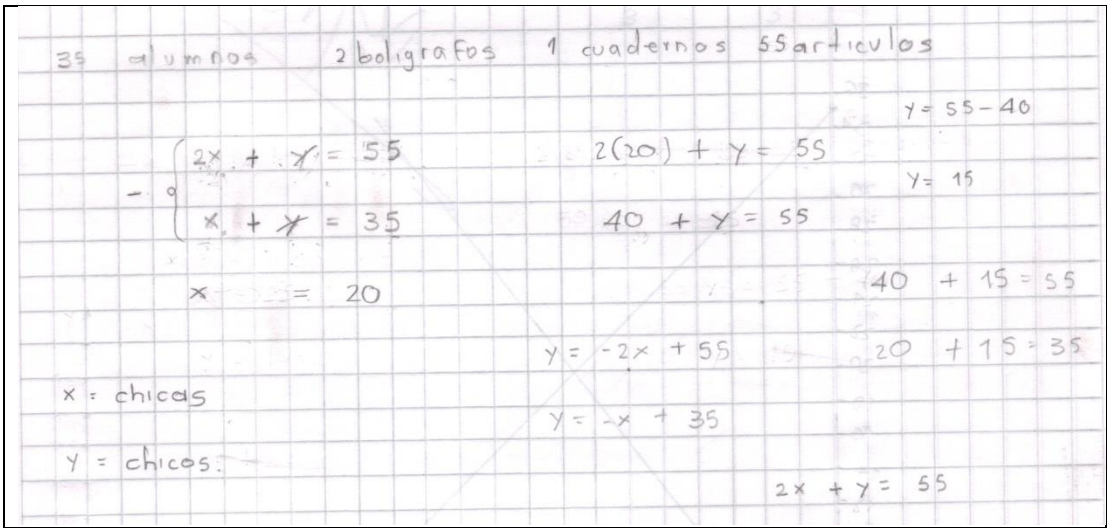
Figura 4-37: Solución algebraica del grupo Méndez
.



Obsérvese como desconocen que al sustituir el valor de una incógnita, en una de las ecuaciones se calcula la otra, por ello recurren nuevamente al método de reducción por restas, con el que resuelven correctamente.

Análisis al grupo del estudiante Urrea: plantean inicialmente y en forma correcta la representación algebraica de las dos ecuaciones, luego proceden a encontrar la solución del sistema, que determinaron rápidamente por el método de reducción y sin errores, que validan verificando que al sustituir los valores encontrados en las dos ecuaciones, las igualdades se mantienen, como se observa en la siguiente figura.

Figura 4-38: Solución algebraica del grupo del estudiante Urrea.



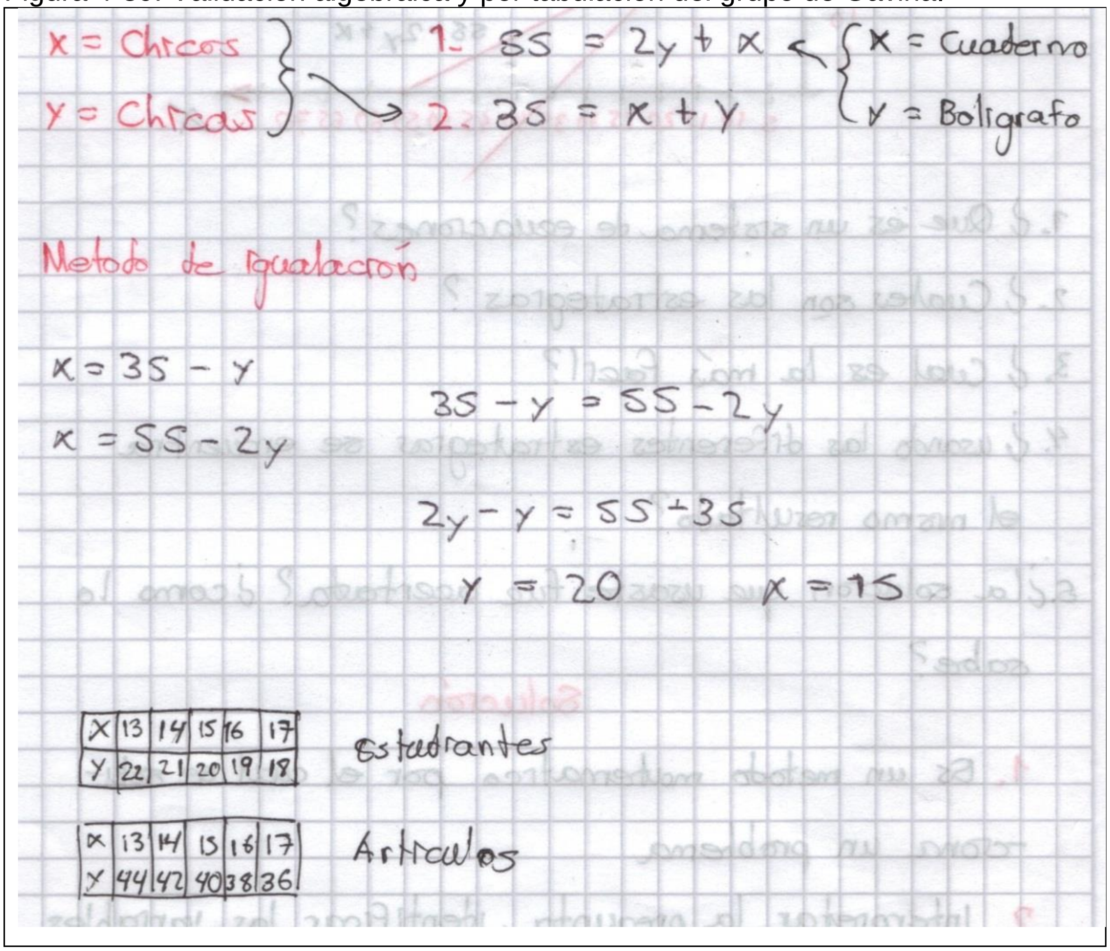
El grupo de estudiantes encontró la estrategia óptima para dar solución a los SEL 2X2, mas sin embargo el profesor interviene y les propone que encuentren la solución mediante la gráfica, la cual construyeron con errores.

Del registro gráfico tomado al grupo Urrea se notan dificultades en la construcción de la gráfica, para la ecuación x + y=35

La grafican usando los intercepto con los ejes x y y de forma correcta, se tienen problemas para graficar la otra ecuación 2x+y=55, para la cual toman correctamente la solución encontrada algebraicamente que unen al origen de coordenadas, se comete nuevamente error u obstáculo que proviene del concepto que la línea pasa por el origen, como se muestra en las gráficas o fotos

El grupo del estudiante Gaviria, al igual que el grupo anterior, usa como estrategia la representación algebraica como primera opción, con buena decodificación del texto dado en lenguaje natural, es así como, su planteamiento del sistema de dos ecuaciones y la solución encontrada por el método de igualación, fue la correcta como lo demuestran posteriormente mediante dos tablas en la que relacionan las dos condiciones dadas, como se observa en la figura siguiente. Usaron los conocimientos recién construidos para dar solución un tipo de problema que nunca habían enfrentado.

Figura 4-39: Validación algebraica y por tabulación del grupo de Gaviria.

