EL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACION DE SCHRÖDINGER NO LINEAL EN H^s, $s = 1, 2$.

Por

Rodney Jaramillo Justinico

Tesis presentada como requisito parcial para
optar al título de Magister en Matemáticas

Directores: Pedro Isaza J.
Jorge Mejía L.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

FACULTAD DE CIENCIAS

POSGRADO EN MATEMATICAS

Septiembre de 1997

EL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACION DE SCHRÖDINGER NO LINEAL EN H^s, $s = 1, 2$.

Por

Rodney Jaramillo Justinico

Aprobado por:

Jorge Enrique Mejía L.

Jorge Mejía L.
Director

Pedro Isaza J.
Director

Jorge Cosío B.
Jurado

Jurado

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.

Este trabajo tiene por objeto estudiar el problema de Cauchy asociado a la ecuación de Schrödinger no lineal

$$\begin{cases} i\partial_t u &= -\Delta u + F(u) \\ u(0) &= \phi, \end{cases} \tag{0.1}$$

donde u es una función compleja definida en $\mathbb{R}^m \times [0,\infty)$, la no linealidad F satisface ciertas condiciones de crecimiento y el dato inicial ϕ pertenece al espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^m)$ con $s = 1, 2$. Nuestro estudio constituye una reelaboración del artículo de Kato [K], con la pretensión de exponer, en forma detallada y autocontenida, los resultados allí probados sobre existencia, unicidad y dependencia continua.

El marco abstracto apropiado para el estudio del problema (0.1) es dado por la teoría de semigrupos y su aplicación a las ecuaciones en derivadas parciales de evolución. En este contexto se observa cómo el grupo $\{e^{it\Delta}\}_{t\in\mathbb{R}}$, generado por el operador $i\Delta$, además de ser un grupo unitario en H^s, posee ciertas propiedades de regularización, que permiten elegir un contexto funcional adecuado para el tratamiento del problema (0.1) con dato inicial ϕ en espacios de Sobolev de baja regularidad.

Un estudio riguroso del problema (0.1) cuando el dato inicial ϕ pertenece a L^2 y la no linealidad es de la forma $F(u) = |u|^{p-2}u$, $p \in (2, \frac{2m}{m-2})$, puede encontrarse en la referencia [P]. En el mismo texto se estudia también el problema (0.1) cuando el dato inicial ϕ es un elemento de H^1 o de H^2; sin embargo, a diferencia del caso L^2, las demostraciones allí presentadas tienen un carácter esquemático. A continuación, pasamos a describir someramente el contenido de los diferentes capítulos de este trabajo.

En el Capítulo 1 formulamos algunas definiciones y resultados básicos que utilizaremos en los capítulos siguientes.

En el Capítulo 2 estudiamos el problema (0.1) con $\phi \in L^2$. Mediante el uso de ciertas propiedades de regularización del grupo $\{e^{it\Delta}\}$ logramos establecer que una función $u \in X_0 := L^\infty([0,T]; L^2 \cap L^p)$ es solución del problema (0.1) si y sólo si es solución de la ecuación integral

$$u(\cdot) = e^{i(\cdot)\Delta}\phi - i\int_0^{(\cdot)} e^{i(\cdot - s)\Delta}(Fu)(s)ds. \tag{0.2}$$

Observamos además que esta última ecuación tiene a lo sumo una solución en X_0.

En el Capítulo 3 proponemos un ambiente funcional apropiado para obtener un teorema de existencia de solución local en el tiempo del problema (0.1) cuando el dato inicial ϕ pertenece a $H^1(\mathbb{R}^m)$. La prueba de este resultado se basa en el teorema de punto fijo de Banach para contracciones.

En el Capítulo 4 hacemos un estudio análogo al realizado en el Capítulo 3 para un dato inicial $\phi \in H^2$.

Finalmente, en el Capítulo 5, examinamos algunas propiedades del operador de Nemytsky asociado a la función no lineal F y sus derivadas, con el objeto de obtener el resultado de dependencia continua del dato inicial para las soluciones locales cuya existencia fue probada en los Capítulos 3 y 4.

Expreso un especial agradecimiento a los profesores Jorge E. Mejía L. y Pedro Isaza J., por una asesoría académica caracterizada por la amabilidad y la paciencia. Por último agradezco al profesor Arturo Jessie Manuel, director del Departamento de Matemáticas, de quien he recibido un apoyo incondicional durante todo el proceso de realización del presente trabajo.

1. PRELIMINARES.

Con el fin de darle a este trabajo un carácter autocontenido presentamos algunas definiciones y resultados de carácter general, todos bien conocidos, que utilizaremos en los capítulos posteriores.

Si $f \in L^1 := L^1(\mathbb{R}^m)$ la *transformada de Fourier* de f es la función definida por

$$\widehat{f}(\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)e^{-2\pi i x.\xi}dx\,, \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}^m\,, \tag{1.1}$$

donde $x.\xi := \sum_{j=1}^{m} x_j\xi_j$.
Así definida la transformada de Fourier puede ser extendida al espacio L^2, (ver las páginas 16 y 17 en la referencia [SW]). Adicionalmente es conocido que la transformada de Fourier es un operador lineal y continuo de L^1 en L^∞ y es un operador unitario en L^2. En algunas ocasiones utilizaremos la notación $\mathcal{F}(f)$ en lugar de $\widehat{f}$.
La teoría de interpolación de operadores que aplicaremos en este trabajo está basada en el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *(Riesz-Thorin, ver [SW] pag. 179)*
Sean $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$ en $[1,\infty]$ y Λ un operador lineal y continuo de L^{p_0} en L^{q_0} con norma M_0 y de L^{p_1} en L^{q_1} con norma M_1. Entonces Λ es continuo de L^p en L^q donde
$\frac{1}{p} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{q} := \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$, $\theta \in [0,1]$, y su norma M es tal que $M \leq M_0^{(1-\theta)}M_1^{\theta}$.

Para $n \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < n$ y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ el *potencial de Riesz de orden* α, denotado por I_α, es el operador integral definido por

$$I_\alpha f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy. \tag{1.2}$$

El siguiente es un teorema que nos dice cómo actúa este operador sobre los espacios L^p.

Teorema 1.2. *(Hardy-Littlewood-Sobolev, ver [P] pág. 36)*
Sean $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < q < \infty$ con $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$.
a) Si $f \in L^p$, entonces la integral en (1.2) converge absolutamente para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.
b) Si además $p > 1$, entonces I_α es acotado de L^p en L^q.

Denotaremos por $S = S(\mathbb{R}^m)$ el *espacio de Schwartz* de las funciones ϕ en $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ tales que $\sup_{x\in\mathbb{R}^m} |x^\alpha(D^\beta\phi)(x)| < \infty$, para α y β multiíndices cualesquiera.
Mediante $S' = S'(\mathbb{R}^m)$ designaremos el espacio de las *distribuciones temperadas.* Para $s \in \mathbb{R}$, $H^s = H^s(\mathbb{R}^m)$ será el espacio de las distribuciones temperadas f tales que

$$\|f\|_{H^s}^2 := \int\limits_{\mathbb{R}^m} (1+|\xi|^2)^s|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi < \infty\,,$$

donde $\widehat{f}$ es la transformada de Fourier de la distribución f. A continuación formularemos un teorema de inmersión en espacios de Sobolev.

Teorema 1.3. *(ver [P] pág. 44)*
Sea $2 < q < \infty$. Si $s \geq m(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$, entonces H^s está incluido continuamente en L^q.

Un ambiente adecuado para la formulación de ciertos problemas de evolución está constituido por las distribuciones con valores en espacios de Banach.
Para $0 < T < \infty$ sea $\mathcal{D}(0,T)$ el espacio de funciones de valor complejo infinitamente diferenciables con soporte compacto contenido en $(0,T)$. Una sucesión $\{\phi_n\}$ en $\mathcal{D}(0,T)$ converge a ϕ en $\mathcal{D}(0,T)$ si:
a) Existe un compacto $K \subset (0,T)$ tal que $\operatorname{supp} \phi_n \subset K$ para toda n, y
b) $D^m \phi_n \to D^m \phi$ uniformemente en $(0,T)$ para todo $m \in \mathbb{N}$.
Si X es un espacio de Banach decimos que la aplicación lineal $F : \mathcal{D}(0,T) \longrightarrow X$ es una distribución con valores en X y escribimos $F \in \mathcal{D}'(0,T;X)$, si para todo subconjunto compacto K de $(0,T)$ existen $k \in \mathbb{N}$ y $C > 0$ tales que

$$\|F(\phi)\|_X \leq C \sup_{t \in K} \sum_{j=0}^{k} |D^j \phi(t)|,$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}(0,T)$ con $\operatorname{supp} \phi \subset K$.
Puede demostrarse que una aplicación lineal $F : \mathcal{D}(0,T) \longrightarrow X$ es una distribución con valores en X si y sólo si para toda sucesión $\{\phi_n\}$ en $\mathcal{D}(0,T)$ tal que $\phi_n \to \phi$ en $\mathcal{D}(0,T)$, se tiene que $F(\phi_n) \to F(\phi)$ en X. Para $F \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ la derivada de F denotada por F' es el elemento en $\mathcal{D}'(0,T;X)$ definido por $F'(\phi) := -F(\phi')$, para $\phi \in \mathcal{D}(0,T)$.
Si $u \in L^1(0,T;X)$, (es decir si $\int_0^T \|u(t)\|_X dt < \infty$), entonces u puede verse como el elemento en $\mathcal{D}'(0,T;X)$ dado por la siguiente integral de Bochner en el espacio X:

$$u(\phi) := \int_0^T \phi(t)u(t)dt.$$

Para $T > 0$ y q_1, q_2 tales que $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$ denotamos por $L_T^{q_1} L_E^{q_2}$ el espacio de Banach $L^{q_1}([0,T]; L^{q_2}(\mathbb{R}^m))$, cuya norma se define por $\|u\|_{L_T^{q_1} L_E^{q_2}} = \big\| \|u(t)\|_{L^{q_2}} \big\|_{L^{q_1}}$.
El siguiente teorema presenta formulaciones equivalentes de la definición de derivada para distribuciones en $\mathcal{D}'(0,T;X)$ representables por funciones en $L^1(0,T;X)$.

Teorema 1.4. *(ver [IMS1] pág. 32)*
Sean X un espacio de Banach separable, $u \in L^1(0,T;X)$ y $1 \leq p' < \infty$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:
a) Existen $\widetilde{u} \in C([0,T];X)$ y $g \in L^{p'}(0,T;X)$ tales que

$$\widetilde{u}(t) = u(t) \ \ \text{p.c.t. } t \in [0,T] \ \ y$$
$$\widetilde{u}(t) = \widetilde{u}(0) + \int_0^t g(\tau)d\tau \quad \text{para todo } t \in [0,T].$$

b) $u \in L^{p'}(0,T;X)$ y existe $w \in L^{p'}(0,T;X)$ tal que

$$\lim_{h \to 0^+} \|h^{-1}(u_h - u) - w\|_{L^{p'}(0,T-h;X)} = 0,$$

donde $u_h(\cdot) = u(\cdot + h)$.
c) Existe $v \in L^{p'}(0,T;X)$ tal que

$$-\int_0^T \phi'(t)u(t)dt = \int_0^T \phi(t)v(t)dt\,, \text{ para toda } \phi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Además, si alguna de las anteriores afirmaciones se cumple entonces $g = w = v$.

Formulamos a continuación un resultado que establece condiciones suficientes y necesarias para que una determinada función pertenezca al espacio de Sobolev $W^{1,p}$.
En lo sucesivo, si ω y Ω son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^m$, La expresión $\omega \subset\subset \Omega$ se utilizará si $\overline{\omega}$ es un conjunto compacto y si $\overline{\omega} \subset \Omega$.

Teorema 1.5. *(ver [B] pág. 153 y 154).*
Sean Ω un abierto en $\mathbb{R}^m$ y $u \in L^p(\Omega)$ con $1 < p \leq \infty$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes
a) La función u pertenece al espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$.
b) Existe una constante C tal que para toda función $\phi \in c_c^\infty(\Omega)$ y para toda j, $j = 1, ..., m$

$$\Big|\int_\Omega u\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\Big| \leq C\|\phi\|_{L^{p'}}\,,$$

donde p' es el exponente conjugado de p.
c) Existe una constante C tal que para todo conjunto abierto $\omega \subset\subset \Omega$ y para toda $h \in \mathbb{R}^m$ con $|h| < dist(\omega, \mathbb{R}^m - \Omega)$

$$\|u_h - u\|_{L^p(\Omega)} \leq C|h|\,.$$

Además, si c) tiene lugar entonces $\|\nabla u\|_{L^p} \leq C$.

Por un procedimiento análogo al utilizado en la prueba del teorema anterior, puede obtenerse una condición suficiente y necesaria para que la derivada distribucional de una función en $L_T^{q_1}L_E^{q_2}$ pertenezca también a $L_T^{q_1}L_E^{q_2}$. Más precisamente tiene lugar el siguiente resultado.

Teorema 1.6.
Sean $1 < q_1, q_2 < \infty$ y $v \in L_T^{q_1}L_E^{q_2}$. Entonces $v' \in L_T^{q_1}L_E^{q_2}$ si y sólo si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $\omega \subset\subset (0,T)$ y para todo $h \in \mathbb{R}$, con $|h| < dist(\omega, \mathbb{R} \setminus [0,T])$ se tiene que

$$\|v_h - v\|_{L_\omega^{q_1}L_E^{q_2}} \leq C|h|. \tag{1.3}$$

Además, si (1.3) tiene lugar, entonces $\|v'\|_{L_T^{q_1}L_E^{q_2}} \leq C$.

La formulación del *teorema de la convergencia dominada* para funciones con valores en espacios de Banach viene dada por el siguiente teorema

Teorema 1.7. *(ver [DS] pág. 124)*
Sean $1 \leq p < \infty$, (A, Σ, μ) un espacio de medida y X un espacio de Banach. Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión en $L^p(A;X)$ tal que $x_n(s) \to x(s)$ en X - μ p.c.t. $s \in A$ y que existe $v \in L^p(A;X)$ tal que $\|x_n(s)\|_X \leq \|v(s)\|_X$ μ-p.c.t. $s \in A$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $x \in L^p(A;X)$ y $\|x_n - x\|_{L^p(A;X)} \to 0$.

Para estudiar la acción de operadores continuos sobre integrales de Bochner, disponemos del siguiente resultado

Teorema 1.8. *(ver [Y] pág. 134)*
Sean (s, Σ, μ) un espacio de medida, X y Y espacios de Banach y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal y continuo. Si $f : s \longrightarrow X$ es una función Bochner integrable, entonces $T \circ f : s \longrightarrow Y$ es Bochner integrable y

$$\int_s (T \circ f)(\tau) d\tau = T\Big(\int_s f(\tau) d\tau\Big).$$

El efecto del grupo $\{e^{it\Delta}\}$ sobre funciones en L^1 y en L^2 está dado por el siguiente resultado.

Teorema 1.9. *(ver [P] pág. 51)*
Si $t \in \mathbb{R}$ entonces el operador $e^{it\Delta}$ es una isometría en $L^2(\mathbb{R}^m)$. Si $t \neq 0$ tal operador es lineal y continuo de $L^1(\mathbb{R}^m)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^m)$ con norma

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^\infty} \leq C|t|^{-\frac{m}{2}} \|f\|_{L^1}.$$

Finalmente, en el estudio de la parte no lineal de la ecuación de Schrödinger, requeriremos un resultado básico sobre operadores de Nemytsky.
Sean B un subconjunto medible de $\mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^n \times B \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Decimos que g es una N-función si $g(\cdot, x)$ es continua p.c.t. $x \in B$ y $g(v, \cdot)$ es medible para todo $v \in \mathbb{R}^n$. El siguiente teorema expresa propiedades del operador de Nemytsky h definido por $[h(u)](\cdot) := g(u(\cdot), \cdot)$

Teorema 1.10. *(ver [V] pág. 154)*
Sean $p_1, p_2 \in [1, \infty)$ y $g : \mathbb{R} \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ una N-función. Entonces
a) Si h envía $L^{p_1}(B;\mathbb{R})$ en $L^{p_2}(B;\mathbb{R})$, entonces h es un operador acotado y continuo entre estos espacios, y existen una función $a \in L^{p_2}(B,\mathbb{R})$ y una constante $b \geq 0$ tales que

$$|g(v,x)| \leq a(x) + b|v|^r \text{, donde } r = \frac{p_1}{p_2}.$$

b) Si la desigualdad en la parte a) tiene lugar entonces h envía $L^{p_1}(B;\mathbb{R})$ en $L^{p_2}(B;\mathbb{R})$ y así, por la primera parte de la afirmación a), es un operador continuo y acotado.
c) Sea $p \in [1, \infty)$. Si h envía $L^p(B;\mathbb{R})$ en $L^\infty(B;\mathbb{R})$ entonces existe $M > 0$ tal que $|g(u,x)| \leq M$ para toda $u \in \mathbb{R}$ y p.c.t. $x \in B$.

En el presente trabajo haremos uso del siguiente caso particular del Teorema 19.2 en [V], pág. 162.

Teorema 1.11.
Sean $p_1, p_2 \in [1,\infty)$ *y* $g : \mathbb{R}^2 \times B \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *una N-funcion para la cual existe* $C > 0$ *tal que*

$$|g(v,x)| \leq C|v|^r\,,\ \text{donde } r = \frac{p_1}{p_2}.$$

Entonces el operador de Nemytsky h *envía* $L^{p_1}(B;\mathbb{R}^2)$ *en* $L^{p_2}(B;\mathbb{R}^2)$ *de manera continua y acotada.*

Observación:
En las igualdades y desigualdades que aparecen a lo largo de este texto, la letra C se utilizará para denotar diferentes constantes.
Si Z_1 y Z_2 son espacios normados, la expresión $Z_1 \hookrightarrow Z_2$ denota la inclusión continua de Z_1 en Z_2.
Para un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ la expresión p.c.t $t \in \Omega$ quiere decir *para casi todo* t *que pertenece a* Ω.

2. ECUACIÓN INTEGRAL ASOCIADA AL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER NO LINEAL.

En este capítulo estudiaremos la formulación integral del problema de Cauchy para la ecuación de Schrödinger:

$$\begin{cases} i\partial_t u &= -\Delta u + Fu \\ u(0) &= \phi , \end{cases} \tag{2.1}$$

con $m > 2$ y donde el dato inicial ϕ pertenece a $L^2 := L^2(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$, $\Delta := \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ es el Laplaciano con respecto a las derivadas espaciales y F es una función en $C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ que admite la descomposición $F = F_1 + F_2$, con $F_1, F_2 \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ tales que

$$\begin{aligned} &F_1(0) = F_2(0) = 0\,, \\ &|F_1(\zeta) - F_1(\mu)| \le C|\zeta - \mu| \qquad \text{y} \\ &|F_2(\zeta) - F_2(\mu)| \le C|\zeta - \mu|\,(\,|\zeta|^{p-2} + |\mu|^{p-2})\,, \end{aligned} \tag{2.2}$$

para un $C > 0$ y un cierto $p \in (2, \frac{2m}{m-2})$.

Resolver el problema (2.1) es, en términos generales, equivalente a resolver la ecuación integral:

$$u(t) = e^{it\Delta}\phi - i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(Fu)(s)ds\,, \tag{2.3}$$

en la cual $\{e^{it\Delta}\}_{t\in\mathbb{R}}$ denota el grupo asociado al operador $i\Delta$.

Escribiremos la ecuación integral (2.3) en la forma:

$$u = G_0(\phi) - iG(Fu)\,,$$

donde los operadores lineales G_0 y G están dados formalmente por:

$$(G_0(\phi))(t) = e^{it\Delta}\phi \qquad \text{y} \qquad (Gv)(t) = \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}v(s)ds.$$

A continuación precisaremos los espacios funcionales en los cuales están definidos estos operadores.

Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que: $\frac{2}{r} := \frac{m}{2} - \frac{m}{p}$.

Teorema 2.1.

Sean $T > 0$, $I = [0, T]$, p y r como antes, y sean p' y r' en $\mathbb{R}$ tales que: $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) Existe C tal que $\|e^{it\Delta}f\|_{L^r_T L^p_E} \le C\|f\|_{L^2}$ para toda $f \in L^2$.

b) Existe C tal que $\|\int_0^T e^{i(t-s)\Delta}v(s)ds\|_{L^r_T L^p_E} \le C^2\|v\|_{L^{r'}_T L^{p'}_E}$ para toda $v \in C(I; L^1 \cap L^2)$.

c) Existe C tal que $\|\int_0^T e^{is\Delta}v(s)ds\|_{L^2} \le C\|v\|_{L^{r'}_T L^{p'}_E}$ para toda $v \in C(I; L^1 \cap L^2)$.

Mas aún, si alguna de las afirmaciones anteriores es cierta, entonces las otras dos se cumplen con la misma constante C.

