

QUELQUES COMMENTAIRES SUR LE PLONGEMENT
DES DIFFÉOMORPHISMES LOCAUX DU PLAN *

par

Paulo R. RODRIGUES

RESUMEN. En este trabajo se demuestra como la desingularización de los gérmenes en $0 \in \mathbb{R}^2$ de campos vectoriales permiten construir, bajo ciertas hipótesis, desingularizaciones de los gérmenes de difeomorfismos en el mismo punto. Se deduce entonces que bajo ciertas condiciones un germen de difeomorfismos tiene separatrices (las mismas del campo asociado) y puede prolongarse al flujo de un germen en $0 \in \mathbb{R}^2$ de campo vectorial.

§1. Introduction. Le propos du présent travail est de donner quelques résultats sur les germes de difféomorphismes du plan, de classe C^∞ , ayant l'origine comme point fixe algébriquement isolé. Plus précisément, nous voulons donner des conditions pour qu'un tel germe soit plongeable (topolo-

* Travail partiellement réalisé avec l'aide financière du CNPq-Brésil.

giquement ou de façon C^∞) dans un germe de flot de champ de vecteurs du plan.

Dans les résultats connus sur les propriétés topologiques et différentiables des champs, on trouve des propriétés sur les flots qui sont reliées aux théorèmes sur les homéomorphismes et difféomorphismes. Ces relations ne sont pas, en général, "symétriques", au sens que l'étude d'un homéomorphisme ou difféomorphisme, dans le cas où il est un flot, contient des renseignements par rapport au flot lui même; par contre, s'il est un homéomorphisme ou difféomorphisme seulement, les informations seront seulement possibles d'obtenir dans le cas où il est plongeable dans un flot, c'est-à-dire, quand il est le temps 1 d'un flot. Dans ce cas, on peut dire qu'il est "attaché" à la trajectoire du champ, et par là à une équation différentielle.

C'est dans ce contexte que nous plaçons notre travail. Nous allons donner des résultats, pour la situation singulière, dans le cas où les difféomorphismes considérés sont locaux, c'est-à-dire, définis dans un voisinage de l'origine (d'où, on va considérer des germes de difféomorphismes).

Notre étude sera faite seulement pour les germes de difféomorphismes tels que les valeurs propres de sa partie linéaire soient dans le cercle unitaire. D'après un théorème de Lewis Jr. [L], tout germe de difféomorphisme dont les valeurs propres soient égales à 1 est formellement plongeable de façon unique dans un flot. Si les valeurs propres sont $e^{\pm i\alpha}$, α rationnel, on peut montrer qu'il existe un entier n tel que le n -itéré du germe se plonge formellement dans un flot (Takens [T₁]). En utilisant l'étude effectuée par Dumortier [D₂] pour les champs de vecteurs du plan, on arrive, sous la condition de l'existence d'au moins une sépara-

trice passant par l'origine, à décomposer un voisinage de l'origine en secteurs: ces secteurs étant du type de selle, attracteur, expanseur et elliptique (boucle). Pour obtenir cela on doit, d'abord, employer la méthode d'éclatement a fin de désingulariser le champ. On arrive à montrer que le même fait est valable pour les germes de difféomorphismes qui sont formellement plongeables dans un germe de flot d'un germe de champ de vecteurs. Le fait qu'il soit plongeable formellement signifie qu'il diffère du flot par un terme plat à l'origine (d'où, à fortiori, les germes éclatés, eux aussi, différent par un terme plat le long du bord du domaine d'éclatement. Le Théorème Fondamental (cf. p.12) nous donne une condition pour "éliminer" localement le terme plat éclaté, au moyen d'une conjugaison locale de classe C^∞ , plate à l'identité sur le bord, (c'est ce qu'on appelle la stabilité plate). Il en résulte, alors, que les germes du difféomorphisme et du champ ont, à un difféomorphisme près, les mêmes séparatrices. Il en résulte aussi qu'il existe un voisinage autour de chaque séparatrice (ces voisinages étant disjoints deux à deux) dans lequel on peut conjuguer les deux difféomorphismes. Le lecteur pourra s'apercevoir, maintenant, que le problème du plongement se ramène à la question du prolongement d'une telle conjugaison au voisinage de l'origine tout entier et ce problème est compliqué: nous énoncerons un résultat topologique à la fin du travail.

Les propriétés présentées dans la suite seront abordées, en forme beaucoup plus détaillée, dans un travail avec F. Dumortier et R. Roussarie [DRR]. Notre propos est ici d'être utile à quelqu'un désirant aborder l'article principal.

§2. Notations, définitions et quelques résultats connus.

On désigne par $\text{Diff}(2)$ l'espace des germes de difféomorphismes en $0 \in \mathbb{R}^2$, de classe C^∞ , laissant fixe l'origine, par $M(2)$ l'idéal maximal de l'anneau $\xi(2)$ des germes de fonctions C^∞ en $0 \in \mathbb{R}^2$ et par $V(2)$ l'espace des germes de champs de vecteurs C^∞ qui s'annulent en 0. Le symbole $\tilde{}$, resp., \tilde{k} , placé au-dessus d'un élément de ces espaces désigne le jet d'ordre infini, resp., d'ordre k , de cet élément.

DEFINITION. On dit que $f \in \text{Diff}(2)$ se *plonge* dans un germe de flot C^∞ , s'il existe un germe X de champ de vecteurs en $0 \in \mathbb{R}^2$ tel que si X_t est le germe de flot de X , alors $f = X_1$. On dit que f se *plonge formellement* en X_t si $\tilde{f} = \tilde{X}_1$.

Un premier résultat que nous pouvons énoncer et qui n'est pas difficile à vérifier est celui qui dit que les germes de difféomorphisme C^∞ ayant seulement l'origine comme point fixe algébriquement isolé, qui préservent l'orientation et qui sont de détermination finie, sont toujours plongeables dans un germe de flot de classe C^∞ .