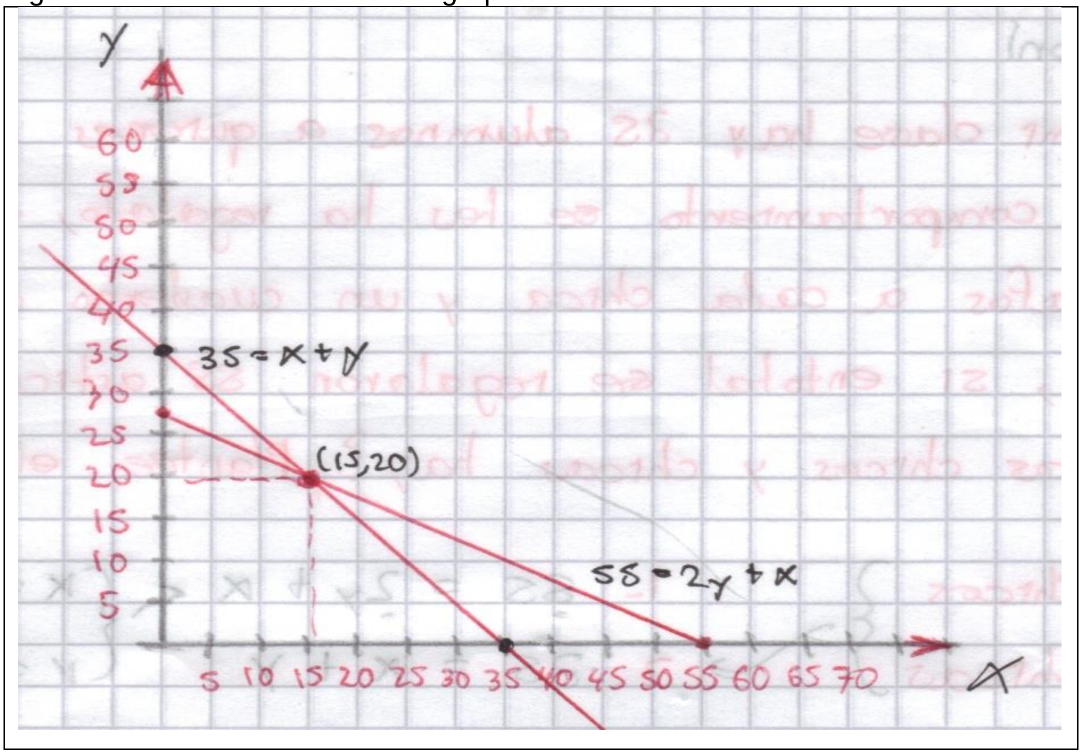


Estrategia algebraica y su demostración, grupo Gaviria

En las tablas inferiores se observa claramente el reconocimiento que hacen de las dos condiciones que plantea el problema.

Posteriormente grafican la situación en forma correcta, usando como método, el corte con los ejes x,y. en el que suponen el valor de cero para cada una de las variables para calcular la otra en cada ecuación, la gráfica se observa a continuación.

Figura 4-40: Solución Grafica del grupo de Gaviria.



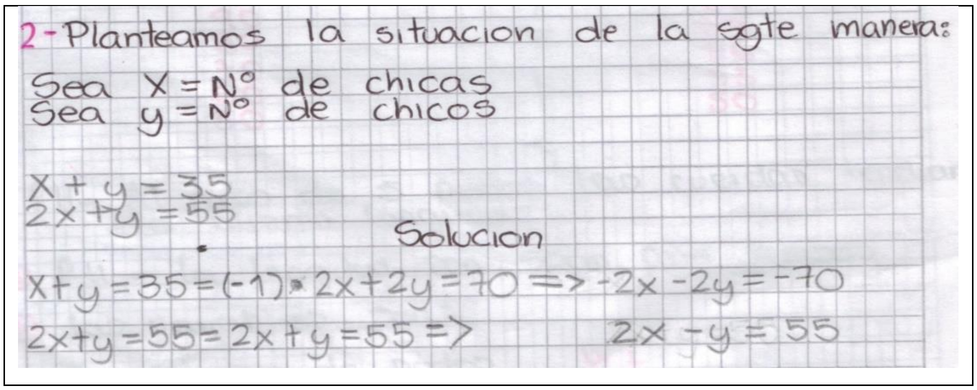
Fase de acción, una de las integrantes del grupo uno, Paula, resuelve rápidamente y de forma mental el problema indicando que los chicos son 15 y las chicas 20, conjetura inicial, se le pide que busque una estrategia que pueda plantear en forma escrita, para demostrar que esa solución es correcta, seleccionaron el registro algebraico y modela la ecuación que presenta el total de estudiantes.

$x + y = 35$

Tiene dificultades para encontrar la segunda ecuación que plantea y que condiciona el número de artículos la cual escribe inicialmente como:

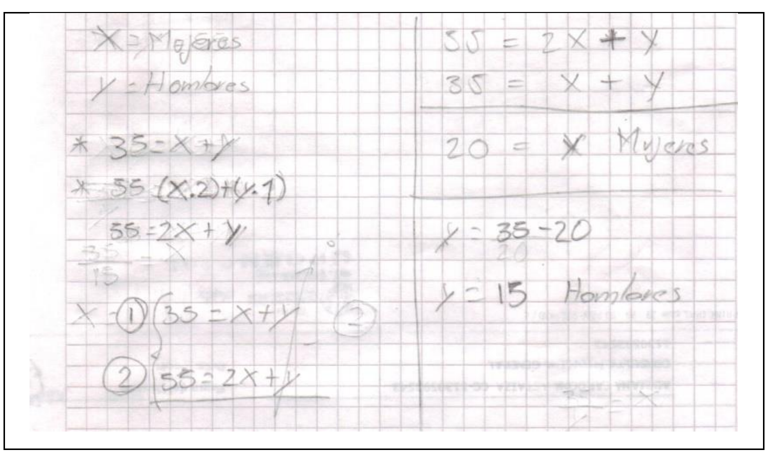
x.2 +y.1 = 55, se le explica que en este caso, los números que indican el número de veces que se toma la variable, se escriben como coeficientes, es decir, van antes de las letras que las simbolizan, ya que en el álgebra se organizan de esa forma (aplicando la propiedad conmutativa de la multiplicación), para facilitar las operaciones. Reorganiza la ecuación a 2x +y =55, resuelve usando el método de reducción a sumas y restas, encontrando: x=20, y=15, se muestra en la siguiente figura.

Figura 4-41: Solución algebraica de Paula.



El grupo de escobar Perdomo, presenta las mismas dificultades de Paula, colocando los números coeficiente después de la letra, que después corrigen, y dan solución al problema con el método de reducción a sumas y restas, (validación de la situación tres anterior) como se ve en la siguiente figura.

Figura 4-42: Solución algebraica de Escobar.



Finalmente, el grupo escobar se encamina por la solución gráfica, ante lo cual tienen muchas dificultades

El grupo del estudiante Henao, inicia planteando la ecuación, $x + y = 35$, que relaciona el total de los estudiantes, a los que simboliza, con x a los chicos, y a las chicas.
Realiza una breve tabulación de ella, después considera el número de artículos y encuentra la segunda ecuación, reconociendo que se trata de un sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas que resuelve fácilmente

Tabla 4-8: Resultados de quinta situación[14].

