Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen IV (1997), pp. 19–29

$\aleph_\omega$ DE ALEPH A OMEGA

ANDRÉS VILLAVECES(*)

Resumen. Esbozamos algunos hechos y problemas de la matemática contemporánea que tienen relación con $\aleph_\omega$.

Abstract. We sketch some facts and problems of contemporary mathematics related in some way to $\aleph_\omega$.

Keywords. Set theory, continuum, cardinals, combinatorics.

0. Introducción

En una frase célebre del prólogo a su *Análisis Real y Complejo* afirma Walter Rudin que 'la función exponencial es la más importante de las matemáticas.' A primera vista, esta afirmación parece referirse al análisis matemático tradicional. Sin embargo, extrapolando un poco, muchos de los desarrollos más recientes y revolucionarios en Teoría de Conjuntos han tenido que ver *precisamente* con la estructura de la función exponencial. No exactamente la función exponencial en el cuerpo de números complejos, como tiene en mente Rudin; más bien, la exponencial en cardinales transfinitos, que es una extensión de la exponencial en números naturales.

(*)Texto recibido 7/5/98, revisado 29/10/98. Andrés Villaveces, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional, Bogotá, Colombia. e-mail: villavec@matematicas.unal.edu.co
Agradecemos a Fernando Zalamea sus múltiples comentarios y observaciones a este artículo, al igual que su invitación inicial a escribirlo en el contexto del símbolo del *Boletín*.

Uno de los libros más importantes en Lógica en los años 90 es *Cardinal Arithmetic* de Saharon Shelah [Sh:g]. Este libro retoma el problema de la exponencial en aritmética cardinal: aunque la suma y la multiplicación son triviales tan pronto pasa uno a cardinales infinitos, éste *no es* el caso de la exponencial: su comportamiento en el ámbito infinitístico dista mucho de ser sencillo. La exponencial de cardinales infinitos está entrelazada con múltiples problemas de la matemática. El libro de Shelah está enfocado en el problema central de entender qué es realmente la exponenciación cardinal; propone para este fin una definición más robusta de la función exponencial. Por 'más robusta' se entiende que la nueva definición debería capturar el significado de la definición tradicional, coincidir con ésta en muchos casos importantes, pero al mismo tiempo no ser tan sensible a los axiomas de la Teoría de Conjuntos.

El primer problema de Hilbert es justamente la pregunta acerca del comportamiento de la función exponencial, en un caso específico: ¿es el cardinal del continuo ($= 2^{\aleph_0}$) igual a $\aleph_1$, el sucesor de $\aleph_0$? Es significativo que el siglo XX haya arrancado matemáticamente justamente con esta pregunta, y que hoy, en vísperas del siglo XXI, una de las respuestas más sólidas a esa pregunta (respuesta debida a Shelah) se haya consolidado como una de las técnicas más novedosas y promisorias de los últimos años. En manos de Shelah, la teoría en cuestión ha empezado a tener múltiples aplicaciones a temas diversos en álgebra y topología.

Más generalmente, la pregunta de Hilbert se puede retomar como '¿vale la Hipótesis Generalizada del Continuo (GCH)?':

$$2^{\aleph_\alpha} \stackrel{?}{=} \aleph_{\alpha+1}.$$

En [Sh:460] (un artículo importante: 'The Generalized Continuum Hypothesis Revisited'), Shelah replantea el problema de Hilbert. Se ve obligado a replantearlo bajo la forma '¿cuáles son las leyes de la aritmética cardinal?', debido a los resultados de *independencia* de la pregunta original debidos a Gödel y Cohen.

Tal re-interpretación de un problema ya resuelto podría parecer a primera vista traída de los cabellos. Sin embargo, es práctica común en matemática reformular problemas, hasta tratar de hallar versiones más genuinas de los mismos. Shelah menciona en [Sh:460] otros dos problemas de Hilbert en los cuales ha habido reinterpretación, justificada y aceptada por la comunidad matemática.

El problema 13 de Hilbert pregunta originalmente

(*) Demuestre que la ecuación de séptimo grado $x^7 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ no es soluble mediante ninguna función continua de sólo dos variables.

Lorentz cambió la pregunta a

(**) Demuestre que hay funciones continuas de tres variables no representables mediante ninguna función continua de dos variables.