En 1968 Palis Jr. [P₁] a étudié le problème du plongement du point de vue global. Il a démontré que la plupart des difféomorphismes de classe C^1 sur une variété compacte de dimension 2 ne sont pas plongeables, même dans un flot topologique. Plus récemment (Cf. [P₂]) il a montré un résultat analogue pour les variétés compactes de dimension plus grande que 2, sans bord. Le lecteur pourra trouver d'autres exemples de résultats globaux et locaux sur la question du plongement dans ce dernier article cité.

Soit $g \in \text{Diff}(2)$ hyperbolique (resp. semihyperbolique). Alors il existe un champ $Y \in V(2)$ tel que $g = Y_1$. Ce résultat est dû à Lewis Jr. [L]. D'après un résultat de Sternberg (Cf. [S₃]), (resp. Takens [T₂] et [T₄]), on a que g se plonge de façon C^∞ dans un flot.

Dans ce qui suit, on va supposer toujours que les valeurs propres des germes de difféomorphismes considérés se trouvent sur le cercle unitaire.

Afin de continuer notre étude, nous avons besoin d'utiliser le résultat suivant dû à Takens [T₂]: Si $g \in \text{Diff}(2)$ et S est la partie semi-simple de $\tilde{g}^1(0)$ ayant comme valeurs propres $e^{\pm i\alpha}$ ou ± 1 , alors il existe un unique \tilde{X} invariant pour S tel que, à un changement formel de coordonnées près, on a

$$\tilde{g} = S \circ \tilde{X}_1$$

où \tilde{X}_1 est le flot formel de \tilde{X} . On dira que $S \circ \tilde{X}_1$ est une forme normale de Takens de g .

DÉFINITION. Soit $g \in \text{Diff}(2)$. On dira que $0 \in \mathbb{R}^2$ est un point fixe algébriquement isolé de g si \tilde{g} admet une forme normale de Takens $S \circ \tilde{X}_1$ telle que X est algébriquement isolé à l'origine, i.e., il existe un entier $k \geq 1$, tel que $\tilde{M}(2)^k$ est contenu dans l'idéal engendré par $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$, où X_1, X_2 sont les composantes de \tilde{X} .

REMARQUE. Si $g = \text{Id} + (g_1, g_2)$ alors la définition peut être énoncée de la façon suivante: l'idéal engendré par g_1, g_2 contient une puissance de $\tilde{M}(2)$.

Supposons que $\alpha =$ irrationnel dans $e^{\pm i\alpha}$. Si g est algé-

briquement isolé en $0 \in \mathbb{R}^2$ alors on peut montrer que g ou g^{-1} est une contraction topologique. Takens [T₁] a démontré que g se plonge dans un flot. Il nous reste, donc, à examiner le cas où α est rationnel (en particulier, le cas où la partie linéaire est l'identité).

§3. L'éclatement des champs de vecteurs et des difféomorphismes. On va passer en revue quelques résultats sur les champs de vecteurs du plan ayant l'origine comme zéro algébriquement isolé. Cela nous permettra d'énoncer, plus loin, des résultats sur les germes de difféomorphismes du plan.

DEFINITION. Par éclatement d'un germe $X \in V(2)$ on entend le germe \hat{X} de champ de vecteurs défini le long de ∂A par la condition $\phi_*(\hat{X}) = X$ où $\phi: A = S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est l'application de passage en coordonnées polaires: $\phi(r, \alpha) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$, pour $\alpha \in S^1$, $r \in \mathbb{R}$.

Le germe ainsi obtenu peut être simplifié par division par une puissance convenable de la distance à l'origine; si X a un jet d'ordre k nul on peut considérer le champ $C^\infty: \bar{X} = r^{-k} \hat{X}$. Le processus d'éclatement peut éventuellement se réitérer à en un point de ∂A (Cf. [D₂]). Après n éclatements successifs ϕ_1, \dots, ϕ_n on obtient un germe de champ, encore noté par \hat{X} , le long de $\partial A_n = c$, défini sur un domaine $A_n = A$ dont le bord c est une courbe homéomorphe à S^1 , formée d'un nombre fini d'arcs lisses à raccord anguleux et un germe ξ de fonction C^∞ sur A dont le jet infini est non nul en tout point de c et tel que $\hat{X} = \xi \bar{X}$, \bar{X} étant C^∞ et $(\phi_n \circ \dots \circ \phi_1)_* \hat{X} = X$. De plus, il existe un système de coordonnées locales $\{(x, y)\}$ pour chaque singularité en c tel que, si la singularité est lisse.

$\xi(x,y) = y^k \psi(x,y)$ et $\psi(0,0) \neq 0$, (x,y) est C^∞ , (1,a),
 et si la singularité est place dans un coin (un angle), intersection transversale de deux arcs,

$$\xi(x,y) = x^r y^s \psi(x,y) \text{ et } \psi(0,0) \neq 0, (x,y) \text{ est } C^\infty, (1,b).$$

Si les singularités ne sont pas isolées, il existe des entiers r_1, r_2 et $k \geq 0$ tels que

$$\xi(x,y) = (x-x_1)^{r_1} (x_2-x)^{r_2} y^{k+1} \psi(x,y), \text{ où } \psi \text{ est comme}$$

ci-dessus. Dumortier a démontré le résultat suivant:

THEOREME. Soit $X \in V(2)$ algébriquement isolé à l'origine. Alors, il existe une suite d'éclatements ϕ_1, \dots, ϕ_n aboutissant à un germe \bar{X} dont chaque singularité est:

(i) ou bien une singularité isolée en c de type hyperbolique ou semi-hyperbolique avec un jet non nul en restriction aux variétés centrales,

(ii) ou bien un segment lisse de c (éventuellement c tout entier si $n = 1$) transversalement hyperbolique.

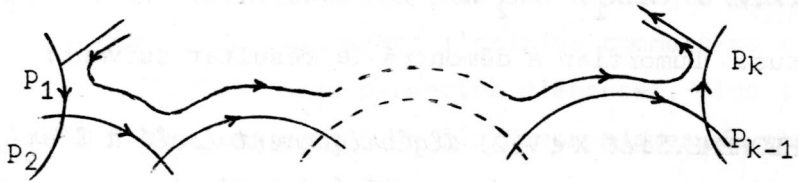
De plus, le nombre et le type des singularités de X ne dépendent que d'un jet d'ordre fini de X . Un tel champ X est dit "une bonne décomposition" de X .

