



## Estimación de las Velocidades de Intervalo a través de la Función de Tiempos de Difracción de la Sísmica Geométrica

LUIS ALFREDO MONTES VIDES

*Departamento de Geociencias - Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia*

MONTES V., LUIS A. (1999): Estimación de las Velocidades de Intervalo a través de la Función de Tiempos de Difracción de la Sísmica Geométrica.- GEOLOGIA COLOMBIANA, 24, pgs. 177-183, 4 Figs., Santafé de Bogotá.

### RESUMEN

Se presenta un método para estimar las velocidades de intervalo de un sistema sísmico, utilizando la teoría geométrica del rayo a través de la aproximación de segundo orden de los tiempos de tránsito. Ignorando fallas y otras estructuras complejas, el sistema sísmico se considera compuesto por una superposición de capas homogéneas e isotrópicas separadas por superficies suaves arbitrariamente curvadas, en las cuales las velocidades de intervalo y densidades pueden tomar cualquier valor. Estimando los tiempos de tránsito de algunos rayos reflejados, previamente seleccionados, obtenidos en arreglos de cobertura múltiple sobre la superficie superior del sistema sísmico, se estima la función característica de eventos de reflexión y a partir de ésta la función de tiempos de difracción.

Las velocidades de intervalo se calculan a través de la continuación hacia abajo de la función de difracción aplicando un proceso iterativo capa por capa. El proceso se controla usando un principio de enfoque de los rayos.

*Palabras Clave: Tiempos de tránsito, Sísmica geométrica, Continuación hacia abajo, Teoría del rayo.*

### ABSTRACT

Using the geometrical ray theory and employing the second-order approximation of the traveltimes, a method to determine the interval velocities of a seismic system is presented. Ignoring faults and other complexities, the seismic system is modeled as a stack of isotropic and homogeneous layers separated by arbitrarily-curved smooth interfaces; the velocity and density of these layers may have any values. Measuring the traveltimes of some specially selected reflected rays, recorded in multiple coverage on the upper border of the seismic system, the so called Hamilton's point characteristic for reflected events is determined and in consequence the zero-offset diffraction time function is calculated.

The interval velocities are calculated through the downward continuation of the zero-offset diffraction time function applying an iterative process layer by layer. This process is controlled by using a focusing principle.

*Key Words: Travel time, Geometric seismic, Downward continuation, Ray theory.*

### INTRODUCCION

Basado en las ideas de Hamilton sobre rayos de luz, Bortfeld estableció las leyes generales que representan las propiedades globales de los rayos que atraviesan el sistema sísmico viajando desde cualquier punto en la superficie de la tierra hasta cualquier otro punto en la superficie reflectora (BORTFELD 1989). Como resultado de este esquema halló la denominada función característica de los tiempos de tránsito, la cual estima el tiempo que toma un evento de reflexión, relacionando de este modo

la Teoría Sísmica del rayo con la teoría de la Óptica Geométrica (BORN & WOLF 1980).

Con esta aproximación de segundo orden de los tiempos de tránsito de eventos de reflexión, se obtuvo además otra función que suministra los tiempos de tránsito de rayos que parten desde un punto en el subsuelo, donde tiene lugar la difracción, hasta la superficie.

En este trabajo se propone una herramienta para la determinación de las velocidades de intervalo, usando la

función de tiempos de difracción. La técnica estima los tiempos de migración a partir de la función característica de los eventos de reflexión, permitiendo transformar una traza sísmica apilada («zero-offset stacked trace») en un conjunto de trazas con gradientes conocidos en la superficie y con tiempos de tránsito correspondientes a una difracción simulada en un punto que coincide con la posición final del llamado rayo central.

La técnica se implantó en un algoritmo que explota el carácter automático inherente al método probando su rango de aplicabilidad y usando para ello los tiempos de tránsito de rayos generados sintéticamente. Debido a la aproximación de segundo orden en los tiempos de tránsito, el dominio de validez de esta técnica se limita a la vecindad del rayo central.