Lorentz, discutiendo la solución de Kolmogorov, afirmó que 'haber negado la conjetura no corresponde a resolverla; el problema debe ser reformulado a la luz de los contraejemplos...'.

Un camino similar es tomado por Shelah en su replanteamiento del primer problema de Hilbert. Los detalles de la demostración son muy complejos, y no es mi intención entrar en ellos. Sin embargo, planeo resaltar los dos puntos siguientes en este texto:

primero, el rol central que ha jugado el cardinal $\aleph_\omega$ en la historia del problema;

segundo, algunas de las aplicaciones a la matemática *por fuera de la lógica* que ha tenido la teoría de pcf, desarrollada originalmente para estudiar el comportamiento de la exponencial.

La notación que usamos es la usual en teoría de conjuntos, y en la mayoría de los casos quedará clara dado el contexto. Dados cardinales κ y λ, denotamos mediante $\kappa^{<\lambda}$ al supremo de todos los κ^α, cuando $\alpha \to \lambda$.

El lector también observará que las referencias a publicaciones de Shelah son de la forma [ShXx n], donde Xx son iniciales del apellido del coautor (si lo hay) y n es un número natural (por el momento menor que 700). n es el número de publicación del catálogo de obras de Shelah, y lo usamos aquí por conveniencia: al igual que los 'Opus', 'KV', 'BWV' en las obras de ciertos compositores, el citar las obras de Shelah por su número de publicación facilita enormemente la búsqueda y referencia. Para más detalles sobre el catálogo, el lector debería consultar **`http://math.rutgers.edu/~shelah`**.

1. De aleph a omega: $\aleph_\omega$

Aleph y omega son dos objetos básicos. Omega (ω – la última letra en griego) denota el primer ordinal infinito: el tipo de orden de los números naturales. Aleph ($\aleph$ – la primera letra en hebreo) es la función más básica en teoría de conjuntos.

$$\omega = \text{ tipo de orden de } (N, <).$$

Así, ω es el primer 'objeto de interés' en teoría de conjuntos. Es el conjunto inductivo infinito más pequeño, el primer *cardinal* infinito. Es también el primero de los *grandes cardinales*: cardinales que se comporten como ω con respecto a sus predecesores (en el caso de ω los números finitos) 're-aparecen' mucho más adelante en la jerarquía de cardinales. En ZFC, ω es *débilmente compacto:* satisface el teorema combinatorio de Ramsey; es *medible:* es soporte de ultrafiltros completos (medidas completas); es *fuertemente compacto:* la lógica correspondiente $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ (es decir, el cálculo de predicados usual, con conectivos y cuantificación finitos) es compacta.

Que un cardinal κ mayor que ω vuelva a tener la propiedad de Ramsey, o tener medidas completas, o que la lógica correspondiente $\mathcal{L}_{\kappa\kappa}$ vuelva a ser compacta, son hipótesis muy fuertes que van mucho más allá del poder expresivo de ZFC. Pero ω, además, es el objeto infinitístico más básico y central en matemática: la construcción de los naturales y la aritmética son la base de 'casi todo' lo demás.

Aleph es la función más básica en teoría de conjuntos. Su definición por inducción transfinita es

$$\aleph : On \to Card$$

$\aleph(0) =$ el cardinal de los naturales,
$\aleph(\alpha + 1) = \aleph(\alpha)^+$, el cardinal sucesor de $\aleph(\alpha)$,
$\aleph(\lambda) = \sup_{\alpha<\lambda} \aleph(\alpha)$, para λ límite,

donde On denota la clase de los ordinales y $Card$ la de los cardinales.

Casi siempre escribimos $\aleph_\alpha$ en vez de $\aleph(\alpha)$. Así, $\aleph_\omega$ resulta ser el límite de la sucesión $(\aleph_n), n \in \omega$:

$$\aleph_0, \aleph_1, \cdots \longrightarrow \aleph_\omega.$$

Obsérvese que, por su definición, $\aleph_\omega$ es límite de una ω-sucesión estrictamente creciente de cardinales. Ésto contrasta fuertemente con lo que sucede con sus predecesores distintos de $\aleph_0$: usando una forma débil de elección, ninguno de éstos es límite de una ω-sucesión creciente de cardinales.