Donnons, maintenant, un bref résumé sur la décomposition en secteurs d'un champ $X \in V(2)$ admettant en 0 une singularité algébriquement isolée. Nous renvoyons le lecteur aux travaux de Dumortier [D₂] et Roussarie [R] pour plus de détails.

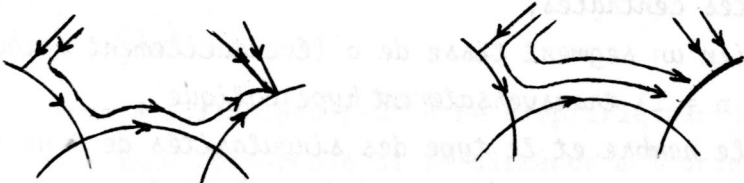
Soit $X \in V(2)$ algébriquement isolé, ayant au moins une séparatrice en $0 \in \mathbb{R}^2$ (voir la définition de [D₂]). Alors en éclatant un nombre fini de fois on aboutit à un champ bien décomposé X . Ce champ peut être décrit de la façon sui-

ante: soit A la région d'éclatement et $\phi: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application d'éclatement. Alors on décompose le bord ∂A en une réunion d'intervalles Γ disjoints de l'un des types suivants:

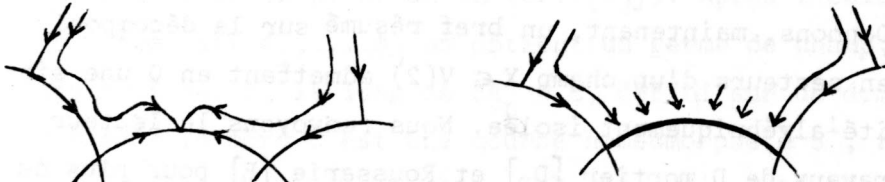
(a) Γ est réunion d'arcs lisses dont les extrémités P_1, \dots, P_k sont toutes des points de selle de X ; les extrémités P_1 et P_k de Γ étant des points de selle ayant une séparatrice extérieure.



(b) Γ contient dans une extrémité un point (resp. un arc) singulier du type attractant, et les autres sont tous du type selle

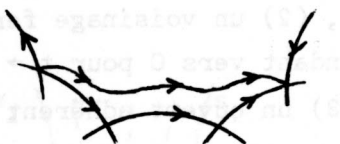


Γ contient dans son intérieur un point (resp. un arc) du type attractant et les autres sont du type selle

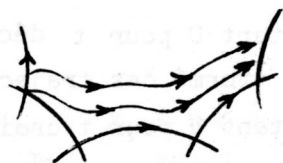


(c) La même situation qu'en (b) avec les orientations renversées.

(d) Une des extrémités de Γ est une singularité attrayante, l'autre étant un épanseur et les autres singularités étant des points de selle en coin



(extrémités isolées)



(une extrémité isolée)



(les extrémités ne sont pas isolées)

Les considérations faites nous montrent qu'il existe une décomposition en secteurs d'un voisinage de l'origine (ce voisinage et ces secteurs dépendant naturellement du représentant choisi pour le germe X). Chaque secteur est une région R du plan, limitée par deux séparatrices s_1 et s_2 issues de l'origine. Il y a 4 secteurs ainsi définis:

(ã) **SECTEURS EN SELLE.** Dans ce cas la séparatrice s_1 est attractante et s_2 dilatante. Il existe un voisinage de 0 dans R tel que toute orbite différente de s_1 et s_2 quitte ce voisinage au bout d'un temps fini pour t croissant ou décroissant.

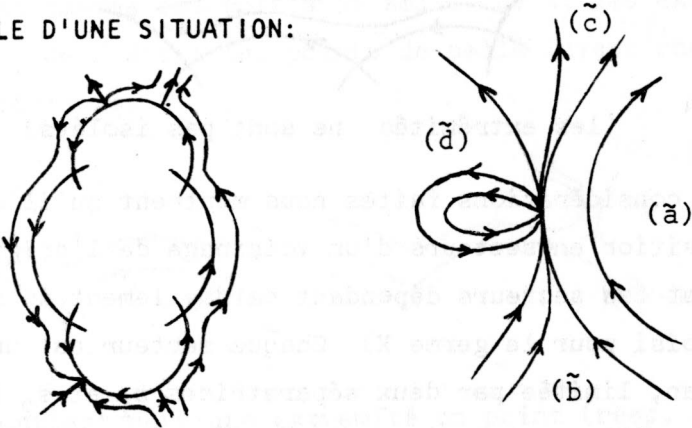
(b) **SECTEURS ATTRACTANTS.** Ce sont des secteurs où toutes les orbites sont des séparatrices attractantes, c'est-à-dire, tendant vers 0 pour $t \rightarrow \infty$. Un tel secteur provient d'une singularité attractante p du champ X (isolée ou non). Chaque séparatrice s_1 et s_2 peut être une trajectoire tendant vers p ou bien une séparatrice d'un point de selle de X adhérent à la variété stable de p .

(c) **SECTEURS DILATANTS.** Ils ont la même description que les secteurs attractants pour $t \rightarrow -\infty$.

(d) **SECTEURS EN BOUCLES.** La séparatrice s_1 est attractante et la séparatrice s_2 est dilatante. Il existe un voisinage U de 0 dans R union de: (1) un voisinage fermé de $s_1 \setminus 0$ (formé des trajectoires tendant vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$,

quittant U pour t décroissant), (2) un voisinage fermé de $s_2 \setminus 0$ (formé des trajectoires tendant vers 0 pour $t \rightarrow -\infty$ et quittant U pour t croissant), (3) un ouvert adhérent à 0 et formé des trajectoires tendant vers 0 pour $t \rightarrow +\infty$ et $t \rightarrow -\infty$ (boucle).

