EL CONCEPTO DE NUMERO: LA POSICIÓN DE GOTTLOB FREGE

CARLOS M. MÁRQUEZ
Universidad Nacional

Resumen: "¿Qué cosa es el número? Una cosa..." El presente ensayo no trata de decidir si el número es una cosa. La pregunta relevante es qué clase de cosa es. ¿Cuál es la naturaleza del número? A éste respecto, primero, analizamos dos posibles respuestas desde la posición crítica de Frege: l)La Psicologista 2) La formalista. Después, damos la respuesta del propio Frege: el número es un objeto de tipo lógico (logicismo). Para ilustrar ésta última, mostramos la definición del número 0 y la del número 1. Por último, se formula la pregunta de si existe una diferencia importante en la definición de ambos conceptos. ¿El 1 es generado a partir del **0** por la operación de sucesor, o más bien, 1 es la negación de 0?

Abstract: "What is a number? A thing..." The aim of this paper is not to decide whether a number is a thing or is not. The important question is, rather, what *kind of* thing a number is? What is the nature of a number? Thus, we will discuss two possible answers: [1] the psychological answer, and [2] the answer of Formalism. Consequently we will supply Frege's answer: the number is a logical object (logicism). In order to illustrate this solution, we will supply Frege's definitions of 0 and 1. Finally, we will lay the question whether there remains a substantial difference between both of them: is 1 generated irom 0 through the immediate successor operation, or rather, is 1 the negation of 0?

> *A. ¿Qué cosa es el número? B. Una cosa. A. Pero, ¿qué cosa? B. La que se te antoje. A Entonces yo puedo reemplazar en una ecuación el '1' por lo que se me antoje. B. Del mismo modo que en $x+x \cdot x=x$ puedes reemplazar a x por cualquier número. A. ¿Puedo reemplazar '1' por 'la luna' en 1+1=2?*
>
> **Kenny, Anthony; Introducción a Frege**

El propósito de este estudio es desarrollar una problemática específica en torno a la teoría conjuntista. Con este propósito, vamos a tratar a continuación un problema que se dirige a cuestionar el campo de la teoría de números de manera inmediata, pero que de uno u otro modo, haciendo las analogías precisas (las cuales se harán explícitas más adelante), se dirige también al campo de la teoría de conjuntos. La cuestión a la que me refiero se podría formular, en principio, sencilla aunque por esto vagamente, del siguiente modo: ¿qué es el número?

Para explicar el enfoque que aquí doy a la pregunta, repárese primero en que evidentemente la pregunta: ¿qué es el número? se remite a los objetos fundamentales del campo de teoría de números. Dentro de este campo, me remitiré a la extensión ya no de los números en general, sino de los números naturales; pues en éstos se fundamentan el resto de sistemas numéricos. Me serviré por tanto de la teoría de los números naturales o aritmética, ya que las demás teorías se fundan en cierto modo en ésta. Para observar esto, es conveniente decir que los números reales, los racionales y los enteros, aunque los denominemos del mismo modo: números, son todos ellos distintos entre sí; así que, en cada uno de ellos la palabra número debe usarse de acuerdo a ciertas características que le son propias a cada teoría y que hacen que el significado de aquella se extienda a diferentes ámbitos en los que es redefinida. Así, el concepto de número es redefinido cuando se pasa de la teoría de los números naturales a la teoría de los números enteros; desde esta teoría es a la vez redefinido cuando se pasa a la teoría de números racionales, y así en todos los casos.

Ahora bien, la pregunta por lo que sea un número, y en especial (aunque más bien debiera decirse: y en particular), por lo que sea un número natural, en el sentido en que la formulo no es ni involucra la cuestión del carácter ontológico de los números, como pudiera pensarse al observar la forma interrogativa: ¿qué es...? Esta forma no hace referencia necesariamente a cuestiones ontológicas, aunque muchas veces se utiliza en estos contextos. La pregunta por el carácter ontológico no se debe considerar en modo alguno irrelevante, sin embargo, no es la que me formulo aquí. Lo que aquí me pregunto tiene que ver, más bien, con la función de los números en el lenguaje, y con su significado.

