

REGISTRO DE MODELOS NO-RÍGIDOS EMPLEANDO FUNCIONES DE BASE RADIAL

REGISTRATION OF DEFORMABLE MODELS BY USING RADIAL BASIS FUNCTIONS

ANDRES JARAMILLO

Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y de Computación, Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales

FLAVIO PRIETO

Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, faprieto@unal.edu.co

PIERRE BOULANGER

Department of Computing Science, University of Alberta, Edmonton, Canada, pierreb@cs.ualberta.ca

Recibido para revisar marzo 14 de 2008, aceptado agosto 13 de 2008, versión final diciembre 18 de 2008

RESUMEN: Para realizar la alineación de modelos no rígidos se requiere una transformación general que comprende una transformación rígida y una deformación. En este trabajo se presenta un sistema que emplea Funciones de Base Radial para obtener la transformación no-rígida. Si bien el modelado de objetos deformables utilizando estas funciones no es un modelado físico, es computacionalmente más rápido comparado con los métodos basados en física como los sistemas masa-resorte y el análisis por elementos finitos. Este último se toma como referencia ya que permite aproximar la deformación con gran precisión. Se realiza una comparación entre la deformación obtenida con las diferentes funciones de base radial utilizadas: gaussiana, multicuádrada y multicuádrada inversa, y aquella que se obtiene a través del análisis por elementos finitos. El sistema se evalúa sobre cuatro modelos sintéticos.

PALABRAS CLAVE: Registro, piezas deformables, funciones de base radial, visión por computador.

ABSTRACT: In order to carry out the alignment of non-rigid models a general transformation is required, which includes a rigid transformation and a deformation. In this work, we present a system that uses Radial Basis Functions to obtain the non-rigid transformation. Although modeling deformable objects using these functions is not a physical modeling, it is computationally faster compared with the methods based on physics like the mass-spring systems and the finite element analysis. This last one is used like a reference, since it allows approximating the deformation with high accuracy. A comparison is done between the deformation obtained with the different radial basis functions used: Gaussian, multiquadrics and inverse multiquadrics, and that one obtained through finite element analysis. The system is evaluated on four synthetic models.

KEYWORDS: Registration, deformable parts, radial basis functions, computer vision.

1. INTRODUCCIÓN

El registro ó puesta en correspondencia de imágenes ó modelos virtuales es un problema clave en diferentes aplicaciones de la visión por computador. En general, este proceso consta de dos operaciones: una transformación rígida, que permite realizar una prealineación de los modelos, y una transformación no-rígida, que produce una

deformación de los modelos. Existen numerosas técnicas para realizar la prealineación [1]. Para realizar la transformación no rígida se han propuesto diferentes técnicas, especialmente para el registro de imágenes médicas [2]. En estos casos se trata, usualmente, de establecer comparaciones entre pares de imágenes de diferentes fuentes, por lo cual, no es necesario aplicar una transformación basada en física para

realizar la deformación de los modelos. Sin embargo, algunas de las técnicas desarrolladas se basan en teorías físicas como la teoría de la elasticidad y la mecánica de fluidos. En [3] p.ej., proponen un método para el registro no-rígido de imágenes basado en la teoría de la elasticidad. En [4] presentan dos métodos para la puesta en correspondencia no-rígida de imágenes médicas 2D usando un atlas de referencia. El primero considera transformaciones consistentes con las propiedades de elasticidad de sólidos, y el segundo supone modelos de fluidos viscosos. En [5] proponen un enfoque para la puesta en correspondencia de imágenes deformables que combina las ventajas de usar una cuadrícula adaptativa irregular de puntos de control y transformaciones de tipo físico. En [6] proponen una técnica basada en el Análisis por Elementos Finitos (AEF) para la identificación de correspondencias en imágenes de mamografía de dos vistas.

Además del análisis de imágenes médicas, el proceso de registro de modelos también se aplica en otras áreas, como p.ej. el control de calidad en la industria de partes. En estas aplicaciones, a diferencia del registro de imágenes médicas, los modelos se consideran rígidos. Aunque en muchos casos es válida esta suposición, existe una gran cantidad de partes industriales que presentan una apreciable flexibilidad y por tanto los modelos de dichas partes deben a su vez ser modelos deformables. Es decir, se requieren modelos deformables que permitan hacer las transformaciones no rígidas para realizar la puesta en correspondencia de dichos modelos [7].