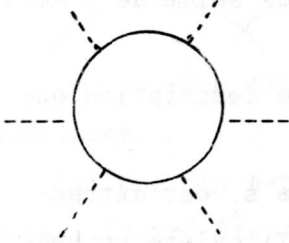
EXEMPLE D'UNE SITUATION:



Les types de singularités avec l'écriture de \hat{X} dans une carte locale. Pour ce qui suit, nous avons besoin de l'écriture du champ \hat{X} dans une carte locale dans le domaine d'éclatement. Soit alors $C = \{(x,y)\}$ un système de coordonnées, fixé une fois pour toutes, autour d'une singularité dans le domaine A. Alors nous avons le tableau ci-dessous qui donne les modèles locaux du champ éclaté X.

TYPE I

I.1. Singularité non isolée obtenue une fois qu'on a éclaté l'origine:

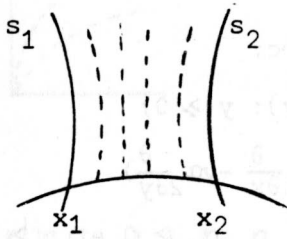


$$A \cap C = S^1 \times \mathbb{R}^+$$

$$\hat{X} = r^{k+1} \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial \theta} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

$$\text{avec } \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0 \text{ et } k \geq 0.$$

I.2. Cas d'un arc singulier:

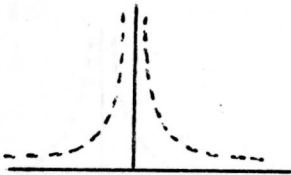


$$A \cap C = \{(x,y); x_1 \leq x \leq x_2, y \geq 0\}$$

$$\hat{X} = \pm(x-x_1)^{m_1}(x_2-x)^{m_2}y^{k+1}\alpha\frac{\partial}{\partial y}$$

avec $m_1, m_2, k \geq 0$ et $\alpha > 0$.

I.3. Singularité à l'intérieur d'un arc, du type selle:

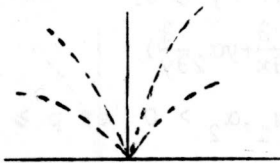


$$A \cap C = \{(x,y); y \geq 0\}$$

$$\hat{X} = \pm y^k(x\alpha_1\frac{\partial}{\partial x} - y\alpha_2\frac{\partial}{\partial y})$$

avec $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ et $k \geq 0$.

I.4. Singularité à l'intérieur d'un arc du type attractant ou dilatant:

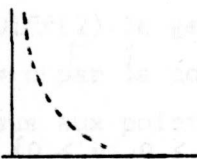


$$A \cap C = \{(x,y); y \geq 0\}$$

$$X = \pm y^k(x\alpha_1\frac{\partial}{\partial x} + y\alpha_2\frac{\partial}{\partial y})$$

avec $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ et $k \geq 0$.

I.5. Singularité placée dans un coin du type selle:

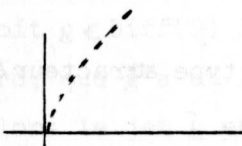


$$A \cap C = \{(x,y); x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$X = \pm x^m y^k(x\alpha_1\frac{\partial}{\partial x} - y\alpha_2\frac{\partial}{\partial y})$$

avec $m, k \geq 0$ et $\alpha_1, \alpha_2 > 0$.

I.6. Singularité placée dans un coin du type attracteur/expandeur:



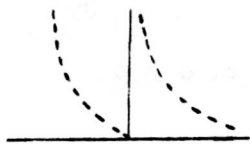
$$A \cap C = \{(x,y); x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$\hat{X} = \pm y^k(x^p\alpha_1\frac{\partial}{\partial x} - y\alpha_2\frac{\partial}{\partial y})$$

avec $m, k \geq 0$ et $\alpha_1, \alpha_2 > 0$.

TYPE II

II.7. Singularité à l'intérieur d'un arc:



$p = \text{pair}$



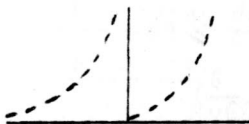
$p = \text{impair}$

$$A \cap C = \{(x, y) : y \geq 0\}$$

$$\hat{X} = \pm y^k \left(x^p \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} - y \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

avec $k \geq 0$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ et $p \geq 2$.

II.8. Singularité à l'intérieur d'un arc:



$p = \text{pair}$



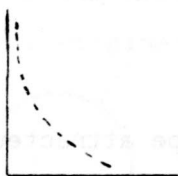
$p = \text{impair}$

$$A \cap C = \{(x, y) : y \geq 0\}$$

$$\hat{X} = \pm y^k \left(x^p \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + y \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

avec $k \geq 0$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ et $p \geq 2$.

II.9. Singularité placée dans un coin:



$$A \cap C = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$X = \pm x^m y^k \left(x^p \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} - y \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

avec $m, k \geq 0$, $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ et

$p \geq 2$.

II.10. Singularité placée dans un coin du type attracteur/
 expanseur:



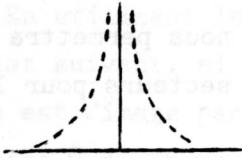
$$A \cap C = \{(x, y); x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$\hat{X} = \pm x^m y^k (x^p \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + y \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y})$$

avec $m, k \geq 0, \alpha_1, \alpha_2 > 0$ et $p \geq 2$.

TYPE III

III.11. Singularité à l'intérieur d'un arc:



$$A \cap C = \{(x, y): y \geq 0\}$$

$$\hat{X} = \pm y^k (x \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} - y^p \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y})$$

avec $k \geq 0, \alpha_1, \alpha_2 > 0, p \geq 2$.

III.12. Singularité à l'intérieur d'un arc du type attracteur/expandeur:



$$A \cap C = \{(x, y): y \geq 0\}$$

$$X = y^k (x \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + y^p \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y})$$

avec $k \geq 0, \alpha_1, \alpha_2 > 0, p \geq 2$.

