UNA APLICACION DE LA TEORIA DE GRAFICOS AL PROBLEMA DE LOS POTENCIALES

Por : JORGE CHARUM

1. PRELIMINARES.- La teoría de gráficos es una rama del álgebra moderna y *más específicamente de la teoría de conjuntos. En los últimos años ha sido ob*jeto de estudio por muchos matemáticos (Berge, Ore, Harris, ...). La razón en mi concepto ha sido la posibilidad de su aplicación a las ciencias sociales (psicología, sociología, economía), a la teoría de juegos, a la teoría de la información y porque actualmente las máquinas electrónicas u ordenadoras hacen posible la resolución práctica de problemas que aún cuando desde el punto de vista teórico se sabía la existencia de soluciones basadas en la teoría de gráficos no se había podido procesar dada la gigantesca cantidad de operaciones. Es digno de notar que en el estado actual de cosas, en el dominio comercial e industrial, y aún en el social, los estudios más teóricos no son completamente desinteresados y, por el contrario, buscan casi siempre la aplicación precisa de los resultados.

Esta es una nota descriptiva sobre el método de potenciales, que permite obtener algunos resultados prácticos para resolver problemas de ordenamiento (sequencing y seheduling en Inglés, ordonancement en Francés), y el problema de los potenciales definido en esta nota.

2. GRAFICOS.- En primera aproximación un gráfico es un dibujo, en el cual figuran un cierto número de puntos y un cierto número de rectas, orientadas o no. (Por ejemplo, en la figura 1 los puntos son , A, B, C, D, las lineas v, s, t, r, w)

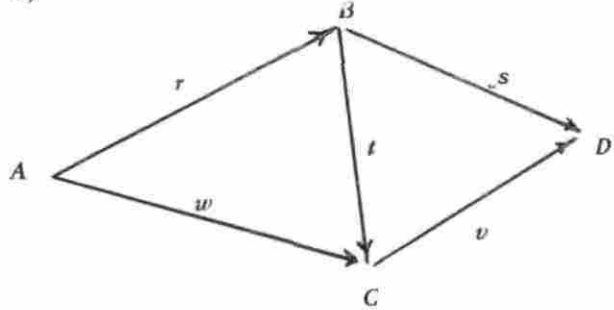


Fig. 1

Al conjunto de este dibujo lo llamamos pues un gráfico. A los puntos los llamamos vértices y a las rectas las llamamos arcos o aristas, según que sean orientadas o no.

En una arista la orientación no cuenta, y así podemos decir que correspon den a 2 arcos (uno en cada dirección). Nos restringiremos a los gráficos sin aristas. Así un gráfico está formado por un conjunto de vértices X, y un conjunto de arcos U.

La representación de un gráfico por un dibujo con las características anotadas es la más simple, pero evidentemente difícil de manipular en los desarrollos teóricos.

Definiremos entonces un gráfico como una pareja $G = (X, U)$ (donde X es el conjunto de vértices del gráfico y U es el conjunto de arcos) tal que si $v \in U$ entonces existen $x_i, x_j \in X$ tales que existe un arco que va de x_i (extremidad inicial) a x_j (extremidad terminal). Este hecho lo denotaremos escribiendo $v = (x_i, x_j)$

Se dirá que x_i es el antecesor de x_j o que x_j es el sucesor de x_i

Sea Γ una aplicación multivoca [1] definida así, para todo x si $y \in \Gamma x$ entonces existe $(x, y) \in U$. Se tiene así que $\Gamma x = \{ y \mid y \in X, (x, y) \in U \}$

El gráfico G está perfectamente determinado por la pareja (X, U) o por la pareja (X, Γ).

Definición 2. 1.- Sea $card(X) = n$, y G el gráfico que tiene como conjunto de vértices a X, y como conjunto de arcos a U. A la matriz cuadrada de orden n, $M = (m_{ij})$ donde ; $m_{ij} = 1$ si y solo si $(x_i, x_j) \in U$

$$m_{ij} = 0 \text{ si y solo si } (x_i, x_j) \notin U,$$

la llamaremos la matriz asociada al gráfico G.

Definición 2. 2.- Se llama camino a una sucesión ordenada de arcos tal que la extremidad terminal de un arco sea la extremidad inicial del arco siguiente. En el caso de que la extremidad inicial del primer arco y la extremidad terminal del último coincidan, se dice que se tiene un circuito.

Definición 2. 3.- Se llama longitud de un arco a un número que está rela -

cionado con este arco. (El sentido de esta definición debe siempre precisarse según el campo de aplicación. Esta longitud no satisface necesariamente los axiomas habituales de longitud).