Dado que supongo que toda persona a la que se dirija la pregunta sobre lo que ha de ser un número se hace a alguna idea de lo que intento significar por "número", entonces la pregunta inicial se formularía del siguiente modo: ¿cuál es la naturaleza de lo que intento significar con un número?

Busco responder a esta pregunta partiendo de una caracterización somera sobre las diferentes concepciones de las entidades numéricas, vistas estas concepciones desde la posición crítica de Frege. Ahora bien, no se trata de responder decidiendo si los números son o no son "algo". De lo que se trata es de: suponiendo que los números son "algo" (ya que si no fueran algo entonces los signos numéricos tales como "1", "2", etc., introducidos dentro de un determinado contexto carecerían de significado, o mejor, de referencia), indagar sobre la naturaleza del número. A este respecto, existen tres concepciones diferentes. Una de ellas dice que el número es un objeto de tipo lógico, otra que es un objeto psicológico y otra que es un objeto meramente formal. Sólo por dar una explicación de estas tres maneras de caracterización de la naturaleza del número considérese que éstas son las ideas más comunes y aceptadas que se tiene sobre el significado de la palabra. En efecto, uno podría pensar, o bien que los números son representaciones, signos mentales abstraídos de propiedades de los objetos físicos (psicologismo), o que son signos sin contenido expreso (formalismo), o que son signos puramente lógicos (logicismo). En el primero de los casos los signos considerados de este modo son más bien subjetivos, en el segundo de los casos son más bien formas y no objetos; mientras que, en el tercero, el carácter objetivo de los números se defiende a toda costa.

Con el fin de dilucidar mejor el asunto principal voy a distinguir entre lo que referimos con la palabra número y lo que referimos con la palabra numeral. Por lo general, se tienen dos concepciones acerca de los lenguajes. O bien los lenguajes son signos convencionales de cosas, o bien, son signos naturales. Lo mismo sucede para el lenguaje de la aritmética. En ella el numeral es un signo al que se atribuye un significado meramente convencional, mientras que el número es un signo del que se dice que significa la naturaleza misma de lo que él es signo. Así, por ejemplo, son dos cosas bien diferentes "1" como número y "1" como numeral, pues con el primero designo la naturaleza de la cosa misma que es "una", mientras que el segundo sólo es un modo de representar el número "uno", el cual, bien podría haber representado con cualquier signo que se me antojara, por ejemplo: &. Por tanto, 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 pueden ser considerados como numerales que designan números de cuya combinación resultan otros numerales: 100,34,23, etc. No preguntamos: ¿qué es un numeral? ¿qué es, por ejemplo, el signo "1"? —lo que no tiene sentido preguntar si sabemos que un numeral es un signo convencional, pues un numeral sería entonces: "lo que se me antoje"— sino que preguntamos: ¿qué es un número? lo cual tiene sentido, pues realmente no sabemos cuál sea la naturaleza misma de la que un número sea signo.

Hemos de decir que las consideraciones anteriores son objeciones a la concepción formalista de número, aunque con ellas no queda rebatido el formalismo, sí nos dicen que los números no pueden ser signos sin contenido tal como lo son los numerales. Ellos deben ser signos naturales de algo y no meras fórmulas convencionales. (Véase los formalistas y en especial: Hilbert, en la bibliografía hay material). Cabe entonces preguntar si los números son signos naturales de representaciones mentales o de objetos físicos.