Como se describe más adelante en este trabajo, existen básicamente dos grupos de técnicas mediante las cuales se puede modelar las deformaciones: las transformaciones basadas en física y las transformaciones geométricas. En este último grupo se clasifican las transformaciones obtenidas con las Funciones de Base Radial (FBR). Las FBR son combinaciones de funciones reales cuyos valores dependen únicamente de las distancias a puntos llamados centros ó puntos de control. Estas transformaciones han sido usadas en diferentes aplicaciones de la visión por computador en los cuales se puede plantear un enfoque de interpolación de datos [8-10]. Debido

a que para la interpolación solo se requiere de un conjunto reducido de puntos de control y no se requiere conectividad definida entre los datos a interpolar, las FBR ofrecen una gran ventaja computacional frente a otros métodos como aquellos basados en física.

En este trabajo se explora el uso de las FBR para obtener la transformación no-rígida requerida para la puesta en correspondencia de modelos deformables. Como se mencionó antes, este modelado de objetos deformables no es un modelado físico, pero tiene la ventaja de ser más rápido computacionalmente comparado con los métodos basados en física como los sistemas masa-resorte y el análisis por elementos finitos. Este último se toma como referencia ya que permite aproximar la deformación con gran precisión.

Este artículo está organizado de la siguiente manera: en la Sección 2 se describen brevemente los métodos más utilizados para el modelado de objetos deformables y en particular el método propuesto usando las FBR. En la Sección 3 se describe el proceso de comparación de los modelos realizado. La Sección 4 presenta el análisis de los resultados sobre algunos casos específicos. Finalmente, en la Sección 5 se presentan las conclusiones y posibles trabajos futuros.

2. MODELADO DE OBJETOS DEFORMABLES

El modelado de objetos deformables ha sido abordado con diferentes fines, que van desde el diseño asistido por computador hasta la simulación de sistemas físicos reales [11]. Cada enfoque ofrece unas características destacadas de acuerdo a los requerimientos del entorno de aplicación. Para realizar animaciones, por ejemplo, se usan modelos simplificados que reducen la carga computacional y así se obtiene la velocidad requerida para la simulación [12]. Otros modelos se destacan por ofrecer una simulación más precisa a cambio de un mayor costo computacional [13]. En esta sección se describen brevemente algunos de los métodos más utilizados para el modelado de objetos

deformables, así como la formulación matemática para el método propuesto.

2.1 Modelado no-físico

En muchas aplicaciones, tales como el diseño asistido por computador, se emplean técnicas puramente geométricas. Generalmente, estas técnicas son eficientes computacionalmente, y se apoyan en las destrezas y propósitos del diseñador más que en principios físicos.

2.1.1 Splines

En estas representaciones, la curva o superficie se representa por un conjunto de puntos de control. El diseñador ajusta la forma de los objetos por el movimiento de los puntos de control a nuevas posiciones, adicionando o borrando puntos de control, o cambiando sus pesos [14]. Estas representaciones son eficientes computacionalmente y soportan modificaciones interactivas, además, permiten un control fino de la forma de los objetos cuando estos son representados por muchos puntos de control.

2.1.2 Deformación de forma libre

La deformación de forma libre (DFL) es un método general, para modelar la deformación de objetos, que proporciona un mayor y poderoso nivel de control que el ajuste de puntos de control individuales. Las DFL cambian la forma de un objeto a través de la deformación del espacio en el cual se encuentran los objetos [15]. Esta técnica se puede aplicar a muchas representaciones gráficas diferentes, incluyendo: puntos, polígonos, splines, superficies paramétricas y superficies implícitas.

2.1.3 Funciones de Base Radial

Las funciones de base radial son funciones de la forma:

$$F(p) = \sum_i C_i R(|p - p_i|) \quad (1)$$

donde las funciones base $R(|\bullet|)$, son funciones cuyos valores dependen únicamente de la distancia a puntos dados p_i , llamados centros ó

puntos de control; y las constantes C_i son los pesos de las funciones de base para cada centro [16]. Usualmente, la norma $|\bullet|$ se toma como la distancia euclídea.

La transformación dada por (1), no es práctica para modelar un objeto no-rígido, ya que produce una deformación de los modelos aún en el caso de que los puntos de control no cambian de posición. En la Figura 1 se muestra ese efecto en un caso bidimensional.

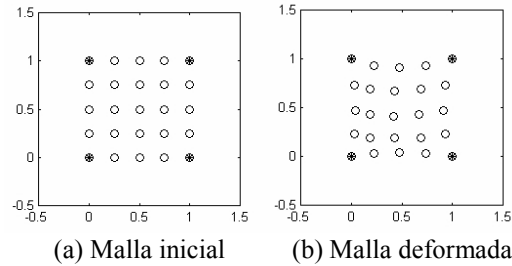


Figura 1. Deformación de una malla
Figure 1. Mesh deformation

Una expresión más general que permite evitar este efecto, es aquella en la cual se considera un término adicional que corresponde a una transformación rígida [17], esto es:

$$F(p) = \sum_i C_i R(|p - p_i|) + Mp + t \quad (2)$$

donde M es la matriz de rotación y t es el vector de traslación. Sin embargo, ya que en este trabajo sólo consideramos la deformación de los modelos, la expresión anterior se reduce a:

$$F(p) = \sum_i C_i R(|p - p_i|) + p \quad (3)$$

Algunas de las funciones de base más usadas en la literatura son: las gaussianas, las multicuádricas (MC), y las multicuádricas inversas (MCI), su definición es presentada en la Tabla 1.