Demostración.
$b) \Longrightarrow c)$:
Un argumento de Tomas, ver [P] pág 53, prueba que para toda $v \in C(I; L^2)$

$$\| \int_0^T e^{is\Delta} v(s) ds \|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^m} (\int_0^T [v(s)](x) (\int_0^T [e^{i(s-s')\Delta} \overline{v(s')}](x) ds') ds) dx. \tag{2.4}$$

Luego, usando en (2.4) el Teorema de Fubini y la desigualdad de Hölder, concluimos que para toda $v \in C(I; L^1 \cap L^2)$

$$\| \int_0^T e^{is\Delta} v(s) ds \|_{L^2}^2 \leq \|v\|_{L_T^{r'} L_E^{p'}} \| \int_0^T e^{i(\cdot - s')\Delta} \overline{v(s')} ds' \|_{L_T^r L_E^p},$$

de donde es claro que $b)$ implica $c)$.
$c) \Longrightarrow b)$:
Sea $v \in C(I; L^1 \cap L^2)$ y sea $S = \{\omega \in C(I; L^1 \cap L^2) \; / \; \|\omega\|_{L_T^{r'} L_E^{p'}} = 1\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\| \int_0^T e^{i(\cdot - s)\Delta} v(s) ds \|_{L_T^r L_E^p} &= \sup_{\omega \in S} \Big| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_0^T [e^{i(t-s)\Delta} v(s)](x) ds \Big) (w(t))(x) dx dt \Big| \\
&= \sup_{\omega \in S} \Big| \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_0^T [e^{-is\Delta} v(s)](x) ds \Big) \Big(\int_0^T [e^{it\Delta} w(t)](x) dt \Big) dx \Big| \\
&\leq \| \int_0^T e^{-is\Delta} v(s) ds \|_{L^2} \sup_{\omega \in S} \| \int_0^T e^{it\Delta} w(t) dt \|_{L^2} \\
&= \| \int_0^T e^{is\Delta} v(T-s) ds \|_{L^2} \sup_{\omega \in S} \| \int_0^T e^{it\Delta} w(t) dt \|_{L^2} \\
&\leq C^2 \|v(T - \cdot)\|_{L_T^{r'} L_E^{p'}} = C^2 \|v\|_{L_T^{r'} L_E^{p'}} ,
\end{aligned}$$

donde hemos aplicado la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la hipótesis $c)$.
$a) \Longrightarrow c)$:
Sean $v \in C(I; L^1 \cap L^2)$ y $f \in L^2$ con $\|f\|_{L^2} = 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\Big| \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \Big(\int_0^T [e^{it\Delta} v(t)](x) dt \Big) dx \Big| &= \Big| \int_{\mathbb{R}^m} \int_0^T f(x) [e^{it\Delta} v(t)](x) dt dx \Big| \\
&= \Big| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} f(x) [e^{it\Delta} v(t)](x) dx dt \Big| \\
&= \Big| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} [v(t)](x) [e^{it\Delta} f](x) dx dt \Big| \\
&\leq \|v\|_{L_T^{r'} L_E^{p'}} \|e^{i(\cdot)\Delta} f\|_{L_T^r L_E^p} \\
&\leq C \|v\|_{L_T^{r'} L_E^{p'}} ,
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad utilizamos la hipótesis a). Del procedimiento anterior concluimos que $\| \int_0^T e^{it\Delta}v(t)dt\|_{L^2} \leq C\|v\|_{L_T^{r'}L_E^{p'}}$.
$c) \Longrightarrow a)$:

$$\begin{aligned}
\|e^{i(\cdot)\Delta}f\|_{L_T^r L_E^p} &= \sup_{v\in S}\Big|\int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} (e^{it\Delta}f)(x)[v(t)](x)dxdt\Big| \\
&= \sup_{v\in S}\Big|\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\Big(\int_0^T [e^{it\Delta}v(t)](x)dt\Big)dx\Big| \\
&\leq \sup_{v\in S}\|f\|_{L^2}\|\int_0^T e^{it\Delta}v(t)dt\|_{L^2} \\
&\leq C\|f\|_{L^2}\,,
\end{aligned}$$

teniendo en cuenta, para la última desigualdad, la hipótesis c). □

Lema 2.2. *Existe C tal que para toda $v \in L_T^{r'}L_E^{p'}$ tienen lugar las siguientes estimaciones:*
a) $\| \int_0^T e^{i(\cdot-s)\Delta}v(s)ds\|_{L_T^r L_E^p} \leq C\|v\|_{L_T^{r'}L_E^{p'}}$ y
b) $\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}v(s)ds\|_{L_T^r L_E^p} \leq C\|v\|_{L_T^{r'}L_E^{p'}}$.

Demostración.
Sea $v \in L_T^{r'}L_E^{p'}$. Puesto que para toda $f \in L^2$ $\|e^{it\Delta}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$ y para toda $f \in L^1$ y $t \neq 0$ $\|e^{it\Delta}f\|_{L^\infty} \leq C|t|^{-\frac{m}{2}}\|f\|_{L^1}$, (ver Teorema 1.9); entonces, por el Teorema de interpolación de Riesz-Thorin, (ver Teorema 1.1), para $1 < p' < 2$, $t \in (0,T]$ y $f \in L^{p'}$ se tiene que:

$$\|e^{it\Delta}f\|_{L^p} \leq C|t|^{-\frac{m}{2}(\frac{p-2}{p})}\|f\|_{L^{p'}}\,.$$

Luego, para $t, s \in [0,T]$, (salvo en un conjunto de medida cero), si $s \neq t$ entonces

$$\|e^{i(t-s)\Delta}v(s)\|_{L^p} \leq C|t-s|^{-\frac{m}{2}(\frac{p-2}{p})}\|v(s)\|_{L^{p'}}\,. \tag{2.5}$$

Sea $\Lambda : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$\Lambda(t) = \int_0^T |t-s|^{-\frac{m}{2}(\frac{p-2}{p})}\|v(s)\|_{L^{p'}}ds\,. \tag{2.6}$$

La función Λ está bien definida para toda $t \in [0,T]$ ya que $2 < p < \frac{2m}{m-2}$ y por lo tanto $0 < \frac{m}{2}(\frac{p-2}{p}) < 1$.
De (2.6), observando que $r' > 1$ y que $\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} - 1 + \frac{m}{2}(\frac{p-2}{p})$, se concluye, por el Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev, (ver Teorema 1.2), que Λ pertenece a L_T^r con

$$\|\Lambda\|_{L_T^r} \leq C\|v\|_{L_T^{r'}L_E^{p'}}\,. \tag{2.7}$$

Finalmente, usando (2.5), (2.6) y (2.7), podemos escribir:

$$\| \int_0^t \|e^{i(t-s)\Delta} v(s)\|_{L^p} ds \|_{L^r_T} \leq \| \int_0^T \|e^{i(t-s)\Delta} v(s)\|_{L^p} ds \|_{L^r_T} \leq C \|v\|_{L^{r'}_T L^{p'}_E} . \quad \square$$

Nota.

Obsérvese que la afirmación b) en el Lema 2.2 permite concluir que el operador $v \mapsto Gv$, donde $(Gv)(t) = \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} v(s) ds$, es lineal y continuo de $L^{r'}_T L^{p'}_E$ en $L^r_T L^p_E$. Es fácil además ver que para $v \in L^1_T L^2_E$ la integral $\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} v(s) ds$ está bien definida como elemento de $L^\infty_T L^2_E$, el cual también denotamos por Gv. Es claro también que $\|Gv\|_{L^\infty_T L^2_E} \leq C \|v\|_{L^1_T L^2_E}$.

Para $T > 0$ se definen los siguientes espacios de Banach:
$X = X(I) := L^\infty_T L^2_E \cap L^r_T L^p_E$, con $\|u\|_X := \|u\|_{L^\infty_T L^2_E} + \|u\|_{L^r_T L^p_E}$;
$\overline{X}(I) := C(I; L^2(\mathbb{R}^m)) \cap L^r_T L^p_E$, con $\|u\|_{\overline{X}} := \|u\|_X$;
$X' = X'(I) := L^1_T L^2_E + L^{r'}_T L^{p'}_E$, con
$\|u\|_{X'} := \inf\{\|w\|_{L^1_T L^2_E} + \|z\|_{L^{r'}_T L^{p'}_E} / u = w + z\}$.

Lema 2.3. *El operador G_0 es lineal y continuo de L^2 en $\overline{X}$.*

Demostración.

Sea $f \in L^2$. Puesto que $\{e^{it\Delta}\}$ es un grupo C_0 de isometrías en L^2, entonces $G_0(f) \in C(I; L^2)$ y $\|G_0(f)\|_{L^\infty_T L^2_E} = \|f\|_{L^2}$. Esta igualdad, junto con el Lema 2.2 y la equivalencia de a) y b) en el Teorema 2.1, permite concluir que $G_0(f) \in \overline{X}$ y que $\|G_0(f)\|_{\overline{X}} \leq C \|f\|_{L^2}$.
$\square$

Lema 2.4. *El operador G envía X' en $\overline{X}$ de manera continua.*

Demostración.

En virtud de la nota posterior al Lema 2.2, para $v \in X' = L^1_T L^2_E + L^{r'}_T L^{p'}_E$ podemos definir Gv como $Gv_1 + Gv_2$ donde $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in L^1_T L^2_E$ y $v_2 \in L^{r'}_T L^{p'}_E$. Fácilmente se puede ver que Gv es independiente de la descomposición utilizada. Para la prueba de la continuidad de G estudiaremos la acción de G sobre cada uno de los espacios $L^1_T L^2_E$ y $L^{r'}_T L^{p'}_E$.

a) Por la afirmación b) del Lema 2.2 el operador G es lineal y continuo de $L^{r'}_T L^{p'}_E$ en $L^r_T L^p_E$. Sean $t \in I$ y $v \in C(I; L^1 \cap L^2)$; teniendo en cuenta que la afirmación c) del Teorema 2.1 es cierta en virtud del Lema 2.2, se sigue que:

$$\begin{aligned} \|(Gv)(t)\|_{L^2} &= \| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} v(s) ds \|_{L^2} = \| \int_0^t e^{is\Delta} v(t-s) ds \|_{L^2} \\ &\leq C \|v(t - \cdot)\|_{L^{r'}_t L^{p'}_E} \leq C \|v\|_{L^{r'}_T L^{p'}_E} . \end{aligned} \tag{2.8}$$

Si $v \in L^{r'}_T L^{p'}_E$ y $\{v_n\}$ es una sucesión en $C(I; L^1 \cap L^2)$ tal que $v_n \to v$ en $L^{r'}_T L^{p'}_E$; entonces, la desigualdad anterior implica que $\{Gv_n\}$ es Cauchy en $L^\infty_T L^2_E$ y por lo tanto existe un $w \in L^\infty_T L^2_E$ tal que $Gv_n \to w$ en $L^\infty_T L^2_E$. De otra parte, por la afirmación b) del Lema

2.2, se sigue que $Gv_n \to Gv$ en $L^r_T L^p_E$. Probemos que $Gv = w$, con lo cual tendríamos la Desigualdad 2.8 para $v \in L^{r'}_T L^{p'}_E$ y para casi todo $t \in I$. En efecto, existe una subsucesión $\{v_{n_k}\}$ de $\{v_n\}$ tal que $(Gv_{n_k})(t) \to w(t)$ en L^2 p.c.t. $t \in I$ y $(Gv_{n_k})(t) \to (Gv)(t)$ en L^p_E p.c.t. $t \in I$. Por lo tanto $w(t) = (Gv)(t)$ p.c.t. $t \in I$, y en consecuencia $Gv = w$. Se sigue entonces que $G : L^{r'}_T L^{p'}_E \to L^\infty_T L^2_E \cap L^r_T L^p_E \equiv X$ es continuo.

b) De la nota que sigue al Lema 2.2 sabemos que $G : L^1_T L^2_E \to L^\infty_T L^2_E$ es lineal y continuo. Veamos que G envía a $L^1_T L^2_E$ en $L^r_T L^p_E$ de manera continua.
Para $v \in C(I; L^1 \cap \mathrm{L}^2)$ y $w \in C(I; L^1 \cap \mathrm{L}^2)$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
(Gv, w) : &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} [(Gv)(t)](x)[w(t)](x)dxdt \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_0^t [e^{i(t-s)\Delta} v(s)](x)ds \Big) [w(t)](x)dxdt \\
&= \int_0^T \int_0^t \Big(\int_{\mathbb{R}^m} [e^{i(t-s)\Delta} v(s)](x)[w(t)](x)dx \Big) dsdt \\
&= \int_0^T \int_0^t \Big(\int_{\mathbb{R}^m} [v(s)](x)[e^{i(t-s)\Delta} w(t)](x)dx \Big) dsdt \\
&= \int_0^T \int_s^T \Big(\int_{\mathbb{R}^m} [v(s)](x)[e^{i(t-s)\Delta} w(t)](x)dx \Big) dtds \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_s^T [e^{i(t-s)\Delta} w(t)](x)dt \Big) [v(s)](x)dxds \\
&= \Big(\int_0^T e^{i(t-s)\Delta} w(t)dt \; - \; \int_0^s e^{i(t-s)\Delta} w(t)dt, v \Big) .
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
|(Gv, w)| &\le \| \int_0^T e^{i(t-s)\Delta} w(t)dt - \int_0^s e^{i(t-s)\Delta} w(t)dt \|_{L^\infty_T L^2_E} \|v\|_{L^1_T L^2_E} \\
&\le C \|w\|_{L^{r'}_T L^{p'}_E} \|v\|_{L^1_T L^2_E} ,
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

donde en la última desigualdad hemos aplicado la parte c) del Teorema 2.1.
Como $Gv \in L^r_T L^p_E$, y además $C(I; L^1 \cap L^2)$ es denso en $L^{r'}_T L^{p'}_E$, de (2.9) se sigue que:

$$
\|Gv\|_{L^r_T L^p_E} \le C \|v\|_{L^1_T L^2_E} , \tag{2.10}
$$

Sean $v \in L^1_T L^2_E$ y $\{v_n\}$ una sucesión en $C(I; L^1 \cap L^2)$ tal que $v_n \to v$ en $L^1_T L^2_E$. Entonces por (2.10) existe $h \in L^r_T L^p_E$ tal que $Gv_n \to h$ en $L^r_T L^p_E$. Pero ya sabemos que $Gv_n \to Gv$

en $L_T^\infty L_E^2$. Por lo tanto $Gv = h$, y así $Gv \in L_T^r L_E^p$, de donde se sigue la validez de la Desigualdad (2.10).
Hasta aquí hemos probado que G envía X' en X de manera continua. Resta probar que para $v \in X'$, $Gv \in \overline{X}$, para lo cual es suficiente demostrar que $Gv \in C(I; L^2)$. Puesto que $\{e^{it\Delta}\}$ es un grupo C_0 en L^2 y la integral de Bochner de una función en $L^1(I; L^2)$ es absolutamente continua, entonces, para una función $v \in C(I; L^1 \cap L^2)$ se tiene que $Gv \in C(I; L^2)$. Finalmente, puesto que $C(I; L^1 \cap L^2)$ es denso en X' y $C(I; L^2)$ es cerrado en X, la continuidad de $G : X' \to X$ implica que $Gv \in C(I; L^2)$ para toda $v \in X'$.
$\square$

Ahora estudiaremos algunas propiedades básicas del operador no lineal inducido por F. Este operador, que también denotaremos por F, actúa de la siguiente manera: Si u es una función del intervalo I con valores en el espacio de funciones complejas con dominio en $\mathbb{R}^m$, entonces Fu se define por:

$$[(Fu)(t)](x) := F([u(t)](x)), \ t \in I, \ x \in \mathbb{R}^m .$$

Introduzcamos ahora un nuevo espacio de Banach.
Sea $X_0 := L_T^\infty L_E^2 \cap L_T^\infty L_E^p$, con norma $\|u\|_{X_0} := \|u\|_{L_T^\infty L_E^2} + \|u\|_{L_T^\infty L_E^p}$. Es claro que $X_0 \subset X$ y que $\|u\|_X \leq \|u\|_{L_T^\infty L_E^2} + T^{\frac{1}{r}} \|u\|_{L_T^\infty L_E^p}$.

Lema 2.5. *El operador no lineal F envía X_0 en X' de manera continua y acotada. Más precisamente, para $v, w \in X_0$ tenemos:*

$$\begin{aligned} &\|F_1 v - F_1 w\|_{L_T^1 L_E^2} \leq CT \|v - w\|_{L_T^\infty L_E^2} \\ &\|F_2 v - F_2 w\|_{L_T^{r'} L_E^{p'}} \leq CT^{1-\beta} \left(\|v\|_{X_0}^{p-2} + \|w\|_{X_0}^{p-2}\right) \|v - w\|_{L_T^r L_E^p} , \end{aligned} \tag{2.11}$$

con $\beta = m(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}) < 1$. En particular, sobre cada bola cerrada

$$B_R^{X_0} := B_R^{X_0}(0) := \{u \in X_0 / \|u\|_{X_0} \leq R\} ,$$

$F : (B_R^{X_0}, \| \ \|_X) \longrightarrow X'$ es Lipschitz, y para R fijo, la constante de Lipschitz tiende a cero cuando $T \to 0^+$.

Demostración.
Sean v y w en X_0, teniendo en cuenta la propiedad de crecimiento en (2.2) para F_1, se sigue que:

$$\begin{aligned} \|F_1 v - F_1 w\|_{L_T^1 L_E^2} &= \int_0^T \Big(\int_{\mathbb{R}^m} |F_1([v(t)](x)) - F_1([w(t)](x))|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} dt \\ &\leq C \int_0^T \Big(\int_{\mathbb{R}^m} |[v(t)](x) - [w(t)](x)|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} dt \\ &\leq CT \|v - w\|_{L_T^\infty L_E^2} . \end{aligned}$$

De otra parte, utilizando la propiedad de crecimiento en (2.2) para F_2, se tiene que:

$$\|F_2v - F_2w\|_{L_T^{r'}L_E^{p'}} = \Big(\int_0^T \Big(\int_{\mathbb{R}^m} |F_2([v(t)](x)) - F_2([w(t)](x))|^{p'}dx\Big)^{\frac{r'}{p'}}dt\Big)^{\frac{1}{r'}}$$

$$\leq C\Big(\int_0^T \Big(\int_{\mathbb{R}^m} (|[v(t)](x) - [w(t)](x)|(|[v(t)](x)|^{p-2} + |[w(t)](x)|^{p-2})^{p'}dx\Big)^{\frac{r'}{p'}}dt\Big)^{\frac{1}{r'}}$$

$$\leq C\big(\|(v-w)|v|^{p-2}\|_{L_T^{r'}L_E^{p'}} + \|(v-w)|w|^{p-2}\|_{L_T^{r'}L_E^{p'}}\big)\,. \tag{2.12}$$

Usando la desigualdad de Hölder obtenemos:

$$\|(v-w)|v|^{p-2}\|_{L_T^{r'}L_E^{p'}} = \Big(\int_0^T \Big(\int_{\mathbb{R}^m} |[v(t)](x) - [w(t)](x)|^{p'}|[v(t)](x)|^{p'(p-2)}dx\Big)^{\frac{r'}{p'}}dt\Big)^{\frac{1}{r'}}$$

$$\leq \Big(\int_0^T (\||v(t) - w(t)|^{p'}\|_{L^{p-1}}\||v(t)|^{p'(p-2)}\|_{L^{\frac{p-1}{p-2}}})^{\frac{r'}{p'}}dt\Big)^{\frac{1}{r'}}$$

$$= \Big(\int_0^T \Big(\|v(t) - w(t)\|_{L^p}^{\frac{p}{p-1}}\|v(t)\|_{L^p}^{\frac{p(p-2)}{p-1}}\Big)^{\frac{r'(p-1)}{p}}dt\Big)^{\frac{1}{r'}}$$

$$= \Big(\int_0^T \|v(t) - w(t)\|_{L^p}^{r'}\|v(t)\|_{L^p}^{(p-2)r'}dt\Big)^{\frac{1}{r'}}$$

$$\leq \|v\|_{L_T^\infty L_E^p}^{(p-2)}\Big(\int_0^T \|v(t) - w(t)\|_{L^p}^{r'}dt\Big)^{\frac{1}{r'}}$$

$$\leq \|v\|_{L_T^\infty L_E^p}^{(p-2)}T^{\frac{r-2}{r}}\|v-w\|_{L_T^rL_E^p}\quad . \tag{2.13}$$

De (2.12) y (2.13) concluimos que

$$\|F_2v - F_2w\|_{L_T^{r'}L_E^{p'}} \leq CT^{1-\beta}\big(\|v\|_{X_0}^{p-2} + \|w\|_{X_0}^{p-2}\big)\|v-w\|_{L_T^rL_E^p}\,,$$

con $\beta = \frac{2}{r} = m(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})$. □

El siguiente corolario es consecuencia directa de los Lemas 2.4 y 2.5.

Corolario 2.6. *El operador $GF := G \circ F$, envía X_0 en $\overline{X}$ de manera continua y acotada. Además, para todo $R > 0$, $GF : \big(B_R^{X_0}(0), \|\ \|_X\big) \to \overline{X}$ es una contracción para un valor de T suficientemente pequeño.*
Más precisamente:

$$\|(GF)(v) - (GF)(w)\|_X \leq C(T + 2T^{1-\beta}R^{p-2})\|v-w\|_X\,. \tag{2.14}$$

Nuestro próximo objetivo es establecer el contexto funcional adecuado para el estudio del problema (2.1) y precisar el concepto de solución para este problema.

De las propiedades para F_1 y F_2 en (2.2) se sigue directamente que :

$$\|F_1 u\|_{L_T^\infty L_E^2} \leq C\|u\|_{L_T^\infty L_E^2} \quad \text{y}$$
$$\|F_2 u\|_{L_T^\infty L_E^{p'}} \leq C\|u\|_{L_T^\infty L_E^p}^{p-1} . \tag{2.15}$$

Puesto que $1 < p' < 2$ entonces la transformada de Fourier es un operador lineal y continuo de $L^{p'}$ en L^p, (ver Teorema 1.1). Por lo tanto, teniendo en cuenta que $\frac{2p}{p-2} > m$, y haciendo uso de la desigualdad de Hölder, se tiene que:

$$\int_{\mathbb{R}^m} (1+|\xi|^2)^{-1}|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^m} \Big(\frac{1}{1+|\xi|^2}\Big)^{\frac{p}{p-2}} d\xi\Big)^{\frac{p-2}{p}} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} |\widehat{f}(\xi)|^p d\xi\Big)^{\frac{2}{p}}$$
$$= C(p,m)\|\widehat{f}\|_{L^p}^2 \leq C\|f\|_{L^{p'}}^2 ,$$

lo cual implica que $L^{p'} \hookrightarrow H^{-1}$ y en consecuencia $L_T^\infty L_E^{p'} \hookrightarrow L^\infty(I;H^{-1})$. Usando esta última inclusión y el hecho de que $L_T^\infty L_E^2 \hookrightarrow L^\infty(I;H^{-1})$, de (2.15), podemos concluir que si $u \in X_0$ entonces $Fu \in L^\infty(I;H^{-1})$ y

$$\|Fu\|_{L^\infty(I;H^{-1})} \leq C(\|u\|_{X_0} + \|u\|_{X_0}^{p-1}) \quad . \tag{2.16}$$

Definimos ahora el Laplaciano para una función $u : I \to L^2$ mediante

$$[\Delta u](\cdot) = \Delta_E[u(\cdot)] \ ,$$

siendo Δ_E el Laplaciano espacial definido a través de la transformada de Fourier mediante la siguiente ecuación:

$$(\Delta_E f)^\wedge(\cdot) = -4\pi^2|\cdot|^2\widehat{f}(\cdot), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^m) .$$

De esta definición es claro que $\Delta : L_T^\infty L_E^2 \to L^\infty(I;H^{-2})$ es un operador lineal y continuo.