Vamos a responder a las anteriores preguntas apelando a la posición de Frege, ya que, como una razón a primera vista considerable, tenemos que muchos matemáticos y filósofos tales como: Camap, Russell, Wittgenstein, se basaron en su obra hasta que los posteriores resultados de Gödel fueron publicados. En segundo lugar, porque aunque Frege trata de fundamentar la aritmética en la lógica, vemos que está muy cerca de la teoría de conjuntos. En efecto, cuando trabaja con la noción de concepto, que se verá a continuación, ésta se asocia a la noción de conjunto (la extensión de un concepto es el conjunto de todos los objetos que caen dentro del concepto; así, un conjunto es definido por extensión cuando se "listan" sus elementos mientras que es definido por intensión mediante una propiedad o característica común a todos los elementos). Cuando trabaja con "equinumeroso", está trabajando con una definición basada en la relación uno a uno de los objetos que se aplican a un concepto con los objetos que se aplican a otro (función biyectiva). Y para ir más lejos, define a los números como clases de clases; definición en la que Russell advierte, como se advierte en la teoría de conjuntos, cierta paradoja según la cual una clase sería, a la vez, elemento de sí misma. De hecho, en los *Grundgesetze der Arithmetik* Frege reemplazará "concepto" por "conjunto" en su desarrollo de la aritmética con base en la lógica pura. Pero todos estos elementos los veremos aplicados más adelante. Por ahora sólo quería aclarar por qué escogí explicar la posición de Frege. Teniendo en cuenta que mi propósito es trabajar un problema sobre la teoría de conjuntos, en la obra de Frege encuentro que se pueden hacer analogías precisas entre dicha teoría y la teoría de números.

Grundlagen der Arithmetik es la obra cumbre de Frege. En ella se ocupa, en primer lugar, de criticar los puntos de vista anteriores y contemporáneos sobre qué son los números y cuál es la naturaleza de la verdad matemática, para luego introducir su propia definición de las nociones básicas de la Aritmética en términos puramente lógicos.

En los *Grundlagen der Arithmetik* se defienden tres principios fundamentales:

1. La necesidad de separar lo subjetivo de lo objetivo, lo psicológico de lo lógico. Según Frege, la representación mental que pueda producir una palabra es irrelevante para el significado de la misma. "El significado lo da más bien el papel desempeñado por las palabras en la determinación de las condiciones de verdad de las oraciones en las cuales aparece" (Dummett, 1967, p.164).

2. El que el contexto de una proposición es en donde se debe preguntar por el significado de una palabra y no aisladamente. El preguntarnos por el significado de una palabra sin tener en cuenta el contexto de la oración en que aparece nos conduce a elegir una imagen mental como su significado.

3. La distinción entre concepto y objeto.

Para este respecto hay que revisar dos aportes de Frege a la lógica, que se encuentran íntimamente relacionados, a saber: el cálculo proposicional veritativo funcional y el análisis de proposiciones en la forma argumento-función en lugar del esquema sujeto-predicado.

La teoría de "las galletas y los guijarros" es la primera filosofía de la aritmética que Frege critica. Según esta concepción, defendida por Mill, los números son generalizaciones de agrupaciones de objetos, esto es, la aritmética "descansa en la inducción a partir de hechos relativos a agrupaciones concretas de cosas" (Kneale, 1980, p. 140). Frege refuta a Mill con los siguientes argumentos:

1) Si el uso correcto del número 1 se sustenta en que tengo un objeto en el bolsillo, tendría que tener en el bolsillo también 1.345.897 objetos para usar correctamente este número, lo cual es absurdo.

2) La misma noción de inducción sobre la que la teoría empirista construye la definición de número, requiere alguna noción de la aritmética como por ejemplo la teoría de la probabilidad. Luego las leyes generales de la aritmética no pueden ser verdades inductivas.

3) En la concepción de "las galletas y los guijarros" hay una confusión al suponer que la suma hace referencia a la adición física de objetos. El contraejemplo que proporciona Frege es el de la suma de líquidos que por reacción química no arrojan el resultado que uno esperaría, por ejemplo agregar dos litros de un liquido a tres de otro dando por resultado cuatro litros. Si la suma fuera la adición física tendríamos que decir que en este caso $2+3=4$, lo cual es absurdo.

La segunda concepción que Frege ataca es la psicologista. Cuando en esta concepción usamos las palabras nos estamos refiriendo a procesos mentales. Los números, por tanto, o mejor el significado de estos, es el proceso mental que los acompaña. En el parágrafo 58 del capítulo "El concepto de número" de los Grundlagen, Frege argumenta contra esta posición de la siguiente manera: "Si uno se representa la palabra impresa «oro», no asocia al principio número alguno con ella; si ahora uno se preguntase cuantas letras tiene la palabra, el resultado sería el número 3; la imagen, no obstante, no estará en absoluto más definida, sino que permanecerá totalmente invariada".