### FUNDAMENTOS

El sistema sísmico se define como un apilado de capas homogéneas e isotrópicas separadas por interfaces suaves. Se llama superficie anterior a la interface limítrofe superior del modelo donde se sitúan fuentes y geófonos, coincidiendo con la superficie terrestre que se considera plana. La interface más profunda donde tiene lugar la reflexión se llama superficie posterior, y establece un límite inferior del modelo. Se identifica un rayo que al atravesar el sistema sísmico incide normalmente sobre la superficie reflectora (rayo normal), el cual se denomina rayo central (axial). Este rayo central establece el sistema de referencia de los otros rayos en su vecindad (rayos paraxiales).

El sistema de coordenadas cartesiano  $xyz$  tiene origen en el punto  $P_0$ , el plano  $xy$  de este sistema es tangente a la superficie anterior en el punto de origen  $P_0$ . La intersección del rayo central con la superficie posterior define en el reflector el nuevo sistema de coordenadas cartesiano  $x'y'z'$ , con el plano  $x'y'$  tangente a la superficie reflectora en el punto  $P'_0$  (Fig. 1).

Un rayo paraxial en la proximidad del rayo central, parte del punto  $P$  indicado por el vector posición  $\vec{X}$  en la superficie anterior, y viaja hasta el punto  $P'$  indicado por el vector posición  $\vec{X}'$  sobre el reflector.

El rayo paraxial sobre la superficie anterior en  $\vec{X}$  se describe por el vector de lentitud  $\vec{P}$  («slowness vector») y en  $\vec{X}'$  sobre la superficie posterior por el vector de lentitud  $\vec{P}'$ .

Cualquier rayo paraxial queda definido en la superficie anterior por la pareja de vectores  $(\vec{X}, \vec{P})$ , y sobre la superficie posterior por la pareja  $(\vec{X}', \vec{P}')$ .

Para la simplificación de los cálculos, se usan las proyecciones de los vectores posición y lentitud sobre los planos  $xy$  en la superficie anterior y  $x'y'$  en la posterior. Por claridad los vectores 2D se denotarán en minúsculas y los vectores 3D en mayúsculas. En la superficie limitante superior el vector  $\vec{x}$  corresponde a la proyección de  $\vec{X}$  sobre el plano  $xy$ . Para obtener  $\vec{p}$  se proyecta primero  $\vec{P}$  sobre el plano tangente a la superficie anterior en el punto  $P$ , y el vector resultante se proyecta luego sobre el plano  $xy$ . En la superficie posterior se obtienen  $\vec{x}'$  y  $\vec{p}'$  al proyectar del mismo modo  $\vec{X}'$  y  $\vec{P}'$  sobre el  $xy$ .

El rayo transmitido se refleja sobre la interface posterior en la posición final  $\vec{x}'$  con vector lentitud  $\vec{p}'$  y de acuerdo a la aproximación de segundo orden de los tiempos de tránsito (BORTFELD 1989), estos vectores están relacionados con los vectores posición inicial  $\vec{x}$ , lentitud inicial del rayo central  $\vec{p}_0$ , en la superficie anterior a través de la ecuación:

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \underline{A}_0 \vec{x}_0 + \underline{B}_0 (\vec{p} - \vec{p}_0) \\ \vec{p}' &= \underline{C}_0 \vec{x}'_0 + \underline{D}_0 (\vec{p} - \vec{p}_0) \end{aligned} \quad (1)$$

donde

$$\begin{aligned} \underline{A}_0 &= \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial x} \\ \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{bmatrix}, \\ \underline{B}_0 &= \frac{\partial(x', y')}{\partial(p, q)}, \underline{C}_0 = \frac{\partial(p', q')}{\partial(x, y)} \text{ y } \underline{D}_0 = \frac{\partial(p', q')}{\partial(p, q)} \end{aligned}$$

son matrices jacobianas 2x2 evaluadas en el origen del sistema de coordenadas sobre la superficie anterior.

La aproximación es válida únicamente dentro del rango de distancias para corrección de tiempo en la aproximación hiperbólica («Normal Moveout») usado en el apilamiento («stacking») de secciones sísmicas.