De façon analogue aux champs, on entend par éclatement de $g \in \text{Diff}(2)$ le germe de difféomorphisme g défini le long de $\partial A = c$ par la condition $g \circ \phi_1 = \phi_1 \circ \hat{g}$. On peut itérer le processus aux points de c ; après un nombre fini de n -éclatements ϕ_1, \dots, ϕ_n on obtient un germe de difféomorphisme, encore noté \hat{g} , le long de $\partial A_n = c$, tel que

$$g \circ (\phi_n \circ \dots \circ \phi_1) = (\phi_n \circ \dots \circ \phi_1) \circ \hat{g}.$$

Soit $g \in \text{Diff}(2)$ laissant fixe l'origine. Supposons, tout d'abord, que g a un 1-jet de partie linéaire égal à l'identité. Alors le jet \tilde{g} est formellement plongeable dans un flot:

$\tilde{g} = \tilde{X}_1$, (on peut dire que g diffère de X_1 par un terme plat à l'origine). En éclatant g un nombre fini de fois, on peut lui associer un champ \hat{X} , où X est une réalisation de \tilde{X} , dont le flot formel au temps 1 est \tilde{g} . Les singularités (ou les points fixes) de \hat{g} sont, par définition, celles du champ bien décomposé \tilde{X} associé, (\hat{g} diffère de \hat{X}_1 d'un terme plat le long du bord c). Elles peuvent être isolées, ou bien formées d'un arc ou encore d'un cercle. Le résultat suivant, énoncé d'une façon générale, nous permettra de définir une notion de décomposition en secteurs pour le germe g :

THÉORÈME FONDAMENTAL (Stabilité sous perturbation plate).

Soit $g \in \text{Diff}(2)$ ayant l'origine comme point fixe algébriquement isolé. Soit $\Gamma \subset c$ une singularité de g et I un arc fermé dans c , contenant Γ dans son intérieur et aucune autre singularité que Γ . Soit f un difféomorphisme tel que $g - f$ soit plat en $0 \in \mathbb{R}^2$. Alors il existe un germe de difféomorphisme h de A le long de I , tel que $\tilde{h}(x) = \text{Id}$ pour tout $x \in c$, conjugant les germes de \hat{g} et \hat{f} le long de I . Cela signifie: Il existe un voisinage \bar{V} de I dans A et un difféomorphisme h de C dans A tel que $h \circ \hat{g}(x) = \hat{f} \circ h(x)$, pour tout $x \in \bar{V}$ tel que $h(x) \in \bar{V}$.

Nous avons besoin, pour la suite, de la notion de séparatrice d'un difféomorphisme:

DÉFINITION. Une *séparatrice* en $0 \in \mathbb{R}^2$ d'un difféomorphisme g de classe C^∞ défini au voisinage de 0 est une application $v: [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^2$, continue en 0 , de classe C^∞ en dehors de 0 et telle que

- (a) $v(0) = 0$ et la tangente en $v(t)$ a une direction limite pour $t \rightarrow 0$,
- (b) la courbe Γ , image de v , est invariante par g ou g^{-1} et pour tout $x \in \Gamma$ on a, soit $g^n(x) \rightarrow 0$ soit $g^{-n}(x) \rightarrow 0$, pour $n \rightarrow \infty$.

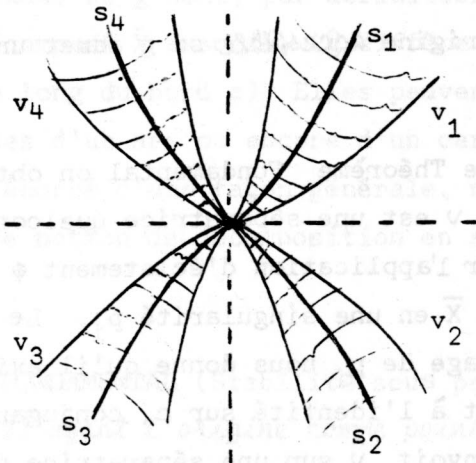
On dit que g a l'origine *accessible* si g admet une séparatrice en 0.

En utilisant le Théorème Fondamental on obtient le résultat suivant: si v est une séparatrice quelconque de X , elle est l'image par l'application d'éclatement ϕ d'une séparatrice \hat{v} du champ \bar{X} en une singularité p_i . Le Théorème appliqué au voisinage de p_i nous donne qu'il existe un difféomorphisme, plat à l'identité sur c , conjugant \hat{X} et \hat{g} . En particulier, h envoie \hat{v} sur une séparatrice de \hat{X} . En prolongeant h en un difféomorphisme \hat{H} d'un voisinage de c tout entier, plat à l'identité sur c , on obtient, en revenant à \mathbb{R}^2 , un difféomorphisme de \mathbb{R}^2 , plat à l'identité en 0 en envoyant v sur une séparatrice de g , d'où le

THÉORÈME 1. Soit $g \in \text{Diff}(2)$, ayant l'origine comme point fixe algébriquement isolé et pour forme normale $\tilde{g} = \tilde{X}_1$. Soit X un champ \mathbb{C}^∞ de jet X . Alors, si v est une séparatrice de X en 0, il existe un difféomorphisme H de \mathbb{R}^2 , plat à l'identité en 0 tel que $H \circ v$ soit une séparatrice de g .

Il n'est pas difficile de voir qu'en fait on peut démontrer le Théorème 1 simultanément pour un nombre fini de séparatrices. Cela nous donne alors que, si g a pour forme normale $\tilde{g} = \tilde{X}_1$ et si l'on suppose que \tilde{X} possède des séparatrices, alors on peut choisir un représentant X de \tilde{X} , ayant une dé-

composition en secteurs $R_1 \dots R_k$, limités par des séparatrices s_1, \dots, s_k , tel que chaque s_i soit contenu dans un voisinage V_i (deux à deux disjoints en dehors de 0) et tel que $g(x) = X_1(x)$ pour tout $x \in \bigcup_i V_i$ (voir la figure).



Passons maintenant au cas générale: g a pour forme normale $\tilde{g} = S \circ \tilde{X}_1$, où S est la partie semi-simple, non identité. Il est clair, alors, qu'il existe un entier minimal n tel que $S^n = \text{Id}$. D'autre part, il est facile de voir que l'on peut choisir un représentant X de \tilde{X} invariant par S et, pour ce X , on peut trouver une décomposition en secteurs, invariante par S . Du fait que $\tilde{g}^n = \tilde{X}_n$ et en appliquant le Théorème Fondamental à \tilde{g}^n , on arrive à un résultat analogue à celui énoncé plus haut: si $g = S \circ \tilde{X}_1$ est une forme normale de g et \tilde{X}_1 possède des séparatrices en 0, alors il existe un représentant X de \tilde{X} , invariant par S , qui décompose un voisinage de l'origine en secteurs limités par des séparatrices contenues dans des voisinages V_i et tel que $g^n(x) = X_n(x)$, pour tout $x \in \bigcup_i V_i$.