Después de haber determinado la naturaleza de las expresiones $\Delta u, Fu, G_0(\phi)$ y $G(Fu)$, para $\phi \in L^2$ y $u \in X_0$, discutiremos en qué sentido una función $u \in X_0$ es solución del problema (2.1) o es solución de la ecuación (2.3).
Utilizando la teoría de distribuciones podemos identificar, mediante una inyección apropiada, los espacios funcionales $X_0 = L_T^\infty L_E^2 \cap L_T^\infty L_E^p, L^\infty(I;H^{-1})$ y $L^\infty(I;H^{-2})$, con subespacios de $\mathcal{D}'(0,T;L^2\cap L^p), \mathcal{D}'(0,T;H^{-1})$ y $\mathcal{D}'(0,T;H^{-2})$. Por lo tanto, si $u \in X_0$ el lado derecho de la ecuación en el problema (2.1) puede mirarse como un elemento del espacio de distribuciones $\mathcal{D}'(0,T;H^{-2})$.
De otra parte, para $u \in X_0$, u' es el elemento de $\mathcal{D}'(0,T;H^{-2})$ definido por

$$u'(\alpha) = -\int_0^T \alpha'(t)u(t)dt \qquad \text{para toda } \alpha \in \mathcal{D}(0,T).$$

Teniendo en cuenta la discusión anterior, cuando se afirma que una función $u \in X_0$ satisface la ecuación en el problema (2.1), en realidad se está afirmando que tal igualdad se verifica en $\mathcal{D}'(0,T;H^{-2})$; es decir, que

$$u'(\alpha) = i(\Delta u)(\alpha) - i(Fu)(\alpha) \quad \text{para toda } \alpha \in \mathcal{D}(0,T).$$

Obsérvese que la anterior es una igualdad en H^{-2}.
Veamos ahora en qué sentido se satisface la condición inicial en (2.1). Dada $u \in X_0$, se tiene que $i\Delta u - iFu \in L^\infty(I;H^{-2})$. De este modo si $u \in X_0$ es solución del problema (2.1) entonces $u' \in L^\infty(I;H^{-2})$; por lo tanto, u admite un representante $\widetilde{u}$ en $C(I;H^{-2})$. (ver el Teorema 1.4 en los preliminares). Afirmar que $u(0) = \phi$ significa entonces que $\widetilde{u}(0) = \phi$. Si $u \in X_0$ y $\phi \in L^2$ el Lema 2.3 y el Corolario 2.6 garantizan que el lado derecho de (2.3), $G_0(\phi) - iG(Fu)$, está en $\overline{X}$. De esta manera, si $u \in X_0$ satisface (2.3), entonces u admite un representante $\widetilde{u}$ en $C(I;L^2)$.

Ahora probaremos que dada $\phi \in L^2$, $u \in X_0$ es solución del problema de valor inicial (2.1) si y sólo si es solución de (2.3).

Si $u \in X_0$ es tal que $u' = i\Delta u - iFu$ en $\mathcal{D}'(0,T;H^{-2})$ entonces, por el Teorema 1.4 de los preliminares $(c) \Rightarrow (a)$, existen $\widetilde{u} \in C(I;H^{-2})$ y $g \in L^1(I;H^{-2})$ tales que:

$$\widetilde{u}(t) = u(t) \qquad \text{p.c.t. } t \in I \quad \text{y}$$
$$\widetilde{u}(t) = \widetilde{u}(0) + \int_0^t g(\tau)d\tau \text{ para toda } t \in I.$$

Más aún, $g = i\Delta u - iFu$.
Sea $t \in [0,T]$. Para $s \in [0,t]$ definimos

$$H(s) := e^{i(t-s)\Delta}u(s), \tag{2.17}$$

donde en esta última igualdad se identifica u con su representante continuo. Claramente $H \in C([0,t];H^{-2})$.

Proposición 2.7. *Sean $u \in X_0$ tal que $u' \in \mathcal{D}'(0,T;H^{-2})$, $t \in [0,T]$ y sea H la función definida por (2.17). Entonces*

$$H'(\cdot) = e^{i(t-\cdot)\Delta}(u' - i\Delta u)(\cdot)$$

en $\mathcal{D}'(0,t;H^{-2})$.

Demostración.
Gracias al Teorema 1.4 , $(b) \Rightarrow (c)$, es suficiente demostrar que

$$\lim_{h\to 0^+} \|\frac{1}{h}(H(\cdot+h) - H(\cdot)) - e^{i(t-\cdot)\Delta}(u' - i\Delta u)(\cdot)\|_{L^1(0,t-h;H^{-2})} = 0\,. \tag{2.18}$$

Teniendo en cuenta que $\|e^{i(t-s)\Delta}\|_{B(H^{-2})} = 1$, observemos inicialmente que

$$\|\tfrac{1}{h}(H(\cdot+h)-H(\cdot))-e^{i(t-\cdot)\Delta}(u'-i\Delta u)(\cdot)\|_{L^1(0,t-h;H^{-2})}$$
$$=\int_0^{t-h}\|\tfrac{1}{h}(e^{i(t-s-h)\Delta}u(s+h)-e^{i(t-s)\Delta}u(s))-e^{i(t-s)\Delta}(u'(s)-i(\Delta u)(s))\|_{H^{-2}}ds$$
$$\leq\int_0^{t-h}\|e^{i(t-s)\Delta}\|_{B(H^{-2})}\|\tfrac{1}{h}e^{-ih\Delta}(u(s+h)-u(s))+(\tfrac{e^{-ih\Delta}-I}{h})u(s)-u'(s)+i(\Delta u)(s)\|_{H^{-2}}ds$$
$$\leq\Big[\int_0^{t-h}\|\tfrac{1}{h}e^{-ih\Delta}(u(s+h)-u(s))-e^{-ih\Delta}u'(s)\|_{H^{-2}}ds+\int_0^{t-h}\|e^{-ih\Delta}u'(s)-u'(s)\|_{H^{-2}}ds$$
$$+\int_0^{t-h}\|(\tfrac{e^{-ih\Delta}-I}{h})u(s)+i(\Delta u)(s)\|_{H^{-2}}ds\Big]\;=\;I+II+III. \tag{2.19}$$

Ahora bien,

$$I=\|\frac{1}{h}(u(\cdot+h)-u(\cdot))-u'\|_{L^1(0,t-h;H^{-2})}$$

y por la parte $(c)\Rightarrow(b)$ del Teorema 1.4 en los preliminares aplicada a la función u, tenemos que

$$I\to 0\;\text{ cuando }\;h\to 0^+. \tag{2.20}$$

Puesto que $u'\in L^1(I,H^{-2})$ y $\|e^{-ih\Delta}u'(s)-u'(s)\|_{H^{-2}}\leq 2\|u'(s)\|_{H^{-2}}$, y además

$$\lim_{h\to 0^+}\|e^{-ih\Delta}u'(s)-u'(s)\|_{H^{-2}}=0\;\text{ p. c. t. } s\in[0,t],$$

entonces, por el teorema de la convergencia dominada:

$$II\to 0\;\text{ cuando }\;h\to 0^+. \tag{2.21}$$

De otra parte, como $u(s)\in L^2$ p.c.t. $s\in[0,t]$, entonces

$$\lim_{h\to 0+}(\frac{e^{-ih\Delta}-I}{h})u(s)+i(\Delta u)(s)=0\qquad\text{en } H^{-2}\;\text{ p.c.t. } s\in[0,t].$$

Usando el hecho de que si $T(t)$ es el C_0 semigrupo generado por A y si $x\in D(A)$ entonces $T(h)x-x=\int_0^h AT(\eta)xd\eta$, (ver [PA] pg.5), podemos ver que

$$\begin{aligned}\|\frac{e^{-ih\Delta}-I}{h}u(s)+i(\Delta u)(s)\|_{H^{-2}}&\leq\|\frac{e^{ih\Delta}-I}{h}u(s)\|_{H^{-2}}+\|(\Delta u)(s)\|_{H^{-2}}\\&=\|\frac{1}{h}\int_0^h i\Delta_E(e^{i\eta\Delta}u(s))d\eta\|_{H^{-2}}+\|(\Delta u)(s)\|_{H^{-2}}\\&\leq\frac{C}{h}\int_0^h\|e^{i\eta\Delta}u(s)\|_{L^2}d\eta+\|(\Delta u)(s)\|_{H^{-2}}\\&\leq C\|u(s)\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Luego, por el teorema de la convergencia dominada,

$$III\to 0\;\text{ cuando }\;h\to 0^+. \tag{2.22}$$

Así (2.18) es consecuencia de (2.19)-(2.22). □

Lema 2.8. *Si $\phi \in L^2$ y $u \in X_0$ es solución de $u' = i\Delta u - iFu$ y $u(0) = \phi$, entonces u satisface la ecuación en (2.3).*

Demostración.
Si H está definida por (2.17) entonces por la Proposición 2.7

$$H'(\cdot) = e^{i(t-\cdot)\Delta}(u' - i\Delta u)(\cdot) \quad \text{en} \quad \mathcal{D}'(0, t; H^{-2}).$$

y por lo tanto en virtud del Teorema 1.4 $(c) \Rightarrow (a)$

$$H(\tau) = H(0) + \int_0^\tau e^{i(t-s)\Delta}(u'(s) - i(\Delta u)(s))ds \quad \text{para todo} \quad \tau \in [0, t].$$

En particular, si $\tau = t$.

$$H(t) = H(0) + \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(u'(s) - i(\Delta u)(s))ds$$

y puesto que $u' = i\Delta u - iFu$ en $L^1([0, T]; H^{-2})$, resulta que

$$u(t) = e^{it\Delta}\phi - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(Fu)(s)ds \qquad \text{para toda } t \in I,$$

con lo cual queda probado que u es solución de (2.3). $\square$

Lema 2.9. *Si $\phi \in L^2$ y $u \in X_0$ satisface la ecuación (2.3), entonces u es solución del problema (2.1).*

Demostración.
De manera similar a la utilizada en la demostración de la Proposición 2.7, puede verse que si $u \in L_T^\infty L_E^2$ con $u' \in L^\infty(I; H^{-2})$, entonces

$$\left(e^{i(\cdot)\Delta}u(\cdot)\right)' = e^{i(\cdot)\Delta}u'(\cdot) + ie^{i(\cdot)\Delta}(\Delta u)(\cdot) \tag{2.23}$$

$$\text{y} \qquad \left(e^{-i(\cdot)\Delta}u(\cdot)\right)' = e^{-i(\cdot)\Delta}u'(\cdot) - ie^{-i(\cdot)\Delta}(\Delta u)(\cdot)\,, \tag{2.24}$$

donde (2.23) y (2.24) son igualdades en $\mathcal{D}'(0, T; H^{-2})$.
Sea $u \in X_0$ solución de (2.3). Hemos visto que u tiene un representante en $C(I; L^2)$ que seguiremos denotando por u. Por lo tanto $e^{-i(\cdot)\Delta}u(\cdot) \in C(I; L^2) \hookrightarrow C(I; H^{-2})$.
Además por (2.16) $e^{-i(\cdot)\Delta}(Fu)(\cdot) \in L^\infty(I; H^{-2})$. Por consiguiente

$$e^{-it\Delta}u(t) = \phi - i\int_0^t e^{-is\Delta}(Fu)(s)ds$$

y por el Teorema 1.4 $(a) \Rightarrow (c)$

$$\left(e^{-i(\cdot)\Delta}u(\cdot)\right)' = -ie^{-i(\cdot)\Delta}(Fu)(\cdot)\,, \tag{2.25}$$

en $\mathcal{D}'(0,T;H^{-2})$.
Como $u \in C(I;L^2) \hookrightarrow L_T^\infty L_E^2$, si logramos probar que $u' \in L^\infty(I;H^{-2})$, entonces (2.24) y (2.25) implican que se satisface la ecuación diferencial en (2.1).
Veamos que $u' \in L^\infty(I;H^{-2})$. En efecto, como por (2.25) $(e^{-i(\cdot)\Delta}u(\cdot))' \in L^\infty(I;H^{-2})$, entonces, por (2.23)

$$u' = \left[e^{i(\cdot)\Delta}e^{-i(\cdot)\Delta}u(\cdot)\right]' = e^{i(\cdot)\Delta}\left[e^{-i(\cdot)\Delta}u(\cdot)\right]' + ie^{i(\cdot)\Delta}\left[\Delta e^{-i(\cdot)\Delta}u(\cdot)\right].$$

de las condiciones exigidas para u es fácil ver que el lado derecho de la anterior igualdad pertenece a $L^\infty(I;H^{-2})$. De otra parte, es evidente que $u(0) = \phi$. □

Teorema 2.10.
Sean $\phi \in L^2$, $T^* > 0$ e $I^* = [0,T^*]$. Si u y v en $X_0(I^*)$ son soluciones del problema (2.1), entonces $u = v$.

Demostración.
Por el Lema 2.8 u y v satisfacen (2.3). Entonces $u - v = -i(GF)(u) + i(GF)(v)$ en $\overline{X}(I^*)$.
Sean $R >$ $\max\{\|u\|_{X_0(I^*)}, \|v\|_{X_0(I^*)}\}$ y $T > 0$ tales que en (2.14) se cumple que $K := C(T + T^{1-\beta}2R^{p-2}) < 1$ y $T \leq T^*$. De esta manera se tiene que $\|u - v\|_{\overline{X}(I)} = \|(GF)(u) - (GF)(v)\|_{\overline{X}(I)} \leq K\|u - v\|_{X(I)}$, y por lo tanto $u(t) = v(t)$ para $t \in [0,T]$.
Sea $\widetilde{T} =$ $\sup\left\{T \in [0,T^*]/u(t) = v(t) \text{ para todo } t \in [0,T]\right\}$. Veamos que $\widetilde{T} = T^*$.
Razonemos por el absurdo; supongamos que $\widetilde{T} < T^*$. Sea $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $[0,\widetilde{T})$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \widetilde{T}$. Ya que $(GF)(u) - (GF)(v) \in C([0,T^*];L^2)$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} [(GF)(u)](t_n) - [(GF)(v)](t_n) = [(GF)(u)](\widetilde{T}) - [(GF)(v)](\widetilde{T}).$$

Por otra parte, puesto que $u = v$ en $[0,\widetilde{T})$, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $[(GF)(u)](t_n) - [(GF)(v)](t_n) = 0$. Luego $u(\widetilde{T}) = v(\widetilde{T})$ y así $u(t) = v(t)$ para $t \in [0,\widetilde{T}]$.
Consideremos ahora el problema de valor inicial

$$\begin{cases} i\partial_t w = -\Delta w + Fw & t \in [0,T^* - \widetilde{T}] \\ w(0) = u(\widetilde{T}) = v(\widetilde{T}) = \theta & \theta \in L^2 \quad . \end{cases} \tag{2.26}$$

Sean $\overline{u}(s) = u(s + \widetilde{T})$, $\overline{v}(s) = v(s + \widetilde{T})$ y $\overline{X}_0 = X_0([0,T^* - \widetilde{T}])$. Encontrar una solución de (2.26) es equivalente a encontrar una solución para la ecuación integral

$$w(t) = e^{it\Delta}\theta - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(Fw)(s)ds\ . \tag{2.27}$$

Usando de nuevo el hecho de que u y v satisfacen el problema (2.1), es fácil ver que $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son soluciones de (2.26) y por lo tanto también de (2.27). Podemos obtener así un $\delta \in \mathbb{R}$, $0 < \delta < T^* - \widetilde{T}$, tal que $\overline{u} = \overline{v}$ en $[0,\delta]$ como igualdad en $C([0,\delta];L^2) \cap L_\delta^r L_E^p$.
Luego $u = v$ en $[0,\widetilde{T} + \delta]$, lo cual contradice la definición de $\widetilde{T}$.
Concluimos así que $\widetilde{T} = T^*$; luego $u = v$ en $X_0([0,T^*))$ y por un argumento similar al realizado para $\widetilde{T}$, puede verse que $u = v$ en $X_0(I^*)$. □

3. EXISTENCIA DE SOLUCION LOCAL PARA DATO INICIAL EN H^1.

En este capítulo obtendremos un teorema de existencia y unicidad de solución para la Ecuación (2.3) cuando $\phi \in H^1(\mathbb{R}^m)$.

Inicialmente definiremos ciertos espacios funcionales necesarios para el estudio de esta ecuación en H^1. Sean $S = S(\mathbb{R}^m)$ el espacio de Schwartz y $S' = S'(\mathbb{R}^m)$ el espacio de las distribuciones temperadas en $\mathbb{R}^m$. Si $v \in X = L_T^\infty L_E^2 \cap L_T^r L_E^p$ entonces, p.c.t. $s \in I, v(s)$ pertenece a S' con derivadas parciales en S' denotadas por $\frac{\partial v(s)}{\partial x_j}$,
$j = 1, ..., m$. De este modo p.c.t. $s \in I$ podemos definir

$$(\frac{\partial v}{\partial x_j})(s) := \frac{\partial v(s)}{\partial x_j} \,.$$

Sea $Y := \{v \in X \;/\; \frac{\partial v}{\partial x_j} \in X \;;\; j = 1, ..., m\}$ con $\|v\|_Y := \|v\|_X + \|\nabla v\|_X$, donde $\|\nabla v\|_X = \sum_{j=1}^m \|\frac{\partial v}{\partial x_j}\|_X$.

Para $v \in L_T^1 L_E^2 + L_T^{r'} L_E^{p'}$, $v(s) \in L^2 + L^{p'} \hookrightarrow S'$ p.c.t. $s \in I$ con derivadas parciales en S' dadas por:

$$\frac{\partial v(s)}{\partial x_j} = \frac{\partial v_1(s)}{\partial x_j} + \frac{\partial v_2(s)}{\partial x_j} \,,$$

donde $v_1 \in L_T^1 L_E^2$ y $v_2 \in L_T^{r'} L_E^{p'}$ son tales que $v = v_1 + v_2$. Es fácil ver que esta igualdad es independiente de la escogencia de v_1 y v_2.

Sea $Y' := \{v \in X' / \frac{\partial v}{\partial x_j} \in X';\; j = 1, ..., m\}$ con norma $\|v\|_{Y'} := \|v\|_{X'} + \sum_{j=1}^m \|\frac{\partial v}{\partial x_j}\|_{X'}$.

Por último, sea $\overline{Y} := \{v \in \overline{X} \;/\; \frac{\partial v}{\partial x_j} \in \overline{X} \;; j = 1, ..., m\}$, con norma $\|v\|_{\overline{Y}} := \|v\|_Y$.

De las definiciones de Y, $\overline{Y}$ y Y' es claro que $Y \hookrightarrow X$, $Y \hookrightarrow L^\infty(I; H^1)$, $\overline{Y} \hookrightarrow C(I; H^1)$ y $Y' \hookrightarrow X'$.

Lema 3.1. *El espacio Y está contenido de manera continua en X_0, es decir*

$$\|v\|_{X_0} \leq C\|v\|_Y \quad \text{para toda } v \in Y \,,$$

con C constante independiente del valor de T.

Demostración.
Puesto que $0 < m(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}) < 1$ entonces, en virtud del Teorema 1.3, $H^1(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^m)$ y por lo tanto $L^\infty(I; H^1) \hookrightarrow L_T^\infty L_E^p$. De esta manera como $Y \hookrightarrow X$ y $Y \hookrightarrow L^\infty(I; H^1)$ entonces, si $v \in Y$ se sigue que $v \in L_T^\infty L_E^2 \cap L_T^\infty L_E^p \equiv X_0$ y que

$$\begin{aligned} \|v\|_{X_0} &= \|v\|_{L_T^\infty L_E^2} + \|v\|_{L_T^\infty L_E^p} \\ &\leq \|v\|_Y + C\|v\|_{L^\infty(I;H^1)} \leq C\|v\|_Y \,. \end{aligned}$$ □

Lema 3.2. *El operador G_0 es lineal y continuo de H^1 en $\overline{Y}$.*

Demostración.
Sea $v \in H^1$. Veamos que

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\big((G_0(v))(t)\big) = \big(G_0(\frac{\partial v}{\partial x_j})\big)(t) \qquad \text{para todo } t \in I. \tag{3.1}$$

Haciendo uso de las propiedades de la transformada de Fourier en L^2 se obtiene:

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\big((G_0(v))(t)\big)\Big)^\wedge &= (2\pi i(\cdot)_j)\big((G_0(v))(t)\big)^\wedge = (2\pi i(\cdot)_j)\big(e^{it\Delta}v\big)^\wedge \\ &= (2\pi i(\cdot)_j)e^{-4\pi^2 i|\cdot|^2 t}\widehat{v} = e^{-4\pi^2 i|\cdot|^2 t}\big(\frac{\partial v}{\partial x_j}\big)^\wedge \\ &= \big(e^{it\Delta}\frac{\partial v}{\partial x_j}\big)^\wedge = \big((G_0(\frac{\partial v}{\partial x_j}))(t)\big)^\wedge,\end{aligned}$$

y puesto que la transformada de Fourier es un isomorfismo en L^2, entonces se tiene (3.1), es decir:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(G_0(v)) = G_0\big(\frac{\partial v}{\partial x_j}\big). \tag{3.2}$$

Teniendo en cuenta (3.2) y el Lema 2.3 se sigue que: $\dfrac{\partial}{\partial x_j}(G_0(v)) \in \overline{X}$ y $G_0(v) \in \overline{X}$. Es decir, $G_0(v) \in \overline{Y}$ y además se tiene que

$$\begin{aligned}\|G_0(v)\|_Y &= \|G_0(v)\|_X + \sum_{j=1}^{m} \|\frac{\partial(G_0(v))}{\partial x_j}\|_X \\ &= \|G_0(v)\|_X + \sum_{j=1}^{m} \|G_0(\frac{\partial v}{\partial x_j})\|_X \\ &\leq C\|v\|_{L^2} + \sum_{j=1}^{m} C\|\frac{\partial v}{\partial x_j}\|_{L^2} \leq C\|v\|_{H^1}.\end{aligned}$$

□

Lema 3.3. *El operador G es lineal y continuo de Y' en $\overline{Y}$.*

Demostración.
Si $v \in Y'$ entonces $v \in X'$ y $\frac{\partial v}{\partial x_j} \in X'$ para $j = 1, ..., m$. En virtud del Lema 2.4 Gv y $G\frac{\partial v}{\partial x_j}$ pertenecen a $\overline{X}$. Por lo tanto nuestro lema quedará demostrado si logramos probar que $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\big((Gv)(t)\big) = \big(G\frac{\partial v}{\partial x_j}\big)(t)$ en S' para todo $t \in I$.
Antes de ver esto último notemos que si $f \in H^{-1}$ y $\psi \in S(\mathbb{R}^m)$ entonces

$$(f, \psi) = (f, \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\psi))) = (\widehat{f}, \widehat{\psi}(-\cdot)) = \int_{\mathbb{R}^m} \widehat{f}(\xi)\widehat{\psi}(-\xi)d\xi\,;$$

de donde es claro que $(\cdot,\psi) : H^{-1} \to \mathbb{C}$ es lineal y continuo.
Sean $t \in I$ y $\psi \in S(\mathbb{R}^m)$. En una parte de la demostración del Corolario 2.6 se ha probado que $L^{p'} \hookrightarrow H^{-1}$; se tiene entonces que $\frac{\partial v}{\partial x_j} \in L^1(I; H^{-1})$. Teniendo presentes esta inclusión y el Teorema 1.8 de los preliminares se sigue que

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial x_j}((Gv)(t)),\psi) &= -((Gv)(t),\frac{\partial\psi}{\partial x_j}) \\
&= -\Big(\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}v(s)ds, \frac{\partial\psi}{\partial x_j}\Big) \\
&= -\int_0^t (e^{i(t-s)\Delta}v(s), \frac{\partial\psi}{\partial x_j})ds \\
&= -\int_0^t \Big(\int_{\mathbb{R}^m} e^{-4\pi^2 i|\xi|^2(t-s)}\widehat{v(s)}(\xi)2\pi i(-\xi_j)\widehat{\psi}(-\xi)d\xi\Big)ds \\
&= \int_0^t (e^{i(t-s)\Delta}\frac{\partial v(s)}{\partial x_j},\psi)ds \\
&= \Big(\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}\frac{\partial v(s)}{\partial x_j}ds,\psi\Big) \\
&= \Big((G\frac{\partial v}{\partial x_j})(t),\psi\Big).
\end{aligned}$$

De esta última igualdad vemos que $\frac{\partial}{\partial x_j}((Gv)(t)) = (G\frac{\partial v}{\partial x_j})(t)$.