Las ecuaciones (1) describen cualquier rayo que viaje desde la superficie anterior hasta la posterior, en la vecindad del rayo central. El tiempo de tránsito para un rayo transmitido desde  $\vec{x}$  en la superficie anterior hasta  $\vec{x}'$  en la superficie posterior viene dado por:

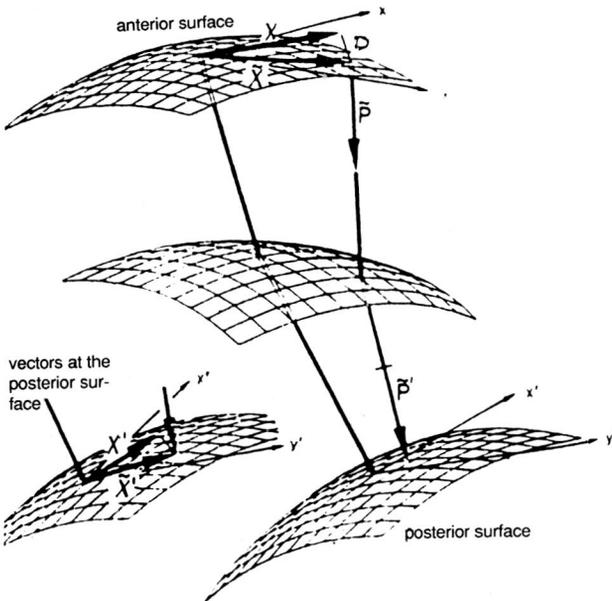
$$\begin{aligned} t(\vec{x}, \vec{x}') &= t_0 - \vec{p}_0 \cdot \vec{x} + \frac{1}{2} \vec{x}' \cdot \underline{D}_0 \underline{B}_0^{-1} \vec{x}' \\ &\quad + \frac{1}{2} \vec{x} \cdot \underline{B}_0^{-1} \underline{A}_0 \vec{x} - \vec{x} \cdot \underline{B}_0^{-1} \vec{x}' \end{aligned} \quad (2)$$

El tiempo de tránsito para un evento de reflexión será la suma del tiempo de viaje del rayo transmitido desde  $\vec{x}$

hasta  $\vec{x}'$  y del tiempo del rayo reflejado desde  $\vec{x}'$  hasta el punto  $\vec{x}''$ , siendo esta suma:

$$t(\vec{x}, \vec{x}'') = T_0 - 2\vec{p}_0 \cdot \vec{x}_0 + \frac{1}{2}(\vec{x}'' + \vec{x}) \cdot \underline{D}_0^{-1} \underline{C}_0 \frac{1}{2}(\vec{x}'' + \vec{x}) + \frac{1}{2}(\vec{x}'' - \vec{x}) \cdot \underline{B}_0^{-1} \underline{A}_0 \frac{1}{2}(\vec{x}'' - \vec{x}) \quad (3)$$

donde  $T_0 = 2t_0$  es el tiempo de tránsito de reflexión del rayo central (BORTFELD 1989). La expresión (3) corresponde a la función característica de punto de Hamilton en Óptica, llamada así porque suministra el tiempo de tránsito desde un punto en la superficie anterior hasta otro cualquiera sobre la interface reflectora. Las matrices producto de las jacobianas  $\underline{B}_0^{-1} \underline{A}_0$  y  $\underline{D}_0^{-1} \underline{C}_0$  son simétricas (una demostración de esta propiedad puede verse en BORTFELD & KEMPERT 1991); la primera representa la matriz de curvatura de la onda NIP («Normal Incident Point») y la segunda la matriz de curvatura de la onda Normal (HUBRAL 1983) Por tal simetría la ecuación (3) tiene sólo nueve incógnitas: una en  $T_0$ , dos en  $\vec{p}_0$ , tres en  $\underline{B}_0^{-1} \underline{A}_0$  y tres en  $\underline{D}_0^{-1} \underline{C}_0$ , las cuales pueden estimarse registrando al menos nueve tiempos de tránsito, especialmente seleccionados (MON-



**Fig. 1. Rayos central y paraxial atravesando el sistema sísmico desde la superficie anterior hasta la superficie posterior o reflectora (BORTFELD 1989).**

