Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen II, 1.968. Páginas 117-123.

EL TEOREMA DE NOVIKOV

por

G. Joubert y G. Moussu

Enunciemos inmediatamente este teorema.

<u>TEOREMA</u>: Sea M una variedad diferenciable compacta de dimensión 3 cuyo primer grupo de homotopía $\pi_1(M)$ es finito.

Entonces para toda foliatura $\mathcal{F}$ de M de codimensión 1, existe un folio compacto.

Demos en primer lugar, la definición siguiente:

<u>DEFINICION</u>: Se denomina curva transversal cerrada a toda aplicación de clase C_n

$$f : S_i \longrightarrow \mathcal{V}$$

tal que, para cada $n \in S_i$, la tangente en $f(n)$ a f no esté contenida en el plano tangente al folio que pasa por $f(x)$.

Entonces la demostración del teorema de Novikov se funda sobre la proposición siguiente cuya demostración no es difícil.

<u>PROPOSICION</u>: Sea $\mathcal{F}$ una foliatura orientada de codimensión 1 sobre una variedad compacta de dimensión n.
Si un folio no es compacto, existe siempre una transversal

cerrada que la corta.

Entonces toda la demostración del teorema de Novikov consistirá en ver que existe sobre M un folio F_o que no corta ninguna transversal cerrada.

Para hacer eso se demuestran finalmente dos teoremas:

TEOREMA 1.- Si el primer grupo de homotopía de M es finito y si es compacto, existe un folio F_o que contiene un ciclo evanescente.

TEOREMA 2.- Si M es compacto de dimensión 3, todo folio que contiene un ciclo evanescente es compacto.

Para demostrar el teorema 1 se utiliza una técnica desarrollada por Haefliger con otro objeto.

Demos una idea de esta técnica. Naturalmente, se considera que hay sobre $\mathcal{V}$ folios no compactos.

Resulta de esta hipótesis que existe por lo menos una transversal cerrada en $\mathcal{V}$

$$\tau : S_1 \longrightarrow \mathcal{V} .$$

Como esta curva representa necesariamente un elemento de orden finito p de $\pi_1(M)$ (que es finito), recorriéndola p veces, se obtiene otra que se nota todavía τ y que es homotópica a una aplicación constante.

Se puede entonces definir una aplicación

$$\varphi : D^2 \longrightarrow \mathcal{V}$$

tal que

$$\varphi \big|_{S_1} = \tau$$

Después, utilizando un teorema de Morse podemos considerar que φ es en "posición general", es decir, que $\varphi(D^2)$ no contiene ningún abierto de ningún folio.

En fín, es posible decir que las imágenes recíprocas por φ son reuniones de las trayectorias de un campo de vectores sobre D^2.

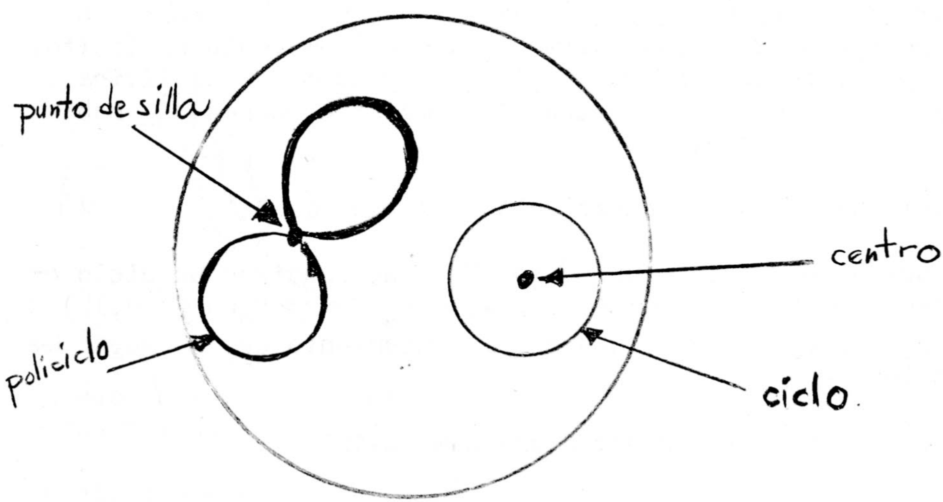
Los puntos singulares son del tipo centro o punto de silla únicamente.

Además, hay a lo sumo, cuatro trayectorias que llegan a un punto de silla y no hay trayectoria que va de un punto de silla a otro.

En fín, S_1 es un círculo transversal a las trayectorias.

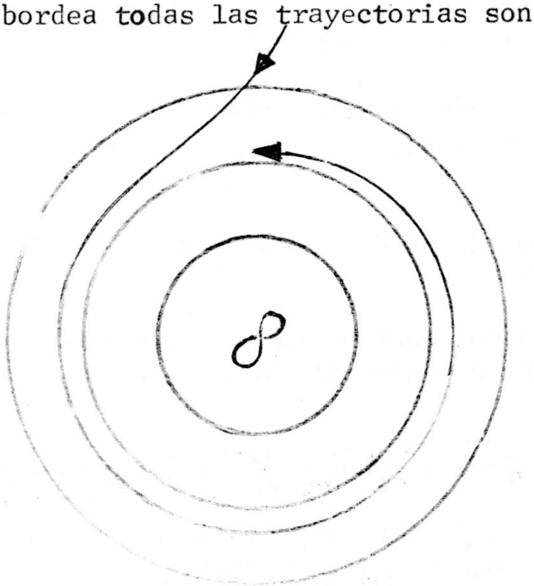
Llamemos entonces ciclo una trayectoria cerrada o la unión de un punto de silla con una trayectoria que parte de este punto y que vuelve al mismo.