Observemos además que en virtud del Lema 2.4:

$$\begin{aligned}
\|Gv\|_Y &= \|Gv\|_X + \sum_{j=1}^m \|\frac{\partial(Gv)}{\partial x_j}\|_X \\
&= \|Gv\|_X + \sum_{j=1}^m \|G\frac{\partial v}{\partial x_j}\|_X \\
&\le C\|v\|_{X'} + \sum_{j=1}^m C\|\frac{\partial v}{\partial x_j}\|_{X'} \le C\|v\|_{Y'}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Lema 3.4. *El operador F envía Y en Y' de manera acotada. Más precisamente:*

$$\|Fv\|_{Y'} \le C(T + T^{1-\beta}\|v\|_{X_0}^{p-2})\|v\|_Y \quad , \tag{3.3}$$

donde $\beta = m(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}) < 1$.

Demostración.
Sea $v \in Y$. Puesto que $Y \subset X_0$ entonces del Lema 2.5 se sigue que

$$\|Fv\|_{X'} \le C\|v\|_X(T + T^{1-\beta}\|v\|_{X_0}^{p-2}). \tag{3.4}$$

Demostremos ahora que $\dfrac{\partial}{\partial x_j}(Fv) \in X'$ para $j = 1, ..., m$.
Como $v \in Y$ entonces $\frac{\partial v}{\partial x_j} \in X$ para $j = 1, ..., m$. Luego p.c.t. $t \in I \quad v(t) \in H^1 \cap W^{1,p}$.
En virtud del Teorema 1.5 de los preliminares existe $C > 0$ tal que para $h \in \mathbb{R}^m$ y $\omega \subset\subset \mathbb{R}^m$

$$\|(v(t))_h - v(t)\|_{L^2(\omega)} \leq C\|\nabla(v(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}|h|,$$

donde $\|\nabla(v(t))\|_{L^2} := \sum\limits_{j=1}^{m} \|\dfrac{\partial v(t)}{\partial x_j}\|_{L^2}$.
De las condiciones que satisace F_1 en (2.2) tenemos

$$\begin{aligned}\|((F_1 v)(t))_h - (F_1 v)(t)\|_{L^2(\omega)} &= \Big(\int\limits_{\omega} |F_1([v(t)](x+h)) - F_1([v(t)](x))|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\|(v(t))_h - v(t)\|_{L^2(\omega)} \\ &\leq C\|\nabla(v(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}|h|.\end{aligned}$$

Luego, por el Teorema 1.5, se concluye que para $j = 1, ..., m$ $\dfrac{\partial}{\partial x_j}((F_1 v)(t)) \in L^2$ y que

$$\|\frac{\partial}{\partial x_j}((F_1 v)(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq C\|\nabla(v(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \quad \text{p.c.t} \in I,$$

y por lo tanto

$$\|\frac{\partial}{\partial x_j}(F_1 v)\|_{L^1_T L^2_E} \leq CT\|\nabla v\|_{L^\infty_T L^2_E}. \tag{3.5}$$

Puesto que $v(t) \in W^{1,p}$ p.c.t. $t \in I$ entonces, del Teorema 1.5, se sigue que existe $C > 0$ tal que para $h \in \mathbb{R}^m$ y $\omega \subset\subset \mathbb{R}^m$ tiene lugar la desigualdad:

$$\|(v(t))_h - v(t)\|_{L^p(\omega)} \leq C\|\nabla(v(t))\|_{L^p(\mathbb{R}^m)}|h|,$$

donde $\|\nabla(v(t))\|_{L^p} := \sum\limits_{j=1}^{m} \|\dfrac{\partial v(t)}{\partial x_j}\|_{L^p}$.
De las condiciones que satisface F_2 en (2.2) tenemos

$$\int\limits_{\omega} |F_2([v(t)](x+h)) - F_2([v(t)](x))|^{p'} dx \leq C\|(v(t))_h - v(t)\|^{p'}_{L^p(\omega)}\|v(t)\|^{p'(p-2)}_{L^p(\mathbb{R}^m)},$$

luego

$$\begin{aligned}\|((F_2 v)(t))_h - (F_2 v)(t)\|_{L^{p'}(\omega)} &\leq C\|(v(t))_h - v(t)\|_{L^p(\omega)}\|v(t)\|^{p-2}_{L^p(\mathbb{R}^m)} \\ &\leq C\|\nabla(v(t))\|_{L^p(\mathbb{R}^m)}\|v(t)\|^{p-2}_{L^p(\mathbb{R}^m)}|h|.\end{aligned}$$

De esta desigualdad y del Teorema 1.5 se tiene que $\frac{\partial}{\partial x_j}((F_2v)(t)) \in L^{p'}$ y que

$$\|\frac{\partial}{\partial x_j}((F_2v)(t))\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^m)} \leq C\|\nabla(v(t))\|_{L^p(\mathbb{R}^m)}\|v(t)\|^{p-2}_{L^p(\mathbb{R}^m)};$$

luego

$$\|\frac{\partial}{\partial x_j}(F_2v)\|_{L_T^{r'}L_E^{p'}} \leq C\|\nabla v\|_{L_T^{r'}L_E^p}\|v\|^{p-2}_{L_T^\infty L_E^p},$$

y usando la desigualdad de Hölder tenemos

$$\|\frac{\partial}{\partial x_j}(F_2v)\|_{L_T^{r'}L_E^{p'}} \leq CT^{1-\beta}\|\nabla v\|_{L_T^rL_E^p}\|v\|^{p-2}_{L_T^\infty L_E^p}. \tag{3.6}$$

Las estimaciones (3.5) y (3.6) muestran que $\frac{\partial}{\partial x_j}(Fv) \in X'$ y que

$$\begin{aligned}\|\frac{\partial}{\partial x_j}(Fv)\|_{X'} &\leq CT\|\nabla v\|_X + CT^{1-\beta}\|\nabla v\|_X\|v\|^{p-2}_{X_0}\\ &\leq C(T+T^{1-\beta}\|v\|^{p-2}_{X_0})\|\nabla v\|_X.\end{aligned} \tag{3.7}$$

La Desigualdad (3.3) se sigue de (3.4) y (3.7). □

Lema 3.5.
Sean $\phi \in H^1(\mathbb{R}^m)$ y $R > \gamma\|\phi\|_{H^1}$ donde γ es tal que $\|G_0(f)\|_{\overline{X}} \leq \gamma\|f\|_{L^2}$, (ver el Lema 2.3), y $\|\phi\|_{H^1} := \|\phi\|_{L^2} + \sum_{j=1}^{m}\|\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\|_{L^2}$.
Si T es suficientemente pequeño el operador dado por:

$$\Phi : v \mapsto G_0(\phi) - iG(Fv),$$

envía la bola cerrada $B_R^Y(0)$ en sí misma y es una contracción en la métrica de X.

Demostración.
Sea $v \in B_R^Y(0)$. De los Lemas 3.2, 3.3, y 3.4 se sigue que

$$\begin{aligned}\|\Phi v\|_Y &\leq \|G_0(\phi)\|_Y + \|G(Fv)\|_Y\\ &\leq \gamma\|\phi\|_{H^1} + C(T+T^{1-\beta}\|v\|^{p-2}_{X_0})\|v\|_Y\\ &\leq \gamma\|\phi\|_{H^1} + C(T+T^{1-\beta}\|v\|^{p-2}_{Y})\|v\|_Y\\ &\leq \gamma\|\phi\|_{H^1} + C(T+T^{1-\beta}R^{p-2})R.\end{aligned}$$

Por consiguiente Φ envía $B_R^Y(0)$ en sí misma si $T > 0$ es tal que

$$C(T+T^{1-\beta}R^{p-2})R < R - \gamma\|\phi\|_{H^1}. \tag{3.8}$$

De otra parte, si $v, w \in B_R^Y(0) \subset B_{cR}^{X_0}(0)$ (Lema 3.1), entonces por el Corolario 2.6

$$\|\Phi(v) - \Phi(w)\|_X < C(T + 2T^{1-\beta}C^{p-2}R^{p-2})\|v - w\|_X \,. \tag{3.9}$$

De (3.8) y (3.9) se sigue fácilmente la afirmación del lema. $\square$

Lema 3.6.
La bola cerrada $B_R^Y := B_R^Y(0)$ es un subconjunto cerrado de X.

Demostración.
Sean $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $B_R^Y(0)$ y $z \in X$ tales que $z_n \to z$ en X. Veamos que $z \in B_R^Y$. Puesto que $\|z_n\|_Y = \|z_n\|_X + \sum\limits_{j=1}^{m} \|\frac{\partial z_n}{\partial x_j}\|_X$ entonces $\{\frac{\partial z_n}{\partial x_j}\}$ es acotada en X para cada j. Ya que $X = L_T^\infty L_E^2 \cap L_T^r L_E^p$ puede verse como el espacio dual de $X' = L_T^1 L_E^2 + L_T^{r'} L_E^{p'}$, que es separable, entonces $\{\frac{\partial z_n}{\partial x_j}\}$ tiene una subsucesión, que seguiremos denotando $\{\frac{\partial z_n}{\partial x_j}\}$, tal que $\frac{\partial z_n}{\partial x_j}$ converge a cierta w_j en X en la topología débil $*$ de X , (ver [B], Corolario III.26, página 50). Es decir, para todo $j = 1, ..., m$ y para toda $g \in X'$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial z_n}{\partial x_j} g = \int_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^m} w_j g \,.$$

Veamos ahora que para todo $j = 1, ..., m$, $\frac{\partial z}{\partial x_j} = w_j$.
Sean $\rho \in C^\infty(I)$ y $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$, y sea $g \in X'$ la función definida por $[g(t)](x) := \rho(t)\psi(x)$. Teniendo presente que $\frac{\partial z_n}{\partial x_j} \to w_j$ débil $*$ en X y que $z_n \to z$ en X, entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^T \rho(t)\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^m} [w_j(t)](x)\psi(x)dx\Big)dt &= \int_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^m} w_j g \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial z_n}{\partial x_j} g \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \rho(t)\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial [z_n(t)]}{\partial x_j}(x)\psi(x)dx\Big)dt \\
&= -\lim_{n\to\infty} \int_0^T \rho(t)\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^m} [z_n(t)](x)\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x)dx\Big)dt \\
&= -\int_0^T \rho(t)\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^m} [z(t)](x)\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x)dx\Big)dt \,.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Luego p.c.t. $t \in I$ se cumple que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} [w_j(t)](x)\psi(x)dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^m} [z(t)](x)\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x)dx \qquad \text{para toda } \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)\,,$$

es decir: $\frac{\partial z(t)}{\partial x_j} = w_j(t)$ p.c.t. $t \in I$.

De esta forma se concluye que $\frac{\partial z}{\partial x_j} = w_j$, para todo $j = 1, ..., m$, y por consiguiente que $z \in Y$. Además (ver la proposición III.12 pág. 40 de [B])

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} \|\frac{\partial z}{\partial x_j}\|_X &\leq \sum_{j=1}^{m} \liminf_{n\to\infty} \|\frac{\partial z_n}{\partial x_j}\|_X \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \|\frac{\partial z_n}{\partial x_j}\|_X \\
&= \limsup_{n\to\infty} (\|z_n\|_Y - \|z_n\|_X) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} (R - \|z_n\|_X) \\
&= R - \|z\|_X .
\end{aligned}$$

Luego $\|z\|_Y = \|z\|_X + \sum_{j=1}^{m} \|\frac{\partial z}{\partial x_j}\|_X \leq R$. $\square$

Teorema 3.7. *Si $\phi \in H^1$ entonces existen $T = T(\|\phi\|_{H^1}) > 0$ y una única solución u de la ecuación integral (2.3) en el intervalo $I = [0, T]$ con $u \in C(I; H^1) \cap C^1(I; H^{-1})$ y $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_T^\infty L_E^2 \cap L_T^r L_E^p$ para toda $j = 1, .., m$.*

Demostración.
Puesto que $C(I; H^1) \hookrightarrow C(I; L^p) \cap C(I; L^2) \hookrightarrow X_0$, (ver la demostración del Lema 3.1), entonces, por el Teorema 2.10, existe a lo más una $u \in C(I; H^1)$ solución de la ecuación integral (2.3). Usando los Lemas 3.5 y 3.6, el Teorema de punto fijo de Banach nos permite concluir que para $R > \gamma\|\phi\|_{H^1}$ existen $T = T(\|\phi\|_{H^1}) > 0$ y una única $u \in B_R^Y(0)$ tal que $\Phi(u) = u$. Puesto que $G_0(\phi) \in \overline{Y}$ (Lema 3.2) y $G(Fu) \in \overline{Y}$ (Lemas 3.3 y 3.4) entonces $u \in C(I; H^1)$ y $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_T^\infty L_E^2 \cap L_T^r L_E^p$ para $j = 1, ..., m$.
Demostremos ahora que $u \in C'(I; H^{-1})$. Claramente $\Delta u \in C(I; H^{-1})$. Veamos ahora que $Fu \in C(I; H^{-1})$.

En efecto, para t_1 y $t_2 \in I$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\|(F_1 u)(t_1) - (F_1 u)(t_2)\|_{H^{-1}}^2 &\leq \|(F_1 u)(t_1) - (F_1 u)(t_2)\|_{L^2}^2 \\
&\leq C\|u(t_1) - u(t_2)\|_{L^2}^2 ,
\end{aligned}$$

y por lo tanto $F_1 u \in C(I; H^{-1})$.

Para F_2 se tiene:

$$\begin{aligned}
\|(F_2u)(t_2)-(F_2u)(t_1)\|_{L^{p'}}^{p'} &= \int\limits_{\mathbb{R}^m} |[(F_2u)(t_2)](x) - [(F_2u)(t_1)](x)|^{p'} dx \\
&\leq C \int\limits_{\mathbb{R}^m} |[u(t_2)](x) - [u(t_1)](x)|^{p'} \left(|[u(t_2)](x)|^{p-2} + |[u(t_1)](x)|^{p-2}\right)^{p'} dx \\
&\leq C\|u(t_2) - u(t_1)\|_{L^p}^{p'} \left(\|u(t_2)\|_{L^p}^{p'(p-2)} + \|u(t_1)\|_{L^p}^{p'(p-2)}\right) \\
&\leq CR^{p'(p-2)}\|u(t_2) - u(t_1)\|_{L^p}^{p'} \\
&\leq CR^{p'(p-2)}\|u(t_2) - u(t_1)\|_{H^1}^{p'}.
\end{aligned}$$

Como $L^{p'} \hookrightarrow H^{-1}$, de la anterior estimación se sigue que $F_2u \in C(I;H^{-1})$ y puesto que $F = F_1 + F_2$ se tiene entonces que $F \in C(I;H^{-1})$.
Como por el Lema 2.9 $u' = i\Delta u - iFu$ en $\mathcal{D}'(0,T;H^{-2})$, entonces se sigue que $u' \in C(I;H^{-1})$. De esta manera puesto que por el Teorema 1.4, $c) \Longrightarrow a)$, se tiene que $u(t) = u(0) + \int_0^t u'(\tau)d\tau$, entonces es claro que $u \in C^1(I;H^{-1})$. $\square$

Observación: Del Teorema 3.7 y el Lema 2.9 se sigue que si $\phi \in H^1$ entonces existen $T > 0$ y una única $u \in C(I;H^1) \cap C^1(I;H^{-1})$ tal que $u(0) = \phi$ y

$$u'(t) = i(\Delta u)(t) - i(Fu)(t) \text{ para todo } t \in I\,,$$

como igualdad en H^{-1}, donde $u'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t}$ en H^{-1}.

4. EXISTENCIA DE SOLUCION LOCAL PARA DATO INICIAL EN H^2.

En este capítulo estudiamos el problema de Cauchy para la ecuación de Schrödinger no lineal con dato inicial $\phi \in H^2$. Con este fin consideramos los siguientes espacios funcionales:

$Z = Z(I) := \{v \in X \ / \ v' \in X$ y $\Delta v \in L_T^\infty L_E^2\}$ con $\|v\|_Z := \|v\|_X + \|v'\|_X + \|\Delta v\|_{L_T^\infty L_E^2}$.
$\overline{Z} = \overline{Z}(I) := \{v \in \overline{X} \ / \ v' \in \overline{X}$ y $\Delta v \in C(I; L^2)\}$ con $\|v\|_{\overline{Z}} := \|v\|_Z$.
$Z' = Z'(I) := \{v \in C(I; L^2) \ / \ v' \in X'\}$ con $\|v\|_{Z'} = \|v\|_{L_T^\infty L_E^2} + \|v'\|_{X'}$.

Lema 4.1. *Para los espacios Z, $\overline{Z}$ y Z' tienen lugar las siguientes afirmaciones:*
a) El espacio Z está incluído de manera continua en $L^\infty(I; H^2)$.
b) El espacio Z está incluído de manera continua en Y.
c) El espacio $\overline{Z}$ está incluído de manera continua en $\overline{Y} \cap C(I; H^2)$.
d) El espacio Z' está contenido de manera continua en X' con $\|v\|_{X'} \leq T\|v\|_{Z'}$.