§4. La démonstration du théorème fondamental: Un cas illustratif. La démonstration du Théorème Fondamental est très longue: on doit examiner toutes les possibilités concernant les différents types de singularités présentées dans le paragraphe précédent. Cette nécessité correspond au fait que l'on a une difficulté croissante de la résolution du problème.

Comme nous avons vu auparavant, on sait que \hat{g} ou \hat{g}^{-1} se plonge formellement dans un germe de flot éclaté. D'après les modèles déduits du théorème de DUMORTIER, on sait qu'il existe une carte \hat{C}^∞ contenant I dans laquelle l'éclaté $G = \hat{g}$ ou \hat{g}^{-1} est de la forme:

(a) Pour la singularité de type I.1 avec $k \geq 0$, au voisinage de $\partial A = S^1 \times \{0\}$, G est de la forme:

$$G(\theta, r) = \begin{cases} G_1 = \theta + \beta_1(\theta, r)r^{k+1} \\ G_2 = r - \beta_2(\theta, r)r^{k+1} \end{cases}$$

avec β_1, β_2 fonctions C^∞ et $\beta_2(0,0) > 0$ pour tout $\theta \in S^1$.

(b) Pour la singularité de type I.2, avec $\ell_1 = \ell_2 = 0$ et $k \geq 0$, au voisinage de $[x_1, x_2] \subset 0x$, le difféomorphisme G est de la forme

$$G(x, y) = \begin{cases} G_1 = x + \beta_1(x, y) \\ G_2 = y - \beta_2(x, y)y^{k+1} \end{cases}$$

ou β_1, β_2 sont des fonction C^∞ telles que β_1 soit plate sur $s_1 \cup s_2 \cup [x_1, x_2]$ et $\beta_2(x,0) > 0$.

(c) Singularités du type I.6 et II.10 (coins attractants) avec $k+\ell \geq 1$ ou $k = \ell = 0$. Dans une carte on a

$$G(x,y) = \begin{cases} G_1 = x(1-\bar{G}_1(x,y)x^{\ell+p}y^k) \\ G_2 = y(1-\bar{G}_2(x,y)x^{\ell}y^k) \end{cases}$$

où $\bar{p} = p-1 \geq 0$ et \bar{G}_1, \bar{G}_2 sont des fonctions C^∞ positives

(d) Singularités de type I.3, I.4, II.7 et II.8, avec $k \geq 0$. Pour ces cas on peut trouver une carte contenant I dans laquelle $G = \hat{g}$ ou \hat{g}^{-1} est de la forme

$$G(x,y) = \begin{cases} G_1 = x + \bar{G}_1(x,y)y^k \\ G_2 = \bar{G}_2(x,y)y^{k+1} \end{cases}$$

où \bar{G}_1 et \bar{G}_2 sont des fonctions C^∞ et dans la carte $\{(x,y) : |x| \leq \delta, 0 < y \leq \delta\}$ il existe un $a > 0$ tel que $\bar{G}_2(x,y) > a$.

(e) Singularités de type I.2 avec $m_1+m_2 \geq 1$. On a

$$G(x,y) = \begin{cases} G_1 = x + \bar{G}_1(x,y) \\ G_2 = y(1-\bar{G}_2(x-x_1))^{m_1}(x_2-x)^{m_2}y^k \end{cases}$$

où \bar{G}_1 est plate sur $s_1 \cup s_2 \cup [x_1, x_2]$ et \bar{G}_2 est positive sur le domaine de la carte.

(f) Singularités de type selle I.5 et II.9 avec $k+\ell \geq 1$ (ou $k = \ell = 0$). On a

$$G(x,y) = \begin{cases} G_1 = x(1+\bar{G}_1(x,y)x^{\ell+p}y^k) \\ G_2 = y(1-\bar{G}_2(x,y)x^{\ell}y^k) \end{cases}$$

avec \bar{G}_1, \bar{G}_2 de classe C^∞ et $\bar{G}_1 \geq 0, \bar{G}_2 \geq 0$.

REMARQUE. L'étude des singularités de type III est

assez compliquée. La distinction entre II et III tient à la différence de la résolution du Théorème Fondamental. Nous n'allons pas commenter ici cette troisième situation.

Afin de donner une idée de la difficulté de la démonstration, nous allons considérer une situation particulière. Pour cela, introduisons la définition suivante.

DÉFINITION. Soit M une variété et g un difféomorphisme de M fixant une sous-variété N de M ($g(x) = x$ pour tout $x \in N$). Soit $U \subset N$ une partie compacte de N . Nous dirons que g est une contraction *quasihyperbolique* de N sur U si, étant donnée une métrique riemannienne sur M il existe un voisinage V de U dans M , un nombre entier $k \geq 1$ et une constante positive $a > 0$ tels que:

$$(1) \quad \|g(z)\|_N \leq \|z\|_N (1 - a \|z\|_N^k) \quad \text{pour tout } z \in V,$$

$$(2) \quad j^k g(z) = \text{Id} \quad \text{pour tout } z \in N.$$

Ici $\|m\|_N$ désigne la distance de $m \in V$ à N .

REMARQUE. En dimension 2, on peut montrer que la condition (2) est équivalente à la condition suivante: il existe une constante $b > 0$ telle que

$$(2') \quad \|dg(z)\| \text{ et } \|dg^{-1}(z)\| \leq 1 + b \|z\|_N^k.$$

Nous avons le théorème suivant:

THÉORÈME 2. Soient, N , M et g comme dans la définition ci-dessus. Soit $U \subset N$ un compact et supposons que g soit une contraction quasihyperbolique de N sur U . Alors si f est un germe de difféomorphisme de N le long de U tel que $\tilde{f}(z) = \tilde{g}(z)$ pour tout $z \in N$, les germes g et f le long de U sont

conjugués par un germe de difféomorphisme h tel que $\tilde{h}(z) = \text{Id}$, pour tout $z \in N$.