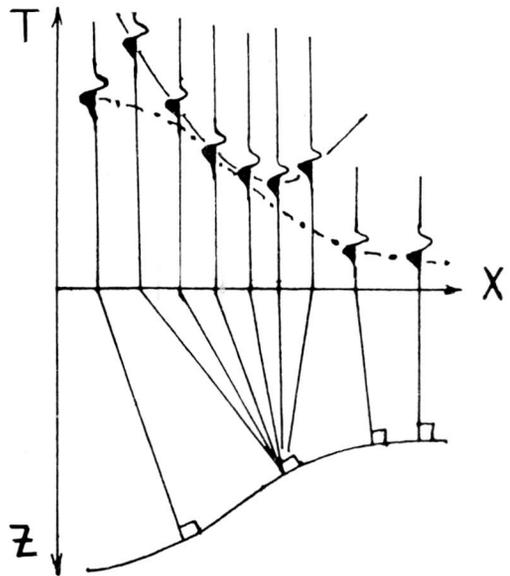
TES 1998).

El tiempo de tránsito desde un punto difractor en  $\vec{x}' = \vec{0}$  hasta un detector situado en  $\vec{x}$  sobre la superficie anterior viene dada el doble del tiempo calculado por la

ecuación (2):

$$t_D(\vec{x}, \vec{0}) = T_0 - 2\vec{p}_0 \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \underline{B}_0^{-1} \underline{A}_0 \vec{x} \quad (4)$$

y se denomina función tiempo para una difracción «zero-offset». Esta ecuación es importante para la sumatoria en el proceso de migración. Según los tiempos dados por la curva de tiempos de migración (4) (hipérbola en Fig. 2), se seleccionan las amplitudes de la sección que serán sumadas. El resultado de la suma se coloca finalmente en el ápice de la curva de migración (mínimo de la hipérbola), cuya posición coincide con el rayo imagen que emerge perpendicular a la superficie limítrofe superior. A través de este procedimiento se lleva a cabo la transformación del



**Fig. 2. La hipérbola representa la función tiempo de difracción. En la posición donde emerge el rayo normal al reflector (central) la hipérbola es tangente a la curva de tiempos «zero-offset» (con punto y trazo). El rayo imagen (normal a superficie) emerge en la posición del mínimo de la hipérbola (ápice).**

tiempo de tránsito del rayo normal (central) a tiempo (LOEWENTHAL *et al.* 1976), cada punto del horizonte reflector se comporta como un punto difractor en concordancia con el modelo de transmisión de ondas de Huygens. La envolvente de los eventos difractores constituye el frente de onda definido por la función tiempo «zero-offset». En la Fig. 2 se representa por la curva de punto y trazo.

La superficie definida por la función tiempo de difracción (4) es tangente a la superficie definida por la función tiempo «zero-offset» en la posición del rayo central. En la Fig. 2 la hipérbola es tangente a la curva «zero-offset».

Si se migrara hacia  $\bar{x}$  una posición arbitraria, según (4) el tiempo de migración será:

$$t(\bar{x}) = T_0 - \bar{p}_0 \cdot \bar{x} \quad (5)$$

$$\text{con } \bar{x} = (\underline{B}_0^{-1} A_0)^{-1} (\bar{p}_0 - \bar{p}_x)$$

donde  $\bar{p}_x$  debe satisfacer

$$\nabla t_D(\bar{x}, \bar{0}) = -2\bar{p}_x \quad (6)$$

La migración en el ápice de la superficie de tiempo de difracción corresponde al rayo imagen definido por HUBRAL (1980), el cual satisface la condición  $\bar{p}_x = \bar{0}$  (el rayo emerge perpendicular a la superficie límite superior). En el ápice el tiempo de migración queda definido según la ecuación (5) por

$$t(\bar{x}_A) = T_0 - \bar{p}_0 \cdot \bar{x}_A \quad (7)$$

$$\text{donde } \bar{x}_A = (\underline{B}_0^{-1} A_0)^{-1} \bar{p}_0$$

Por corresponder a una difracción todos estos rayos tienen una posición final común, la posición final del rayo central. La Fig. 3 muestra la curva de tiempos de difracción (4), asociados a rayos originados en un punto difractor P situado bajo un reflector buzante.