Por último, Frege critica la concepción formalista de la aritmética. Para esta concepción la aritmética es un juego con signos vacíos (números). El formalista no se pregunta qué son los números, sino que exige la aritmética de ellos para poder usarlos.

Frege no aceptó esta posición porque si los números son signos vacíos, no tendrían ninguna aplicación posible. Además, según Frege, los formalistas confunden el número con el numeral, identifican números con signos sensibles. Pero si el 1 es sólo un signo vacío, ¿cómo explicar que al multiplicarse por sí mismo da otra vez 1?, ¿es esto una mera ficción? Por otra parte, si 1 es el trazo en el papel "ninguna investigación microscópica o química, por exhaustiva que fuese, podría descubrir nunca esta propiedad en la inocente figura que llamamos el signo numérico 1" (Frege, 1985a, P-21).

Ninguna de las teorías abordadas responde satisfactoriamente a la cuestión de qué es un número; no tenemos respuesta a ¿de qué cantidad estoy afirmando algo si digo 3 lunas? Frege debe dar ahora su solución al problema. Pero antes de establecer qué es un número, veamos, según lo dicho, qué no es: los números no son objetos espaciales pero tampoco son imágenes mentales. ¿Qué son entonces? Respuesta: Objetos lógicos. En palabras de Frege, "después de determinar que un número no era una colección de cosas, ni una propiedad de tal colección, ni tampoco el producto subjetivo de un proceso mental, decidimos que un enunciado numérico afirma algo objetivo acerca de un concepto".

Los números son objetos lógicos que caen bajo determinados conceptos. No se enumera un conjunto de objetos, los números no resultan de agregados de cosas. Un ejemplo es: "un montón de piedras puede ser uno (en tanto que constituye un solo montón) o veinte (en tanto que contiene veinte piedras) o cinco (en tanto que consta de cinco capas)". Si numeramos el montón de piedras como agregado de objetos no habría allí un número establecido, lo que debemos numerar es el concepto "montón de piedras". Para saber con exactitud qué es un concepto para Frege, aconsejo leer su ensayo *Función y concepto.* Muy someramente, diremos que, en este ensayo, Frege analiza el concepto de "Función" matemática, llegando a que la función es la estructura lógica común a un conjunto de enunciados; después, extiende dicho concepto al concepto de función lingüística, por medio de la introducción de símbolos. El concepto es lo que cumple el papel de función lingüística. "Concepto es una función cuyo valor es siempre un valor veritativo". Ahora bien, en el análisis de la función, Frege encuentra un componente importante: el argumento. Con esto distingue argumento de función, como partes que configuran un todo completo. Del argumento dice que es de carácter saturado, es decir, completo en sí mismo; mientras que de la función dice que es insaturada, es decir, incompleta en sí misma. La distinción función-argumento, como dijimos, se aplica en el contexto matemático. Análogamente, plantea la distinción concepto-objeto, la cual se aplica dentro de un contexto más amplio: el campo del lenguaje en general. Ahora, volviendo a lo nuestro, Frege dice que, los números no son conceptos, ya que no son incompletos en sí mismos. Por el contrario, son objetos, en la medida en que son completos. Cuando se dice "un montón de piedras". Observamos que "montón de piedras" es una expresión insaturada. Mientras que "un" es una expresión completa en sí misma. En términos lógicos podemos traducir esto como F(a), donde la función, F, es "montón de piedras" y el argumento, a, es "un". Bien podríamos reemplazar el argumento, a, por un argumento, b, que fuese, por ejemplo, "dos". Así, tendríamos: "dos montones de piedras".

Teniendo en cuenta esto vamos ahora a definir el número 0 y el número 1, ya que son los casos más simples y claros. "Si yo digo «Venus tiene 0 satélites» no hay satélite ninguno en ningún agregado de satélites del que quepa afirmar nada y lo que ha sucedido es que he asignado al concepto «satélite de Venus» una determinada propiedad a saber, el de no incluir nada bajo sí" (Kneale, 1980, p.421).