Grupo vs estrategia usada	Tanteo	Tabla	Construyen modelo y resuelven	Realizan Grafica
1		+3usa	+1usa	+2usa
2		+2usa	+1usa	+2usa
3			1usa	Con error
4			+1usa	
5	1		+1usa	Con errores
6	1usa	2 con errores	+1usa	3 con errores
7	1usa		+2usa	
8		+1usa	+1usa	
9	1	+1usa	+1usa	+2usa

4.2.6 Sexta situación

Intención: analizar el avance en tipo de estrategia usadas en primera instancia y evaluar la movilidad que hacen entre estos diferentes registros, con fines de demostrativas y de validación.

Presentación

[14] **+:** indica que resuelven de forma correcta, y los números el orden de aplicación de las estrategias
Esta tabla, se tomará al final del capítulo, como instrumento de análisis para determinar el proceso de desarrollo de las competencias matemáticas.

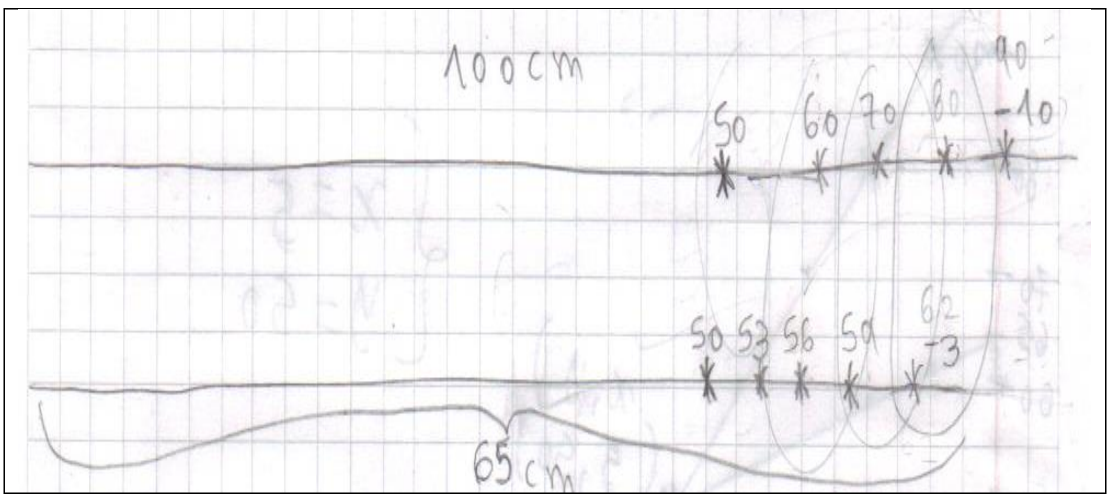
Se tienen dos cuerdas, una gruesa y una delgada de 100cm y 65cm de longitud respectivamente, si se hacen nudos simultáneamente en cada una de ellas, la de 100cm se reduce 10 cm por cada nudo y la de 65 cm se reduce 3 cm por cada nudo en ella, ¿al cabo de cuantos nudos las dos cuerdas tienen la misma longitud?

Interprete el problema y plantee estrategias para resolverlo.

Cronología de la experiencia

Al interpretar la situación, el grupo del estudiante Henao, en su fase de acción, propone realizar cálculos numéricos a partir de un esquema con rectas que van enumerando, hasta encontrar los valores para los cuales se cumplen las dos condiciones a la vez, ver figura siguiente

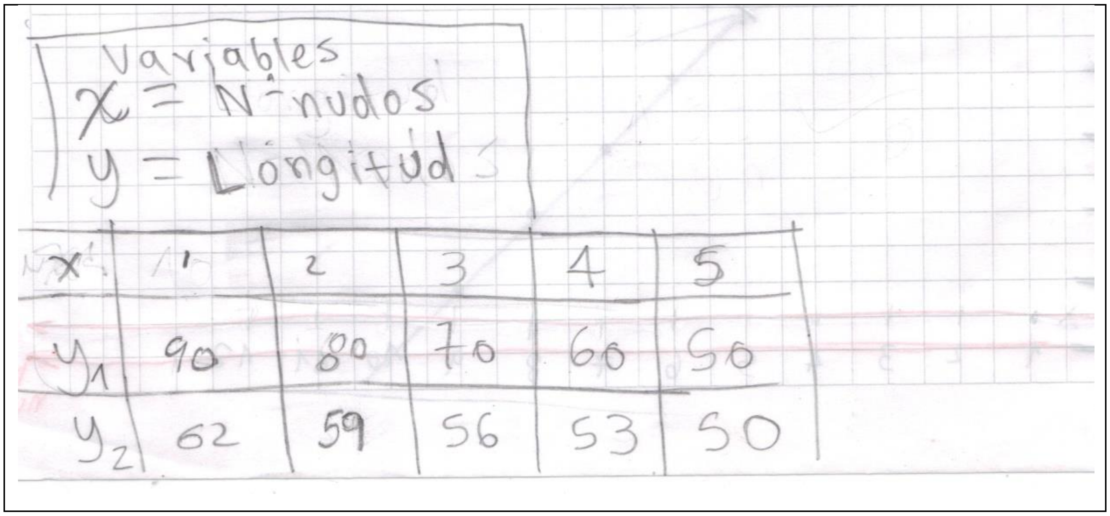
Figura 4-43: Estrategia icónica del grupo Henao.



En la gráfica se observa como los estudiantes utilizan otras formas de representación como primer paso de la estrategia, para hacer la conjetura y tener una idea de la situación, lo cual les lleva a plantear el método de tabulación que registran a continuación.

A continuación se muestra la Formulación del grupo de Henao.

Figura 4-44: Construcción de tabla del estudiante Henao.

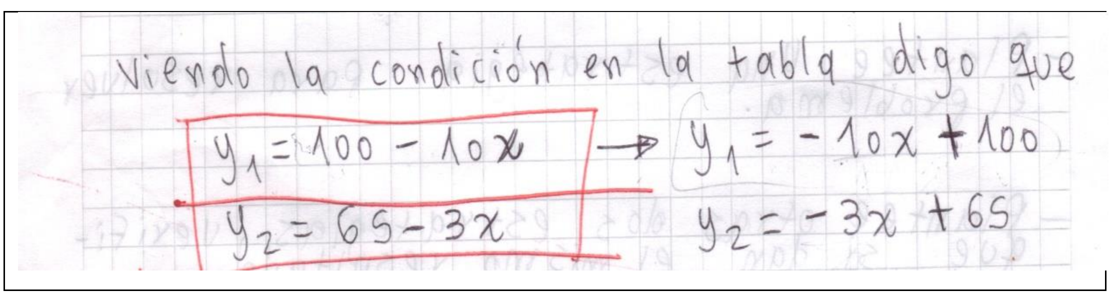


Variables
x = N° nudos
y = Longitud

x	1	2	3	4	5
y_1	90	80	70	60	50
y_2	62	59	56	53	50

En la gráfica se nota como simbolizan con subíndices las dos cuerdas, para diferenciarlas, este es un logro, similar al que se dio en la evolución del algebra, mencionado en el análisis histórico-epistemológico, en el desarrollo de las formas de representación (competencia propositiva), con esta actividad también validan la concepción que tienen de la variación, al numerar de uno en uno los diferentes nudos y realizar el descuento en la longitud respectiva, este análisis lo lleva a modelar algebraicamente la situación para la longitud de las cuerdas

Figura 4-45: Construcción del modelo algebraico a partir de la tabla de Henao.