3. GRAFICOS SIN CIRCUITO.

Proposición 3. 1.- Sea $G = (X, U) = (X, \Gamma)$ un gráfico, entonces las tres propiedades siguientes son equivalentes:

(a) G no tiene circuitos ;

(b) Cada $A \subset X$ admite por lo menos un vértice que no tiene sucesores en A ;

(c) Se pueden numerar los vértices de $G = (X, U)$ de tal manera que el número dado a cada vértice sea estrictamente superior al de cualquiera de sus predecesores y estrictamente inferior a cualquiera de sus sucesores.

Es decir existe una aplicación b definida sobre X con valores en Z tal que para todo $x \epsilon X$, si $y \epsilon \Gamma_x^{-1}$ entonces $b(y) < b(x)$.

Demostración 1. 1.- Supongamos que $G = (X, U)$ tiene al menos un circuito y que existe al menos un subconjunto A de X tal que cada vértice de A tenga por lo menos un sucesor de A. Entonces dado que para todo $x \epsilon A$ hay por lo menos un sucesor en A tenemos que :

$$\Gamma x \cap A \neq \phi \quad \text{para } x \epsilon A .$$

De donde se puede seguir que el hecho de que G tenga al menos un circuito implica que existe por lo menos un subconjunto A de X tal que cada uno de sus elementos tiene un sucesor en A. Esto podemos sintetizarlo poniendo

no *(a)* implica no *(b)*

1. 2.- Sea A el subconjunto de x tal que para todo $x \epsilon A$, $\Gamma x \cap A \neq \emptyset$. Construyamos un circuito teniendo todos sus vértices en A. Sea $card\ (A) = n$. Tomemos $x_1 \epsilon A$, entonces existe un $x_2 \epsilon A$ tal que $x_2 \epsilon \Gamma x_1$ (x_2 sucesor de x_1). Dado que $x_2 \epsilon A$ entonces existe un $x_3 \epsilon A$ tal que $x_3 \epsilon \Gamma x_2$. Repitiendo este proceso $n+1$ veces, existe por lo menos un vértice que es utilizado 2 veces. Si llamamos p y q el orden de la operación en los que aparecen por primera y segunda vez el mismo vértice x, y que nos sirven también como índice, tenemos que el camino formado por los vértices $x_p, x_{p+1}, \dots, x_{q-1}, x_q$ donde

$$x_p = x_q = x \quad \text{con} \quad q - p < n \text{ es un circuito.}$$

Este podemos sintetizarlo poniendo no *(b)* implica no *(a)*, y con el resultado precedente tenemos *(a)* si y solo si *(b)*.

1. 3.- Construyamos un conjunto de números que tengan la propiedad *(c)* es decir, si asociamos un número a cada vértice $x \in X$ este número tiene la propiedad de ser mayor que el número asociado a cualquiera de los vértices predecesores de x, pero menor que cada uno de los números asociados a los sucesores de x. Se puede transformar la propiedad *(b)*, reemplazando el concepto de sucesor por el de predecesor. Es claro que la propiedad se conserva pues cambiando la orientación de todos los arcos no se modifica el hecho de la existencia o no existencia de un circuito del gráfico.

Sea Y_0 el conjunto de los vértices que no tienen predecesores es decir Y_0 es el conjunto de los $x \in X$ y tales que $\Gamma^{-1} x = \emptyset$. Sea b la aplicación que asocia a cada uno de los elementos de Y_0 el valor cero es decir, para todo $x \in Y_0$ $b(x) = 0$. Sea $X_1 = X - Y_0$ y sea Y_1 el conjunto de los vértices de X_1 que no tienen predecesores en X_1 (es decir sus predecesores pertenecen a Y_0). Entonces $Y_1 = \{ x \mid x \in X_1, \Gamma^{-1} x \cap X_1 = \emptyset \}$

Asociemos a estos vértices de Y_1 mediante b el valor 1 es decir para todo $x \in Y_1$, $b(x) = 1$.

Se puede seguir este procedimiento construyendo en cada caso el conjunto Y_k a cuyos elementos les asociamos el valor k así

$$X_k = X - \bigcup_{i=0}^{i=k-1} Y_i \quad \text{y} \quad Y_k = \{ x \mid x \in X_k, \Gamma^{-1} x \cap X_k = \emptyset \}$$

y para todo $x \in Y_k$ $b(x) = k$.

Se tiene pues un sistema iterativo para la construcción del sistema de números $b(x)$ paso a paso que llamaremos el rango del vértice en cada etapa se define $b(x)$ por lo menos para un vértice, y sabiendo que $card(X)$ es finito, en un número finito de pasos se llegara al final.