Definición 1.1. *Un cardinal κ es límite ssi no es sucesor. κ es límite fuerte ssi para todo $\alpha < \kappa$, $2^\alpha < \kappa$. Una función $f : \gamma \to \zeta$ (γ y ζ ordinales) es cofinal ssi para todo $\xi < \zeta$ existe $\beta < \gamma$ tal que $f(\beta) > \xi$. La cofinalidad de un ordinal α, $\mathrm{cf}\,\alpha$, es $sup\{\beta | \exists f : \beta \to \alpha$ cofinal $\}$. κ es regular ssi $\mathrm{cf}\,\kappa = \kappa$; de lo contrario se dice que κ es singular. Reg designa la clase de los cardinales regulares.*

Por ejemplo, $\aleph_\omega$ es claramente límite (el sucesor de $\aleph_n$ es por definición $\aleph_{n+1}$). Que $\aleph_\omega$ sea o no límite fuerte depende de lo que suceda con la función $(\kappa \to 2^\kappa)$ en los $\aleph_n$'s. Si GCH vale para estos cardinales, entonces $\aleph_\omega$ es límite fuerte. Si por ejemplo el continuo fuera $\aleph_{\omega_1+1}$, entonces $\aleph_\omega$ y $\aleph_{\omega_1}$ no serían límites fuertes. La cofinalidad de $\aleph_\omega$ es ω y, para cualquier ordinal, la cofinalidad siempre es un cardinal. Así, $\aleph_\omega$ es un cardinal singular.

Una observación básica aquí es que *el continuo no puede ser* igual a $\aleph_\omega$; esto es consecuencia de un lema clásico de aritmética cardinal debido a König:

$$\forall\kappa(\ \mathrm{cf}\, 2^\kappa > \kappa).$$

2. De la exponencial: resultados iniciales

Scott probó en 1961 que $V = L$ es incompatible con la existencia de cardinales medibles, y que el primer contraejemplo a GCH no puede ser medible. *Éste fue el primer resultado absoluto acerca de la exponencial* ($\kappa \rightarrow 2^\kappa$)*, fuera del resultado de König.* Un cardinal κ es medible ssi existe una medida bivaluada κ-completa no trivial sobre κ.

Teorema 2.1. *(Cohen - circa 1963):*

$\neg$ AC es consistente con ZF,

$\neg$ CH es consistente con ZFC.

Teorema 2.2. *(Solovay - 1963): $2^{\aleph_0}$ puede ser cualquier κ de cofinalidad no enumerable y, para todo κ, es consistente con ZFC que existan al menos κ cardinales λ para los cuales $2^\lambda > \lambda^+$.*

Teorema 2.3. *(Easton -1964): dada F definible de Reg en Card tal que*

(a) $\forall\kappa(\, cf\, F(\kappa) > \kappa)$

(b) $\forall\kappa, \lambda(\kappa \leq \lambda \rightarrow F(\kappa) \leq F(\lambda))$

existe una noción de forcing $\mathbf{P}$ *tal que*

$$1_{\mathbf{P}} \Vdash \forall\kappa(2^\kappa = \check{F}(\kappa)).$$

Este teorema fue una de las primeras aplicaciones de forcing después del trabajo de Cohen, y fue el arranque de toda una línea de investigación nueva en el área. La observación importante es que, en cardinales *regulares*, tenemos plena libertad al calcular la función exponencial, excepto por las dos restricciones (a) y (b) mencionadas. Por el Teorema de Solovay, ¡el continuo puede ser cualquier cardinal de cofinalidad mayor que ω! Obsérvese que el lema de König es exactamente una de las dos restricciones a la libertad de F en el enunciado del Teorema de Easton (2.3).

3. La Hipótesis de los Cardinales Singulares

Una pregunta natural en este punto es: dado que el comportamiento de la exponencial en cardinales regulares tan solo está restringida por las condiciones naturales (a) y (b) del teorema, ¿qué pasa en el caso de los cardinales singulares?