Ce résultat est dû à Belitski [B]. On peut donner une nouvelle démonstration de ce théorème, qui pourra être étendue pour étudier les autres singularités.

On utilise, tout d'abord, la méthode du chemin, qui consiste à relier g et le germe f par une famille à 1-paramètre de germes g_α , $\alpha \in [0,1]$, $g_0 = g$, $g_1 = f$. La recherche d'une famille à 1-paramètre de germes de difféomorphismes H_α telle que $H_\alpha \circ g H_\alpha^{-1} = g_\alpha$ est équivalente, après dérivation par rapport à α , à la recherche d'une famille à 1-paramètre de germes de champs de vecteurs X_α telle que

$$X_\alpha - dg_\alpha^{-1} X_\alpha \circ g_\alpha = Y_\alpha \quad (1)$$

où $Y_\alpha = dg_\alpha^{-1} \left(\frac{\partial H_\alpha}{\partial \alpha} \circ H_\alpha^{-1} \right)$ et \tilde{Y}_α est nul sur N .

Afin de simplifier, supposons dorénavant que l'on a fixé une carte C de coordonnées (x,y) et que $N = \{(x,y) ; y = 0\}$ (on peut passer au cas général sans difficultés). Posons $g = (g_1, g_2)$ où g_1 est la composante de g sur Ox et g_2 sur Oy . La condition (2) de la définition est équivalente à dire que les composantes de $g_1(x,y) - x$ et de $g_2(x,y) - y$ appartiennent à $\mathfrak{m}(y)^{k+1}$, l'idéal des fonctions en y .

On peut aussi supposer la métrique riemannienne choisie sur C pour que $\|z\|_N = \|y\|$, où $\|y\|$ désigne la norme euclidienne, composante de $z = (x,y)$.

On va fixer un représentant de g , encore noté g , sur le voisinage $V = \{(x,y) ; \|x\| \leq \delta, \|y\| \leq \delta\}$, pour un $\delta > 0$ assez petit. On suppose que $U \subset \{x \in S ; \|x\| \leq \delta\}$ et que les conditions (1) et (2) sont vérifiées pour ce représentant de g . On remarque aussi qu'il est facile de modifier g dans

un voisinage de $\{x \in S : \|x\| \leq \delta\}$ pour que $g(V) \subset V$.

Considérons maintenant le germe f . On peut choisir un représentant \tilde{f} de f , tel que $\tilde{f}(z) = g(z)$, pour tout $z \in N$ et que toutes les dérivées jusqu'à l'ordre $k+1$ soient arbitrairement proches de celles de g et que $\tilde{f}(V) \subset V$. Si l'on pose maintenant

$$g_\alpha(x, y) = (1-\alpha)g + \alpha f$$

et $F(z) = (g_\alpha(x, y), \alpha)$, $z = (x, y, \alpha)$, $F(z)$ est un difféomorphisme défini sur $W = V \times [0, 1]$ vérifiant

$$\|F(z)\|_\Sigma \leq \|z\|_\Sigma (1-\bar{a}\|z\|_\Sigma^k) \quad (2)^*$$

où $\Sigma = N \times [0, 1]$, $\|z\|_\Sigma = \|(x, y)\|_N = \|y\|$, pour $z = (x, y, \alpha) \in W$, et où $\bar{a} > 0$ est une constante que l'on peut rendre arbitrairement proche de a , par choix du représentant \tilde{f} . On peut facilement vérifier aussi que

$$\|dF(z)\|, \|dF^{-1}(z)\| \leq 1-\bar{b}\|z\|^k \quad (3)^*$$

où \bar{b} est une constante arbitrairement proche de b .

Soit $W(\epsilon) = \{z ; \|z\|_\Sigma \leq \epsilon\}$. Ceci étant, désignons par $V_\Sigma^\infty(W)$ l'espace des champs de vecteurs de W , tangents aux facteurs $V \times \{\alpha\} \subset V \times [0, 1]$ et de jet infini nul sur Σ . Pour résoudre l'équation (1)* il suffit de résoudre pour tout $Y \in V_\Sigma^\infty(W)$, l'équation en $X \in V_\Sigma^\infty(W)$:

$$X - dF^{-1}X \circ F = Y \quad (4)^*$$

Posons $L_0 X = dF^{-1}X \circ F$ et $L_Y X = L_0 X - Y$. Les opérateurs L_0 et L_Y laissent invariant l'espace $V_\Sigma^\infty(W)$. L'équation (4)* s'écrit aussi: $L_Y X = X$. En utilisant des idées dûes à Takens $[T_1]$ et Dufour $[D_1]$ on arrive à montrer l'existence d'un point fixe pour l'opérateur L_Y dans l'espace $V(W)$, d'où, par in-

tégration d'une conjugaison entre g et f .

On peut appliquer ce théorème aux singularités du Type I.1, avec $k \geq 1$, et du type I.2, avec $\varphi_1, \varphi_2 = 0$, $k \geq 1$. Le théorème reste encore valable même pour $k = 0$, c'est-à-dire, pour les cas I.5, I.6, II.9, II.10, avec $k = \varphi = 0$.

Considérons maintenant la singularité de type I.3, où \hat{g} est donné par

$$\hat{g}(x,y) = \begin{cases} \hat{g}_1 = x(1+y^k) \\ \hat{g}_2 = y(1-y^k) \end{cases} .$$

Cette singularité ne vérifie pas la condition (2) (ni même la condition (2')), car il existe un $b > 0$ tel que $\|d\hat{g}(z)\| \geq 1+by^{k+1}$. Cependant, on peut montrer que, en adaptant sur le fibré TW une norme finslerienne dégénérée il est possible de trouver un difféomorphisme F associé à une perturbation f de g qui vérifie les conditions (2)* et (3)* de ce paragraphe. Cela donne, peut être, une idée des difficultés que l'on rencontre pour démontrer le Théorème Fondamental.