Tenemos entonces que *(b)* implica *(c)* como se sabe que *(a)* implica *(b)*, entonces *(a)* implica *(c)*. Que de *(c)* se sigue *(a)* es claro, pues, recorriendo un camino, la aplicación es estrictamente creciente de vértice a vértice. No se puede entonces, a lo largo del camino pasar 2 veces por el mismo vértice y esto para todos los caminos lo que termina la demostración.

4. SISTEMAS DE POTENCIAL SOBRE UN GRAFICO.- Se llama sistema de potencial a un sistema de desigualdades de la forma $t_j - t_i > a_{ij}$ donde los i, j varían de 1 a n, los t_k son las incógnitas, los valores a_{ij} son valores dados. El término potencial se debe a la analogía con los circuitos eléctricos.

I. Enunciado del problema. Sean n incógnitas de la forma t_i, donde $i \in N$, $N = \{ 1, 2, 3, \ldots, n \}$ y que satisfacen las desigualdades:

$$\begin{array}{lll} 1) & t_i \geqslant b'_i & i \in N' \; ; N' \subset N \\ 2) & t_i \leqslant b''_i & i \in N'' \; ; N'' \subset N \\ 3) & t_j - t_i \geqslant a'_{ij} & (i, j) \in K' \; ; K' \subset N \times N \\ 4) & t_j - t_i \leqslant a''_{ij} & (i, j) \in K'' \; ; K'' \subset N \times N \end{array}$$

donde b'_i, b''_j, a'_{ij}, a''_{ij} son constantes dadas. Resolver el problema significa a) determinar la o las soluciones del sistema (eventualmente la no existencia); b) a partir de una función criterio determinar la solución única óptima.

Es evidente que este problema cae bajo el campo de la programación lineal y que un algoritmo (p. e. el simplex) puede resolverlo. Se verá que basándose en la teoría de gráficos se pueden encontrar criterios de existencia y de optimización mucho más simples. Se resolverá el problema aquí encontrando la solución que minimiza el sistema.

II. Resolución del problema. Sea P el conjunto de las soluciones T del sistema. Introduzcamos una relación de orden $\leqslant$ definida así

$$T' \leqslant T \quad \text{si y solo si} \quad t'_i \leqslant t_i \quad \text{para todo } i \in N;$$

entonces si $P \neq \emptyset$ el sistema admite una solución mínima (bajo ésta relación de orden, P es un retículo).

Sea θ la solución (mínima) tal que

$$\theta \leqslant T \quad \text{para todo } T \text{ en } P, \text{ si } P \neq \emptyset$$

1. Asociemos al sistema de potenciales un gráfico así: sea $G = (X, U)$ el gráfico tal que $X = \{ x_i \}_{i \in N} \cup \{ x_0 \}$; $N = \{ 1, 2, \ldots, n \}$

Sea $N_0 = N \cup \{ 0 \}$. Definamos
$$\begin{array}{ll} b'_i = a_{oi} & \text{para todo } i \in N' \\ b''_i = a_{io} & \text{para todo } i \in N'' \\ a'_{ij} = a_{ij} & \text{para todo } (i, j) \in K' \\ a''_{ij} = a_{ji} & \text{para todo } (i, j) \in K'' \end{array}$$

Sea $K \subset N_o \times N_o$ tal que $(i, j) \in K$ si y solo si $(x_i, x_j) \in U$, Asociemos cada valor t_i, $i \in N$ a un vértice x_i y a x_0 el valor $t_0 = 0$; y a cada arco (x_i, x_j) el valor a_{ij} que se llamará su longitud.

2. Una condición necesaria y también suficiente (pero la demostración no se hará aquí. Ver por ejemplo [2] páginas 95 - 99) de la existencia de un sistema de potenciales sobre G es la de que no haya circuitos de longitud positiva.

Demostración. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_p, x_1$ vértices que forman un circuito de longitud positiva. Se tiene entonces que

$$t_2 - t_1 \geqslant a_{12}$$

$$t_3 - t_2 \geqslant a_{23}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$t_p - t_{p-1} \geqslant a_{p-1\,p}$$

$$t_1 - t_p \geqslant a_{p1}$$

Sumando tenemos que $0 \geqslant K$ y $K > 0$ lo que es absurdo. Recíprocamente, se puede construir un sistema de potencial sin circuitos de longitud positiva. Entonces si no hay circuitos de longitud positiva $P \neq \emptyset$.