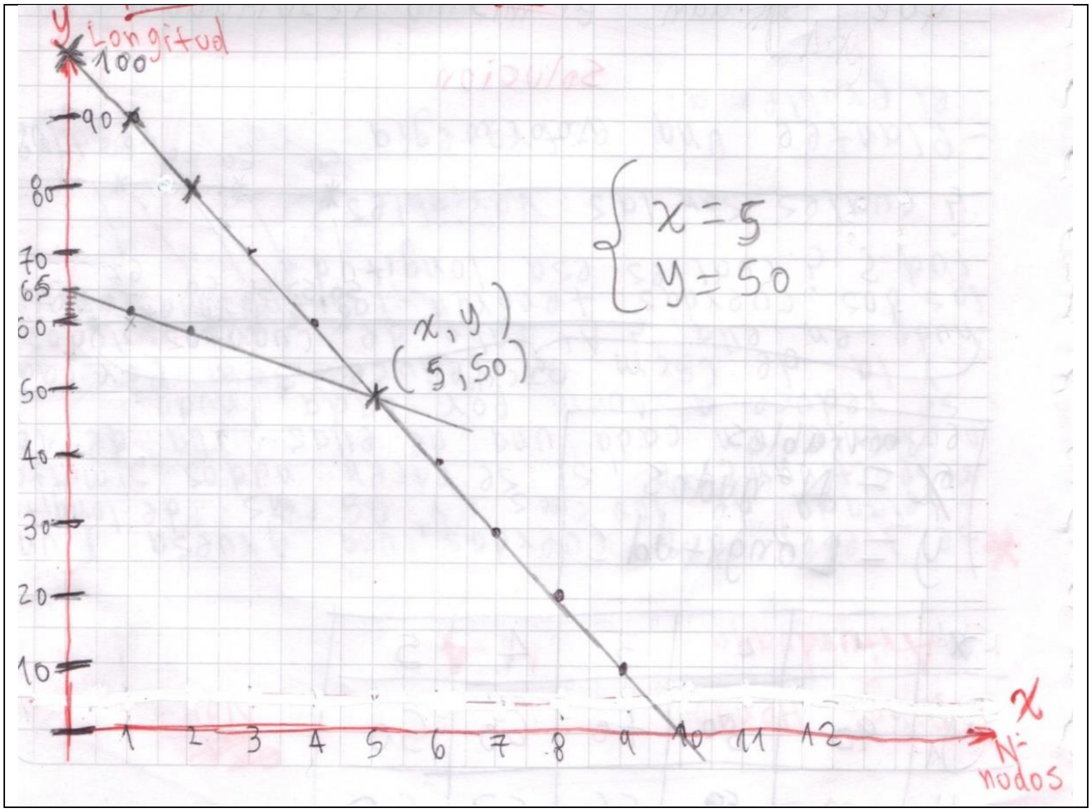
Viendo la condición en la tabla digo que

$y_1 = 100 - 10x \rightarrow y_1 = -10x + 100$

$y_2 = 65 - 3x \quad y_2 = -3x + 65$

Posteriormente los estudiantes validan la situación mediante la grafica de las ecuaciones anteriores, encontrando que el cruce de las dos rectas representa la misma solución que encontraron usando la tabla.

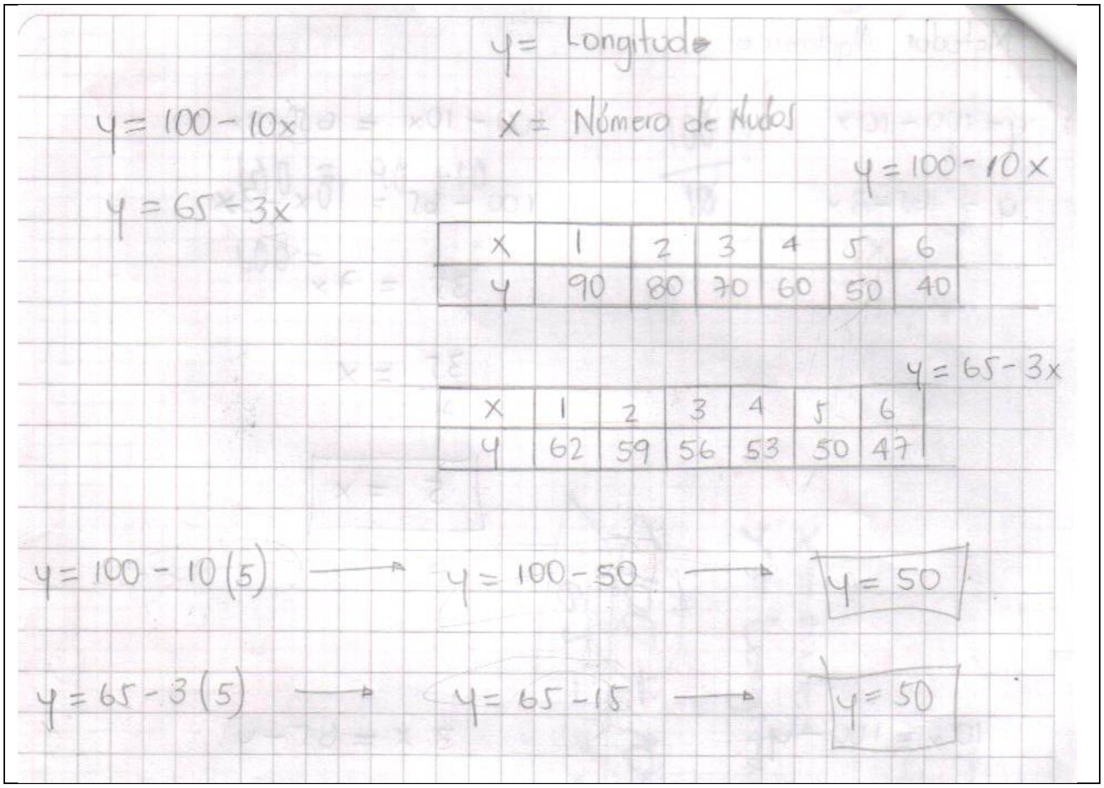
Figura 4-46: Construcción de grafica del estudiante Henao.



El grupo Gaviria: los estudiantes inicialmente realizan iteraciones o cálculo mental, y encuentran que la cantidad de nudos, que deben realizarse simultáneamente es de 5 y la longitud de la cuerdas será de 50 cm, conjetura inicial, lo cual verifican al reemplazar esa cantidad de nudos en cada una de las ecuaciones, que proponen a continuación

Para la validación plantean el uso de la representación algebraica y su tabulación, simultáneamente, como se muestra en la gráfica siguiente, modelando las dos ecuaciones que relacionan el cambio de longitud de cada una de las cuerdas, con respecto a la cantidad de nudos; hacen la demostración dentro del mismo registro algebraico, sustituyendo los valores encontrados y también contrastan con los resultados de la tabla.