Demostración.
a) Sea $v \in Z$. Luego p.c.t. $t \in I$ $(\Delta v)(t) \in L^2$ y $\|(\Delta v)(t)\|_{L^2} \leq \|v\|_Z$. Además se tiene que

$$\begin{aligned}\|(1 + |\cdot|^2)(v(t))^\wedge\|_{L^2} &\leq \|(v(t))^\wedge\|_{L^2} + \||\cdot|^2(v(t))^\wedge\|_{L^2} \\ &\leq \|v(t)\|_{L^2} + C\|(\Delta v)(t)\|_{L^2} \text{ p.c.t. } t \in I\end{aligned}$$

de donde: $\|v\|_{L^\infty(I;H^2)} \leq \|v\|_{L_T^\infty L_E^2} + C\|\Delta v\|_{L_T^\infty L_E^2} \leq C\|v\|_Z$.
b) Sea $v \in Z$, entonces $\frac{\partial v}{\partial x_j} \in L^\infty(I; H^1) \hookrightarrow L_T^\infty L_E^2 \cap L_T^\infty L_E^p = X_0 \hookrightarrow X$, y por lo tanto $v \in Y$. Además:

$$\begin{aligned}\|v\|_Y = \|v\|_X + \sum_{j=1}^m \|\frac{\partial v}{\partial x_j}\|_X &\leq \|v\|_X + \sum_{j=1}^m C(T)\|\frac{\partial v}{\partial x_j}\|_{X_0} \\ &\leq \|v\|_X + \sum_{j=1}^m C(T)\|v\|_{L^\infty(I;H^2)} \leq C\|v\|_Z ,\end{aligned}$$

donde C es una constante uniforme para $T \leq 1$.
c) Sea $v \in \overline{Z}$. Como $v \in C(I; L^2)$ y $\Delta v \in C(I; L^2)$, entonces $v \in C(I; H^2)$. En particular $\frac{\partial v}{\partial x_j} \in C(I; H^1)$, $j = 1, ..., m$, y por lo tanto, teniendo presente b), $v \in \overline{Y}$. La continuidad de la inclusión es consecuencia de a) y b).
d) Sea $v \in Z'$; puesto que $v \in C(I; L^2) \hookrightarrow L_T^1 L_E^2$, entonces $v \in X'$ con $\|v\|_{X'} \leq \|v\|_{L_T^1 L_E^2} \leq T\|v\|_{L_T^\infty L_E^2} \leq T\|v\|_{Z'}$. $\square$

Lema 4.2. *El espacio $\overline{Z}$ es un subespacio cerrado de Z.*

Demostración.
Sean $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{Z}$ y $v \in Z$ con $v_n \to v$ en Z. Por la definición de la norma en Z se tiene que : $\|v_n - v\|_Z = \|v_n - v\|_X + \|v_n' - v'\|_X + \|\Delta v_n - \Delta v\|_{L_T^\infty L_E^2}$. Luego $v_n \to v$ y $v_n' \to v'$ en X con v_n y v_n' en $\overline{X}$. Como $\overline{X}$ es cerrado en X, entonces v y v' pertenecen a

$\overline{X}$. De otra parte, puesto que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\Delta v_n \in C(I;L^2)$ y $\Delta v_n \to \Delta v$ en $L^\infty_T L^2_E$, entonces $\Delta v \in C(I;L^2)$. Por lo tanto $v \in \overline{Z}$ y en consecuencia $\overline{Z}$ es cerrado en Z. $\square$

Lema 4.3. *El operador G_0 es lineal y continuo de H^2 en $\overline{Z}$.*

Demostración.
Sea $v \in H^2$. Debemos probar que $G_0(v) \in \overline{X}, (G_0(v))' \in \overline{X}, \Delta(G_0(v)) \in C(I;L^2)$ y $\|G_0(v)\|_Z \leq C\|v\|_{H^2}$. Es claro que si $v \in H^2$ entonces $G_0(v) \in C(I;H^2)$ y por lo tanto $\Delta(G_0(v)) \in C(I;L^2)$. Puesto que $v \in H^2 \hookrightarrow L^2$ entonces, gracias al Lema 2.3, se tiene que

$$G_0(v) \in \overline{X} \text{ y } \|G_0(v)\|_X \leq C\|v\|_{L^2} \leq C\|v\|_{H^2}. \tag{4.1}$$

Si $v \in H^2$ entonces, por un razonamiento idéntico al utilizado en la prueba del Lema 3.2,

$$G_0(\Delta_E v) = \Delta(G_0(v)). \tag{4.2}$$

Puesto que $i\Delta_E : H^2 \longrightarrow L^2$ es el generador de un C_0 grupo en L^2 y $v \in H^2$, entonces

$$\tfrac{d}{dt}\big((G_0(v))(t)\big) = \tfrac{d}{dt}(e^{it\Delta}v) = (i\Delta_E)(e^{it\Delta}v) = (i\Delta_E)\big((G_0(v))(t)\big),$$

donde $\frac{d}{dt}$ denota la derivada fuerte en L^2.
Por lo tanto, como $(i\Delta)(G_0(v)) \in C(I;L^2)$, entonces

$$(G_0(v))(t) = v + \textstyle\int_0^t (i\Delta_E)\big((G_0(v))(\tau)\big)d\tau,$$

y en virtud del Teorema 1.4 a) $\Longrightarrow$ c):

$$(G_0(v))' = (i\Delta)(G_0(v)) \text{ en } \mathcal{D}'(0,T;L^2). \tag{4.3}$$

Teniendo en cuenta (4.2) se sigue entonces que $(G_0(v))' = iG_0(\Delta_E v)$. De esta última igualdad y en virtud del Lema 2.3, se tiene que

$$(G_0(v))' \in \overline{X} \text{ y que } \|(G_0(v))'\|_X = \|G_0(\Delta_E v)\|_{\overline{X}} \leq C\|\Delta_E v\|_{L^2}. \tag{4.4}$$

Finalmente, de (4.1)-(4.4), se sigue que:

$$\begin{aligned}\|G_0(v)\|_Z &= \|G_0(v)\|_X + \|(G_0(v))'\|_X + \|\Delta(G_0(v))\|_{L^\infty_T L^2_E}\\ &\leq C\|v\|_{H^2} + \|(G_0(v))'\|_X + C\|\Delta_E v\|_{L^2}\\ &\leq C\|v\|_{H^2}. \qquad \square\end{aligned}$$

Lema 4.4. *El operador G es lineal y continuo de Z' en $\overline{Z}$.*

Demostración.
Sea $v \in Z'$; como $v \in X'$ entonces $Gv \in \overline{X}$ (Lema 2.4), y por la parte d) del Lema 4.1

$$\|Gv\|_X \leq C\|v\|_{X'} \leq CT\|v\|_{Z'}. \tag{4.5}$$

Veamos que $(Gv)' \in \overline{X}$. En realidad puesto que $v \in C(I;L^2)$ y $v' \in X' \hookrightarrow L^1(I;H^{-1})$ entonces, por el Teorema 1.4, c) $\Longrightarrow$ a),

$$v(t) = v(0) + \textstyle\int_0^t v'(s)ds.$$

Aplicando el operador G en ambos lados de la anterior igualdad se tiene que:

$$\begin{aligned}(Gv)(t) &= \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(v(0) + \int_0^s v'(\tau)d\tau)ds\\ &= \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}v(0)ds + \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}\Big(\int_0^s v'(\tau)d\tau\Big)ds = I + II,\end{aligned} \tag{4.6}$$

donde las integrales de Bochner que aparecen son todas en H^{-1}. Es claro que

$$I = \int_0^t (G_0(v(0)))(\eta)d\eta \,. \tag{4.7}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} II &= \int_0^t e^{i\beta\Delta}(\int_0^{t-\beta} v'(\tau)d\tau)d\beta \\ &= \int_0^t (\int_0^{t-\beta} e^{i\beta\Delta}v'(\tau)d\tau)d\beta \\ &= \int_0^t (\int_\beta^t e^{i\beta\Delta}v'(\tau-\beta)d\tau)d\beta \\ &= \int_0^t (\int_0^\tau e^{i\beta\Delta}v'(\tau-\beta)d\beta)d\tau \\ &= \int_0^t (\int_0^\tau e^{i(\tau-\psi)\Delta}v'(\psi)d\psi)d\tau \\ &= \int_0^t (Gv')(\tau)d\tau \,. \end{aligned} \tag{4.8}$$

De (4.6), (4.7) y (4.8) se tiene que

$$(Gv)(t) = \int_0^t \left[(G_0(v(0)))(\tau) + (Gv')(\tau)\right]d\tau \,,$$

y puesto que $G_0(v(0)) + Gv' \in \overline{X} \subset C(I;L^2)$, (ver los Lemas 2.3 y 2.4), entonces, en virtud del Teorema 1.4 parte $a) \Rightarrow c)$

$$(Gv)' = G_0(v(0)) + Gv' \;\text{ en }\; \mathcal{D}'(0,T;L^2). \tag{4.9}$$

Luego $(Gv)' \in \overline{X}$ y

$$\begin{aligned} \|(Gv)'\|_X &\leq \|G_0(v(0))\|_X + \|Gv'\|_X \\ &\leq C\|v(0)\|_{L^2} + C\|v'\|_{X'} \\ &\leq C\|v\|_{L^\infty_T L^2_E} + C\|v'\|_{X'} = C\|v\|_{Z'} \,. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Veamos ahora que $\Delta(Gv) \in C(I;L^2)$. Puesto que $Gv \in L^\infty_T L^2_E$, se tiene que $\Delta(Gv) \in L^\infty(I;H^{-2})$; luego, si se demuestra que

$$\lim_{h\to 0+} \|\frac{1}{h}\big((Gv)_h - Gv\big) - (i\Delta(Gv)+v)\|_{L^1(0,T-h;H^{-2})} = 0 \,, \tag{4.11}$$

entonces, por el Teorema 1.4, $b) \Rightarrow c)$,

$$(Gv)' = i\Delta(Gv) + v \,,$$

como igualdad en $\mathcal{D}'(0,T;H^{-2})$ y así se tendría que

$$\Delta(Gv) = i(-(Gv)' + v) \in C(I;L^2) \text{ y}$$

$$\begin{aligned}\|\Delta(Gv)\|_{L_T^\infty L_E^2} &\leq \|(Gv)'\|_{L_T^\infty L_E^2} + \|v\|_{L_T^\infty L_E^2}\\ &\leq \|(Gv)'\|_X + \|v\|_{Z'}\\ &\leq C\|v\|_{Z'}\,. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Probemos entonces (4.11).

$\int_0^{T-h} \|\frac{1}{h}\Big((Gv)(t+h) - (Gv)(t)\Big) - ((i\Delta(Gv))(t) + v(t))\|_{H^{-2}}dt$

$= \int_0^{T-h} \|\frac{1}{h}\Big(\int_0^{t+h} e^{i(t+h-s)\Delta}v(s)ds - \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}v(s)ds\Big) - ((i\Delta(Gv))(t) + v(t))\|_{H^{-2}}dt$

$= \int_0^{T-h} \|\frac{1}{h}(e^{ih\Delta}\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}v(s)ds + e^{ih\Delta}\int_t^{t+h} e^{i(t-s)\Delta}v(s)ds - \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}v(s)ds)$

$\quad - i(\Delta(Gv))(t) - v(t)\|_{H^{-2}}dt$

$\leq I + II + III\,,$ donde

$I = \int_0^{T-h} \|\frac{e^{ih\Delta}-I}{h}(Gv)(t) - i(\Delta(Gv))(t)\|_{H^{-2}}dt\,,$

$II = \int_0^{T-h} \|\frac{e^{ih\Delta}}{h}\int_t^{t+h} e^{i(t-s)\Delta}v(s)ds - e^{ih\Delta}v(t)\|_{H^{-2}}dt$ y

$III = \int_0^{T-h} \|e^{ih\Delta}v(t) - v(t)\|_{H^{-2}}dt\,.$

Sea $t \in [0,T]$. Puesto que $(Gv)(t) \in L^2$, entonces:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{e^{ih\Delta} - I}{h}((Gv)(t)) = i[\Delta(Gv)](t) \text{ en } H^{-2}.$$

Además;

$$\begin{aligned}\|\frac{e^{ih\Delta} - I}{h}(Gv)(t) - i(\Delta(Gv))(t)\|_{H^{-2}} &\leq \|\frac{e^{ih\Delta} - I}{h}(Gv)(t)\|_{H^{-2}} + \|(\Delta(Gv))(t)\|_{H^{-2}}\\ &\leq \frac{1}{h}\int_0^h \|i\Delta_E e^{i\xi\Delta}((Gv)(t))\|_{H^{-2}}d\xi + C\|(Gv)(t)\|_{L^2}\\ &\leq C\|(Gv)(t)\|_{L^2}\,;\end{aligned}$$

luego, por el Teorema de la convegencia dominada, vemos que $I \to 0$ cuando $h \to 0^+$.
Nótese que

$$II = \int_0^{T-h} \|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{i(t-s)\Delta}v(s)ds - v(t)\|_{H^{-2}}dt\,,$$

y como $v \in C(I;L^2) \hookrightarrow C(I;H^{-2})$, entonces

$$\lim_{h\to 0^+} \|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{i(t-s)\Delta}v(s)ds - v(t)\|_{H^{-2}} = 0 \qquad \text{para todo } t \in (0,T).$$

Además

$$\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{i(t-s)\Delta}v(s)ds - v(t)\|_{H^{-2}} \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\|e^{i(t-s)\Delta}v(s)\|_{H^{-2}}ds + \|v(t)\|_{H^{-2}}$$
$$\leq \|v\|_{L^\infty([t,t+h];H^{-2})} + \|v(t)\|_{H^{-2}}$$
$$\leq C\|v\|_{L^\infty_T L^2_E},$$

y por el Teorema de la convergencia dominada se tiene que $II \to 0$ cuando $h \to 0^+$. Una aplicación elemental del Teorema de la convergencia dominada permite concluir que $III \to 0$ cuando $h \to 0^+$. Así (4.11) queda demostrado y por lo tanto $\Delta(Gv) \in C(I; L^2)$. Finalmente, las Desigualdades (4.5), (4.10) y (4.12) muestran que

$$\|Gv\|_Z \leq C\|v\|_{Z'},$$

donde C es una constante uniforme para $T \leq 1$. □

Lema 4.5.
El operador no lineal F_2 es acotado de H^k en L^2, donde $k = \frac{m}{2}(\frac{p-2}{p-1})$. Más precisamente, si $v, w \in H^k$ entonces

$$\|F_2v - F_2w\|_{L^2} \leq C\|v-w\|_{H^k}(\|v\|^{p-2}_{H^k} + \|w\|^{p-2}_{H^k}). \tag{4.13}$$

Demostración.
Observemos que $k = m(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(p-1)})$. Luego, en virtud del Teorema 1.3 en los preliminares, $H^k(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow L^{2(p-1)}(\mathbb{R}^m)$ y así:

$$\int_{\mathbb{R}^m} |[F_2v](x) - [F_2w](x)|^2dx \leq C\int_{\mathbb{R}^m} |v(x)-w(x)|^2(|v(x)|^{p-2} + |w(x)|^{p-2})^2dx$$
$$\leq C\left\||v-w|^2\right\|_{L^{p-1}}\left\|(|v|^{p-2}+|w|^{p-2})^2\right\|_{L^{\frac{p-1}{p-2}}}$$
$$\leq C\|v-w\|^2_{L^{2(p-1)}}\left(\left\||v|^{2(p-2)}\right\|_{L^{\frac{p-1}{p-2}}} + \left\||w|^{2(p-2)}\right\|_{L^{\frac{p-1}{p-2}}}\right)$$
$$\leq C\|v-w\|^2_{L^{2(p-1)}}\left(\|v\|^{2(p-2)}_{L^{2(p-1)}} + \|w\|^{2(p-2)}_{L^{2(p-1)}}\right),$$

luego
$$\|F_2v - F_2w\|_{L^2} \leq C\|v-w\|_{L^{2(p-1)}}\left(\|v\|^{p-2}_{L^{2(p-1)}} + \|w\|^{p-2}_{L^{2(p-1)}}\right)$$
$$\leq C\|v-w\|_{H^k}\left(\|v\|^{p-2}_{H^k} + \|w\|^{p-2}_{H^k}\right). \quad \square \tag{4.14}$$

Corolario 4.6.
El operador no lineal F es acotado y continuo de H^2 en L^2.

Demostración.
Sea $v \in H^2$, como $p < \frac{2m}{m-2}$ entonces $\frac{m(p-2)}{p} < 2$, así $k = \frac{m}{2}(\frac{p-2}{p-1}) = \frac{m(p-2)}{p+p-2} < \frac{m(p-2)}{p} < 2$ y por lo tanto $H^2 \hookrightarrow H^k$, con lo cual, teniendo en cuenta (4.14), se sigue que

$$\|Fv\|_{L^2} \leq \|F_1 v\|_{L^2} + \|F_2 v\|_{L^2} \leq C(\|v\|_{L^2} + \|v\|_{H^k}^{p-1}) \leq C(\|v\|_{H^2} + \|v\|_{H^2}^{p-1}).$$

La continuidad del operador $F : H^2 \to L^2$ es consecuencia de la descomposición de F como $F = F_1 + F_2$, de las condiciones exigidas en (2.2), de la inclusión continua de H^2 en H^k y de la Desigualdad (4.14). $\square$

Lema 4.7.
a) El espacio Z está contenido en $Lip(I; L^2) \cap C^\theta(I; H^k)$, donde $k = \frac{m}{2}\left(\frac{p-2}{p-1}\right)$ y $\theta = 1 - \frac{k}{2}$.
b) Si $v \in Z$, entonces $Fv \in C^\theta(I; L^2)$.

Demostración.
a) Sea $v \in Z$. Luego $v' \in L^\infty_T L^2_E$ y por lo tanto, en virtud del Teorema 1.4, $c) \Rightarrow a)$, v admite un representante en $C(I; L^2)$, que denotaremos con la misma letra v, y tal que para todo t y para todo s en I se cumple que

$$v(t) = v(s) + \int_s^t v'(\eta) d\eta .$$

Luego

$$\|v(t) - v(s)\|_{L^2} \leq \left| \int_s^t \|v'(\eta)\|_{L^2} d\eta \right| \leq |t-s| \, \|v'\|_{L^\infty_T L^2_E} \leq |t-s| \, \|v\|_Z . \tag{4.15}$$

De otra parte, por el Lema 4.1 a), $v \in L^\infty(I; H^2)$, y por lo tanto existe $Q \subset I$ con medida de Lebesgue $m(Q) = 0$, tal que para todo t y para todo s en $I - Q$ se cumple que

$$\|v(t) - v(s)\|_{H^2} \leq C\|v\|_Z . \tag{4.16}$$

Puesto que $0 < k < 2$ entonces un resultado estándar de interpolación para los espacios de Sobolev H^s y las Desigualdades (4.15) y (4.16) permiten afirmar que

$$\begin{aligned} \|v(t) - v(s)\|_{H^k} &\leq C\|v(t) - v(s)\|_{L^2}^\theta \|v(t) - v(s)\|_{H^2}^{1-\theta} \\ &\leq C|t-s|^\theta \, \|v\|_Z \text{ para todo } t, s \in I - Q . \end{aligned} \tag{4.17}$$

Luego v tiene un representante en $C^\theta(I; H^k)$ y (4.17) tiene lugar para todo valor de t y s en I.

b) De (2.2), (4.13), (4.15), (4.17) y del Lema 4.1-a) se tiene que

$$\begin{aligned} \|(Fv)(t) - (Fv)(s)\|_{L^2} &\leq \|(F_1 v)(t) - (F_1 v)(s)\|_{L^2} + \|(F_2 v)(t) - (F_2 v)(s)\|_{L^2} \\ &\leq C\|v(t) - v(s)\|_{L^2} + C\|v(t) - v(s)\|_{H^k}(\|v(t)\|_{H^k}^{p-2} + \|v(s)\|_{H^k}^{p-2}) \\ &\leq C|t-s| \, \|v\|_Z + C|t-s|^\theta \|v\|_Z (2\|v\|_{L^\infty(I;H^k)}^{p-2}) \\ &\leq C|t-s| \, \|v\|_Z + C|t-s|^\theta \|v\|_Z^{p-1} . \end{aligned} \tag{4.18}$$

La afirmación b) se sigue teniendo en cuenta que el intervalo I es finito. $\square$

Corolario 4.8.
El operador no lineal F es acotado de Z en $C(I;L^2)$.

Demostración.
Sea $v \in Z$. De (4.18) es claro que $Fv \in C(I;L^2)$. De otra parte, por el Lema 4.7-a), tenemos que $v \in C(I;L^2)$. En virtud de las condiciones dadas en (2.2), de la parte a) del Lema 4.1, de (4.14) y usando la inclusión $H^2 \hookrightarrow H^k$, se sigue que

$$\begin{aligned}\|(Fv)(t)\|_{L^2} &\leq \|(F_1v)(t)\|_{L^2} + \|(F_2v)(t)\|_{L^2}\\ &\leq C(\|v(t)\|_{L^2} + \|v(t)\|_{H^k}^{p-1})\\ &\leq C(\|v\|_{L_T^\infty L_E^2} + \|v(t)\|_{H^2}^{p-1})\\ &\leq C(\|v\|_Z + \|v\|_Z^{p-1})\,, \text{ para todo } t \in I. \quad \square \end{aligned} \tag{4.19}$$

Nota 1
Si $v \in Z$ entonces v tiene un representante en $C(I;L^2 \cap L^p)$ y por lo tanto $v(0)$ es un elemento de $L^2 \cap L^p$. Para $v \in Z$ definimos $v_0 : [0,T] \to L^2 \cap L^p$ por $v_0(t) = v(0)$ para todo $t \in I$. Si además $v(0) \in H^2$ entonces $v_0 \in C(I;H^2 \cap L^p) \hookrightarrow \overline{X}$, $v_0' = 0$ y $\Delta v_0 \in C(I;L^2)$, es decir $v_0 \in \overline{Z} \hookrightarrow Z$.

Lema 4.9.
El operador no lineal F envía Z en Z' acotadamente. Además, si $T \leq 1$ y $v \in Z$ es tal que $v(0) \in H^2$, entonces

$$\|Fv - Fv_0\|_{Z'} \leq C(T\|v\|_Z + T^{1-\beta}\|v\|_Z^{p-1})\,,$$

con $\beta = m(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})$.