Una posible hipótesis consiste en responder 'lo mínimo posible.' Más precisamente, pedir 'lo mínimo posible' significa que la función exponenciación *quede completamente determinada* por la función F del Teorema de Easton. Se plantea entonces la siguiente 'Hipótesis de Cardinales Singulares':

$$SCH : \forall\kappa \text{ singular } (\kappa^{\mathrm{cf}\,(\kappa)} = \kappa^+ + 2^{\mathrm{cf}\,(\kappa)}).$$

No es difícil verificar que si nos dan una función $F : Reg \to Card$ que satisfaga las hipótesis del teorema de Easton, y suponemos que vale SCH, entonces dado κ un cardinal singular,

$$2^\kappa = \begin{cases} 2^{<\kappa} & \text{si la función continuo es constante a partir} \\ & \text{de cierto punto debajo de } \kappa\text{, es decir si para} \\ & \text{algún } \alpha < \kappa,\ \alpha < \beta < \kappa \to 2^\beta = 2^\alpha, \\ (2^{<\kappa})^+ & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

Además, bajo SCH, para la función exponencial en general tenemos, dados κ y λ cardinales infinitos,

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} 2^{<\lambda} & \text{si } 2^\lambda \geq \kappa, \\ \kappa & \text{si } 2^\lambda < \kappa \text{ y } \lambda < \operatorname{cf} \kappa, \\ \kappa^+ & \text{si } 2^\lambda < \kappa \text{ y } \lambda \geq \operatorname{cf} \kappa. \end{cases}$$

Problema 3.1. *¿Hasta qué punto puede fallar SCH?*

Esta pregunta puede ser considerada como uno de los temas centrales en la investigación en teoría de conjuntos desde los años 70. Una referencia excelente y muy completa sobre el tema es la tesis de Andrés Caicedo [Ca].

Para comenzar, existen las siguientes restricciones a una respuesta al problema 3.1:

(1) si para todo α, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+\beta}$, entonces $\beta < \omega$.
(2) si para todo $n < \omega$ se tiene $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$ entonces $\aleph_\omega^{\aleph_0} \neq \aleph_{\omega_1}$.

En particular, (2) muestra que el comportamiento de la exponencial en $\aleph_\omega$ *no* es muy independiente de lo que sucede en los $\aleph_n$'s. El primer cardinal interesante será entonces justamente $\aleph_\omega$.

En este punto, aún parecía que, salvo estas restricciones, el comportamiento de la exponencial (falla de GCH o de SCH) debería ser bastante 'uniforme' en cardinales singulares, como sucede para los cardinales regulares. Pronto esta idea sería desmentida por el siguiente resultado.

Teorema 3.2. *(Silver - 1974): Si κ es un límite fuerte singular y $\operatorname{cf} \kappa > \omega$, entonces κ no puede ser el primer contraejemplo a GCH.*

Aquí encontramos la primera ruptura fuerte de la homogeneidad del comportamiento de cardinales singulares con respecto a SCH y GCH: a partir de este punto, el problema queda prácticamente reducido a cardinales de cofinalidad ω. El primero de éstos es justamente $\aleph_\omega$.

4. Una breve historia de SCH y el rol de $\aleph_\omega$

He aquí algunos de los hitos importantes de la historia del problema. En esta sección, mencionaré construcciones de teoría de conjuntos no definidas en este artículo. El lector interesado en leer acerca de las aplicaciones puede dirigirse a la sección 5.

(1) (Prikry y Silver 1971) Si existe κ medible en el cual falla GCH, entonces es consistente que falle SCH. Esto dio una primera cota superior de la falla de SCH.

(2) (Kunen 1971) De hecho, la hipótesis anterior implica que es consistente que existan tantos medibles como se desee (usando ultrapotencias iteradas y modelos internos).

(3) La pregunta natural en este momento fue: ¿cuál es el *mínimo singular* en el que SCH puede fallar?

(4) ¿Puede un singular ser el primer contraejemplo a GCH? (Cuidado: en ciertos modelos de Teoría de Conjuntos, como el de Silver-Prikry, si κ es el primer singular en el cual falla SCH entonces hay κ contraejemplos a GCH menores que él (Scott), pues el forcing de Silver y Prikry no cambia a V_κ.)

(5) *Lema de Cubrimiento.* En 1975, Jensen demostró que si el real $0^\sharp$ no existe, entonces V y L son muy parecidos. (Si $X \subset Ord$ es no enumerable, entonces existe $Y \in L$ tal que $X \subset Y \subset Ord$ y $|X| = |Y|$.)