Tabla 1. Funciones de Base Radial
Table 1. Radial basis functions

Gaussiana	$R(x) = e^{-\beta x^2}$
MC	$R(x) = \sqrt{x^2 + \beta}$
MCI	$R(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \beta}}$

Donde β es un parámetro que controla forma de las funciones de base [18]. En este trabajo dicho parámetro se elige de modo que minimice una función de costo tal como se describe en la Sección 3.5.

2.2 Modelos masa-resorte

Usando sistemas masa-resorte, un objeto es modelado como una colección de masas puntuales conectadas por resortes en una estructura reticular (ver la Figura 2).

Generalmente, para pequeñas deformaciones elásticas, las fuerzas de resorte se consideran lineales. Pero cuando se trata de grandes deformaciones elásticas y de materiales inelásticos, los modelos no-lineales ofrecen una mejor aproximación.

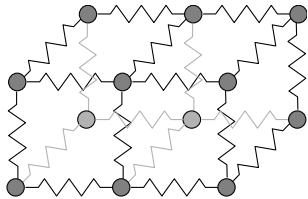


Figura 2. Retículo masa-resorte
Figure 2. Mass-spring lattice

2.3 Elementos finitos

Mientras que los modelos masa-resorte parten de una representación discreta de los objetos, otros modelos consideran inicialmente los objetos deformables como distribuciones de energía y masa continuas. Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de tales sistemas se derivan de la mecánica de los medios continuos, sin embargo para la solución de problemas reales se debe recurrir a métodos computacionales aplicados a modelos discretos de dichos sistemas, como es el caso del método de elementos finitos.

Actualmente, el método de elementos finitos constituye una herramienta fundamental para realizar el análisis de esfuerzos y deformaciones en estructuras cuyas soluciones, por métodos analíticos, son muy complejas o imposibles de determinar. En este método se divide el objeto continuo a analizar en un conjunto de unidades de cómputo llamados elementos (barras, placas

triangulares, tetraedros, hexaedros, etc.), para los cuales es posible generar funciones simples que describen su comportamiento con gran precisión. La solución al problema global se determina a partir de un conjunto ensamblado de ecuaciones planteadas para los elementos considerados, junto con las condiciones de frontera del problema [19]. Aunque el AEF permite calcular la deformación real con gran precisión, es un método costoso computacionalmente [20]. En este trabajo, la deformación obtenida por el AEF se utiliza como deformación de referencia para evaluar la aproximación obtenida mediante las FBR.

3. REGISTRO DE MODELOS DEFORMABLES USANDO FBR

El objetivo de este trabajo es determinar el grado de registro no-rígido, obtenido aplicando la interpolación dada por las FBR con respecto a una deformación física. Como se mencionó antes, se utiliza el AEF para obtener una deformación de referencia de los modelos sintéticos considerados. En el siguiente algoritmo se sintetiza el proceso general seguido para evaluar la aproximación obtenida con las FBR, el cual se describe en detalle.

3.1 Diseño y generación de mallas

En la etapa previa al proceso de comparación se diseñan los modelos sobre los cuales se realizan las comparaciones. Aunque en la práctica se trata de objetos tridimensionales, generalmente, los datos experimentales son nubes de puntos que representan las superficies de dichos objetos. En este trabajo se consideran modelos para los cuales son aplicables las simplificaciones dadas por las teorías clásicas de vigas y placas: la hipótesis de Bernoulli para las vigas y la hipótesis de Kirchhoff para las placas [21]. Por lo tanto, para los cálculos de las deformaciones, los modelos de las vigas se simplifican a una dimensión (eje baricéntrico), y la placa se simplifica a un elemento bidimensional (plano medio). Posteriormente a la simplificación, se generan las mallas de los modelos. Los nodos de la malla conforman los datos de entrada a la

transformación dada por las FBR una vez calculados los coeficientes de dichas funciones. En la Figura 3, se muestra una placa con una malla rectangular y el conjunto de nodos correspondiente.

Algoritmo de Comparación

Entradas: modelos CAD, fuerzas y apoyos.

Paso 1. Generación de mallas. .

Paso 2. Análisis por elementos finitos.

Paso 3. Iteración

- 3.1. Cálculo de los coeficientes de las FBR (para un rango del parámetro libre).
- 3.2. Cálculo de la deformación aplicando las FBR.
- 3.3. Optimización del parámetro libre.