III. Método de Resolución. Sea G tal que todo arco es de longitud positiva, necesariamente no tiene circuitos. Asociemos a cada vértice x_i un número a_i llamado su "marcación" utilizando el mismo método que nos ha servido para encontrar el rango de un vértice en un gráfico sin circuitos y de valor:

a) $a_i = 0$ para todo x_i que no tiene predecesores es decir todo x_i tal que $\Gamma^{-1} x_i \cap X = \emptyset$.

b) Entre los vértices no marcados se toma un vértice x_i tal que todos sus predecesores estén marcados y se le asocia el valor:

$$a_i = \max_{x_b \in \Gamma^{-1}_{x_i}} [a_b + a_{bi}]$$

es decir, dado que todos los predecesores de x_i están marcados, el valor de esta marca más la longitud del arco al vértice x_i y esto para todos los predecesores, nos determinará el valor máximo, marcación de x_i. Se continua la fase b) hasta que todos los vértices estén marcados.

Es claro que existe necesariamente por lo menos un vértice para el cual todos los antecedentes estén "marcados". De no ser así, G tendría por lo me nos un circuito (propiedad (b) secc. 3).

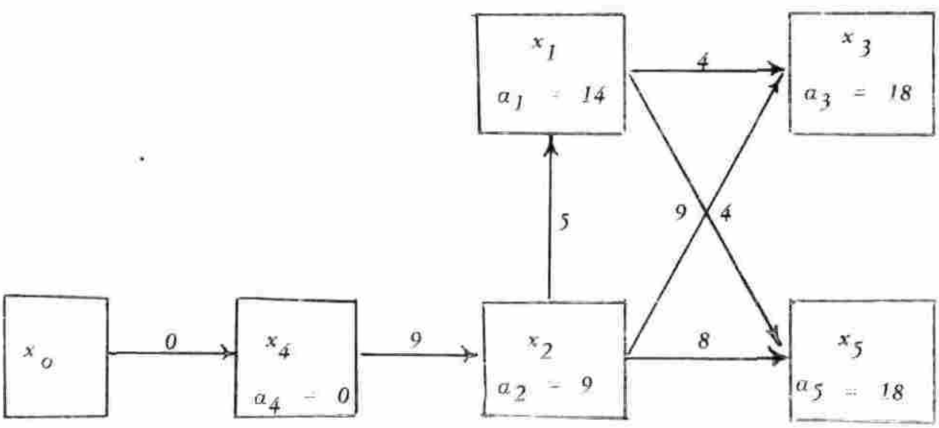
El método es fácilmente programable en un ordenador; el algoritmo corres ponderá a las fases (a) y (b), los valores a_i nos dan los valores mínimos que los t_i pueden tomar.

El sistema de soluciones $\{a_i\}$ para $i \in N_o$ es igual a $\emptyset$ ya que en cada vértice por lo menos una condición de desigualdad es cerrada.

EJEMPLO .- Sea el sistema :

$$t_1 - t_2 \geqslant 5$$
$$t_3 - t_1 \geqslant 4$$
$$t_5 - t_1 \geqslant 4$$
$$t_2 - t_4 \geqslant 9$$
$$t_3 - t_2 \geqslant 9$$
$$t_5 - t_2 \geqslant 8$$

Construyamos el gráfico



1) Se marca $a_4 = 0$ (tiene a x_0 como antecesor y la longitud de arco (x_0, x_4) es cero).

2) x_2 tiene todos sus antecesores $(x_4$ únicamente) marcados, entonces en este caso $max\{0 + 9\} = 9$ $a_2 = 9$.

3) x_1 tiene todos sus antecesores marcados.

En este caso $a_1 = max \{ 9 + 5 \} = 14$

4) x_3 tiene todos sus antecesores marcados (en este caso x_1 y x_2) luego $a_3 = max [(14 + 4), (9+9)] = 18$

5) x_5 tiene todos sus antecesores marcados (en este caso x_1 y x_2) luego $a_5 = máx [(14 + 4), (9 + 8)] = 18$.

Entonces la solución mínima del sistema es :

$$
\begin{aligned}
t_1 &= 14 \\
t_2 &= 9 \\
t_3 &= 18 \\
t_4 &= 0 \\
t_5 &= 18
\end{aligned}
$$

BIBLIOGRAFIA

1) C. BERGE. Théorie des graphes et ses applications. Dunod. París. 1967.
2) B. ROY. Cheminement et connexité dans les graphes. Applications aux problemes d'ordennancement. METRA 1. 1962. págs. 85 - 100.
3) ORE. Teoría de gráficos. NORMA. Cali. 1967
4) Policopiados de la E. N. S. A.. 1967. París.