Esto no debe interpretarse como que 0 es una propiedad del concepto «satélite de Venus» (nótese que éste ejemplo es distinto al de "un montón de piedra"), sino que si esta expresión es interpretada como «0 es el número de satélites de Venus», el «es» de la nueva expresión no es predicativo sino que afirma identidad, por tanto «0» y «el número de satélites de Venus» son idénticos. Según la distinción hecha por Frege en *Sobre sentido y referencia,* las expresiones "0" y "el número de satélites de Venus" tienen la misma referencia, pero diferente sentido. Las dos expresiones nos muestran de manera diferente un mismo objeto.

¿Cómo definir el objeto al que hacen referencia las expresiones «0» y «el número de satélites de Venus»?, este problema debe verse como el problema de la definición del sentido del enunciado «el número que pertenece al concepto F es el mismo que pertenece al concepto G», de tal forma que si podemos establecer cuándo dos expresiones tienen el mismo número sabremos qué es número.

Para establecer una respuesta a la cuestión anterior Frege acude a la noción de la extensión de un concepto (noción que presupone como conocida de antemano) que es la clase de todos los objetos que caen bajo ese concepto. De esta manera el número del concepto F es la extensión del concepto equinumeroso al concepto F. El número de F será el mismo de G si existe una relación de equipotencia entre sus extensiones. Así se define el 'tener el mismo número que' con nociones puramente lógicas. El ejemplo de Frege es el siguiente: "Si un camarero desea asegurarse que ha colocado en una mesa exactamente tantos cuchillos como platos, no es preciso que cuente ni unos ni otros si coloca un cuchillo inmediatamente a la derecha de cada plato (...) los platos y los cuchillos están así correlacionados unos con otros de manera uno-a-uno, en este caso a través de la misma relación proposicional".

Antes de asentar la definición de número debe decirse que Frege se ha servido de diversas herramientas para llegar a sus definiciones; lo primero que hizo fue determinar el sentido de las expresiones en que aparecen números, ahora determinó la relación de identidad utilizando la definición de paralelismo en la dirección de una recta. Establezcamos entonces la noción de número: el número que pertenece al concepto F es la extensión del concepto «ser similarmente numerado con F».

Los números "cero" y "uno" son definidos de la siguiente manera:

- 0 es el número que pertenece al concepto no idéntico a sí mismo (El número de objetos que caen bajo este concepto es cero). Nótese que «no idéntico a sí mismo" proviene de la lógica pura, área donde se define la identidad y la negación. En lógica simbólica dicha definición se expresa: $\exists x(\sim x= x)$. Expresión ésta, contraría al axioma de no trivialidad (Ver un párrafo más adelante, la formulación del axioma de no trivialidad y su interpretación). En contraposición a la interpretación de éste axioma, se nos dice: no existe un conjunto, el universo no es algo, el universo es nada.

-1 es el número correspondiente al concepto «idéntico a 0». Sólo hay un número que es idéntico a 0 el cual es el 0 mismo. "Ser idéntico a sí mismo" se expresaría: $\exists x(x=x))$ Éste es el axioma de no trivialidad de la axiomática ZF. El cual se puede interpretar así: "Existe un conjunto, algo es el universo, el universo no es nada".

Por último, piénsese si entre estos dos conceptos no existe diferencia de categoría, parece que el uno es negación del otro y no sucesor. Un problema a señalar y que por falta de espacio y de tiempo ha de quedar solamente formulado es el siguiente: ¿EL "uno" se "genera", por así decir, del "cero" por negación o por la operación de sucesor? (véase con detenimiento las definiciones en términos simbólicos: 1. $\exists x(\sim x=x)$ y 2. $\exists x(x=x)$)