Terminar Iteración SI se encuentra el mínimo de la diferencia entre el cálculo con las FBR y el AEF, **SINO** modificar el rango del parámetro libre y realizar una nueva iteración.

Paso 4. Cálculo de la desviación máxima.

Salidas: modelo deformado con FBR.

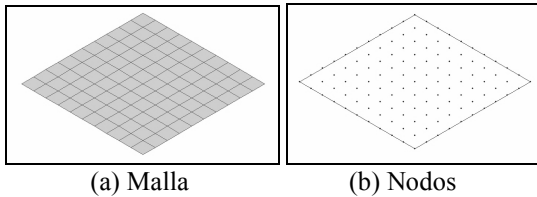


Figura 3. Modelo de una placa
Figure 3. Model of a plate

3.2 Análisis por elementos finitos

Con las mallas de los modelos simplificados se procede a aplicar las cargas y los apoyos sobre dichos modelos, y se realiza el AEF para determinar los desplazamientos de los nodos de la malla para cada modelo. Los resultados obtenidos en esta etapa constituyen los modelos deformados de referencia. En un trabajo previo a este [22], se utilizó como deformación de referencia, aquella obtenida mediante la minimización de la energía potencial de un modelo masa-resorte. En la Figura

4, se muestran las ligaduras aplicadas y el modelo deformado resultante para la placa de la Figura 3.

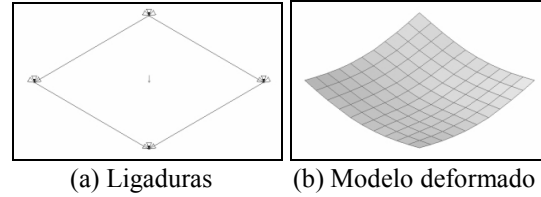


Figura 4. Análisis por elementos finitos
Figure 4. Finite element analysis

3.3 Cálculo de coeficientes de las FBR

Tanto los nodos de apoyo como los puntos de aplicación de las cargas, conforman el conjunto de puntos de control de cada modelo. Ya que del AEF se obtienen los desplazamientos de estos puntos, usando estas correspondencias se calculan los coeficientes de las FBR. La ecuación (3) se resuelve para los coeficientes C_i . En forma matricial se tiene:

$$C = (F(p) - p) \cdot R^{-1} \tag{4}$$

donde C es el vector de coeficientes, p y $F(p)$ son los vectores de nodos iniciales y desplazados, respectivamente, y R es la matriz de valores de las FBR, evaluadas en los puntos de control.

3.4 Cálculo de la deformación con las FBR

Una vez obtenidos los coeficientes de las FBR, se aplica nuevamente (3) sobre todos los puntos de la malla inicial. Así se obtiene la deformación de todos los puntos de la malla inicial, a través de la interpolación con las FBR.

3.5 Optimización del parámetro libre

Ya que las FBR utilizadas para la interpolación contienen un parámetro libre, se realiza un proceso de optimización de dicho parámetro. Como medida de la desviación entre la deformación dada por las FBR y la deformación de referencia, se calcula la suma de las distancias euclídeas, entre los puntos correspondientes de ambas deformaciones. El valor del parámetro libre se elige de modo que la diferencia entre

ambas deformaciones sea mínima. En la Figura 5, se muestra el comportamiento de la suma de desviaciones en función del parámetro libre, para uno de los casos descritos en la Sección 4 (viga con apoyos simples).

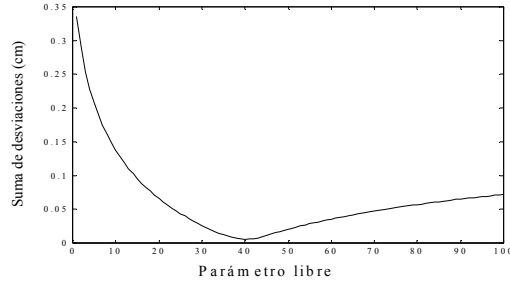


Figura 5. Función distancia entre deformaciones
Figure 5. Function distance between deformations

3.6 Desviación máxima

Todos los puntos del modelo deformado calculado mediante las FBR, excepto los puntos de control, presentan una desviación respecto al desplazamiento obtenido por el AEF. De este conjunto de puntos se toma como referencia, aquel para el cual se tiene la mayor desviación. Se calcula el cociente entre esta desviación máxima y el desplazamiento correspondiente hallado por elementos finitos, expresado como un porcentaje. En la Figura 6 se ilustra gráficamente el cálculo de la desviación máxima.