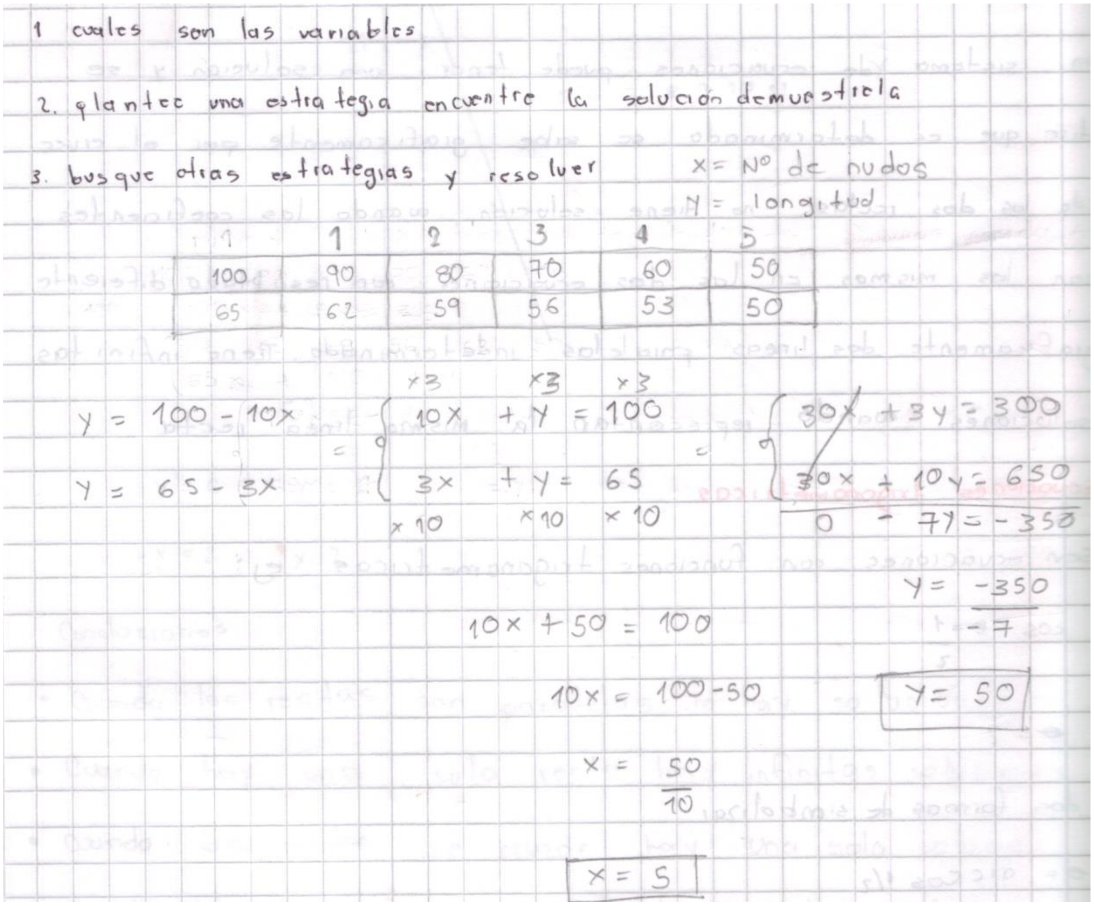
Figura 4-47: Articulación de la representación por tabla y modelo algebraico de Gaviria.



Es de anotar, que para resolver la situación el grupo de Gaviria solo se requirió de una intervención por parte del docente, en la que este pidió al grupo que buscara otra estrategia de solución, construyen la gráfica, encontrando que los resultados coinciden en las tres representaciones.

En la figura siguiente, se observa como el grupo Urrea, inicia usando iteraciones, del mismo modo que los matematicos antiguos, encontrando la respuesta, correcta 5 nudos y longitud de 50 cm para cada una de las cuerdas, se observa en la parte superior de la tabla, como enumera cada uno de los nudos, para tener idea de la cantidad de los mismos que cumple con la condición. Al lado izquierdo de la gráfica, se nota que construyen el modelo SEL 2x2, usando como herramienta la tabla, posteriormente aplican el algoritmo construido en la situación tres, y encuentran nuevamente la solución, validando de esta forma sus formulaciones.

Figura 4-48: Solución y validación de grupo Urrea.



Análisis

En este proceso que partió desde el lenguaje cotidiano y se desarrolló en el transcurso de seis situaciones didacticas, se construyeron diferentes conceptos, que fueron usados como herramiente en las siguientes, verificando que se cumplió la hipotesis de la nueva organización de enseñanza, Juego de marcos y dialéctica Herramienta –objeto, planteada por Douady (2009), que se fundamente uso diferentes tipos de representación como estrategia para resolver problemas pone de manifiesto la eficacia en la transposición de saberes, según lo manifestado por Chevellard (1985), que se alcanzo en un proceso que tardo en construirse aproximadamente 3000 años, el el paso de la aritmética al algebra, para ello se debió realizar un completo analisis preliminar, como lo sugiere la ingeniería didáctica, este analisis valida la ingenieria didáctica como metodología apropiada en la enseñanza aprendizaje- aprendizaje de conceptos matemáticos.

El quinto y sexto problema, propiciaron la dialéctaca herramienta –objeto, en la fase de reinversión, Douady (Cuadernos N^{0}3, 2009), manifiesta que en ésta fase, los estudiantes utilizan los conceptos construidos, para construir nuevos, mucho más complejos, en este caso el uso de los diferentes formas de representación como estrategias válidas para solucionar problemas cotidianos, lo que en esta caso produjo el desarrollo de las competencias comunicativas, de razonamiento y de resolución de problemas, hipótesis que se planteó en el presente trabajo.

Tabla 4-9: Resultados de la sexta situación[15].

Grupo vs estrategia	Otra representación	Tabla	Modelo algebraico	Gráfica
1		1usa	1usa	
2		1 usa	1usa	1usa
3		1 usa		Con errores
4	Dibujan cuerdas	1usa	1usa	1usa
5		1usa		1usa
6			usa	usa
7		1usa	2usa	incompleta
8		1usa	1usa	
9		1Usa	2Usa	1Usa

4.3 Análisis de los resultados de acuerdo con las tablas de resultados y el instructivo del MEN

Para éste análisis, se recuerda que en el transcurso de la secuencia el docente no se sugirió usar una estrategia determinada para resolver las situaciones que se propusieron desde el lenguaje natural.

[15] Se tomará al final del capítulo, como instrumento de análisis para determinar el proceso de desarrollo de las competencias matemáticas.

Se realizaron mini institucionalizaciones de acuerdo con las producciones de los estudiantes, sin llegar a develar el álgebra como la estrategia óptima o ganadora, con la cual se pueden solucionar los problemas matemáticos propuestos, esta solo se da a conocer al final de la sexta situación problema.

En concordancia, para el análisis de los resultados de la secuencia, interesa saber desde donde parten los estudiantes para resolver cada problema y como fue la transición del pensamiento numérico al algebraico para determinar el desarrollo de las competencias de interpretación, modelación y de resolución de problemas.

Análisis de resultados de la primera situación

Todos los grupos hacen conjetura inicial mediante razonamiento numérico, seguidamente tabulan los datos y realizan el gráfico respectivo; es así como, siete de los grupos resuelven el problema usando tablas, que validan mediante el gráfico cartesiano, notándose que en general el grupo no ha desarrollado competencias de resolución de problemas en el componente variacional, mediante uso del algebra..

Tres de los grupos resuelve teniendo como primera opción la representación algebraica simultáneamente con la gráfica, validando su respuesta en las dos representaciones.

En conclusión, 6 de los grupos al inicio de la secuencia están en el nivel C de las competencias a desarrollar y tres en el nivel D.(ver instructivo anexo del MEN)

Análisis de resultados de la segunda situación

Se reafirma que seis de los grupos solo han desarrollado la competencia algebraíca intuitivamente, es decir , modelan una situación dada desde el lenguaje natural convirtiéndola a lenguaje matemático, pero no determinan que uso le pueden dar; es así como, varios de esos grupos encuentran la primer pareja de valores mediante la construcción algebraica, y después tabulan de acuerdo cálculos mentales, sin tener en cuenta el modelo que acaban de construir, siendo éste un obstáculo que se reveló, ya que con el método de la tabulación siempre encuentran la solución. Producto de estos errores de tabulación se construyen gráficas con errores como los evidenciados.