Lo que Frege esperaba de los *Grundlagen der Arithmetik* era, en sus palabras: "[Poner de] manifiesto que las leyes aritméticas son juicios analíticos y por tanto a priori, de conformidad con ello la aritmética sería tan sólo una lógica ampliamente desarrollada" (Frege,1971, p.160). Su proyecto se ve truncado por la paradoja descubierta por Russell, derivada del uso que hace Frege de la noción de clase. Frege, al conocer la paradoja que se derivaba de su sistema insertó en el segundo volumen de los *Grundgesetze der Arithmetik* un apéndice en el que debilitaba algunos de sus axiomas pretendiendo eliminar las contradicciones. Sin embargo Stanislaw Lesniewski probó, luego de muerto Frege, que incluso su modificación llevaba a contradicción. Su error se basaba en asumir las conclusiones sobre teoría de conjuntos de Cantor sin previa revisión. En conclusión, Frege fracasó en su intento de derivar la aritmética de la lógica; fracasó en su intento de mostrar que la naturaleza del número consiste en ser objeto lógico.

Tal vez pueda quedar un sentimiento de insatisfacción al concluir de ésta manera, diciendo que todo lo que hemos hecho no es más que dar una definición que ha fracasado. Sin embargo, muchos de los filósofos analíticos (en especial Carnap y Russell) derivan consecuencias de esta definición, importantes para sus concepciones. Conclusiones que, por cuestiones de espacio, y por no ser nuestro objetivo, no van a ser consideradas.

Además, con todos los elementos que se ven envueltos en ésta definición, Frege adelantó descubrimientos en lógica y filosofía definitivos para la reflexión filosófica del siglo XX. Su despsicologización de la filosofía, dado que lógica y psicología convergían en la filosofía, fue punto clave a seguir por filósofos, lógicos y matemáticos. Su definición del concepto de número, como se ha visto, hace pensar que la matemática, o por lo menos la aritmética, es de carácter lógico, y por ello, según la concepción de que la lógica es analítica, que la matemática es analítica. Cuestión que nos remite desde la lógica moderna y la teoría de conjuntos a la filosofía analítica.

Podemos darnos por satisiechos si llegando a la conclusión de que el número es un objeto de tipo lógico se nos abre la mente a las concepciones de la filosofía analítica. La importancia de la definición del concepto de número en términos lógicos es asombrosa para éstas concepciones. Podría decirse que el concepto fundamental de la matemática es éste (ya que, en términos generales, toda la matemática puede ser reducida a la teoría de los números naturales); por esto, su definición es utilizada para determinar cuál es el carácter del conocimiento matemático.

BIBLIOGRAFÍA

Ayer, Alfred (1990)

Frege, Russell y la lógica moderna, en *Los grandes filósofos,* Bryan Magge, Madrid, Cátedra.

Campos, Alberto (1994)

Axiomática y Geometría desde Euclides hasta Hibert y Bourbaki, Bogotá, U.N.

Dummett, Michel (1990)
La Filosofía de Frege, en *la verdad y otros enigmas,* Dummett, México. F.C.E.
Falk de Lozada, María (1992)
Introducción a la Matemática Contemporánea, Bogotá, U.N.
Frege, Gottlob
(1971) *El concepto de número,* en *Selección de Textos de Gottlob Frege,* Ernesto Battistella, Maracaibo. Universidad de zulia.
(1985a) *Función y concepto,* **en** *Estudios sobre semántica,* Madrid, Orbis.
(1985b) Prólogo e introducción *a Las leyes Fundamentales de la Aritmética,* en *Estudios sobre semántica,* Madrid, Orbis.

Kenny, Anthony (1997)
Introducción a Frege, Madrid, Cátedra.

Kneale, William & Martha (1980)
El desarrollo de la lógica, Madird, Tecnos.

Alfredo Deaño(1990)
Frege y el «tercer reino», en *Las concepciones de la lógica,* Madrid, Taurus.
El psicologismo (con especial atención a la versión que de él da John Stuart Mill), en *Las concepciones de la lógica.* Madrid, Taurus.

Enriques, Federico (1949)
La lógica Inductiva de Stuart Mill, IV. 34, en *Para la historia de la lógica,* Madrid, Espasa-Calpe.