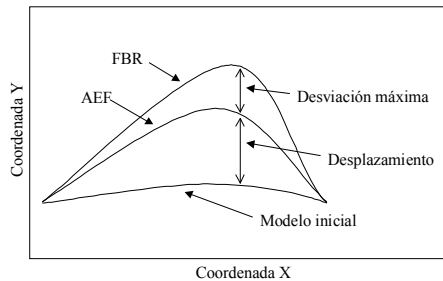


Figura 6. Desviación máxima
Figure 6. Maximum deviation

4. RESULTADOS

Dado que la deformación tomada como referencia es aquella que se obtiene por el AEF y no la deformación de objetos reales, se consideraron únicamente modelos sintéticos simples sobre los

cuales se puede apreciar claramente la diferencia entre la deformación obtenida usando el sistema de FBR y a aquella obtenida por el AEF.

Se consideraron cuatro modelos sintéticos: una viga en voladizo, una viga con apoyos simples, una viga con apoyos fijos y una placa cuadrada con apoyos simples. Se asumió las simplificaciones para vigas y placas mencionadas en la Sección 3.1. En todos los casos se aplicaron fuerzas de flexión transversales a las superficies en los puntos de aplicación. Los modelos, las mallas, los apoyos, las fuerzas aplicadas y las deformaciones se ilustran en la Figura 7.

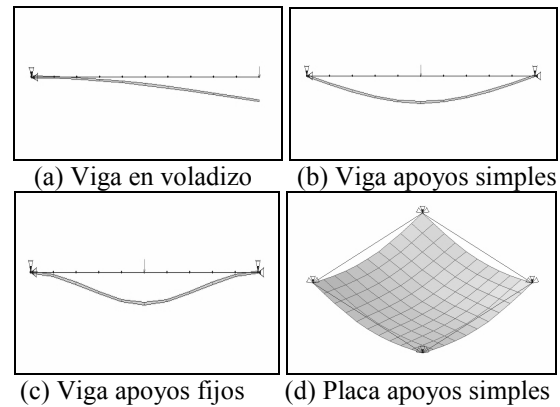


Figura 7. Modelos iniciales, mallas, ligaduras y deformaciones

Figure 7. Design models, meshes, constraints and deformations

Las características materiales y dimensiones de los modelos para el AEF fueron las siguientes: módulo de elasticidad = 25000; cociente de Poisson = 0.35; sección de las vigas = 0.1cm x 0.1cm; longitud de las vigas = 10cm; espesor de la placa = 0.1cm; dimensiones de la placa 10cm x 10cm. Los cálculos de elementos finitos fueron realizados con la versión libre del JLANalyzer V.10.0.

En las Figuras 8-11 se muestran las deformaciones obtenidas con las FBR, comparadas en cada caso con la correspondiente deformación de referencia obtenida con el AEF. En las Tablas 2-5 se resumen los resultados obtenidos para cada modelo aplicando las tres FBR mencionadas [Tabla 1]. Se muestra el valor del parámetro libre (β en la Tabla 1), para el cual

se realizaron los cálculos de la desviación máxima y la suma de las desviaciones para cada caso. La desviación máxima suministra información acerca del porcentaje de error del cálculo mediante las FBR, respecto al desplazamiento realizado para un punto específico del modelo, el punto de máxima desviación. La suma de desviaciones del modelo es una medida adicional, que permite comparar entre sí las aproximaciones dadas por las diferentes FBR utilizadas.

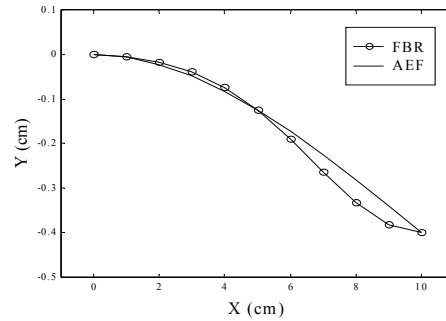
Como se puede ver de las Tablas 2-5, el valor del parámetro libre es diferente para cada modelo y para cada FBR utilizada. En los casos de las vigas, aunque la geometría inicial es la misma, el valor del parámetro depende de las ligaduras impuestas en cada caso. Además, para un modelo dado con unas ligaduras específicas, el valor del parámetro cambia según las FBR utilizadas.

