CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS

CURSO DE ANALISIS MATEMATICO DICTADO EN LA FACULTAD DE MATEMATICAS E INGENIERIA

por JORGE ACOSTA V.

CALCULO INTEGRAL

INTEGRALES INDEFINIDAS

I—PROCEDIMIENTOS DE INTEGRACION

1.—*Objeto de este estudio. — Existencia de la integral indefinida. Definiciones y notaciones*

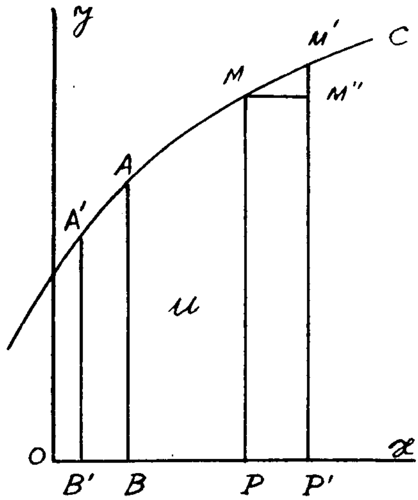
En el Cálculo Diferencial se estudian los procedimientos para obtener las derivadas de las funciones: el problema inverso, o sea la investigación de las funciones cuyas derivadas se conocen, es el objeto del Cálculo Integral.

Dada una función de una sola variable podemos considerarla como la derivada de otra función desconocida y proponernos encontrar ésta, que tendrá por diferencial el producto de la función dada por la diferencial de la variable independiente.

Sea $f(x)$ una función continua de la variable x: vamos a demostrar que existe siempre otra función $\phi(x)$ que tiene por diferencial a $f(x)dx$.

Construyamos la curva $A\,M\,C$ cuya ecuación en coordenadas cartesianas rectangulares es $y = f(x)$ y consideremos el área limitada por esa curva, el eje de las x, la ordenada fija $A\,B$, arbitrariamente escogida, y la ordenada variable $M\,P$, correspondiente a la abscisa x.

Esa área, que designaremos por la letra u, es evidentemente una función de la variable independiente x, puesto que a cada valor que atribuyamos a ésta corresponde un valor perfectamente determinado de u y podemos por tanto escribir la relación $u = \phi(x)$.



Si a partir del valor $x = OP$ damos a la variable independiente un incremento infinitesimal $\Delta x = PP'$, el área experimentará un incremento correspondiente Δu, infinitesimal al mismo tiempo que Δx, representado en la figura por el segmento $PMM'P'$ y que puede descomponerse por medio de la paralela MM'' al eje Ox en el rectángulo $PMM''P'$ y el triángulo $MM'M''$. El rectángulo, que es del mismo orden infinitesimal que Δx, constituye la parte principal de ese incremento, o sea, la diferencial de la función u, y como el área de ese rectángulo tiene por expresión el producto $f(x)\,dx$, podemos escribir la relación

$$du = f(x)\,dx$$

que es lo que queríamos demostrar.

Determinada una función $\phi(x)$ que tiene por derivada a la función dada $f(x)$, podemos deducir de ella una infinidad de funciones que cumplen la misma condición, porque al agregar a la primera una constante cualquiera A, la suma $\phi(x) + A$ tiene la misma derivada que $\phi(x)$. Así pues, todas las funciones comprendidas en la fórmula general

$$F(x) = \phi(x) + C \qquad 1)$$

en que C es una constante arbitraria tienen por derivada a $f(x)$, pero ninguna función que no esté comprendida en esa fórmula cumple la misma condición puesto que dos funciones cualesquiera que tienen la misma derivada no pueden diferir sino por una constante.

En la figura se puede apreciar claramente el significado de la constante arbitrariamente C, porque si en lugar de contar el área u a partir de la ordenada fija AB se la cuenta desde otra ordenada cualquiera $A'B'$, también fija, se tendrá la nueva área $B'A'MP$ que tiene la misma diferencial que la primera y difiere de ella en el segmento constante $B'A'AB$.