Demostración.
Sea $v \in Z$. En virtud del Corolario 4.8 $Fv \in C(I;L^2)$. Para demostrar que $(Fv)' \in X'$, probaremos que $(F_1v)' \in L_T^1 L_E^2$ y que $(F_2v)' \in L_T^{r'} L_E^{p'}$.
a) Sean $\epsilon > 0$, $\omega \subset\subset (0,T)$ y $h \in \mathbb{R}$ con $|h| < \text{dist }(\omega, \mathbb{R} - I)$. De la condición de crecimiento para F_1 en (2.2) y del Teorema 1.6 en los preliminares se tiene que

$$\begin{aligned}\|(F_1v)_h - F_1v\|_{L_\omega^{1+\epsilon} L_E^2} &\leq C\|v_h - v\|_{L_\omega^{1+\epsilon} L_E^2}\\ &\leq C\|v'\|_{L_T^{1+\epsilon} L_E^2}|h|\,,\end{aligned}$$

y así, por el Teorema 1.6, $(F_1v)' \in L_T^{1+\epsilon} L_E^2$ y

$$\|(F_1v)'\|_{L_T^{1+\epsilon} L_E^2} \leq C\|v'\|_{L_T^{1+\epsilon} L_E^2} \leq CT^{\frac{1}{1+\epsilon}}\|v'\|_{L_T^\infty L_E^2}\,.$$

Luego

$$\begin{aligned}\|(F_1v)'\|_{L_T^1 L_E^2} &\leq \|(F_1v)'\|_{L_T^{1+\epsilon} L_E^2} T^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}}\\ &\leq CT^{\frac{1}{1+\epsilon}}\|v'\|_{L_T^\infty L_E^2} T^{\frac{\epsilon}{\epsilon+1}}\,,\end{aligned}$$

de donde se concluye que $(F_1v)' \in L_T^1 L_E^2$ con

$$\|(F_1v)'\|_{L_T^1 L_E^2} \leq CT\|v\|_Z. \tag{4.20}$$

b) Sean $\omega \subset\subset (0,T)$ y $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < \operatorname{dist}(\omega, \mathbb{R} - I)$. Razonando como en la demostración del Lema 2.5 y teniendo en cuenta el Teorema 1.6 y la inclusión $Z \hookrightarrow Y \hookrightarrow X_0$ se sigue que

$$\begin{aligned}\|(F_2 v)_h - F_2 v\|_{L_\omega^{r'} L_E^{p'}} &\leq C\|v_h - v\|_{L_\omega^r L_E^p} \|v\|_{L_T^\infty L_E^p}^{p-2} T^{1-\beta} \\ &\leq C\|v'\|_{L_T^r L_E^p} |h| \|v\|_{X_0}^{p-2} T^{1-\beta},\end{aligned}$$

y de esta manera, por el Teorema 1.6, se concluye que $(F_2 v)' \in L_T^{r'} L_E^{p'}$ y que

$$\begin{aligned}\|(F_2 v)'\|_{L_T^{r'} L_E^{p'}} &\leq C\|v\|_{X_0}^{p-2} \|v'\|_{L_T^r L_E^p} T^{1-\beta} \\ &\leq C\|v\|_Z^{p-1} T^{1-\beta}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Las Desigualdades (4.20) y (4.21) muestran que $(Fv)' \in X'$ y que

$$\|(Fv)'\|_{X'} \leq C(T\|v\|_Z + T^{1-\beta}\|v\|_Z^{p-1}). \tag{4.22}$$

Teniendo presente la Nota 1, las Desigualdades (4.18) y (4.22), y observando que $0 < 1 - \beta < \theta$, se sigue que

$$\begin{aligned}\|Fv - Fv_0\|_{Z'} &= \|Fv - Fv_0\|_{L_T^\infty L_E^2} + \|(Fv - Fv_0)'\|_{X'} = \|Fv - Fv_0\|_{L_T^\infty L_E^2} + \|(Fv)'\|_{X'} \\ &\leq C\big((T\|v\|_Z + T^\theta\|v\|_Z^{p-1}) + (T\|v\|_Z + T^{1-\beta}\|v\|_Z^{p-1})\big) \\ &\leq C(T\|v\|_Z + T^{1-\beta}\|v\|_Z^{p-1}). \qquad \square\end{aligned}$$

Nota 2

Sean $\phi \in H^2, T \leq 1, \lambda > 0$ tal que $\|G_0(\phi)\|_Z \leq \lambda\|\phi\|_{H^2}$ y $v \in Z$ tal que $v(0) = \phi$. Sea $\Phi(v) := G_0(\phi) - iG(Fv)$. En virtud de los Lemas 4.3, 4.4, 4.9, del Corolario 4.6 y de la Nota 1, $\Phi(v) \in \overline{Z}$ y:

$$\begin{aligned}\|\Phi(v)\|_Z &\leq \lambda\|\phi\|_{H^2} + C\|Fv\|_{Z'} \\ &\leq \lambda\|\phi\|_{H^2} + C\|Fv - Fv_0\|_{Z'} + C\|Fv_0\|_{Z'} \\ &\leq \lambda\|\phi\|_{H^2} + C(T\|v\|_Z + T^{1-\beta}\|v\|_Z^{p-1}) + C\|F\phi\|_{L^2} \\ &\leq \eta(\|\phi\|_{H^2} + \|F\phi\|_{L^2}) + C(T\|v\|_Z + T^{1-\beta}\|v\|_Z^{p-1}),\end{aligned} \tag{4.23}$$

para ciertas constantes η y C.

Lema 4.10.

Sean $\phi \in H^2, \eta$ y C como en (4.23), $R > \eta(\|\phi\|_{H^2} + \|F\phi\|_{L^2})$ y

$$W = \left\{v \in B_R^Z(0) \;/\; v(0) = \phi\right\}.$$

Entonces, si T es suficientemente pequeño, el operador

$$\Phi : v \mapsto G_0(\phi) - iG(Fv),$$

envía W en sí mismo y es una contracción en la métrica de X.

Demostración.
Sea $v \in W$. Es claro que

$$(\Phi(v))(0) = (G_0(\phi))(0) - i(G(Fv))(0) = \phi\,. \tag{4.24}$$

De (4.23) se sigue que $\Phi[W] \subset B_R^Z(0)$ si T es tal que $0 < T \leq 1$ y

$$C(T\|v\|_Z + T^{1-\beta}\|v\|_Z^{p-1}) < R - \eta(\|\phi\|_{H^2} + \|F\phi\|_{L^2})\,. \tag{4.25}$$

Luego para T suficientemente pequeño se tiene que $\Phi[W] \subset W$.
De otra parte, si $v, w \in W$ entonces, de los Lemas 3.1 y 4.1 se sigue que existe una constante c, independiente de $T \leq 1$, tal que $v, w \in B_{cR}^{X_0}$. Luego, en virtud de (2.14),

$$\|\Phi(v) - \Phi(w)\|_X \leq C(T + T^{1-\beta}2c^{p-2}R^{p-2})\|v - w\|_X\,. \tag{4.26}$$

De (4.26) se sigue que, para T suficientemente pequeño, el operador Φ es una contracción en la métrica de X. $\square$

Lema 4.11.
El conjunto W definido en el Lema 4.10 es cerrado en X.

Demostración.
Sean $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en W y $v \in X$ tales que $v_n \to v$ en X. Veamos que $v \in W$.
Puesto que $\|v_n\|_Z = \|v_n\|_X + \|v_n'\|_X + \|\Delta v_n\|_{L_T^\infty L_E^2}$, entonces $\{v_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$, es una sucesión acotada en X. Ahora, puesto que X puede verse como el dual de X', entonces $\{v_n'\}$ admite una subsucesión, que seguiremos denotando de la misma forma, que converge a cierto $h_1 \in X$ en la topología débil * de X.
Es decir, $\{v_n\}$ es tal que para toda $g \in X'$ se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^m} v_n' g = \int_0^T\int_{\mathbb{R}^m} h_1 g.$$

Veamos ahora que $v' = h_1$.
Sean $\rho \in \mathcal{D}(0,T)$, $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ y $g \in X'$ la función definida por: $[g(t)](x) := \rho(t)\psi(x)$.

Puesto que $v_n' \to h_1$ débil * en X y $v_n \to v$ en X, entonces

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^m} \psi(x)\Big(\int_0^T \rho(t)h_1(t)dt\Big)(x)dx &= \int_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^m} h_1 g \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^m} v_n' g \\
&= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \psi(x)\Big(\int_0^T [v_n'(t)](x)\rho(t)dt\Big)dx \\
&= -\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \psi(x)\Big(\int_0^T \rho'(t)[v_n(t)](x)dt\Big)dx \\
&= -\lim_{n\to\infty} \int_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^m} (\rho'\psi)v_n \\
&= -\int_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^m} (\rho'\psi)v \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}^m} \psi(x)\Big(\int_0^T \rho'(t)v(t)dt\Big)(x)dx\,.
\end{aligned}$$

Luego p.c.t. $x \in \mathbb{R}^m$ se cumple que

$$\Big(\int_0^T \rho(t)h_1(t)dt\Big)(x) = -\Big(\int_0^T \rho'(t)v(t)dt\Big)(x)\,.$$

Por lo tanto $\int_0^T \rho(t)h_1(t)dt = -\int_0^T \rho'(t)v(t)dt$. Es decir

$$v' = h_1\,. \tag{4.27}$$

Demostremos ahora que $\Delta v \in L_T^\infty L_E^2$.
Puesto que $L_T^\infty L_E^2$ puede verse como el espacio dual de $L_T^1 L_E^2$, entonces $\{\Delta v_n\}$ admite una subsucesión, que denotaremos de la misma forma, la cual converge a cierta h_2 en la topología débil * de $L_T^\infty L_E^2$. Veamos ahora que $\Delta v = h_2$.
Antes de ver esto último notemos que si $f \in H^{-2} \subset S'(\mathbb{R}^m)$ y $\psi \in S(\mathbb{R}^m)$ entonces

$$(f,\psi) = (f, \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\psi))) = (\widehat{f}, \widehat{\psi}(-\cdot)) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \widehat{f}(\xi)\widehat{\psi}(-\xi)d\xi\,;$$

de donde claramente $(\cdot,\psi) : H^{-2} \to \mathbb{C}$ es un operador lineal y continuo.
Sean $\rho \in \mathcal{D}(0,T)$ y $\psi \in S(\mathbb{R}^m)$. Puesto que $v_n \to v$ en $X \hookrightarrow L_T^\infty L_E^2$ y $\Delta v_n \to h_2$ débil *

en $L_T^\infty L_E^2$, entonces

$$\begin{aligned}
\Big(\int_0^T \rho(t)(\Delta v)(t)dt, \psi\Big) &= \int_0^T (\rho(t)(\Delta v)(t), \psi)dt \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} [\rho(t)(\Delta v)(t)]^\wedge(\xi)\widehat{\psi}(-\xi)d\xi dt \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} \rho(t)(-4\pi^2|\xi|^2)[v(t)]^\wedge(\xi)\widehat{\psi}(-\xi)d\xi dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} \rho(t)(-4\pi^2|\xi|^2)[v_n(t)]^\wedge(\xi)\widehat{\psi}(-\xi)d\xi dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} \rho(t)[(\Delta v_n)(t)]^\wedge(\xi)\widehat{\psi}(-\xi)d\xi dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} \rho(t)[(\Delta v_n)(t)](x))\psi(x)dxdt \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} \rho(t)[h_2(t)](x)\psi(x)dxdt \\
&= \int_0^T (\rho(t)h_2(t), \psi)dt \\
&= \Big(\int_0^T \rho(t)h_2(t)dt, \psi\Big)\,.
\end{aligned}$$

Luego $\int_0^T \rho(t)(\Delta v)(t)dt = \int_0^T \rho(t)h_2(t)dt$ para toda $\rho \in \mathcal{D}(0,T)$ y por consiguiente

$$\Delta v = h_2\,. \tag{4.28}$$

De (4.27) y (4.28) se sigue que $v \in Z$. Ahora bien, puesto que $v_n' \to v'$ en la topología débil * de X y $\Delta v_n \to \Delta v$ en la topología débil * de $L_T^\infty L_E^2$, entonces:

$$\begin{aligned}
\|v'\|_X + \|\Delta v\|_{L_T^\infty L_E^2} &\leq \liminf_{n\to\infty} \|v_n'\|_X + \liminf_{n\to\infty} \|\Delta v_n\|_{L_T^\infty L_E^2} \\
&\leq \liminf_{n\to\infty}(\|v_n'\|_X + \|\Delta v_n\|_{L_T^\infty L_E^2}) \\
&= \liminf_{n\to\infty}(\|v_n\|_Z - \|v_n\|_X) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty}(R - \|v_n\|_X) \\
&= R - \|v\|_X\,.
\end{aligned}$$

Luego $\|v\|_Z \leq R$.

Puesto que $v_n \to v$ en X entonces $v_n \to v$ en $L_T^\infty L_E^2$ y, como en virtud de la Nota 1, v_n y

$v \in C(I; L^2)$ entonces $v(0) = \lim_{n\to\infty} v_n(0) = \phi$.

Queda así demostrado que $v \in W$. $\square$

Teorema 4.12.
Sea $\phi \in H^2$. Entonces existe $T = T(\|\phi\|_{H^2})$, $0 < T \leq 1$, tal que la ecuación (2.3) admite una única solución $u \in C(I; H^2)$ con $u' \in C(I; L^2) \cap L_T^r L_E^p$.

Demostración.
Sean $\phi \in H^2$ y $T = T(\|\phi\|_{H^2}) > 0$ como en el Lema 4.10. Puesto que $C(I; H^2) \hookrightarrow C(I; H^1) \hookrightarrow X_0$, entonces, en virtud del Teorema 2.10, existe a lo sumo una única solución $u \in C(I; H^2)$ de la ecuación integral (2.3). Usando los Lemas 4.10, 4.11 y el Teorema de punto fijo de Banach, se puede concluir que existe una única $u \in W$ tal que $\Phi u = u$. Puesto que $G_0(\phi) \in \overline{Z}$ (Lema 4.3) y $G(Fu) \in \overline{Z}$ (Lemas 4.4 y 4.9) entonces $u \in C(I; H^2)$ y $u' \in C(I; L^2) \cap L_T^r L_E^p$. $\square$

5. DEPENDENCIA CONTINUA CON DATO INICIAL $\phi \in H^1$ Y CON DATO INICIAL $\phi \in H^2$.

A continuación veremos que la solución local del problema de Cauchy (2.1) para la ecuación de Schrödinger depende continuamente del dato inicial ϕ, cuando éste se toma en H^1 o en H^2.
Si $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es diferenciable, denotamos por $F'(\psi).\omega$ la acción de la aplicación lineal $F'(\psi)$ sobre ω. De esta manera,

$$F'(\psi).\omega = \lim_{\lambda \to 0} \frac{F(\psi + \lambda\omega) - F(\psi)}{\lambda}.$$

Recordemos además que $\|F'(\psi)\| := \sup_{|\omega| \leq 1} |F'(\psi).\omega|$ y observemos también que F' puede interpretarse como una aplicación continua de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^4$. De las propiedades que satisfacen las funciones F_1 y F_2 introducidas en el segundo capítulo, se sigue que

$$|F_1(\psi)| \leq C|\psi| \;\text{ y }\; |F_2(\psi)| \leq C|\psi|^{p-1}, \tag{5.1}$$

y además que

$$\|F_1'(\psi)\| \leq C \;\text{ y }\; \|F_2'(\psi)\| \leq C|\psi|^{p-2}. \tag{5.2}$$

Lema 5.1.
a) La aplicación $\phi \mapsto F_1(\phi)$ *es continua de* L^2 *en* L^2 *y* $\|F_1(\phi)\|_{L^2} \leq \|\phi\|_{L^2}$.
b) La aplicación $\phi \mapsto F_2(\phi)$ *es continua de* L^p *en* $L^{p'}$ *y* $\|F_2(\phi)\|_{L^{p'}} \leq C\|\phi\|_{L^p}^{\frac{p}{p'}}$.

Demostración.
Basta tener presente el Teorema 1.11 de los preliminares y las Desigualdades en (5.1). □

Corolario 5.2.
Sean $u \in L_T^1 L_E^2$ *y* $\{u_n\}$ *una sucesión acotada en* $L_T^\infty L_E^2$ *tales que* $u_n(t) \to u(t)$ *en* L^2 *p.c.t.* $t \in I$. *Entonces* $F_1(u_n) \to F_1(u)$ *en* $L_T^1 L_E^2$.

Demostración.
Del Lema 5.1-a se sigue que

$$(F_1 u_n)(t) \to (F_1 u)(t) \text{ en } L^2 \text{ p.c.t } t \in I.$$

De otra parte, por el acotamiento de la sucesión $\{u_n\}$ en $L_T^\infty L_E^2$ y por el Lema 5.1-a, existe $C > 0$ tal que

$$\|(F_1 u_n)(t) - (F_1 u)(t)\|_{L^2} \leq C + C\|u(t)\|_{L^2} \quad \text{p.c.t. } t \in I.$$

En consecuencia, por el Teorema de la convergencia dominada, $F_1 u_n \to F_1 u$ en $L_T^1 L_E^2$. □

Corolario 5.3.
Sean $u \in L_T^\infty L_E^p$ *y* $\{u_n\}$ *una sucesión acotada en* $L_T^\infty L_E^p$ *tales que* $u_n(t) \to u(t)$ *en* L^p *p.c.t.* $t \in I$. *Entonces* $F_2(u_n) \to F_2(u)$ *en* $L_T^{r'} L_E^{p'}$.

Demostración.
Esta demostración es, en esencia, la misma del Corolario 5.2 razón por la cual la omitiremos. □

Lema 5.4.
La aplicación $\phi \mapsto F_2'(\phi)$ *es continua y acotada de* $L^p := L^p(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$ *en* $L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^4)$

Demostración.
Basta observar que $\frac{p}{\frac{p}{p-2}} = p - 2$ y tener presentes el Teorema 1.11 de los preliminares y la segunda de las Desigualdades en (5.2). $\square$

Lema 5.5.
La aplicación $(\phi, \psi) \mapsto F_2'(\phi).\psi$ *es acotada y continua de* $L^p \times L^p$ *en* $L^{p'}$.

Demostración.
Veamos inicialmente que para $(\phi, \psi) \in L^p \times L^p$, $F_2'(\phi).\psi \in L^{p'}$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} |F_2'(\phi(x)).\psi(x)|^{p'} dx &\leq \int_{\mathbb{R}^m} \|F_2'(\phi(x))\|^{p'} |\psi(x)|^{p'} dx \\
&\leq \big\| \|F_2'(\phi)\|^{p'} \big\|_{L^{\frac{p-1}{p-2}}} \big\| |\psi|^{p'} \big\|_{L^{p-1}} \\
&= \|F_2'(\phi)\|^{\frac{p}{p-1}}_{L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^4)} \|\psi\|^{\frac{p}{p-1}}_{L^p}. \qquad (5.3)
\end{aligned}$$

La anterior desigualdad y el Lema 5.4 prueban además que la aplicación es acotada. Probemos ahora que tal aplicación es continua.
Si ϕ, ϕ_0, ψ y $\psi_0 \in L^p$ entonces

$$\begin{aligned}
\|F_2'(\phi).\psi - F_2'(\phi_0).\psi_0)\|_{L^{p'}} \leq &\|F_2'(\phi).\psi - F_2'(\phi_0).\psi)\|_{L^{p'}} \\
&+ \|F_2'(\phi_0).\psi - F_2'(\phi_0).\psi_0)\|_{L^{p'}}.
\end{aligned}$$

por un procedimiento similar al utilizado para la obtención de (5.3) puede verse que

$$\begin{aligned}
\|F_2'(\phi).\psi - F_2'(\phi_0).\psi_0)\|_{L^{p'}} \leq &\|F_2'(\phi) - F_2'(\phi_0)\|_{L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^4)} \|\psi\|_{L^p} \\
&+ \|F_2'(\phi_0)\|_{L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^4)} \|\psi - \psi_0\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

De la anterior desigualdad y el Lema 5.4 es claro que si $\phi \to \phi_0$ en L^p y si $\psi \to \psi_0$ en L^p, entonces $F_2'(\phi).\psi \to F_2'(\phi_0).\psi_0$ en $L^{p'}$. $\square$

Lema 5.6.
El operador $(\phi, \psi) \mapsto F_1'(\phi).\psi$ *es continuo y acotado de* $L^2(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^2)$ *en* $L^2(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^2)$.

Demostración.
Veamos primero que para $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^2)$ se tiene que $F_1'(\phi).\psi \in L^2(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^2)$. De la primera desigualdad en (5.2) es claro que si ϕ y $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^2)$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} |F_1'(\phi(x)).(\psi(x))|^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}^m} \|F_1'(\phi(x))\|^2 |\psi(x)|^2 dx \\
&\leq C\|\psi\|^2_{L^2}. \qquad (5.4)
\end{aligned}$$

De (5.4) vemos que $F_1'(\phi).\psi \in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^2)$ y más aún, que el operador así definido es acotado. Sean ahora $\{\phi_n\}$ y $\{\psi_n\}$ sucesiones en $L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^2)$ tales que $\phi_n \to \phi$ en L^2 y $\psi_n \to \psi$ en L^2. De la desigualdad triangular y del acotamiento de $F_1'(\phi_n)$, (ver (5.2)), se sigue que:

$$\begin{aligned}\|F_1'(\phi).\psi - F_1'(\phi_n).\psi_n\|_{L^2} &\leq \|\big(F_1'(\phi) - F_1'(\phi_n)\big).\psi\|_{L^2} + \|F_1'(\phi_n).(\psi - \psi_n)\|_{L^2}\\ &\leq \|\big(F_1'(\phi) - F_1'(\phi_n)\big).\psi\|_{L^2} + C\|\psi - \psi_n\|_{L^2}\\ &= I + II.\end{aligned}$$

Claramente $II \to 0$ cuando $n \to \infty$. Demostraremos a continuación que $I \to 0$ cuando $n \to \infty$. Sean $C > 0$ tal que $\|\phi_n\|_{L^2} \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $M := \|F_1'\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^4)}$.
Para $\epsilon > 0$ sea $\eta > 0$ tal que para todo conjunto medible $A \subset \mathbb{R}^m$ con $m(A) < \eta$ se cumple que

$$\int_A |\psi(x)|^2 dx < \epsilon. \tag{5.5}$$

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2C^2}{N^2} < \eta$. Consideremos el conjunto:

$$E_{Nn} := \{x \in \mathbb{R}^m \ / \ |\phi_n(x)| > N \ \vee \ |\phi(x)| > N\}.$$

Puesto que $F_1' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ es continua, F_1' es uniformemente continua en la bola cerrada $B(N) \subset \mathbb{R}^2$, y por consiguiente existe $\delta > 0$ tal que para toda pareja $x_1, x_2 \in B(N)$ se cumple que:

$$|x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow \|F_1'(x_1) - F_1'(x_2)\|_{\mathbb{R}^4} < \sqrt{\epsilon}. \tag{5.6}$$

Para $n \in \mathbb{N}$ sea

$$A_{n,\delta} := \{x \in \mathbb{R}^m \ / \ |\phi_n(x) - \phi(x)| \geq \delta\}.$$

Ahora bien, como $\phi_n \to \phi$ en $L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^2)$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq k$, $\|\phi - \phi_n\|_{L^2} \leq \sqrt{\eta}\delta$. Luego, por la forma cómo es escogido N, de (5.5) y teniendo presente que $m(E_{Nn}) \leq \frac{2C^2}{N^2}$, se sigue que

$$\begin{aligned}\int_{E_{Nn}} \|F_1'(\phi(x)) - F_1'(\phi_n(x))\|_{\mathbb{R}^4}^2 |\psi(x)|^2 dx &\leq 4M^2 \int_{E_{Nn}} |\psi(x)|^2 dx\\ &\leq 4M^2\epsilon.\end{aligned} \tag{5.7}$$

Si $n \geq k$, entonces

$$m(A_{n,\delta}) \leq \frac{1}{\delta^2}\int_{A_{n,\delta}} |\phi_n(x) - \phi(x)|^2 dx \leq \eta$$

y por consiguiente, de (5.5), se sigue que

$$\begin{aligned}\int_{A_{n,\delta}} \|F_1'(\phi(x)) - F_1'(\phi_n(x))\|_{\mathbb{R}^4}^2 |\psi(x)|^2 dx &\leq 4M^2 \int_{A_{n,\delta}} |\psi(x)|^2 dx\\ &\leq 4M^2\epsilon.\end{aligned} \tag{5.8}$$

Así para $n \geq k$, usando (5.6)-(5.8), vemos que

$$\begin{aligned}
I &\leq \int_{E_{Nn}} \|F_1'(\phi(x)) - F_1'(\phi_n(x))\|_{\mathbb{R}^4}^2 |\psi(x)|^2 dx \\
&\quad + \int_{(\mathbb{R}^m - E_{Nn}) - A_{n,\delta}} \|F_1'(\phi(x)) - F_1'(\phi_n(x))\|_{\mathbb{R}^4}^2 |\psi(x)|^2 dx \\
&\quad + \int_{(\mathbb{R}^m - E_{Nn}) \cap A_{n,\delta}} \|F_1'(\phi(x)) - F_1'(\phi_n(x))\|_{\mathbb{R}^4}^2 |\psi(x)|^2 dx \\
&\leq 4M^2\epsilon + \int_{(\mathbb{R}^m - E_{Nn}) - A_{n,\delta}} \|F_1'(\phi(x)) - F_1'(\phi_n(x))\|_{\mathbb{R}^4}^2 |\psi(x)|^2 dx + 4M^2\epsilon \\
&\leq 8M^2\epsilon + \epsilon\|\psi\|_{L^2}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Lema 5.7.
Sean $u \in L_T^1 L_E^2$ y $\{u_n\}$ una sucesión de funciones medibles de $[0,T]$ en L^2 tales que $u_n(t) \to u(t)$ en L^2 p.c.t. $t \in I$.
Si $v_n \to v$ en $L_T^1 L_E^2$ entonces $F_1'(u_n).v_n$ converge a $F_1'(u).v$ en $L_T^1 L_E^2$.