4.1 Resultados para el voladizo

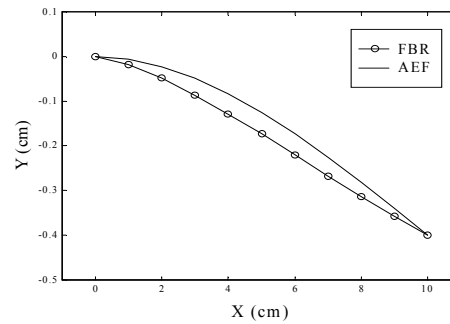
En la Figura 8 se muestran las deformaciones obtenidas en el caso del voladizo. Se observa que, en la curva obtenida con las FBR-MC, no se presentan interceptos con la curva de referencia (AEF), en tanto que para la curva obtenida con las FBR-gaussianas, se tiene un intercepto y para las FBR-MCI se tienen dos interceptos. Tanto para las FBR-gaussianas como para las FBR-MCI, la curva de la deformación cambia de concavidad, lo que no ocurre con la curva obtenida con las FBR-MC. De acuerdo a los resultados de desviación máxima indicados en la Tabla 2, la mejor aproximación se tiene con las FBR-gaussianas. Este es el único caso, de los cuatro modelos considerados, en el cual el menor valor de la suma de desviaciones, se tiene para una FBR diferente a aquella para la cual se tiene el menor valor de la desviación máxima.

Tabla 2. Resultados para la viga en voladizo
Table 2. Results for the cantilever beam

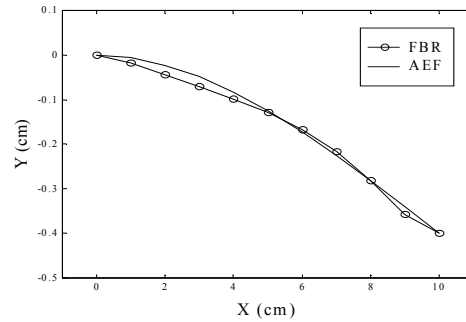
FBR	β	desv. máx. (%)	suma (cm)
Gaussiana	0.0461	17.8957	0.1721
MC	9.9000	38.6995	0.3078
MCI	4.5067	46.4516	0.1088



(a) Gaussiana



(b) MC

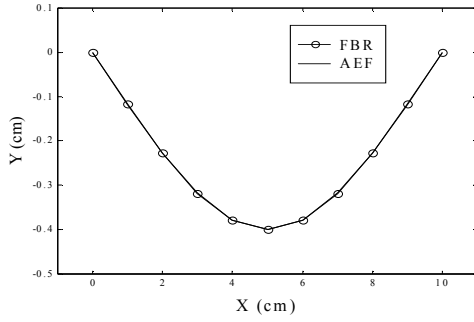


(c) MCI

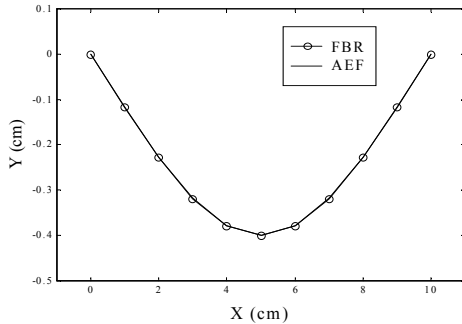
Figura 8. Deformación de la viga en voladizo
Figure 8. Deformation of the cantilever beam

4.2 Resultados para la viga con apoyos simples

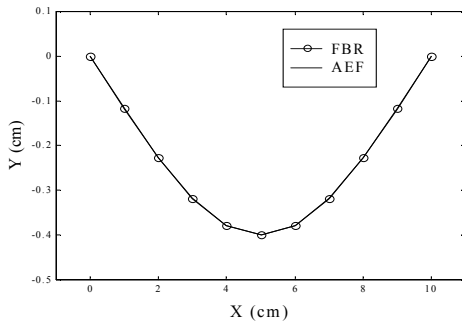
De los cuatro modelos considerados, la viga con apoyos simples es el modelo que mejor se logró aproximar usando las FBR. En la Figura 9 se muestra el aspecto de las deformaciones obtenidas. Como se puede apreciar, las gráficas son similares y visualmente no se aprecia la diferencia entre las tres. Sin embargo, en la Tabla 3 se tiene que, tanto la desviación máxima como la suma de las desviaciones son menores para las FBR-MC.



(a) Gaussiana



(b) MC



(c) MCI

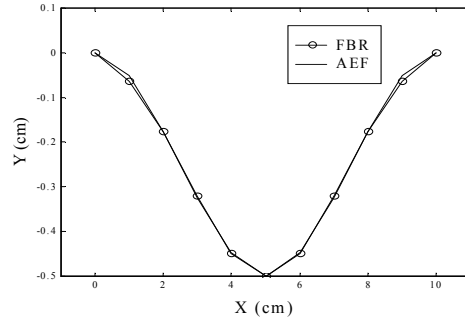
Figura 9. Deformación de la viga con apoyos simples
Figure 9. Deformation of the simply supported beam

Tabla 3. Resultados para la viga con apoyos simples
Table 3. Results for the simply supported beam