Se reafirma que los estudiantes han desarrollado solo el pensamiento numérico, solo uno de los grupos ha desarrollado en gran medida las competencias comunicativas, de razonamiento y de resolución de problemas en la componente numérico variacional, Estos estudiantes se encuentran en el nivel C, de acuerdo con la tabla del MEN (anexo B). Los otros grupos reconocen el concepto solo de forma intuitiva y se encuentra en el nivel D propuesto por el MEN.

Análisis de resultados de la tercera situación

La tabla de resultados demuestra las fortalezas que los estudiantes tienen para construir y seguir procedimientos algorítmicos, se nota como le dan mucha importancia a este componente matemático, producto de la enseñanza tradicional, que hace énfasis únicamente en el pensamiento numérico; se concluye que se encuentran en el nivel de desempeño C de la tabla (anexo B).

Análisis de resultados de la cuarta situación

Se reafirma lo anterior, cinco de los grupos resuelven mediante el álgebra sistemas de ecuaciones y validan correctamente con el gráfico, realizan el análisis correctamente y reconocen cuando se tiene una solución y cuando no se tienen soluciones, solamente el grupo siete articula y realiza el análisis correcto de las dos representaciones y concluye que ecuaciones equivalentes generan la misma línea recta.

Mediante ésta situación cinco de los grupos de estudiantes han alcanzado el nivel de competencia D, que se espera, sea utilizado en la resolución de problemas cotidianos planteados en la quinta y sexta situaciones.

Análisis de resultados de la quinta situación

Siete de los grupos plantean inicialmente la estrategia algebraica, y dos la plantean desde la tabulación de datos, que validan posteriormente usando la representación algebraica, anotándose que encontraron correctamente el resultado.
En general, se nota que los estudiantes acogen la estrategia algebraica como la adecuada para la solución del problema, validando así el objetivo de aprendizaje de los SEL, mediante la secuencia propuesta, y **alcanzando el nivel E,** de competencias de acuerdo al MEN.

Análisis de resultados de la sexta situación

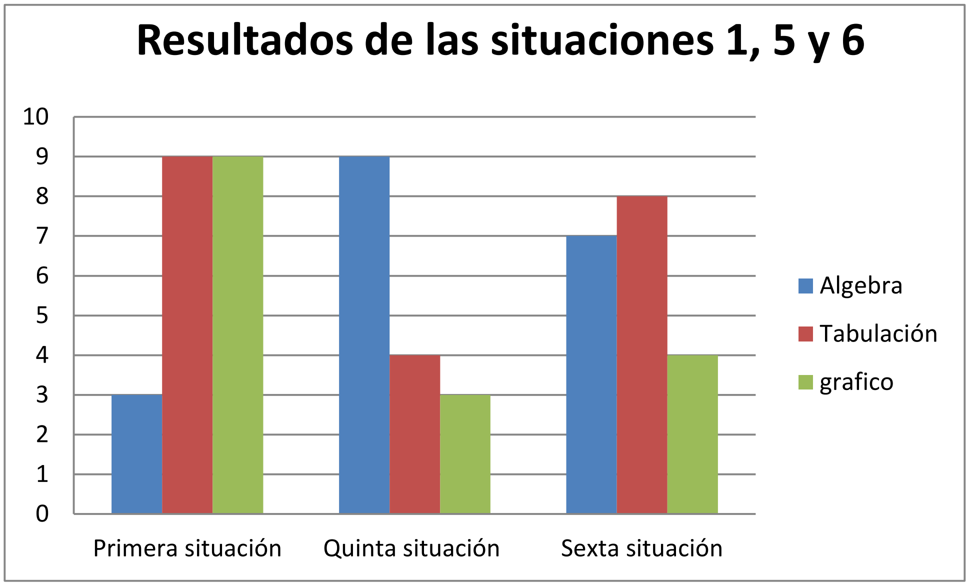
Siete de los grupos, usan simultáneamente la tabulación y el modelo algebraico para encontrar la solución, validando así las dos formulaciones, al encontrar la misma respuesta, tres de esos grupos además usan la estrategia de graficar en el plano cartesiano la situación.

Se debe anotar que solo un grupo no utilizó la estrategia algebraica, pero resolvió mediante la tabulación, que validó con la gráfica cartesiana de la situación.
En general, de las evidencias mostradas, puede decirse que al terminar la secuencia, la mayoría de los estudiantes han desarrollado las competencias, comunicativa de razonamiento y de resolución de problemas en las componentes numérico variacional, geométrico y aleatorio, alcanzando el nivel E, de acuerdo con los niveles competencia propuestos por el MEN (ver tabla anexa B).

La secuencia pone de manifiesto el avance de los estudiantes, desde el nivel de competencias C, en el cual se encontraban al inicio de la misma hasta el nivel de competencias E, en la sexta situación.

A continuación se muestran la gráfica que permite visualizar el comportamiento del pensamiento numérico y algebraico de los estudiantes al inicio de la secuencia y al final de la misma.

Figura 4-1: Visualización de los resultados.



En la gráfica se observa como la mayoría de los grupos hicieron la transición del pensamiento numérico al pensamiento algebraico, también se determina la dificultad que tienen los estudiantes para realizar el gráfico de las ecuaciones, en comparación de la facilidad con la que graficaron las funciones de la primera situación.

5. Conclusiones y recomendaciones

La Ingeniería didáctica como metodología

Mediante la aplicación de la metodología de la Ingeniería didáctica, se cumplió con las expectativas propuestas, pues además de la comprensión del concepto, se favoreció el desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes.

Con ésta metodología, se desarrolló el proceso de comprensión y solución de los sistemas de ecuaciones lineales de forma amplia, ya que se fundamentó en la aplicación de los marcos numérico, algebraico y gráfico, de acuerdo con la nueva organización de enseñanza, que propone Douady Régine, que se soporta en la teoría juego de marcos y dialéctica instrumento-objeto, que trajo como consecuencia el desarrollo de competencias matemáticas en el estudiante, estas fueron: la comunicativa, de razonamiento y la resolución de problemas que se ajustaron a las exigencias y lineamientos del MEN.

Conclusiones acerca del diseño de la secuencia

La aplicación de teorías constructivistas, como las de Douady, y Duval, en el diseño de la secuencia, promovió procesos que enriquecen la conceptualización de los SEL 2X2, bajo diferentes formas de representación.

El diseño de la secuencia, motivo al estudiante, causó interés, y apropiación de los problemas que se le plantearon.

Mediante la secuencia se logró desarrollar y comprender completamente un concepto extenso como el de los SEL, en seis sesiones.

La secuencia permitió detectar obstáculos, y dificultades que se manifiestan en el estudiante y permite corregirlos en el transcurso de la misma.