Demostración.
Veamos inicialmente que si w_1 es medible de $[0,T]$ en L^2 y $w_2 \in L_T^1 L_E^2$ entonces $F_1'(w_1).w_2 \in L_T^1 L_E^2$.
En efecto, de (5.4) se sigue que

$$\int_0^T \|F_1'(w_1(t)).w_2(t)\|_{L^2} dt \leq \int_0^T C\|w_2(t)\|_{L^2} dt = C\|w_2\|_{L_T^1 L_E^2}. \tag{5.9}$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned}
\|F_1'(u_n).v_n - F_1'(u).v\|_{L_T^1 L_E^2} &= \int_0^T \|F_1'(u_n(t)).v_n(t) - F_1'(u(t)).v(t)\|_{L^2} dt \\
&\leq \int_0^T \|F_1'(u_n(t)).v(t) - F_1'(u(t)).v(t)\|_{L^2} dt \\
&\quad + \int_0^T \|F_1'(u_n(t)).(v_n(t) - v(t))\|_{L^2} dt \\
&= I + II
\end{aligned}$$

De la primera desigualdad en (5.2) se sigue que

$$II \leq \int_0^T \|F_1'(u_n(t))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^4)} \|v_n(t) - v(t)\|_{L^2} dt = C\|v_n - v\|_{L_T^1 L_E^2},$$

y por consiguiente $II \to 0$ cuando $n \to \infty$.
Del Lema 5.6 se tiene que

$$\|F_1'(u_n(t)).v(t) - F_1'(u(t)).v(t)\|_{L^2} \to 0 \quad \text{p.c.t. } t \in I. \tag{5.10}$$

De la primera desigualdad en (5.2) vemos que

$$\begin{aligned}\|F_1'(u_n(t)).v(t) - F_1'(u(t)).v(t)\|_{L^2} &\leq \|F_1'(u_n) - F_1'(u)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^4)}\|v(t)\|_{L^2} \\ &\leq C\|v(t)\|_{L^2}\,. \end{aligned} \tag{5.11}$$

De (5.10), (5.11) y por el Teorema de la convergencia dominada se concluye que $I \to 0$ cuando $n \to \infty$. $\square$

Lema 5.8.
Sean $u \in L_T^\infty L_E^p$ y $\{u_n\}$ una sucesión acotada en $L_T^\infty L_E^p$ tales que $u_n(t) \to u(t)$ en L^p p.c.t. $t \in I$.
Si $v_n \to v$ en $L_T^{r'} L_E^p$ entonces $F_2'(u_n).v_n$ converge a $F_2'(u).v$ en $L_T^{r'} L_E^{p'}$.

Demostración.
Veamos inicialmente que si $w_1 \in L_T^\infty L_E^p$ y $w_2 \in L_T^{r'} L_E^p$ entonces $F_2'(w_1).w_2 \in L_T^{r'} L_E^{p'}$.
En efecto, de (5.3) y el Lema 5.4 se sigue que

$$\begin{aligned}\int_0^T \|F_2'(w_1(t)).w_2(t)\|_{L^{p'}}^{r'} dt &\leq \int_0^T \|F_2'(w_1(t))\|_{L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^4)}^{r'} \|w_2(t)\|_{L^p}^{r'} dt \\ &\leq \|F_2'(w_1)\|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^4))}^{r'} \|w_2\|_{L_T^{r'} L_E^p}^{r'} < \infty\,. \end{aligned} \tag{5.12}$$

De otra parte se tiene que

$$\begin{aligned}\|F_2'(u_n).v_n - F_2'(u).v\|_{L_T^{r'} L_E^{p'}}^{r'} &= \int_0^T \|F_2'(u_n(t)).v_n(t) - F_2'(u(t)).v(t)\|_{L^{p'}}^{r'} dt \\ &\leq C\int_0^T \|F_2'(u_n(t)).v(t) - F_2'(u(t)).v(t)\|_{L^{p'}}^{r'} dt \\ &\quad + C\int_0^T \|F_2'(u_n(t)).(v_n(t) - v(t))\|_{L^{p'}}^{r'} dt \\ &\leq C\int_0^T \|F_2'(u_n(t)).v(t) - F_2'(u(t)).v(t)\|_{L^{p'}}^{r'} dt \\ &\quad + C\|F_2'(u_n)\|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^4))}^{r'} \|v_n - v\|_{L_T^{r'} L_E^p}^{r'} \\ &= I + II \end{aligned}$$

De la convergencia de v_n a v en $L_T^{r'} L_E^p$, del Lema 5.4 y teniendo presente que $\|u_n\|_{L_T^\infty L_E^p} \leq C$, se sigue que $II \to 0$ cuando $n \to \infty$. De los Lemas 5.4 y 5.5 puede verse, usando el Teorema de la convergencia dominada, que $I \to 0$ cuando $n \to \infty$. $\square$.

Lema 5.9.
Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$ tal que $\frac{\partial\psi}{\partial x_j} \in L^2(\mathbb{R}^m)$ para algún j, $1 \leq j \leq m$. Entonces

$$\frac{\partial(F_1(\psi))}{\partial x_j} = F_1'(\psi).\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\,, \tag{5.13}$$

en $L^2(\mathbb{R}^m)$.

Demostración.
De los Lemas 5.1-a y 5.6 se sigue que $F_1(\psi)$ y $F_1'(\psi).\frac{\partial\psi}{\partial x_j}$ pertenecen a L^2. Sea $\{\psi_n\}$ una sucesión en $C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ tal que $\psi_n \to \psi$ en L^2 y $\frac{\partial\psi_n}{\partial x_j} \to \frac{\partial\psi}{\partial x_j}$ en L^2. De las propiedades de la función F_1 es claro que:

$$\frac{\partial(F_1(\psi_n))}{\partial x_j} = F_1'(\psi_n).\frac{\partial\psi_n}{\partial x_j}. \tag{5.14}$$

Siguiendo un esquema similar al presentado en la nota 4 del capítulo 9 en la referencia [B], (página 150), puede probarse como la igualdad (5.13) es consecuencia de (5.14), del Lema 5.1 y del Lema 5.6. □

Lema 5.10.
Sea $\psi \in L^p(\mathbb{R}^m)$ *tal que* $\frac{\partial\psi}{\partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^m)$ *para algún* j, $1 \leq j \leq m$. *Entonces*

$$\frac{\partial(F_2(\psi))}{\partial x_j} = F_2'(\psi).\frac{\partial\psi}{\partial x_j}, \tag{5.15}$$

en $L^{p'}(\mathbb{R}^m)$.

Demostración.
De los Lemas 5.1-b y 5.5 se sigue que $F_2(\psi)$ y $F_2'(\psi).\frac{\partial\psi}{\partial x_j}$ pertenecen a $L^{p'}$. La prueba de la igualdad (5.15) sigue el mismo esquema de la prueba del lema anterior. □

Lema 5.11.
Sea $u \in L^1_T L^2_E$ *tal que* $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^1_T L^2_E$ *para algún* $1 \leq j \leq m$. *Entonces*

$$\frac{\partial(F_1 u)}{\partial x_j} = F_1'(u).\frac{\partial u}{\partial x_j}, \tag{5.16}$$

en $L^1_T L^2_E$.

Demostración.
De la Desigualdad (5.9) es claro que $F_1'(u).\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^1_T L^2_E$, y del Lema 5.9 se tiene la igualdad en (5.16) p.c.t. $t \in I$. □

Lema 5.12.
Sea $u \in L^\infty_T L^p_E$ *tal que* $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^{r'}_T L^p_E$ *para algún* $1 \leq j \leq m$. *Entonces*

$$\frac{\partial(F_2 u)}{\partial x_j} = F_2'(u).\frac{\partial u}{\partial x_j}, \tag{5.17}$$

en $L^{r'}_T L^{p'}_E$.

Demostración.
De la Desigualdad (5.12) es claro que $F_2'(u).\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^{r'}_T L^{p'}_E$, y por el Lema 5.10 la igualdad (5.17) es cierta p.c.t. $t \in I$. □

Lema 5.13.
Sea $\beta = \frac{2}{r}$. Si $u \in X_0$ y $v \in X$ entonces $F'(u).v \in X'$ y

$$\|F'(u).v\|_{X'} \leq C\Big[T + T^{1-\beta}\|F_2'(u)\|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^4))}\Big]\|v\|_X .$$

Demostración.
Sean $u \in X_0 := L_T^\infty L_E^2 \cap L_T^\infty L_E^p$ y $v \in X := L_T^\infty L_E^2 \cap L_T^r L_E^p$. Puesto que $r > 2$, entonces $r' < r$ y por lo tanto $v \in L_T^\infty L_E^2 \cap L_T^{r'} L_E^p$. Así de (5.12) se sigue que

$$\begin{aligned} \|F_2'(u).v\|_{L_T^{r'} L_E^{p'}} &\leq \|F_2'(u)\|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^4))}\|v\|_{L_T^{r'} L_E^p} \\ &\leq T^{1-\beta}\|F_2'(u)\|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^4))}\|v\|_{L_T^r L_E^p} . \end{aligned} \tag{5.18}$$

De otra parte, usando la Desigualdad (5.9), vemos que

$$\|F_1'(u).v\|_{L_T^1 L_E^2} \leq CT\|v\|_{L_T^\infty L_E^2}. \tag{5.19}$$

La afirmación del lema se sigue directamente de las Desigualdades (5.18) y (5.19). □

Teorema 5.14.
Sean $\phi \in H^1$, $T > 0$ e $I = [0,T]$. Si $u \in C(I;H^1)$ es solución del problema de valores iniciales (2.1) entonces existe una vecindad W de ϕ en H^1 tal que para toda $\psi \in W$ el problema (2.1) con dato inicial ψ admite una única solución v_ψ en el intervalo $[0,T]$. Además la aplicación $\psi \mapsto v_\psi$ es continua de W en $C(I;H^1)$.

Demostración.
Sean $M := 1 + \max_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_{H^1}$, γ tal que $\|G_0(f)\|_X \leq \gamma\|f\|_{L^2}$, (ver el Lema 2.3), y R tal que $R > \gamma M$. Sea C la constante que aparece en la demostración del Lema 3.5. Entonces podemos escoger $T^* > 0$, con $0 < T^* < T$ tal que

$$\begin{aligned} &C(T^* + T^{*(1-\beta)}R^{p-2})R < R - \gamma M , \\ &C(T^* + T^{*(1-\beta)}2C^{p-2}R^{p-2}) < 1 , \end{aligned}$$

y por razones técnicas que serán claras más adelante, exigimos que T^* cumpla además que $C(T^* + T^{*(1-\beta)}L(R)) < 1$, donde

$$L(R) := \sup\{\|F_2'(v)\|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^4))} \ ; \ \|v\|_{L_T^\infty L_E^p} \leq c\widetilde{C}R\} ,$$

siendo c la constante de la inmersión de H^1 en L^p y $\widetilde{C}$ la constante de la inmersión continua de $\overline{Y}([0,T])$ en $C(I;H^1)$. (ver el Lema 5.4).
Sea $s \in (0, T - T^*)$. Si consideramos el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} i\partial_t v = -\Delta v + Fv \\ v(0) = u(s) , \end{cases} \tag{5.20}$$

se puede demostrar, (ver el Lema 3.5 y la demostración del Teorema 3.7), que existe una única solución $v_s \in C([0,T^*];H^1)$ del problema (5.20). Además, puesto que $\|u(s)\|_{H^1} < M$ entonces existe $\epsilon_s > 0$ tal que si v_ψ es la solución del problema (5.20) con ψ en lugar de $u(s)$, entonces $v_\psi \in C([0,T^*];H^1)$ siempre que $\|\psi - u(s)\|_{H^1} < \epsilon_s$.
Sea $B^{H^1}_{\epsilon_s}(u(s))$ la bola cerrada en H^1 de centro $u(s)$ y radio ϵ_s. A continuación se demostrará que la aplicación $\psi \mapsto v_\psi$ es continua de $B^{H^1}_{\epsilon_s}(u(s))$ en $C([0,T^*];H^1)$ y usaremos después este resultado paso a paso para justificar la afirmación del teorema.
Sean $\psi \in B^{H^1}_{\epsilon_s}(u(s))$ y $\{\psi_n\}$ una sucesión en $B^{H^1}_{\epsilon_s}(u(s))$ que converge a ψ en H^1. Sea además $\{v_n\}$ la sucesión de soluciones del problema (5.20) con $v_n \in \overline{Y}([0,T^*])$ y $v_n(0) = \psi_n$; y sea $v_\psi \in \overline{Y}([0,T^*])$ la solución del problema (5.20) con $v_\psi(0) = \psi$.
Del teorema de existencia y unicidad con dato inicial en L^2, (ver el Teorema 5.1 de la referencia [P]), se sigue que $v_n \to v_\psi$ en $\overline{X}([0,T^*])$. Luego, si se demuestra que para todo j, $1 \le j \le m$ se cumple que $\frac{\partial v_n}{\partial x_j} \to \frac{\partial v_\psi}{\partial x_j}$ en $\overline{X}([0,T^*])$, habremos demostrado entonces que $v_n \to v_\psi$ en $\overline{Y}([0,T^*]) \hookrightarrow C([0,T^*];H^1)$. (ver las afirmaciones que preceden al Lema 3.1).
La sucesión $\{v_n\}$ pertenece a $B^Y_R(0)$ y por tanto es acotada en $C([0,T^*];H^1)$ con $\|v_n(t)\|_{H^1} \le \widetilde{C}R$. Sea $\omega \in \mathbb{R}$ tal que $0 < m(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}) < \omega < 1$. Un resultado estándar de interpolación en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^m)$ muestra que

$$\begin{aligned}\|v_n(t) - v_\psi(t)\|_{H^\omega} &\le \|v_n(t) - v_\psi(t)\|_{H^0}^{1-\omega}\|v_n(t) - v_\psi(t)\|_{H^1}^{\omega}\\ &\le (2CR)^\omega \|v_n(t) - v_\psi(t)\|_{L^2}^{1-\omega},\end{aligned}$$

y puesto que $v_n \to v_\psi$ en $C([0,T^*];L^2)$; entonces se tiene que $v_n \to v_\psi$ en $C([0,T^*];H^\omega)$. Así , del Teorema 1.3 en los preliminares se concluye que $v_n \to v_\psi$ en $C([0,T^*];L^p)$ y por consiguiente $v_n \to v_\psi$ en $X_0([0,T^*])$.
Como $\frac{\partial}{\partial x_j}$ conmuta con los operadores G_0 y G, y $X([0,T^*]) \hookrightarrow L^1_{T^*}L^2_E \cap L^{r'}_{T^*}L^p_E$, los Lemas 2.3, 2.4, 5.11, 5.12 y 5.13 nos permiten concluir que

$$\left\|\frac{\partial v_\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial v_n}{\partial x_j}\right\|_{X([0,T^*])} = \left\|\frac{\partial}{\partial x_j}G_0(\psi) - i\frac{\partial}{\partial x_j}G(Fv_\psi) - \frac{\partial}{\partial x_j}G_0(\psi_n) + i\frac{\partial}{\partial x_j}G(Fv_n)\right\|_{X[0,T^*]}$$

$$\le \left\|G_0\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial \psi_n}{\partial x_j}\right)\right\|_{X[0,T^*]} + \left\|G\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(Fv_\psi) - \frac{\partial}{\partial x_j}(Fv_n)\right)\right\|_{X[0,T^*]}$$

$$\le C\left\|\frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial \psi_n}{\partial x_j}\right\|_{L^2} + C\left\|\frac{\partial}{\partial x_j}(Fv_\psi) - \frac{\partial}{\partial x_j}(Fv_n)\right\|_{X'[0,T^*]}$$

$$\le C\|\psi - \psi_n\|_{H^1} + C\left\|F'(v_\psi).\frac{\partial v_\psi}{\partial x_j} - F'(v_n).\frac{\partial v_\psi}{\partial x_j}\right\|_{X'[0,T^*]}$$

$$+ C\left\|F'(v_n).\frac{\partial v_\psi}{\partial x_j} - F'(v_n).\frac{\partial v_n}{\partial x_j}\right\|_{X'[0,T^*]}$$

$$\le C\|\psi - \psi_n\|_{H^1} + C\left\|F_1'(v_\psi).\frac{\partial v_\psi}{\partial x_j} - F_1'(v_n).\frac{\partial v_\psi}{\partial x_j}\right\|_{L^1_{T^*}L^2_E}$$

$$+ C\left\|F_2'(v_\psi).\frac{\partial v_\psi}{\partial x_j} - F_2'(v_n).\frac{\partial v_\psi}{\partial x_j}\right\|_{L^{r'}_{T^*}L^{p'}_E}$$

$$+ C\left[T^* + T^{*(1-\beta)}\|F_2'(\overline{v}_n)\|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^4))}\right]\left\|\frac{\partial v_\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial v_n}{\partial x_j}\right\|_{X[0,T^*]},$$

Donde $\overline{v}_n$ es la extensión de v_n a $[0,T]$ que vale cero por fuera de $[0,T^*]$. Reorganizando los términos en la última desigualdad obtenemos:

$$\begin{aligned}\|\frac{\partial v_\psi}{\partial x_j}-\frac{\partial v_n}{\partial x_j}\|_{X[0,T^*]} &\le \frac{C}{1-\delta}\Big(\|\psi-\psi_n\|_{H^1}+\|F_1'(v_\psi).\frac{\partial v_\psi}{\partial x_j}-F_1'(v_n).\frac{\partial v_\psi}{\partial x_j}\|_{L^1_{T^*}L^2_E}\\ &\quad+\|F_2'(v_\psi).\frac{\partial v_\psi}{\partial x_j}-F_2'(v_n).\frac{\partial v_\psi}{\partial x_j}\|_{L^{r'}_{T^*}L^{p'}_E}\Big)\,;\\ \text{donde}\quad \delta &:= C\big(T^*+T^{*(1-\beta)}L(R)\big)<1\,.\end{aligned}$$

Teniendo presentes la convergencia de ψ_n a ψ en H^1, la convergencia de v_n a v_ψ en $X_0([0,T^*]) := L^\infty_{T^*}L^2_E \cap L^\infty_{T^*}L^p_E$ y los Lemas 5.7 y 5.8 se concluye que

$$\frac{\partial v_n}{\partial x_j}\to\frac{\partial v_\psi}{\partial x_j}\quad\text{en}\quad X([0,T^*])\,,\ \text{cuando}\ n\to\infty\,.$$

Hemos demostrado que la aplicación $\psi\mapsto v_\psi$ es continua de $B^{H^1}_{\epsilon_s}(u(s))$ en $C([0,T^*];H^1)$. Sea $N\in\mathbb{N}$ tal que $NT^*<T\le(N+1)T^*$. La función $u_N(t):=u(NT^*+t)$, es la solución del problema de valor inicial (5.20) con $v(0)=u(NT^*)$ en el intervalo $[0,T-NT^*]$. Luego existe $\epsilon_N>0$ tal que si $\|\psi-u(NT^*)\|_{H^1}<\epsilon_N$ entonces la solución v_ψ de (5.20) con $v_\psi(0)=\psi$ pertenece a $C([0,T-NT^*];H^1)$, y más aún, la aplicación $\psi\mapsto v_\psi$ es continua de $B^{H^1}_{\epsilon_N}$ en $C([0,T-NT^*];H^1)$.
Realizando este mismo procedimiento sobre la función $u_{N-1}(t):=u((N-1)T^*+t)$, $t\in[0,T^*]$, obtenemos $\epsilon_{N-1}>0$ tal que si $\|\psi-u((N-1)T^*)\|_{H^1}<\epsilon_{N-1}$ entonces la solución del problema (5.20) con $v(0)=\psi$ pertenece a $C([0,T^*];H^1)$ y $\|v_\psi-u_{N-1}\|_{C([0,T^*];H^1)}<\epsilon_N$. Se puede continuar con este proceso hasta llegar al intervalo $[0,T^*]$; obteniendo en el último paso un $\epsilon_0>0$ tal que $\|v_\psi-u\|_{C([0,T^*];H^1)}<\epsilon_1$ siempre que $\|\phi-\psi\|_{H^1}<\epsilon_0$. Por la manera como se han escogido los ϵ_j, $0\le j\le N$; es claro que si $\|\psi-\phi\|_{H^1}<\epsilon_0$ entonces la solución v_ψ puede ser extendida al intervalo $[0,T]$ con $v_\psi\in C([0,T];H^1)$ y tal que la aplicación $\psi\mapsto v_\psi$ es continua de $B^{H^1}_{\epsilon_0}(\phi)$ en $C([0,T];H^1)$. □