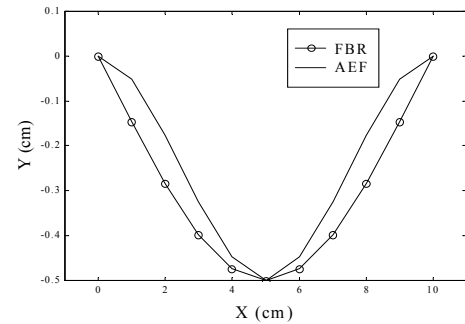
FBR	β	desv. máx. (%)	suma (cm)
Gaussiana	0.0152	1.4117	0.0084
MC	40.3858	0.3422	0.0053
MCI	122.822	1.1606	0.0071

4.3 Resultados para la viga con apoyos fijos

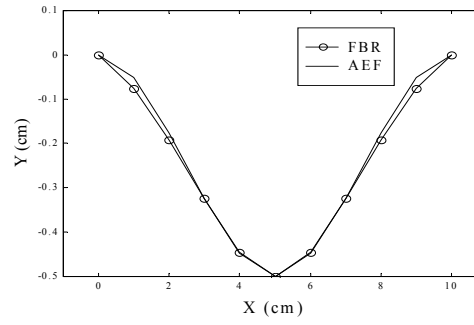
Para la viga con apoyos fijos, la menor desviación se obtuvo para la aproximación con las FBR Gaussianas (Tabla 4). En este caso, se puede apreciar visualmente la diferencia entre las gráficas obtenidas con las tres FBR utilizadas (Figura 10).



(a) Gaussiana



(b) MC



(c) MCI

Figura 10. Deformación de la viga con apoyos fijos
Figure 10. Deformation of the beam with fixed supports

Tabla 4. Resultados para la viga con apoyos fijos
Table 4. Results for the beam with fixed supports

FBR	β	desv. máx. (%)	suma (cm)
Gaussiana	0.1018	21.9531	0.0302
MC	0.4097	61.2216	0.6023
MCI	7.3051	46.4856	0.0835

4.4 Resultados para la placa

En la Figura 11 se muestra la deformación de un borde de la placa. Por la simetría del modelo todos los bordes de la placa tienen la misma deformación. En este modelo, el punto de desviación máxima se encuentra en el punto

medio de los bordes de la placa. De los casos considerados, es en este donde los resultados numéricos son más próximos entre sí. Así como en el caso de la viga con apoyos simples, aquí las deformaciones obtenidas con las distintas FBR son similares visualmente. Para este ejemplo, la mejor aproximación numérica, según los valores de desviación máxima y suma de desviaciones, se logra con las FBR-MC.

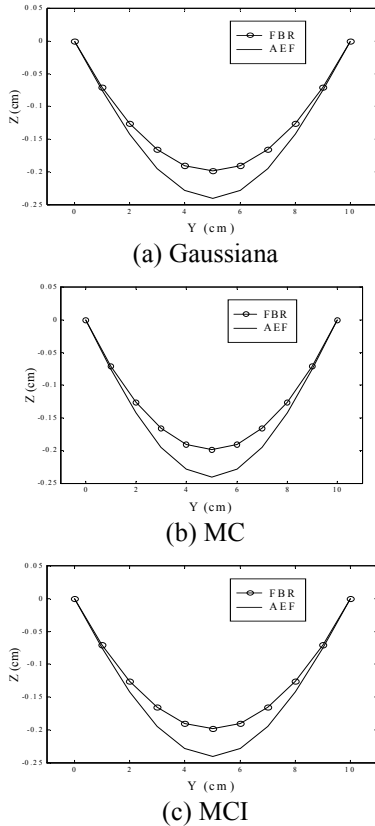


Figura 11. Deformación de la placa
Figure 11. Deformation of the plate

Tabla 5. Resultados para la placa
Table 5. Results for the plate

FBR	β	desv. máx. (%)	suma (cm)
Gaussiana	5.50E-04	21.3351	0.2480
MC	1448.75	21.3238	0.2478
MCI	3768.30	21.3295	0.2479

5. CONCLUSIONES

-En este trabajo se estudió el uso de las Funciones de Base Radial: gaussiana, multicuádrica y

multicuádrica inversa, para el modelado de la transformación no-rígida requerida para realizar la alineación de modelos deformables. Debido a su formulación matemática, el cálculo de la deformación mediante el sistema de FBR requiere una menor carga computacional en comparación al AEF. Sin embargo, según los resultados obtenidos, las deformaciones calculadas con el sistema de FBR, presentan diferentes grados de desviación respecto al AEF.

-Aunque las deformaciones obtenidas con el sistema de FBR dependen del tipo de funciones base usadas, el grado de desviación de éstas respecto al AEF depende principalmente de la geometría de los modelos deformados.