Finalmente, se puede decir que el diseño de la secuencia fue apropiada para el desarrollo de competencias, teniendo como eje central el aprendizaje de los SEL., a partir del juego de marcos y la dialéctica herramienta – objeto, de Douady R., que permitió darle papel preponderante a los cuadros numérico, gráfico y algebraico,

Acerca de la aplicación de la secuencia en el IHRR

Con la aplicación de la metodología de la ingeniería didáctica, se logró la enseñanza- aprendizaje, de forma compacta y eficiente, de la mayoría de los temas del currículo de noveno grado de la institución, en contraposición al extenso método tradicional de enseñanza, que lo hace de forma dispersa dejando vacíos conceptuales, por lo cual resulta apropiada para aplicar en la institución.

Con ésta metodología, estudiantes que en cursos anteriores de matemáticas mostraron poca actividad, incluso que copiaban a compañeros y cuyos resultados académicos fueron muy regulares, se tornaron más participativos, observándose en ellos buenos resultados en el aprendizaje

Con la aplicación de la secuencia el estudiante, adquirió estrategias que puede usar para la solución de problemas de su la vida cotidiana y académica.

Se puede decir entonces, que en general la secuencia facilitó la toma de decisiones en la construcción o selección de estrategias, favoreciendo el desarrollo de competencias matemáticas en la transición del lenguaje numérico al algebraico

Recomendaciones y sugerencias para la réplica del mismo, retroalimentación o rediseño.

Debido al obstáculo presentado en la situación dos, es necesario que en la fase de institucionalización de la primera y segunda situación, se proceda a corregir y/o reafirmar otros métodos de construcción de las gráficas, diferentes al de tomar los valores de las tablas; como por ejemplo usar los cortes con los ejes o la noción de la pendiente.

Se sugiere el uso del Software gratuito de Geogebra, para encontrar la solución gráfica de los SEL. Ésta permite la visualización de los posibles casos de solución.

El docente durante las primeras situaciones, debe tener presente que el estudiante se está adaptando a la nuevas reglas puestas en común, por tanto debe esperar que tenga con ellos muchas intervenciones, teniendo especial cuidado en evitar en toda caso proponer la estrategia óptima (la algebraica) a usar o entregar el conocimiento buscado, que solo al final de la sexta situación, se podrá develar y/o validar en caso que se haya construido por parte del estudiante, como es de esperarse.

Reflexión personal

El presente trabajo me llevo como docente a cambiar la práctica en el aula, basada solo en la enseñanza de procedimientos algorítmicos. Muy a menudo los estudiantes me preguntan por la utilidad de los mismos, hoy reconozco que con esta forma de enseñanza, en la que solo se tiene en cuenta el concepto, desde solo una representación, es insuficiente en el proceso enseñanza aprendizaje; es por eso que actualmente planteo en mi práctica docente de forma obligada, los diferentes tipos de representación para enriquecer los conceptos a enseñar, como lo manifiestan Douady y Duval, lo que garantizará el aprendizaje de los mismos y el desarrollo de otras competencias además de las algorítmicas en el estudiante.

El presente trabajo se constituye en un recurso para mejorar las competencias matemáticas de los estudiantes del IEHRR, además queda a disposición de docentes para que puedan mejorarlo, ojalá con la implementación de las TICS, en la conceptualización gráfica.

Bibliografía

ARTIGUE, Michelle, DOUADY, Régine, MORENO Luis. Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, página 36 a 82 grupos Editorial Iberoamérica, GÓMEZ Pedro (EDITOR), Bogotá (1995).

BALDOR, Aurelio: Algebra, con gráficos y 6523 ejercicios y problemas con respuestas.

DÍAZ, Hermes Alduin: Bases teóricas y empíricas para una propuesta de ingeniería didáctica basada en el modelo de cambio de cuadros o marcos, [En línea] Biblioteca virtual, Miguel de Cervantes, 2012, portales Biblioteca americana, Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, pág. 96.[Recuperado el 20 de Abril de 2014]. Disponible en: www.cervantesvirtual.com/.../**base**s-teóricas-y-empíricas-para-una-propuesta- de-ingenieria-**didactica**-**basada**-en-el-modelo-de-**cambio-de-cuadr**...

DOUADY, Régine. Dialéctica instrumento-objeto, juego de marcos. Relación enseñanza – aprendizaje. Cuaderno de didáctica matemática N^{O} 3, [En línea] publicado por capacitación regional, 2008,[Citado el 14 de Julio de 2008], Disponible en: es.scribd.com/doc/3930820/PMAT-Douady-Unidad-2

DOUADY, Régine. Juego de marcos y Dialéctica herramienta objeto. En A. Ernesto Sánchez S. Gonzalo Zubieta (ed), Lecturas en didáctica de las matemáticas, México. Cinvestav. (1993). Págs. 68-97.

DUVAL, Raymond. Gráficas y ecuaciones: la articulación entre dos registros, Antología de educación matemática, Sección Matemática Educativa del Cinvestav – IPN. (1988).

DUVAL, Raymond. Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Colombia. (1999). Universidad del Valle, p.59

DUVAL, Raymond. Semiosis y pensamiento Humano, Registros semióticos y pensamiento Humano, Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de educación Matemática, 2004, pág. 18.

GODINO, J. D. Matemático. Departamento de Didáctica de la matemática.[En línea] Universidad de Granada ,2010.Páginas. 34.35, 36,37 [citado en abril 15 de 2011] Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/

GUÍA DE ACTIVIDADES INFORMACIÓN DE CONSULTA DIAGNÓSTICO PRUEBAS SABER, Taller diseñado por: Grupo de Evaluación Alumnos Subdirección de Estándares y Evaluación del Ministerio de Educación Nacional Bogotá (2006), págs.11, 17, 21.

ICFES. Publicación de resultados de la pruebas TIMMS 2007. tomado el 13 de diciembre de 2012. [En línea] Bogotá. 2012. Disponible en: //icfesdatos.blob.core.windows.net/datos/Resultados%20de%20Colombia%20en%20TIMSS%202007%20Resumen%20ejecutivo.pdf, página 10.

KATZ, Victor J. A history of mathematics an introduction, University of the District of Columbia, an imprint of Addison Wesley Longman, Inc. 1998. Págs 14,174,183.

LEÓN, Juan E. Definición de aprendizaje significativo, [En lineal] sitio virtual, psicopedagogía.com, Psicología de la educación para padres y profesionales, 2010, Recuperado en 19 de abril de 2014. Disponible en: www.psicopedagogia.com/definición/aprendizaje%20significativo

MALESANI, Elsa. Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento [En línea] revista ERICE. Instituto de Investigación en Ciencias de Educación de Rosario Argentina, N^0 13, de 1999, Páginas 6,13,14, en lengua española. Disponible en: math.unipa.it/~grim/algebraMalesaniSp.pdf 0327-392

MORRIS, Kline. Matemáticas para los estudiantes de humanidades, traducción de Roberto Helier, Concejo Nacional de Ciencia y Tecnología. Fondo de cultura económica, México, pág. 260

NÄSLUND - Hadley, Emma. Las repeticiones mecánicas aniquilan la innovación y la curiosidad, [En línea] Revista virtual del BID, 2012, [citado en 13 de diciembre 2012], disponible en: http://www.iadb.org/es/temas/educacion/las-repeticiones-mecanicas-aniquilan-la-innovacion-y-la-curiosidad,7360.html

PANIZZA, Mabel; SADOVSKY, Patricia; SESSA, Carmen. La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito Enseñanza de las ciencias: Revista de Investigación y experiencias didácticas, [En línea] Barcelona 1999, volumen .17, Núm.3, pág 453-461 [citado en 12 de marzo de 2011]. Disponible en: http://www.estudiarmatematicasenelaula.ecaths.com/index.php?q=textos&_pagi_pg=4

SAIZ Irma, ACUÑA Nelci, La didáctica matemática como disciplina científica. [En línea] educ.ar portal educativo del Estado Argentino. Año 2006, [citado en 20 de Septiembre de 2011]. Disponible en:
http://aportes.educ.ar/matematica/nucleo-teorico/tradiciones-de-ensenanza/-sintesis-del-desarrollo-de-algunas-teorias-sobre-la-ensenanza-de-la-matematica/la_didactica_de_la_matematica.php?page=3

SEGURA de HERRERO, Sandra Mabel. Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. Argentina, Revista Latinoamericana de Investigación, Relime Vol. 7, Núm 1, marzo 2004, pág. 49-78.
STANLEY I, Grossman. Algebra lineal. Edit. Mc Graw Hill, Mexico 1996, Págs 1, 2.