Cuando $0^\sharp$ existe, no es difícil ver que falla este lema: tome $X = \{\aleph_n | n < \omega\}$. X no puede estar contenido en ningún elemento Y de L que tenga cardinal $\aleph_1$: si $0^\sharp$ existe, entonces (el verdadero) $\aleph_\omega$ es inaccesible en L y por lo tanto sólo puede ser cubierto por construibles de tamaño $\aleph_\omega$.

Lo importante aquí es que el lema de cubrimiento implica SCH; así, $\neg$SCH implica la existencia de $0^\sharp$; ésta es una hipótesis de grandes cardinales. Esto dice que la falla de SCH está bastante lejos de ser demostrable en ZFC.

No sobra mencionar aquí el comentario de Kanamori en su famoso libro *The Higher Infinite* (ver [Kn2]), según el cual el lema de cubrimiento de Jensen es 'el resultado más importante de los años 70 en teoría de conjuntos.' Desde entonces, el tener/no tener versiones del lema de cubrimiento entre un modelo interno (L, $L(\mu)$, $L[x]$, K, etc.) y V es una de las grandes dicotomías que se buscan. Estas dicotomías proveen información crucial acerca de lo que se puede o no se puede obtener mediante forcing y acerca de las limitaciones de la aritmética cardinal.

El libro de Kanamori [Kn2], que salió a la luz después de muchos años de espera, es *la referencia* del momento en teoría de grandes cardinales, desde sus inicios (trabajos de Mahlo y de Ulam en cardinales medibles) hasta un momento cercano al actual, con trabajos recientes de Woodin y la escuela de California en grandes cardinales, estructura de los reales y el Axioma de Determinación. Además de dar una excelente presentación de la mayoría de los aspectos técnicos de la teoría, Kanamori comenta en las introducciones a los capítulos varios aspectos filosóficos e históricos que motivaron las definiciones de grandes cardinales presentadas. Algunas de esas preguntas siguen vigentes hoy en día, en ciertas formas. Además de la pregunta

(*) ¿cuál es el tamaño del continuo?

y sus versiones más específicas (y posiblemente más razonables)

(*1) ¿cuál es el tamaño del continuo definible (grupo Cabal de California)?

(*2) ¿cuál es el comportamiento 'robusto' de la función exponencial (Shelah)?

surge la pregunta natural

(**) ¿existe una *cota superior* de consistencia a la jerarquía de grandes cardinales?

En los años 70, Kenneth Kunen proporcionó una cota superior. La "cota de Kunen" consiste en que, bajo el Axioma de Elección, no existe $j : V \to V$ elemental no trivial. No se sabe si se puede eliminar el Axioma de Elección de la prueba. Es decir, aún no se sabe si la teoría "$ZF + \exists j : V \to V$ elemental no trivial" es consistente. Lo sorprendente es que, desde entonces, ¡*no se ha rebajado* la cota superior de Kunen!

(6) De nuevo $\aleph_\omega$: en 1977, Menachem Magidor demostró en [Mg] y [Mg1] que
   (a) Bajo la existencia de ciertos grandes cardinales, $\aleph_\omega$ puede contradecir SCH y además ser el primer contraejemplo a GCH.
   (b) Existe un modelo donde $\aleph_\omega$ es límite fuerte y $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+\alpha+1}$, para cualquier $\alpha \leq \omega$.

   Estos resultados de Magidor abrieron enormes líneas de trabajo en Teoría de Conjuntos. Por un lado, se obtuvo la consistencia de la falla de SCH en un singular, en fuerte contraste con el resultado de Silver de 1974. Por otro lado, el resultado deja claro que la falla de GCH en $\aleph_\omega$ puede ser tan fuerte como uno quiera, por debajo de $\aleph_{\omega+\omega+1}$.

(7) Usando forcing, se han rebajado las hipótesis de grandes cardinales necesarias para que SCH no valga. Con teoría de modelos internos se han conseguido 'cotas inferiores' de consistencia de la negación de SCH (trabajos de Gitik y Magidor - ver [Gi] y [GM]).