-Ya que para los cálculos de interpolación realizados en este trabajo con las FBR sólo se usaron los puntos de ligadura impuestos a los modelos como puntos de control, queda abierta la posibilidad de mejorar el ajuste de la deformación final mediante la adición de nuevos puntos de control, de tal manera que se pueda asegurar un grado de aproximación especificado inicialmente como una entrada del sistema. Otro trabajo a realizar posteriormente consiste en plantear un método para calcular el valor parámetro libre sin recurrir al modelo deformado mediante el AEF.

REFERENCIAS

[1] SALVI, J., MATABOSCH, C., FOFI, D., y FOREST, J., A review of recent range image registration methods with accuracy evaluation, *Image and Vision Computing*, Vol. 25, No. 5, pp. 578-596, 2007.

[2] ZACHARAKI, E., SHEN, D., LEE, S., y DAVATZIKOS, C., ORBIT: a multiresolution framework for deformable registration of brain tumor images, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Vol. 27, No. 8, pp. 1003-1017, 2008.

[3] PECKAR, W., SCHNORR, C., ROHR, K., y STIEHL, H., Parameter-free elastic deformation approach for 2D and 3D registration using prescribed displacements, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Vol. 10, pp. 143-162, 1999.

- [4] WANG, Y., y STAIB, L., Physical model-based non-rigid registration incorporating statistical shape information, *Medical Image Analysis*, Vol. 4, No. 1, pp. 7-21, 2000.
- [5] PEKAR, V., GLADILIN, E., y ROHR, K., An adaptive irregular grid approach for 3D deformable image registration, *Phys. Med. Biol.*, Vol. 51, pp. 361-377, 2006.
- [6] QIU, Y., GOLDFOF, D., LI, L., SARKAR, S., ZHANG, Y., y ANTON, S., Correspondence recovery in 2-view mammography, *IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: Nano to Macro*, Vol. 1, pp. 197-200, 2004.
- [7] JARAMILLO, A. E., PRIETO, F., y BOULANGER, P., Inspección de piezas 3D: revisión de la literatura, Vol. 27, No.3, pp. 118-126, 2007.
- [8] BOER, A., VAN DER SCHOOT, M., y BIJL, H., Mesh deformation based on radial basis function interpolation, *Computers and Structures*, Vol. 85, pp. 784-795, 2007.
- [9] SÁNCHEZ, G., BRANCH, J., y BOULANGER, P., Reconstrucción de objetos de topología arbitraria mediante selección de centros para la interpolación con FBR, *Dyna*, Vol. 73, No. 150, pp. 189-201, 2006.
- [10] BRANCH, J., PRIETO, F., y BOULANGER, P., Corrección automática de huecos en objetos de forma libre empleando funciones de base radial, *Rev. Avances en Sistemas e Informática*, Vol. 4, No. 2, 2007.
- [11] MONTAGNAT, J., DELINGETTE, H., y AYACHE, N., A review of deformable surfaces: topology, geometry and deformation, *Image and Vision Computing*, Vol. 19:1023-1040, 2001.
- [12] TESCHNER, M., HEIDELBERGER, B., MULLER, M., y GROSS, M., A versatile and robust model for geometrically complex deformable solids, *Proceedings of the Computer Graphics International*, pp. 312-319, 2004.
- [13] TSUKROV, I., EROSHKIN, O., PAUL, W., y CELIKKOL, B., Numerical modeling of nonlinear elastic components of mooring systems, *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, Vol. 30, No. 1, 2005.
- [14] PIEGL, L., y TILLER, W., *The NURBS Book*, 2a. Ed., Springer, 1997.
- [15] RUECKERT, D., SONODA, L., HAYES, C., HILL, D., LEACH, M., y HAWKES, D., Nonrigid registration using Free-Form Deformations: application to breast MR images, *IEEE Transactions on medical imaging*, Vol. 18 No. 8, 1999.
- [16] BAXTER, B., *The interpolation theory of radial basis functions*, [PhD. Thesis], Cambridge University, 1992.
- [17] ARAD, N., y REISFELD, D., Image warping using few anchor points and radial functions, *Computer Graphics Forum*, Vol. 14, No. 1, 1995.
- [18] RUPRECHT, D., y MÜLLER, H., Image warping with scattered data interpolation methods, *Research Report 443*, Dortmund University, 1992.
- [19] BATHE, K., *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, 1995.
- [20] GIBSON, S., y MIRTICH, B., A survey of deformable modeling in computer graphics, *Mitsubishi Electric Research Laboratory, Technical Report No. TR-97-19*, November, 1997.
- [21] MONLEÓN, S., *Análisis de vigas, arcos, placas y láminas*, Universidad Politécnica de Valencia, 1999.
- [22] JARAMILLO, A. E., PRIETO, F., y BOULANGER, P., Aplicación de las funciones de base radial para la deformación de modelos en procesos de inspección, *Memorias del III Congreso Colombiano de Computación*, Medellín, Colombia, Abril 2008.