Proposición 5.15.
Sean $T>0$, $1\le q_1, q_2<\infty$ y $u\in L^{q_1}_TL^{q_2}_E$ con $u'\in L^{q_1}_TL^{q_2}_E$. Entonces existe una función $w\in L^{q_1}_{\mathbb{R}}L^{q_2}_E$ con $w'\in L^{q_1}_{\mathbb{R}}L^{q_2}_E$ tal que $w|_{[0,T]}=u$ y $w'|_{[0,T]}=u'$. Además se tiene que

$$\|w\|_{L^{q_1}_{\mathbb{R}}L^{q_2}_E}\le C\|u\|_{L^{q_1}_TL^{q_2}_E}\quad y\quad \|w'\|_{L^{q_1}_{\mathbb{R}}L^{q_2}_E}\le C(\|u\|_{L^{q_1}_TL^{q_2}_E}+\|u'\|_{L^{q_1}_TL^{q_2}_E}).$$

Demostración.
Sea $\eta\in C^\infty(\mathbb{R})$, $0\le\eta\le1$ y tal que

$$\eta(t)=\begin{cases}1 & \text{si}\ t<\frac{T}{4}\\ 0 & \text{si}\ t>\frac{3T}{4}\,.\end{cases}$$

Sean $u^\triangle$ y $u^\square$ las extensiones de u dadas por:

$$u^\triangle(t)=\begin{cases}u(t) & \text{si}\ 0\le t\le T\\ 0 & \text{si}\ t>T\,.\end{cases}\quad \text{y}\quad u^\square(t)=\begin{cases}u(t) & \text{si}\ 0\le t\le T\\ 0 & \text{si}\ t<0\,.\end{cases}$$

Así definidas $u^{\triangle}$ y $u^{\square}$ son tales que

$$(\eta u^{\triangle})' = \eta' u^{\triangle} + \eta(u')^{\triangle} \quad \text{como igualdad en } \mathcal{D}'((0,+\infty); L^{q_2})$$
$$\text{y} \quad [(1-\eta)u^{\square}]' = (1-\eta)' u^{\square} + (1-\eta)(u')^{\square} \quad \text{como igualdad en } \mathcal{D}'((-\infty,T); L^{q_2}).$$

Finalmente definimos u_1 como la extensión par de $\eta u^{\triangle}$ alrededor de 0, u_2 como la extensión par de $(1-\eta)u^{\square}$ alrededor de T y $w := u_1 + u_2$. $\square$

A continuación consideramos algunas definiciones que serán necesarias para formular algunos lemas previos al Teorema de dependencia continua en H^2.
Sea $\rho \in C_c^{\infty}(R)$ con $\operatorname{supp}\rho \subset (-1,1)$, $\rho \geq 0$ y $\rho(-t) = \rho(t)$ para todo t; y sea $\theta \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^m)$, con $\operatorname{supp}\theta \subset B_1^{\mathbb{R}^m}(0)$, $\theta \geq 0$ y $\theta(x) = \theta(y)$ para $|x| = |y|$.
Para $n \in \mathbb{N}$ se define $\kappa_n(x,t) := n^{m+1}\rho(nt)\theta(nx)$.
Si $v \in L_{\mathbb{R}}^{q_1} L_E^{q_2}$ la convolución de κ_n con v está dada por

$$(\kappa_n * v)(x,t) := \int_{\mathbb{R}^{m+1}} \kappa_n(y,\tau) v(x-y, t-\tau)\, dy d\tau\,.$$

Por último se define

$$\mathcal{M} := \left\{ v \in C(\mathbb{R}^{m+1}) \mid \frac{\partial^n v}{\partial t^n} \in C(\mathbb{R}^{m+1}) \text{ para toda } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Lema 5.16.
Sean $T > 0$, $1 \leq q_1, q_2 < \infty$ y $u \in L_T^{q_1} L_E^{q_2}$ con $u' \in L_T^{q_1} L_E^{q_2}$. Entonces existe una sucesión $\{u_n\}$ con $u_n \in L_{\mathbb{R}}^{q_1} L_E^{q_2} \cap \mathcal{M}$ y $u_n' \in L_{\mathbb{R}}^{q_1} L_E^{q_2}$ tal que
a) $u_n|_{[0,T]} \to u$, y $u_n'|_{[0,T]} \to u'$ en $L_T^{q_1} L_E^{q_2}$ cuando $n \to \infty$;
b) $\|u_n\|_{L_{\mathbb{R}}^{q_1} L_E^{q_2}} \leq C \|u\|_{L_T^{q_1} L_E^{q_2}}$ y
c) $\|u_n'\|_{L_{\mathbb{R}}^{q_1} L_E^{q_2}} \leq C(\|u\|_{L_T^{q_1} L_E^{q_2}} + \|u'\|_{L_T^{q_1} L_E^{q_2}})$.

Demostración.
Sea w la extensión de u dada por la Proposición5.15. Siguiendo un esquema estándar, como el utilizado en la referencia [B], puede demostrarse que:
a) $\kappa_n * w \in L_{\mathbb{R}}^{q_1} L_E^{q_2} \cap \mathcal{M}$;
b) $\|\kappa_n * w\|_{L_{\mathbb{R}}^{q_1} L_E^{q_2}} \leq \|w\|_{L_{\mathbb{R}}^{q_1} L_E^{q_2}}$;
c) $\kappa_n * w \to w$ y $\kappa_n * w' \to w'$ en $L_{\mathbb{R}}^{q_1} L_E^{q_2}$ cuando $n \to \infty$;
d) $\frac{\partial}{\partial t}(\kappa_n * w) = \frac{\partial \kappa_n}{\partial t} * w = (\kappa_n * w)'$ y
e) $\kappa_n * w' = (\kappa_n * w)'$.
Así es suficiente tomar $u_n := \kappa_n * w$. $\square$

Lema 5.17.
Si $u \in L_T^{\infty} L_E^2$ es tal que $u' \in L_T^1 L_E^2$ entonces

$$(F_1 u)' = F_1'(u).u'\,.$$

Demostración.
De la Desigualdad (5.9) vemos que $F_1'(u).u' \in L_T^1 L_E^2$. De otra parte es claro que $F_1 u \in L_T^\infty L_E^2$ y por consiguiente $(F_1 u)'$ tiene sentido como distribución en $\mathcal{D}'(0,T;L^2)$. Sea $\{u_n\}$ una sucesión en $L_{\mathbb{R}}^1 L_E^2$ escogida de acuerdo con las afirmaciones del Lema 5.16, y sean $v_n := u_n|_{[0,T]}$ y $v_n' := u_n'|_{[0,T]}$. Teniendo en cuenta que por paso a una subsucesión se puede suponer que $v_n(t) \to u(t)$ en L^2 p.c t. $t \in [0,T]$, entonces, del Lema 5.7, se sigue que

$$F_1'(v_n).v_n' \to F_1'(u).u' \quad \text{en } L_T^1 L_E^2. \tag{5.21}$$

Como $v_n \to u$ en $L_T^1 L_E^2$ y F_1 es Lipschitz, se obtiene que $F_1 v_n \to F_1 u$ en $L_T^1 L_E^2$ y por lo tanto

$$(F_1 v_n)' \to (F_1 u)' \quad \text{en } \mathcal{D}'(0,T;L^2). \tag{5.22}$$

La sucesión $\{v_n\}$ así escogida es tal que $\frac{\partial v_n}{\partial t} = v_n'$. En realidad, como

$$v_n(x,t) = v_n(x,0) + \int_0^t \frac{\partial v_n}{\partial t}(x,\tau)d\tau\,,$$

entonces, por un resultado estándar de integrales de Bochner, se tiene que

$$v_n(t) = v_n(0) + \int_0^t \frac{\partial v_n}{\partial t}(\eta)d\eta \quad \text{en } L^2.$$

Así , por el Teorema 1.4, a $\Longrightarrow$ c, se concluye que $\frac{\partial v_n}{\partial t} = v_n'$. Por un procedimiento similar puede verse que $(F_1 v_n)' = \frac{\partial}{\partial t}(F_1 v_n)$. Por lo tanto

$$(F_1 v_n)' = \frac{\partial}{\partial t}(F_1 v_n) = F_1'(v_n).\frac{\partial v_n}{\partial t} = F_1'(v_n).v_n' \quad \text{en } \mathcal{D}'(0,T;L^2). \tag{5.23}$$

El lema se sigue de las afirmaciones (5.21) - (5.23). □

Lema 5.18.
Si $u \in L_T^\infty L_E^p$ es tal que $u' \in L_T^r L_E^p$ entonces

$$(F_2 u)' = F_2'(u).u'. \tag{5.24}$$

Demostración.
Puesto que $u' \in L_T^r L_E^p \hookrightarrow L_T^{r'} L_E^p$ entonces $F_2'(u).u' \in L_T^{r'} L_E^{p'}$, (ver la Desigualdad (5.12)). Usando el Lema 5.1 puede verse que $F_2 u \in L_T^{r'} L_E^{p'}$. De este modo los términos de la igualdad (5.24) están en el espacio de distribuciones $\mathcal{D}'(0,T;L^{p'})$. Puede seguirse el mismo esquema de la demostración anterior, aplicando el Lema 5.8, una vez se haya probado que $\|v_n\|_{L_T^\infty L_E^p} \le C\|u\|_{L_T^\infty L_E^p}$. Obsérvese además que como $v_n \to v$ en $L_T^1 L_E^p$, por paso adecuado a subsucesiones, se puede suponer que $v_n(t) \to v(t)$ en L^p p.c.t. $t \in [0,T]$. Probemos entonces el acotamiento de la sucesión $\{v_n\}$ en $L_T^\infty L_E^p$.

Si ω es la extensión de u definida en la Proposición 5.15 entonces $\|\omega\|_{L^\infty_{\mathbb{R}} L^p_E} \leq C\|u\|_{L^\infty_T L^p_E}$.
Como $u_n = k_n * \omega$ entonces

$$u_n(x,t) = \int_{\mathbb{R}^{m+1}} k_n(y,\tau)\omega(x-y,t-\tau)dyd\tau \ , \tag{5.25}$$

así, para toda función $g \in L^{p'}$ y para casi toda $t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} u_n(x,t)g(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^{m+1}} k_n(y,\tau)\omega(x-y,t-\tau)g(x)dyd\tau dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{m+1}} k_n(y,\tau)\|\omega(t-\tau)\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}dyd\tau \\
&\leq \|\omega\|_{L^\infty_{\mathbb{R}} L^p_E}\Big(\int_{\mathbb{R}^{m+1}} k_n(y,\tau)dyd\tau\Big)\|g\|'_{L^p} .
\end{aligned}$$

Se tiene entonces que $\|u_n(t)\|_{L^p} \leq \|\omega\|_{L^\infty_{\mathbb{R}} L^p_E}$ de donde

$$\|v_n\|_{L^\infty_T L^p_E} \leq \|u_n\|_{L^\infty_{\mathbb{R}} L^p_E} \leq \|\omega\|_{L^\infty_{\mathbb{R}} L^p_E} \leq C\|u\|_{L^\infty_T L^p_E} .$$

□

Corolario 5.19.
Sean $T > 0$ e $I := [0,T]$. Si $u \in Z = Z([0,T])$ entonces

$$(Fu)' = F'(u).u' .$$

Demostración.
Se sigue de la descomposición $F = F_1 + F_2$ y de los Lemas 5.17 y 5.18. □

Teorema 5.20.
Sean $\phi \in H^2$, $T > 0$ e $I = [0,T]$. Si $u \in C(I;H^2)$ es solución del problema de valores iniciales (2.1) entonces existe una vecindad W de ϕ en H^2 tal que para toda $\psi \in W$ el problema (2.1) con dato inicial ψ admite una única solución v_ψ en el intervalo $[0,T]$. Además la aplicación $\psi \mapsto v_\psi$ es continua de W en $C(I;H^2)$.

Demostración
Sean $M_1 = 1 + \max_{[0,T]}\|u(t)\|_{H^2}$, $M_2 = 1 + \max_{[0,T]}\|F(u(t))\|_{L^2}$, ($M_2$ es finito de acuerdo con el Corolario 4.6), η y C escogidas como en (4.23) y $R > \eta(M_1 + M_2)$. El proceso que se ha seguido en la demostración del Lema 4.10 sugiere escoger $T^* < T$, $0 < T^* \leq 1$ y tal que

$$\begin{aligned}
&C(T^*R + T^{*(1-\beta)}R^{p-1}) < R - \eta(M_1 + M_2) , \\
&C(T^* + 2T^{*(1-\beta)}C^{p-2}R^{p-2}) < 1 \ \text{y},
\end{aligned}$$

por razones técnicas que serán claras más adelante, T^* debe escogerse de manera que
$\delta := C(T^* + T^{*(1-\beta)}L(R)) < 1$,
donde

$$L(R) = \sup\{\|F_2'(v)\|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^4))} \ ; \ \|v\|_{L^\infty_T L^p_E} \leq c_0 R\} ,$$

siendo c_0 la constante en la inmersión $Z \hookrightarrow X_0$. (ver Lema 5.4).
Sea $s \in (0, T - T^*)$. Si consideramos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} i\partial_t v = -\Delta v + Fv \\ v(0) = u(s)\,, \end{cases} \tag{5.25}$$

Del Teorema 4.12, se tiene una única solución $v \in C([0,T^*]; H^2)$ del problema (5.25). Ahora bien, puesto que $\|u(s)\|_{H^2} + \|F(u(s))\|_{L^2} < M_1 + M_2$, entonces, (ver (4.25)), existe $\epsilon_s > 0$ tal que si v_ψ es la solución del problema de valores iniciales (5.25) con ψ en lugar de $u(s)$, entonces $v_\psi \in C([0,T^*]; H^2)$ y $\|v_\psi\|_{Z[0,T^*]} \leq R$ siempre que $\|\psi - u(s)\|_{H^2} < \epsilon_s$. A continuación demostraremos que la aplicación $\psi \mapsto v_\psi$ es continua de $B^{H^2}_{\epsilon_s}(u(s))$ en $C([0,T^*]; H^2)$.
Sea $\{\psi_n\}$ una sucesión en $B^{H^2}_{\epsilon_s}(u(s))$ que converge a ψ en H^2 y sea $\{v_n\}$, $v_n \in \overline{Z}([0,T^*])$ la sucesión de soluciones del problema (2.1) con ψ_n en lugar de ϕ y por consiguiente con $v_n(0) = \psi_n$. Por el teorema de dependencia continua en H^1, (Teorema 5.14), $v_n \to v_\psi$ en $C([0,T^*]; H^1)$ y como $C([0,T^*]; H^1) \hookrightarrow X_0$, (ver la demostración del Lema 3.1), entonces

$$v_n \to v_\psi \text{ en } X_0([0,T^*]) = L^\infty_{T^*} L^2_E \cap L^\infty_{T^*} L^p_E\,. \tag{5.26}$$

De la formulación integral del problema se sigue que

$$v'_\psi - v'_n = \big(G_0(\psi - \psi_n)\big)' - i\big(G(Fv_\psi) - G(Fv_n)\big)'\,.$$

Cabe recordar aquí que $i\Delta : H^2 \to L^2$ es el generador del grupo $e^{it\Delta}$. Además, puesto que $v_n, v_\psi \in Z([0,T^*])$ entonces, por el Lema 4.9, $Fv_n, Fv_\psi \in Z'([0,T^*])$. Así por la fórmula (4.9)

$$v'_\psi - v'_n = i\Delta\big(G_0(\psi - \psi_n)\big) - i\big(G_0(F(v_\psi(0))) + G(Fv_\psi)' - G_0(F(v_n(0))) - G(Fv_n)'\big)\,.$$

Teniendo en cuenta que $\psi - \psi_n \in H^2$, aplicando el Corolario 5.19 y el Lema 5.13 se sigue que

$$\|v'_\psi - v'_n\|_{X[0,T^*]} \leq C\|\Delta_E(\psi - \psi_n)\|_{L^2} + C\|F(\psi) - F(\psi_n)\|_{L^2}$$

$$+ C\|F'(v_\psi).v'_\psi - F'(v_n).v'_\psi\|_{X'[0,T^*]} + C\|F'(v_n).v'_\psi - F'(v_n).v'_n\|_{X'[0,T^*]}$$

$$\leq C\|\psi - \psi_n\|_{H^2} + C\|F(\psi) - F(\psi_n)\|_{L^2}$$

$$+ C\|F'_1(v_\psi).v'_\psi - F'_1(v_n).v'_\psi\|_{L^1_{T^*} L^2_E} + C\|F'_2(v_\psi).v'_\psi - F'_2(v_n).v'_\psi\|_{L^{r'}_{T^*} L^{p'}_E}$$
$$+ C\big[T^* + T^{*(1-\beta)}\|F'_2(\overline{v}_n)\|_{L^\infty(0,T; L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^4))}\big]\|v'_\psi - v'_n\|_{X[0,T^*]}\,;$$

donde $\overline{v}_n$ es la extensión de v_n a $[0,T]$ que es cero por fuera de $[0,T^*]$. Reorganizando los términos en la última desigualdad obtenemos

$$\|v'_\psi - v'_n\|_{X[0,T^*]} \leq \tfrac{C}{1-\delta}\big[\|\psi - \psi_n\|_{H^2} + \|F(\psi) - F(\psi_n)\|_{L^2}$$

$$+ \|F_1'(v_\psi).v_\psi' - F_1'(v_n).v_\psi'\|_{L^1_{T^*}L^2_E} + \|F_2'(v_\psi).v_\psi' - F_2'(v_n).v_\psi'\|_{L^{r'}_{T^*}L^{p'}_E}\Big] \,.$$

La convergencia de ψ_n a ψ en H^2, la convergencia de v_n a v_ψ en $X_0([0,T^*]) = L^\infty_{T^*}L^2_E \cap L^\infty_{T^*}L^p_E$, los Lemas 5.7 y 5.8 y la continuidad de $F : H^2 \to L^2$, muestran que

$$v_n' \to v_\psi' \quad \text{en} \quad X([0,T^*]). \tag{5.27}$$

Sea $\omega \in \mathbb{R}$ tal que $0 < m(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(p-1)}) < \omega < 2$ (ver el Corolario 4.6). Puesto que v_ψ y v_n pertenecen a $C([0,T^*]; H^2)$ entonces, por un resultado de interpolación en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^m)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\|v_n(t) - v_\psi(t)\|_{H^\omega} &\le \|v_n(t) - v_\psi(t)\|_{H^0}^{1-\frac{\omega}{2}} \|v_n(t) - v_\psi(t)\|_{H^2}^{\frac{\omega}{2}} \\ &\le \|v_n(t) - v_\psi(t)\|_{L^2}^{1-\frac{\omega}{2}} (2CR)^{\frac{\omega}{2}} \,;\end{aligned}$$

donde C es la constante en la inmersión $\overline{Z}([0,T^*]) \hookrightarrow C([0,T^*]; H^2)$. En consecuencia v_n converge a v_ψ en $C([0,T^*]; H^\omega)$ y por consiguiente, en virtud del Teorema 1.3 en los preliminares,

$$v_n \to v_\psi \quad \text{en } X([0,T^*]; L^{2(p-1)}). \tag{5.28}$$

Sea $t \in [0,T^*]$. De la Desigualdad (4.14) vemos que

$$\begin{aligned}\|(Fv_\psi)(t) - (Fv_n)(t)\|_{L^2} &\le \|(F_1v_\psi)(t) - (F_1v_n)(t)\|_{L^2} + \|(F_2v_\psi)(t) - (F_2v_n)(t)\|_{L^2} \\ &\le C\|v_\psi(t) - v_n(t)\|_{L^2} + C\|v_\psi(t) - v_n(t)\|_{L^{2(p-1)}}\left[\|v_\psi(t)\|^{p-2}_{L^{2(p-1)}} + \|v_n(t)\|^{p-2}_{L^{2(p-1)}}\right].\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\|Fv_\psi - Fv_n\|_{L^\infty_{T^*}L^2_E} &\le C\|v_\psi - v_n\|_{L^\infty_{T^*}L^2_E} \\ &\quad + C\|v_\psi - v_n\|_{L^\infty_{T^*}L^{2(p-1)}_E}\left[\|v_\psi\|^{p-2}_{L^\infty_{T^*}L^{2(p-1)}_E} + \|v_n\|^{p-2}_{L^\infty_{T^*}L^{2(p-1)}_E}\right];\end{aligned}$$

y así, junto con (5.28) y el Corolario 4.8, se tiene que

$$Fv_n \to Fv_\psi \quad \text{en} \quad C([0,T^*]; L^2). \tag{5.29}$$

De (5.27) y (5.29) se sigue que

$$Fv_n - iv_n' \to Fv_\psi - iv_\psi' \quad \text{en} \quad C([0,T^*]; L^2)\,,$$

es decir

$$\Delta v_n \to \Delta v_\psi \quad \text{en} \quad C([0,T^*]; L^2)\,. \tag{5.30}$$

De las expresiones (5.26), (5.27) y (5.30) se concluye que

$$v_n \to v_\psi \quad \text{en} \quad \overline{Z}([0,T^*]) \hookrightarrow C([0,T^*]; H^2)\,.$$

Para completar la demostración del Teorema 5.20 seguimos un proceso similar al realizado en la demostración del Teorema 5.14. □

BIBLIOGRAFÍA

[B] Brézis H.
Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones, Alianza Editorial, 1984

[DS] Dunford N. y Schwartz J.
Linear Operators, Part I, Interscience Publishers, 1963.

[IMS1] Isaza P., Mejía J. y Stallbohm V.
Problema Periódico Asociado a la Ecuación KdV, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, 1989.

[IMS2] Isaza P., Mejía J. y Stallbohm V.
La Ecuación de Schrödinger y la Teoría de Semigrupos Lineales, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, 1991.

[K] Kato T.
On Nonlinear Schrödinger Equations, Ann. Ins. Henri Poincaré, vol. 46, número 1, 1987, páginas 113-129.

[P] Ponce G.
Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales de Evolución, Monografía presentada para la Escuela de Verano en Matemáticas, Universidad del Valle, 1993.

[PA] Pazy A.
Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer Verlag, 1983.

[SW] Stein E. M., Weiss G.
Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton University Press, 1971.

[V] Vainberg M. M.
Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators, Holden-Day, inc., 1964.

[Y] Yosida K.
Functional Analysis, Springer-Verlag, 1980.