Según la ecuación (1) esta posición final es:

$$\bar{0} = \underline{A}_0 \bar{x} + \underline{B}_0 (\bar{p}_x - \bar{p}_0) \quad (8)$$

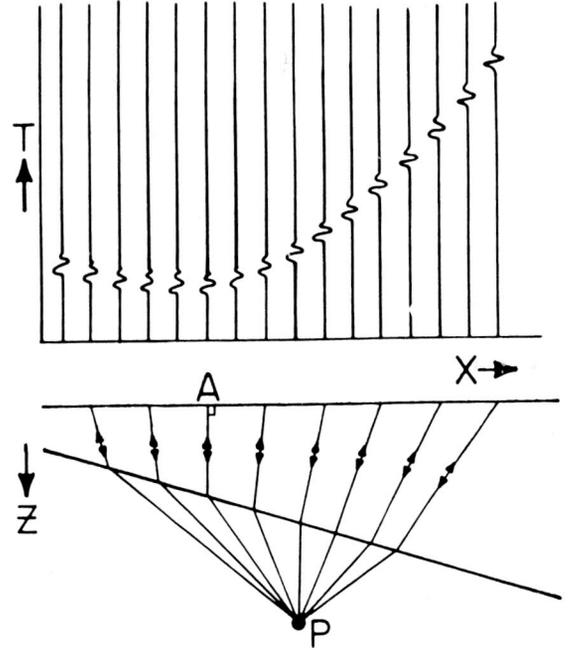
Con los tiempos de migración dados por

$$\tau_x = -\frac{1}{2} t_x(\bar{p}_x) \quad (9)$$

La continuación hacia abajo se hace hasta que se agote el tiempo  $\tau_x = 0$ ; en su momento todos los rayos alcanzarán la posición final del rayo central, lo cual tendrá lugar si y solo si la velocidad utilizada es igual a la velocidad verdadera (Fig. 3).

## METODOLOGIA

El sistema sísmico es un modelo bidimensional con una longitud de 300 m y una profundidad de 500 m, con dos capas homogéneas e isotrópicas separadas por interfaces representadas por funciones diferenciables. La primera capa posee una velocidad de intervalo de 1700 m/s y la segunda una velocidad de 2100 m/s. La superficie límite superior del modelo sísmico donde se sitúan las fuentes y los detectores se consideró plana y horizontal. La interface más somera se representa por la ecuación:



**Fig. 3.** Arriba, curva de tiempos de difracción asociados a rayos se continúan hacia abajo hasta agotar el tiempo de difracción. Al usar la velocidad verdadera los rayos se focalizarán en el punto difractor P, origen de la curva de difracción.

$$Z_1 = -200 - 0.1X$$

y la superficie límite inferior del modelo viene dada por la expresión:

$$Z_2 = -400 - 0.00001(500 - X)^2,$$

donde  $Z$  es la profundidad en metros y  $X$  la posición sobre la superficie superior en metros.

Sobre este sistema sísmico se simularon fuentes y detectores colocados alrededor del punto  $x = 100$ . Se obtuvieron los tiempos de tránsito correspondientes a las reflexiones sobre el reflector somero en la cercanía del rayo con origen en  $X = 100$  m y perpendicular a  $Z_1$ .

Luego se obtuvieron los tiempos de tránsito asociados a las reflexiones en el reflector más profundo en la cercanía del rayo perpendicular a  $Z_2$  con origen en  $X = 100$  m. Para la generación de datos sintéticos se utilizó el programa de trazamiento de rayos SEIS88 desarrollado por CERVENY *et al.* (1980) en la Universidad de Charles en Praga, República Checa.