A. Anexo, resultados pruebas saber e instructivo del MEN

Área: Matemáticas 2005-2006

Grado 5° Mañana

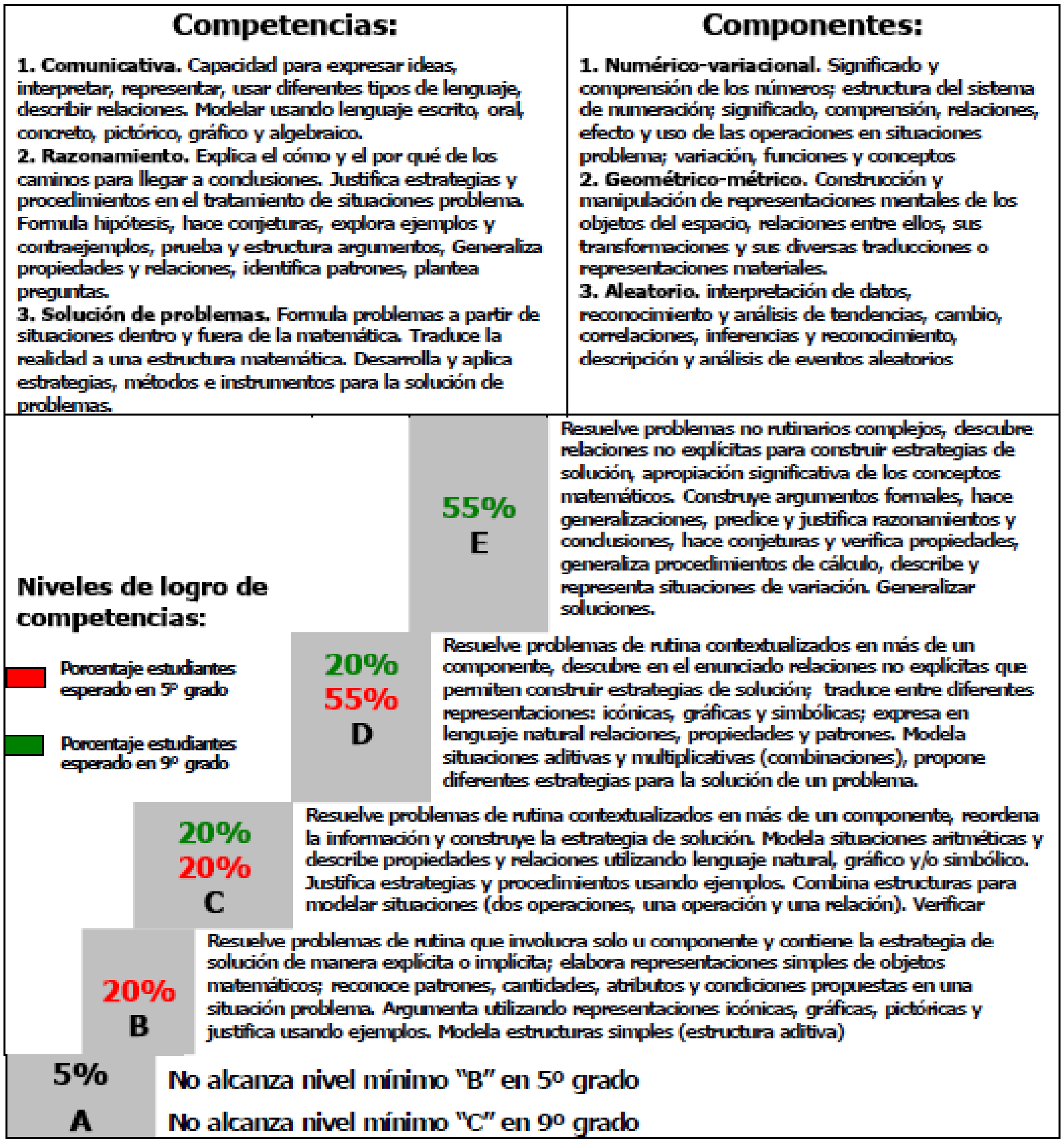
TABLA 1		TABLA 2				TABLA 3 - Comparaciones				
Nivel	Plantel	Esperado	Municipio	Dpto.	Nación	Nivel	Plantel Vs. Esperado	Plantel Vs. Municipio	Plantel Vs. Dpto.	Plantel Vs. Nación
A	48.84	5 %	50.82	48.90	13.78	A	[illegible]	F 1.98	F 0.06	D 34.86
B	37.21	20 %	38.06	38.31	37.70	B	D 17.21	F 0.85	F 1.01	F 2.49
C	13.95	20 %	6.29	7.62	21.04	C	F 6.05	D 7.63	D 6.33	F 7.09
D	0.00	55 %	4.83	5.17	25.28	D	D 55.00	D 4.83	D 5.17	D 25.28

Grado 9° Mañana

TABLA 1		TABLA 2				TABLA 3 - Comparaciones				
Nivel	Plantel	Esperado	Municipio	Dpto.	Nación	Nivel	Plantel Vs. Esperado	Plantel Vs. Municipio	Plantel Vs. Dpto.	Plantel Vs. Nación
A	17.27	5 %	11.40	13.07	22.21	A	D 12.27	D 5,87	D 4.26	D 4.94
C	57.27	20 %	38.08	41.40	42.82	C	D 37.27	D 19,19	D 15.87	D 14.47
D	13.64	20 %	26.83	23,27	20.33	D	F 6.36	F 13,19	F 9.63	F 6.69
E	11.82	55 %	23.69	22.33	14.79	E	D 43.18	D 11.87	D 10.51	D 9.97

Grado 9° Tarde

TABLA 1		TABLA 2				TABLA 3 - Comparaciones				
Nivel	Plantel	Esperado	Municipio	Dpto.	Nación	Nivel	Plantel Vs. Esperado	Plantel Vs. Municipio	Plantel Vs. Dpto.	Plantel Vs. Nación
A	12.50	5 %	11.40	13.01	22,21	A	D 7.50	D 1.1	F 0.51	F 9.71
C	50.00	20 %	38.08	41.40	42.82	C	D 30.00	D 11.92	D 8.60	D 7.18
D	23.86	20 %	26.83	23,27	20.23	D	F 3.86	D 0.59	D 0.57	D 2.63
E	13.64	55 %	23.69	22.33	14.73	E	D 41.36	D 8.69	D 8.59	D 1.09



Instructivo diseñado por el grupo de Evaluación de la Subdirección de Estándares y Evaluación –MEN, para la inerpretación de los resultados motrados en anexo A.