(8) Finalmente, llegamos al anunciado *pcf*. Fuera de los resultados logrados usando forcing (las cotas superiores de consistencia) y aquellos logrados usando modelos internos (las cotas inferiores) están los espectaculares y

extraños resultados *absolutos* de Shelah usando su teoría de *pcf* (llamada así por tratar de *p*osibles *c*o*f*inalidades). Estos resultados hoy por hoy rebasan de lejos las aplicaciones iniciales a potencias de $\aleph_\omega$, a la solución 'revisada' al Primer Problema de Hilbert (el continuo) y a problemas relacionados con SCH: hay múltiples aplicaciones de pcf a topología y a álgebra, casi todas ellas obtenidas por Shelah hasta el momento (ver [Sh:e], [Sh:400], etc.).

El resultado más célebre en aritmética cardinal obtenido vía pcf es la siguiente cota *absoluta*.

Teorema 4.1. *(Shelah - hacia 1990):*

$$2^{\aleph_0} < \aleph_\omega \Rightarrow \aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{\omega_4}.$$

Este teorema ha causado una buena dosis de revuelo entre los especialistas. En efecto, la mayoría de resultados de este estilo involucran cardinales límites en cierta forma. Es muy extraño que en ZFC, bajo la hipótesis $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$, se tenga la cota $\aleph_{\omega_4}$ para la potencia de $\aleph_\omega$ en cuestión. ¿Por qué *CUATRO*? Hasta donde se sabe (1998), no se espera poder rebajar esta cota usando pcf; el 4 que aparece no deja de sorprender. Adicionalmente, Shelah prueba que si $\aleph_\omega$ es límite fuerte entonces $2^{\aleph_\omega}$ es regular.

5. Algunas aplicaciones de pcf

Hablar de pcf hoy en día exige mencionar su fuerza en aplicaciones, tanto en Aritmética Cardinal como por fuera de ésta. Nos concentramos ahora en aplicaciones externas: aplicaciones a la matemática. En la actualidad están apareciendo cada vez más aplicaciones de pcf a problemas de álgebra, topología y teoría de la clasificación. Menciono tan solo algunas de éstas. En esta parte del texto no daré las definiciones básicas; mi intención aquí es proveer un muestrario de posibles aplicaciones a manera de ilustración.

5.1 Álgebras Booleanas. En [Sh:589], Shelah resuelve el siguiente problema debido a Monk (ver [M]): hallar cotas inferiores para la profundidad de productos reducidos de álgebras booleanas B_i a partir de la profundidad de las B_i's. La cota inferior hallada para la profundidad del producto reducido (es decir, módulo el filtro D) de las B_i contiene ideas típicas de pcf: es la 'verdadera cofinalidad' del producto de las profundidades de las álgebras booleanas B_i, módulo el filtro D. Es decir, se puede expresar la invariante topológica del álgebra producto por medio de una invariante 'de cofinalidad' del producto de las profundidades (módulo el filtro D).

5.2 Teoría de la Clasificación. En [Sh:589] se encuentra una aplicación de pcf a teoría de la clasificación. Se trata de un resultado acerca de existencia de conjuntos independientes para teorías estables, que responde a una pregunta natural (planteada por Bays en su tesis doctoral). Shelah establece la equivalencia de dos condiciones distintas de existencia de conjuntos independientes (en el sentido de no bifurcación) vía pcf.

Las dos nociones son, para una teoría completa de primer orden T, estable, $\mathfrak{C}$ su modelo monstruo, A, B subconjuntos de $\mathfrak{C}$ de tamaño $< \|\mathfrak{C}\|_X$:

$\mathbf{Pr}_T$ (λ, χ, θ) Si $A \subset \mathfrak{C}$, $|A| = \lambda$, entonces existen $A' \subset A$, $|A'| = \chi$ y B', $|B'| < \theta$, tales que A' es independiente de B' (es decir, para todo $a \in A'$, tp $(a, B' \cup (A' \setminus \{a\}))$ no bifurca sobre B').

$\mathbf{Pr}^*_T$ $(\lambda, \mu, \chi, \theta)$ Si $A \subset \mathfrak{C}$ es independiente sobre B, donde $|A| = \lambda$ y $|B| < \mu$, entonces existen $A' \subset A$, $|A'| = \chi$, y $B' \subset B$ tales que $|B'| < \theta$ y tp(A', B) no bifurca sobre B' (y a fortiori A' es independiente sobre B').