A una función $\phi(x)$ cuya derivada es la función dada $f(x)$ se le da el nombre de *función primitiva de* $f(x)$ o de *integral de la diferencial* $f(x)\,dx$, y se la representa por el símbolo

$$\int f(x)\,dx$$

que se lee *integral de* $f(x)\,dx$.

La operación por la cual se pasa de una diferencial dada a la función primitiva se llama *integración*. La integración y la diferenciación son por tanto dos operaciones inversas, de manera que los signos que las representan, aplicados a la misma función, se destruyen mutuamente y así, por definición, se tiene

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$$

$$\int d\phi(x) = \phi(x)$$

De acuerdo con lo dicho arriba, si $\phi(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$, la función más general que cumple la misma condición es $\phi(x) + C$ y por tanto podemos escribir

$$\int f(x)\,dx = \phi(x) + C \qquad 2)$$

Esta función se llama *integral general* o *integral indefinida* de la diferencial dada y como vemos, comprende una constante arbitraria.

Debe advertirse que no hay *ningún método* general para encontrar las integrales de las funciones: es más, si la función dada $f(x)$ es una combinación de funciones elementales (algebraicas, exponenciales, circulares directas o inversas, logaritmos, etc.), sólo en casos muy particulares su integral será una combinación semejante, de suerte que el Cálculo Integral conduce desde el principio al estudio de funciones nuevas.

2.—*Reglas y procedimientos usuales de integración.*

De los métodos estudiados en el Cálculo Diferencial para obtener las derivadas de las funciones podemos deducir ciertas reglas para la averiguación de las integrales de algunas diferenciales sencillas, como se verá en seguida:

a) *Integral del producto de una diferencial por un factor constante.*

Se ha visto que la diferencial del producto de una función por un factor constante es igual al producto de ese factor por la diferencial de la función, o sea, que se tiene idénticamente

$$d\,af(x) = a\,df(x).$$

Al integrar los dos miembros de esta igualdad tendremos:

$$\int daf(x) = \int adf(x),$$

pero por definición

$$\int daf(x) = af(x) \quad \text{y} \quad f(x) = \int df(x)$$

por tanto,

$$\int adf(x) = a\int df(x) \qquad 3)$$

lo que muestra que el factor constante se puede introducir al signo $\int$ o sacarlo de él a voluntad.

b) *Integrales inmediatas.*

El cálculo de las derivadas nos enseña a escribir inmediatamente las diferenciales de algunas funciones sencillas, y procediendo a la inversa podemos deducir sin dificultad las correspondientes integrales, como se muestra en el siguiente cuadro:

$$d\,x^n = n\,x^{n-1}\,dx\,, \qquad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$d\,e^x = e^x\,dx\,, \qquad \int e^x\,dx = e^x + C$$

$$d\,a^x = a^x\,la\,dx\,, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{la} + C$$

$$d\,lx = \frac{dx}{x}\,, \qquad \int \frac{dx}{x} = lx + C$$

$$d\, sen\, x = cos\, x\, dx\,, \qquad \int cos\, x\, dx = sen\, x + C$$

$$d\, cos\, x = -\, sen\, x\, dx\,, \qquad \int sen\, x\, dx = -\, cos\, x + C$$

$$d\, tg\, x = \frac{dx}{cos^2\, x}\,, \qquad \int \frac{dx}{cos^2\, x} = tg\, x + C$$

$$d\, cot\, x = -\, \frac{dx}{sen^2\, x}\,, \qquad \int \frac{dx}{sen^2\, x} = -\, cot\, x + C$$

$$d\, arc\, sen\, x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}\,, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = arc\, sen\, x + C$$

$$d\, arc\, cos\, x = -\, \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}\,, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\, arc\, cos\, x + C$$

$$d\, arc\, tg\, x = \frac{dx}{1 + x^2}\,, \qquad \int \frac{dx}{1 + x^2} = arc\, tg\, x + C$$

$$d\, arc\, cot\, x = -\, \frac{dx}{1 + x^2}\,, \qquad \int \frac{dx}{1 + x^2} = -\, arc\, cot\, x + C$$

Al examinar los cuatro últimos renglones de este cuadro vemos que la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ puede tener dos valores diferentes que son *arc sen x* y — *arc cos x*, y que lo mismo ocurre con la integral $\int \frac{dx}{1 + x^2}$ que puede ser igual a *arc tg x* o a — *arc cot x*.