Llamemos foliado la reunión de dos ciclos del segundo tipo que corresponden al mismo punto de silla.



El Teorema de Poincaré muestra entonces que existe un ciclo C en D^2 tal que $\varphi(C)$ sea un ciclo no homotópico a 0 sobre el folio que lo contiene y tal que en la región Ω de

D^2 que él bordea todas las trayectorias son ciclos o policiclos.



Un tal ciclo da nacimiento a un elemento de holonomía no nulo que es el jet de un homeomorfismo local de $\mathbb{R}$ que es la identidad sobre $[0, \infty[$ o $]-\infty, 0]$.

A partir de eso Haefliger demostró, que no había sobre una variedad analítica cuyo primer grupo de homotopía es finito, una foliatura de codimensión 1 transversalmente analítica, Novikov continuó la demostración y muestra que en Ω había un ciclo evanescente.

Estudiemos ahora la demostración del teorema 2:

Supongamos que existe un folio F_o que contiene un ciclo evanescente $C : I \longrightarrow F_o$. Sean $C_n : I \longrightarrow F_u (u \in]0,1[)$ los ciclos que se obtienen por levantamiento de C según las normales.

Se puede construir entonces una inmersión

$$H : D^2 \times]0,1[\longrightarrow U$$

tal que:

(1) $H|S_1 \times \{u\} = C_u$

(2) Si $H|D^2 \times \{u\} = f_u$, $f_u(D^2)$ está contenido en F_u.

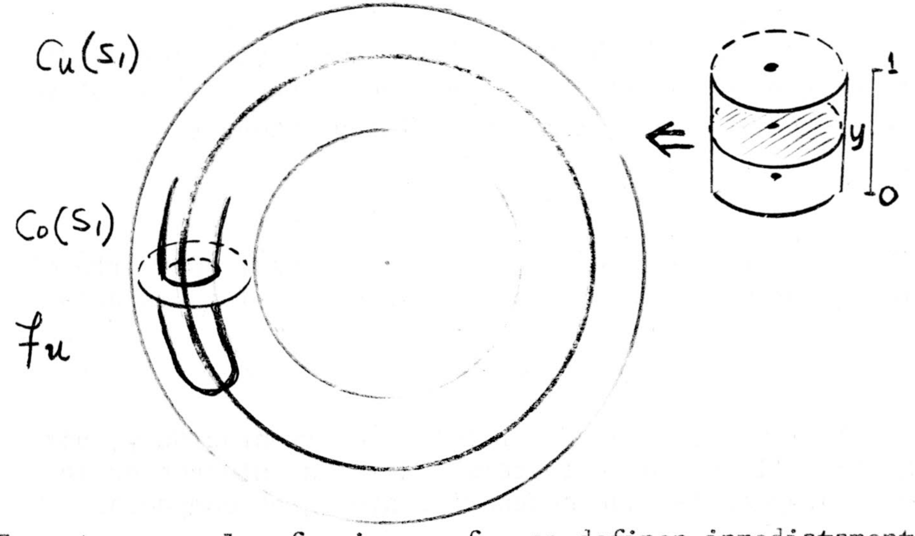
(3) Si $H|\{u\} \times]0,1[= \tau_u$ $(u \in D^2)$, $\mathcal{F}_n$

es una normal a la foliatura.

(4) Existe por lo menos un punto $u_0 \in D^2$ tal que no

exista $\lim\limits_{u \to 0} \tau(u)$

Para entender lo que pasa basta considerar la foliatura de Reeb:



En este caso, las funciones f_u se definen inmediatamente y son homeomorfismos.

Es claro que el punto $x_0 \in D^2$ tal que la normal asociada τ_{x_0} sea el meridiano central del toro lleno, verifica la condición (4). De hecho $\tau_x(u)$ recorre indefinidamente este meridiano cuando u tiende hacia 1.

Para construir H en el caso general hay que utilizar el hecho que los ciclos C_u son homotópicos a una aplicación constante para definir las aplicaciones f_u y luego levantar estos discos según las normales para definir H.

Después tenemos el lema siguiente:

Para cada $\alpha > 0$, existe u', u'', tales que

$$0 < u' < u'' < \alpha$$

y una inmersión inyectiva

$$h : D^2 \longrightarrow D^2$$

que conserva la orientación y tal que

$$f_{u''} = f_{u'} \circ h$$

En la foliatura de Reeb es fácil ver que basta elegir u', u'' tales que los puntos $x \in D^2$ que verifican $|u| = u'$ y $|x| = u''$ pertenezcan al mismo folio; y entonces

$$h = f^{-1}_{u'} \circ f_{u''}$$

En fín, se puede mostrar que toda transversal que corta el folio F_0 entra para un α bien elegido en el subespacio

$$H\,(D^2 \times [u', u''])$$

del cual no puede salir por razones de orientación y, por lo tanto, ella no puede cerrarse. Resulta entonces de la primera proposición que necesariamente F_0 es compacto.

REFERENCIAS

Ehresmann — Structures Feuilletées Topologiques (Curso dado en Canadá en 1.960).

Haefliger — Structures Feuilletées Cohomologie a Valeurs Dans un Faisceau de Groupoides. (Tesis: Comentarii Helveticci 1.958).

Joubert — Contribution a L!étude des Catégories ordonnées, application Aus structures feuilletées. (Tesis: 1.966).

Moussu — Tesis de 3er Ciclo. Dijon 1.968.

Novikov — Topologie des Feuilletées. (Trud Moscu 1.965).

Reeb — Structures Feuilletées (Tesis: 1.952).