Por otro lado, en [Sh:g] aparece una prueba de la existencia de modelos $L_{\infty,\lambda}$-equivalentes no isomorfos, para λ cardinal singular.

5.3 Topología. [Sh:620] contiene una aplicación a topología general y a teoría de álgebras booleanas: una generalización a conjuntos de Luzin y de Sierpinski que corresponde a la pregunta siguiente:

¿Cuándo tiene un álgebra booleana B calibre libre λ? (es decir, si $X \subseteq B$ y $|X| = \lambda$, entonces para algún $Y \subseteq X$ con $|Y| = \lambda$ se tiene que Y es independiente).

El artículo usa fuertemente pcf para responder a la pregunta en el caso de álgebras de medida de Maharam o productos (pequeños) de álgebras booleanas libres. Por otro lado, se prueba que existe una sucesión $\bar{\eta} = \langle \eta_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ que es una (λ, J)-sucesión para $\bar{I} = \langle I_i : i < \delta \rangle$, una sucesión de ideales.

5.4 Algunos comentarios finales - $\aleph_\omega$ y las aplicaciones. Los ejemplos que acabo de dar pueden ser considerados con razón como muy técnicos. El interés de cada uno de éstos depende naturalmente de las motivaciones propias de cada cual en topología general, teoría de álgebras booleanas o teoría de la clasificación.

Sin embargo, vale la pena enfatizar el siguiente punto: éstos forman tan solo un breve muestrario de las posibles aplicaciones. En este momento están surgiendo múltiples aplicaciones a otros temas como forcing, como teoría de la no estructura y teoría de la clasificicación para clases no elementales provenientes del álgebra. Estas aplicaciones permiten entender centralmente la *interacción profunda* entre

propiedades combinatorias
y
propiedades propias de cada teoría.

Aunque todo ésto se aleja cada vez más de nuestras consideraciones iniciales acerca de $\aleph_\omega$, quiero enfatizar con estos ejemplos cómo un tema que surgió a partir de problemáticas en las cuales $\aleph_\omega$ es 'el primer caso interesante', o el primer 'caso singular' (aritmética cardinal, el problema de Hilbert), luego se conecta de maneras insospechadas con otras ramas de la matemática.

Referencias

[Ca] Andrés Caicedo, *El Problema de los Cardinales Singulares*, Tesis de Grado, Bogotá: Universidad de los Andes, 1996.

[Gi] Moti Gitik, "The negation of SCH from $o(\kappa) = \kappa^{++}$", Annals of Pure and Applied Logic **43** (1989), 209–234.

[GM] Moti Gitik and Menachem Magidor, "The Singular Cardinals Hypothesis revisited", In H. Judah, W. Just, and H. Woodin, editors, *The Proc. of MSRI conference on The Set Theory of the Continuum* Mathematical Sciences Research Institute Publications (1992), Springer Verlag, 243–380.

[Kn2] Akihiro Kanamori, *The Higher Infinite*, New York: Springer, 1994.

[Mg] Menachem Magidor, "On the singular cardinals problem I", Israel J. Math. **28** (1977), 1–31.

[Mg1] Menachem Magidor, On the singular cardinals problem II", Annals Math. **106** (1977), 517–547.

[M] Donald Monk, *Cardinal Invariants of Boolean Algebras volume 142 of Progress in Mathematics*, Basel: Birkhäuser, 1996.

[Sh 400] Saharon Shelah, "Cardinal Arithmetic", In *Cardinal Arithmetic*, volume 29 of Oxford Logic Guides, Chapter IX (1994), Oxford University Press.

[Sh 460] Saharon Shelah, "The Generalized Continuum Hypothesis revisited", Israel Journal of Mathematics, sometido.

[Sh 589] Saharon Shelah, "PCF theory: aplications", sometido.

[Sh 620] Saharon Shelah, "Special Subsets of ${}^{\mathrm{cf}(\mu)}\mu$, Boolean Algebras and Maharam measure Algebras", General Topology and its Applications - Proc. of Prague Topological Symposium 1996, aceptado.

[Sh:e] Saharon Shelah, *Non-structure theory*,, aceptado, Oxford University Press.

[Sh:g] Saharon Shelah, *Cardinal Arithmetic*, volume 29 of Oxford Logic Guides, Oxford University Press, 1994.