Esta aparente anomalía se explica fácilmente porque los dos arcos *arc sen x* y *arc cos x* tienen una suma constante que es $\frac{\pi}{2}$ y por tanto sus diferenciales son iguales y de signos contrarios; lo mismo ocurre con los arcos *arc tg x* y *arc cot x*.

En todas estas fórmulas *x* puede ser la variable independiente o una función cualquiera de ella. Por ejemplo, si en la fórmula

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n + 1} + C \qquad 4)$$

se reemplaza la variable *x* por la función *f(x)* resulta:

$$\int [f\,(x)\,]^n f'\,(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n + 1} + C.$$

De la misma manera que la fórmula de la diferencial de una potencia es aplicable cualquiera que sea el exponente, la fórmula 4) es general con la única excepción del caso en que $n = -1$, en el cual se vuelve ilusoria porque al aplicarla resulta:

$$\int x^{-1}\, dx = \frac{x^0}{0} + C.$$

Esto resulta de que la integral $\int \frac{dx}{x}$ es la función trascendente lx y no puede, por tanto, representarse por una expresión algebraica. No obstante esto, por un artificio de cálculo puede deducirse de la fórmula 4) el valor de la integral considerada.

En efecto, si en esta fórmula se le resta al segundo miembro la constante $\frac{1}{n+1}$, lo que no cambia su diferencial, resulta:

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1} - 1}{n+1} + C$$

Al hacer aquí $n = -1$ la fracción del segundo miembro toma la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ cuyo verdadero valor sabemos encontrar tomando las derivadas de los dos términos del quebrado con relación a n y haciendo luégo $n = -1$ en el cociente de ellas, o sea, en

$$\frac{x^{n+1}\, lx}{1}$$

lo que nos da lx que es el valor de la integral buscada.

Indicamos en seguida tres procedimientos con auxilio de los cuales se llega a veces a integrar una diferencial dada y que son la descomposición de la diferencial en elementos simples, la integración por partes y el cambio de la variable independiente.

c) *Descomposición en elementos simples.*

Según sabemos, la diferencial de una suma de funciones es igual a la suma de las diferenciales de los sumandos, de manera que si $u, v, w, \ldots z$ son funciones de x se tiene:

$$d\,(u + v + w + \ldots z) = du + dv + dw + \ldots + dz$$

Al integrar los dos miembros de esta igualdad, se tiene:

$$u + v + w + \ldots + z = \int (du + dv + \ldots + dz)$$

o lo que es lo mismo:

$$\int (du + dv + dw + \ldots + dz) = \int du + \int dv + \ldots + \int dz$$

o sea, que la integral de una suma de diferenciales es igual a la suma de las integrales de los sumandos.

Si se puede descomponer la función dada $f(x)$ en una suma de otras cuyas integrales son conocidas se podrá obtener sin dificultad la integral $\int f(x)\,dx$.

Ejemplo: Sea la integral $\int \cos^2 x\,dx$;

sabemos que $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ y en consecuencia,

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx,$$

lo que da finalmente,

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C.$$

d) *Integración por partes.*

Se ha visto que si u y v son dos funciones de x la diferencial de su producto tiene por expresión:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du.$$

Integrando los dos miembros de esta igualdad resulta:

$$u\,v = \int u\,dv + \int v\,du,$$

de donde se deduce

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du. \qquad 5)$$

Esta es la llamada fórmula de *integración por partes* o por factores, de uso muy frecuente en el Cálculo Integral.