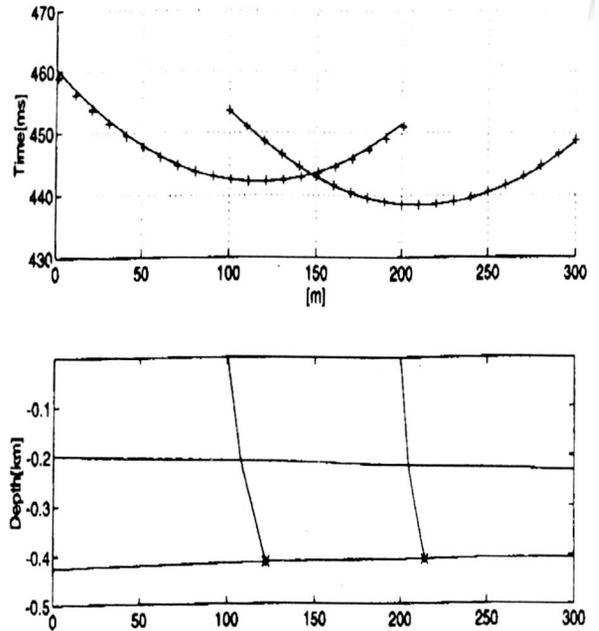
Se simularon 8 registros fuente común («common-shot-gather») con 8 detectores. Con los 64 tiempos de tránsito generados se construyó un sistema de 64 ecuaciones simultáneas que al resolverse permitió estimar los 4 parámetros desconocidos (en 2D las incógnitas de la función se reducen de 9 a 4) de la función característica de tiempos de tránsito dada por la ecuación (3). Un estudio sobre la determinación de la función se presenta en MONTES (1999). Este procedimiento se repitió para cada horizonte reflector, obteniéndose una función de tiempos de tránsito asociada a  $Z_1$  y otra asociada a  $Z_2$ .

Al estimar los 4 parámetros mencionados se determina la función característica de los tiempos de tránsito dada por (3), y por consiguiente se conoce la función de tiempos de difracción dada por la ecuación (4).

A continuación se calcula el gradiente de la función de tiempos de difracción asociada a  $Z_1$  en distintas posiciones, cada una asociada a un rayo. Usando la ecuación (6) se estima el valor de la proyección del vector lentitud sobre la superficie. Para distintas posiciones en vecindad del punto  $x = 100$  m, se conoce una componente ( $p_x$ ) de cada rayo y se desconoce la otra ( $p_y = \sqrt{V^{-2} - p_x^2}$  donde  $V$  es la velocidad de la capa superior). Utilizando una velocidad de ensayo, se calcula el ángulo de buzamiento para cada rayo, proyectando estos hacia abajo con longitudes que dependerán de los tiempos dados por la función tiempos de difracción (4) en cada posición.

Al seleccionar la velocidad verdadera de la primera capa todos los rayos convergen en el punto correspondiente al punto difractor sobre la interface reflectora que coincide con el punto donde el rayo con origen en  $X = 100$  m incide normalmente sobre  $Z_1$ .

Como resultado se tiene un punto en profundidad situado sobre el reflector  $Z_1$ . Considerando otros rayos centrales en  $x = \{50, 75, 125, 150\}$  se obtienen otras cuatro funciones de tiempos de tránsito (3) y otras cuatro funciones de tiempos de difracción (4) lo cual lleva a 4 nuevos puntos sobre el horizonte  $Z_1$ , los cuales son ajustados con una función spline cúbica determinando así la geometría del reflector en un segmento alrededor del rayo normal. Para el segundo reflector ya se conoce la velocidad de la capa superior, por tanto se conocen las trayectorias de los rayos en la primera y donde estos intersectan la interface  $Z_1$ . Para la capa inferior se tiene en cuenta el efecto de refracción que tiene lugar en el segmento determinado de la primera interface  $Z_1$ . Los rayos que atraviesan el segmento en consideración parten de la superficie limítrofe superior con ángulos de buzamiento dados por (6) y por la velocidad de intervalo escogida para la segun-



**Fig. 4.** Arriba, las curvas de tiempos de difracción (en milisegs) obtenidas al estimar las funciones tiempos de tránsito de eventos reflejados en el horizonte  $Z_2$  y asociadas a los rayos centrales en  $X = 100$  m  $x = 200$  m. Debajo las capas del modelo (en metros) mostrando los dos puntos sobre  $Z_2$  obtenidos por el proceso de continuación hacia abajo. También se muestran los rayos centrales.

da capa. A partir de la geometría del segmento, del ángulo del rayo incidente sobre el segmento y usando la ley de Snell se puede conocer el ángulo del rayo emergente en la otra capa. A su vez, estos rayos emergentes en la segunda capa se focalizarán en el punto generador de la función de difracción si y solo si la velocidad de intervalo de la segunda capa es la verdadera del modelo. Si la velocidad escogida es la verdadera estos rayos se focalizarán en el punto donde el rayo central con origen en  $X = 100$  m incide normalmente sobre  $Z_2$ . La continuación hacia abajo de la función tiempos de difracción se realiza ensayando diferentes velocidades hasta obtener la convergencia de los rayos. Obtenida la focalización y el punto difractor, la continuación hacia abajo se repiten con las posiciones  $x = \{50, 75, 100, 125, 150\}$  para determinar la geometría del reflector a través de la interpolación cúbica, tal como se explicó antes.