Para aplicar esta fórmula se procura descomponer la función por integrar en un producto de otras dos, una de las cuales sea la derivada de una función conocida, y se reduce así el problema a integrar el producto de esta función por la diferencia del otro factor, operación que puede resultar más sencilla que la propuesta.

Damos en seguida algunos ejemplos de la aplicación de esta fórmula:

1º Sea la integral $\int x^2 \cos x\, dx$.

Haciendo $x^2 = u$, $\cos x\, dx = dv$ resulta $v = \operatorname{sen} x$, y por consiguiente $\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \operatorname{sen} x - 2 \int x \operatorname{sen} x\, dx$, reduciéndose así el cálculo de la integral propuesta al de $\int x \operatorname{sen} x\, dx$. Si a esta última le aplicamos la misma fórmula, observando que $\operatorname{sen} x\, dx$ es la diferencial de $-\cos x$, obtendremos finalmente,

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \operatorname{sen} x + 2\, x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C;$$

2º Sea la integral $\int x^n e^x\, dx$.

Haciendo aquí $x^n = u$ y $e^x\, dx = dv$ de donde $v = e^x$ resulta:

$$\int x^n e^x\, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x\, dx;$$

reemplazando en esta fórmula a n por $n - 1$, se tiene:

$$\int x^{n-1} e^x\, dx = x^{n-1} e^x - (n - 1) \int x^{n-2} e^x\, dx,$$

y así la aplicación sucesiva de ella permite reducir de unidad en unidad el exponente n hasta anularlo si es entero, caso en el cual se obtiene finalmente:

$$\int x^n e^x\, dx = e^x \left[x^n - nx^{n-1} + n\,(x - 1)\, x^{n-2} - \ldots \pm n!\right] + C;$$

3º Sea la integral $\int lx\, dx$.

Haciendo $lx = u$, $dx = dv$ resulta:

$$\int lx\, dx = x\, lx - \int x \frac{dx}{x} = x\,(lx - 1) + C.$$

e) *Cambio de variable* o *sustitución.*

Este es el más importante de los procedimientos de integración.

Supongamos que se trata de calcular la integral

$$I = \int f(x)\, dx$$

y hagamos el cambio de variable indicado por la ecuación $x = \phi(t)$, de donde $dx = \phi'(t)\, dt$.

Como se tiene *por definición:*

$$d\, I = f(x)\, dx$$

al hacer el cambio resulta:

$$dI = f\,[\phi(t)]\,\phi'(t)\,dt,$$

es decir, que la derivada de I en relación a la variable t es $f\,[\phi(t)]\,\phi'(t)$ y por consiguiente:

$$I = \int f\,[\phi(t)]\,\phi'(t)\,dt,$$

o sea, que en la integral propuesta se reemplazan x y dx por sus valores en función de t y se obtiene así una integral en t que puede ser más fácil de calcular que la propuesta. Hecha la integración resulta una función de la variable t en la cual se reemplazará ésta por su valor en función de x deducido de la ecuación $x = \phi(t)$.

Ejemplos:

1º $\int (ax + b)^m dx.$

Hagamos $ax + b = t$, de donde $dx = \dfrac{dt}{a}$ y entonces resulta:

$$\int (ax + b)^m dx = \int t^m \frac{dt}{a} = \frac{t^{m+1}}{(m+1)a} + C$$

y reemplazando a t por su valor

$$\int (ax + b)^m dx = \frac{(ax + b)^{m+1}}{(m+1)a} + C.$$

2º $$\int \frac{5\,x^3\,dx}{3\,x^4 + 7}$$

Observando el quebrado por integrar se ve que el numerador es, a menos de un factor constante, igual a la diferencial del denominador, lo que indica la conveniencia del cambio $3\,x^4 + 7 = t$, que da $12\,x^3\,dx = dt$ y $x^3 dx = \dfrac{1}{12}\,dt$, de donde resulta:

$$\int \frac{5\,x^3\,dx}{3\,x^4 + 7} = \frac{5}{12}\int \frac{dt}{t} = \frac{5}{12}\,lt + C$$

y finalmente:

$$\int \frac{5\,x^3\,dx}{3\,x^4 + 7} = \frac{5}{12}\,l(3\,x^4 + 7) + C.$$

3º $$\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

Hagamos $\sqrt{a^2+x^2}=t,$ que da $a^2+x^2=t^2$ y $x\,dx=t\,.\,dt,$ y entonces

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\int\frac{t\,dt}{t}=t+C,$$

o sea, que

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\sqrt{a^2+x^2}+C.$$

4º Sea la integral de uso frecuente:

$$\int\frac{dx}{x^2+p\,x+q}$$

cuando los dos factores del denominador son imaginarios, es decir, cuando $q-\dfrac{p^2}{4}>o.$

Se tiene idénticamente:

$$x^2+p\,x+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}$$

y haciendo $x+\dfrac{p}{2}=t\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}$ resulta:

$$x^2+p\,x+q=\left(q-\frac{p^2}{4}\right)(1+t^2) \quad \text{y} \quad dx=dt\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$$

lo que transforma la integral propuesta en

$$\int\frac{dt\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)(1+t^2)}=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\int\frac{dt}{1+t^2}$$

y entonces:

$$\int\frac{dx}{x^2+p\,x+q}=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\ \mathit{arc\ tg}\ \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

5º $$\int \frac{dx}{\sqrt{a - b\,x^2}}$$

Sacando del signo el factor constante $\frac{1}{\sqrt{a}}$ resulta:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a - b\,x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{b}{a}\,x^2}}$$

Si hacemos ahora el cambio $\frac{b}{a}\,x^2 = t^2$ resulta:

$$x = \sqrt{\frac{a}{b}}\,t \quad \text{y} \quad dx = \sqrt{\frac{a}{b}}\,dt, \quad \text{lo que da}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{b}{a}\,x^2}} = \int \frac{\sqrt{\frac{a}{b}}\,dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \sqrt{\frac{a}{b}}\; arc\ sen\ t + C$$

y volviendo a la variable primitiva

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a - b\,x^2}} \int = \frac{1}{\sqrt{b}}\, arc\ sen\ \sqrt{\frac{b}{a}}\, x + C$$

6º $\int arc\ sen\ x\ dx.$

Hagamos $arc\ sen\ x\ dx = t,$ de donde $x = sen\ t$ y $dx = cos\ t\ dt,$ lo que da $\int arc\ sen\ x\ dx = \int t\ cos\ dt.$

Integrando por partes el segundo miembro, se tiene:

$$\int t\ cos\ t\ dt = t\ sen\ t + cos\ t + C,$$

y volviendo a la variable primitiva

$$\int arc\ sen\ x\ dx = x\ arc\ 1\ m\ x + \sqrt{1 - x^2} + C.$$

Vamos a aplicar ahora los procedimientos expuestos a los tipos de funciones que se saben integrar y que son los siguientes:

Funciones algebraicas:

1º Funciones racionales de la variable x.

2º Funciones racionales de x y radicales de la forma $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ en que los coeficientes a, b, c, d son los mismos en todos ellos.

3º Funciones racionales de x y de $\sqrt{a+bx\pm cx^2}$

4º Funciones racionales de x y de y cuando estas variables están ligadas por una ecuación $\phi(xy)=O$ que representa una curva universal.

Funciones trascendentes:

1º Funciones racionales de $sen\,x$ y $cos\,x$.

2º Funciones racionales de e^{mx}.

3º Polinomios enteros en $x, e^{\alpha x}, e^{\beta x}, \ldots\ sen\,\alpha x, cos\,\alpha x, sen\,\beta x, cos\,\beta x, \ldots$

4º Polinomios enteros en x y lx o en x y $arc\,sen\,x$.

(*Continuará*).