Se disectaron dos algoritmos, el primero de los cuales estima la función característica de los tiempos de tránsito (3), el segundo lleva a cabo la continuación hacia abajo de la función tiempos de difracción. Estos algoritmos se im-

plantaron como programa hechos en Matlab v4.0 bajo ambiente Windows. Este software se ejecutó usando como datos de entrada los tiempos de tránsito generados sintéticamente; se ensayaron distintos valores de velocidades de las dos capas hasta observar que existía una buena focalización de los rayos; como resultado se obtuvieron las velocidades de intervalo con errores del 3% y dos puntos difractores situados sobre el horizonte reflector, los cuales se muestran en la Fig. 4.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó una técnica para estimar las velocidades de intervalo en profundidad, que adicionalmente calcula la geometría de las interfaces en cercanías de un rayo normal. Los resultados obtenidos son válidos dentro del rango de distancias para el cual es válida la corrección de tiempo hiperbólica usada en el apilamiento de las secciones sísmicas.

La determinación de las velocidades de intervalo a través de la continuación hacia abajo de la función tiempos de difracción se basa en la selección del reflector en datos sísmicos apilados («time stacked»). A partir de la estimación de la función característica de los tiempos de tránsito en la cercanía del rayo central se determina la función tiempos de difracción.

Lo anterior significa que se están simulando puntos difractores en ciertas posiciones sobre la superficie de reflexión. Al aplicar el proceso de continuación hacia abajo, la energía de difracción se focalizará sobre la superficie reflectora si y solo si la energía escogida coincide con las velocidades de intervalo verdaderas de las capas. De este modo, seleccionando distintos puntos sobre la superficie superior y realizando la continuación hacia abajo de las respectivas funciones de difracción, se obtendrán puntos

sobre la interface reflectora con los cuales será posible estimar la forma geométrica de la superficie reflectora y a través de un proceso iterativo conocer el modelo sísmico.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo es un resultado parcial obtenido durante los estudios del autor, conducentes a un Ph.D. en la Universidad Federal de Pará en Brasil, con el auspicio de CAPES-Brasil y de la Universidad Nacional de Colombia, bajo la dirección de los Doctores Walter Sollner y Peter Hubral, a quienes se agradecen sus valiosas ideas y su apoyo durante el desarrollo de la tesis, así como en la sustentación de la misma.

## REFERENCIAS

- BORTFELD, R. (1989): Geometrical ray theory: Rays and traveltimes in seismic systems.- *Geophysics*, v. 54, p. 342-349.
- BORTFELD, R. & KEMPERT, M. (1991): Geometrical ray theory: Line foci and point foci in the interior surface of seismic systems.- *Geophysics*, v. 56, p. 806-811.
- CERVENY, V., KLIMES, L. & PSENCIK, V. (1988): Complete seismic-ray tracing in 3-D structures: D. Doornbos Ed. *Seismological algorithms*. - Academic Press.
- HUBRAL, P. & KREY, Th. (1980): Interval velocities from seismic reflection time measurements.- *SEG, Tulsa, Okla.*
- LOEWENTHAL, D.LU, L. ROBERTSON, R., & SHERWOOD, J. W.C. (1976): The wave equation applied to migration.- *Geophysical Prospecting*, v. 24, p. 380-399.
- MONTES, L. A. (1998): Determinação das velocidades intervalares usando a teoria paraxial do raio: Aproximação de segunda ordem dos tempos de trânsito.- Ph.D. thesis. UFPá, Brazil.
- MONTES, L.A. (1999): Un análisis de sensibilidad en la estimación de la función característica de punto de Hamilton de la sísmica geométrica.- *Geofísica Colombiana (sometido a revisión)*.

*Manuscrito recibido: Marzo de 1999.*