§5. Un résultat topologique. Soit g un difféomorphisme de \mathbb{R}^2 tel que $g(0) = 0$ et U un voisinage borné de 0. Par analogie avec les définitions données par Takens (Cf. $[T_3]$) pour les champs on peut introduire les notions suivantes: Si $p \in U$, l'ensemble $L_{w,g,U}(p) = \emptyset$ si il existe $n \geq 1$ tel que $g^n(x) \notin U$ et autrement est égal à l'ensemble des $q \in U$ pour lesquels il existe une suite $n_1, \dots, n_m \rightarrow +\infty$ telle que $g^{n_i}(p) \rightarrow q$. L'ensemble $L_{\alpha,g,U}(p)$ est défini de façon analogue en remplaçant la suite $(n_i) \rightarrow +\infty$ par la suite $(n_i) \rightarrow -\infty$.

On définit ensuite

$$K(g,U) = \{p \in U ; L_{w,g,U}(p) \text{ ou bien } L_{\alpha,g,U}(U) \neq \emptyset\}$$

On alors.

DÉFINITION. Deux germes $(\tilde{g},0)$ et $(\tilde{f},0)$ en $0 \in \mathbb{R}^2$, tels que $g(0) = f(0) = 0$ sont *faiblement C^0 conjugués* s'ils possèdent des représentants f et g sur des voisinages bornés U et V de 0 et s'il existe un homéomorphisme ϕ de U sur V , $\phi(0) = 0$, tel que

(a) $\phi(K(g,U)) = K(f,V)$

(b) Pour tout p dans $K(g,U)$ on a : $\phi(g(p)) = f(\phi(p))$ si $g(p) \in U$; et $\phi(g^{-1}(p)) = f^{-1}(\phi(p))$ si $g^{-1}(p) \in U$.

THÉORÈME 3. Soit $g \in \text{Diff}(2)$ ayant l'origine comme point fixe algébriquement isolé. Soit $S \circ X_1$ une forme normale de Takens pour un tel g . Supposons que \tilde{X} ait au moins une séparatrice en $0 \in \mathbb{R}^2$ et soit X un représentant de \tilde{X} . Alors g est faiblement C^0 conjugué à $S \circ X_1$. De plus, g est k -faiblement C^0 déterminé pour un entier k (c'est-à-dire pour tout f avec $j^k f(0) = j^k(g)(0)$ on a que g et f sont faiblement C^0 conjugués).

REMARQUE. Il est possible de montrer un résultat pour la C^0 -topologie. Si g et X sont comme dans le Théorème 3 et si, de plus, les singularités des secteurs de selle de X sont de type *hyperbolique*, alors g est topologiquement (au sens de la C^0 topologie) conjugué à $S \circ X_1$. Cela veut dire que g^n , pour un certain n , se plonge dans un flot topologique. On arrive aussi à montrer que si X admet seulement des secteurs hyperboliques alors g^n se plonge dans un flot C^∞ .

EXEMPLES.

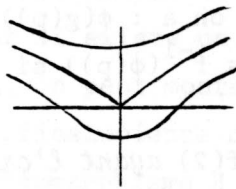
(1) Soit $g \in \text{Diff}(2)$ de 2-jet

$$\tilde{g}^2(x,y) = (x+a(x^2+xy+\frac{y^2}{3}), x+y+a(\frac{x^2}{2}+\frac{xy}{3}+\frac{y^2}{12})+b(x^2+xy+\frac{y^2}{3})),$$

avec $a \neq 0$. Il existe un champ X dont le 2-jet est égal à

$$\tilde{X}^2 = ay^2 \frac{\partial}{\partial x} + (x+by^2) \frac{\partial}{\partial y},$$

avec $a \neq 0$, tel que g se plonge formellement. Un tel champ admet pour séparatrice en 0 les deux branches d'une courbe C^∞ ayant en 0 un point de rebroussement ordinaire, conforme à la figure ci-dessous.



Le théorème implique qu'il en est de même pour g . Notons que tout difféomorphisme dont le 1-jet est $(x,x+y)$ est génériquement équivalent à un tel difféomorphisme (Cf. $[T_2]$).

(2) Soit $g \in \text{Diff}(2)$ dont le 2-jet est égal à

$$\tilde{g}^2(x,y) = (x-ax^2-bxy+ay^2, y-\frac{b}{2}x^2+2axy+\frac{b}{2}y^2), \quad (1)$$

où $a = \frac{3c}{2}$, $b = 3c\sqrt{3}$ et $c \geq 0$ est une constante. Si l'on considère l'hamiltonien

$$H(x,y) = c\frac{\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3c}{2}x^2y - \frac{3c}{2}\sqrt{3}xy^2 + \frac{c}{2}y^3,$$

alors le champ hamiltonien associé $X_H = (X_H^1, X_H^2)$ est donné

$$\text{par } X_H^1 = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad X_H^2 = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \text{d'où}$$

$$X_H^1 = -ax^2 - bxy + ay^2$$

$$X_H^2 = -\frac{b}{2}x^2 + 2axy + \frac{b}{2}y^2.$$

D'autre part, il est clair que \tilde{g}^2 se plonge dans X_H ; $\tilde{g}^2 = X_H^1$.
 Posons $f_H = X_H^1$. Ecrivons le champ hamiltonien en coordonnées polaires (r, α) :

$$\hat{X}_H = \hat{X}_H^1 \frac{\partial}{\partial r} + \hat{X}_H^2 \frac{\partial}{\partial \alpha},$$

avec

$$\hat{X}_H^1(r, \alpha) = \frac{1}{r} [r \cos \alpha X_H^1(r \cos \alpha, r \sin \alpha) + r \sin \alpha X_H^2(r \cos \alpha, r \sin \alpha)]$$

$$\hat{X}_H^2(r, \alpha) = \frac{1}{r} [-r \sin \alpha X_H^1(r \cos \alpha, r \sin \alpha) + r \cos \alpha X_H^2(r \cos \alpha, r \sin \alpha)].$$

On a:

$$\hat{X}_H^1(r \cos \alpha, r \sin \alpha) = -ar^2 \cos^2 \alpha - br^2 \cos \alpha \sin \alpha + ar^2 \sin^2 \alpha,$$

$$\hat{X}_H^2(r \cos \alpha, r \sin \alpha) = -\frac{b}{2}r^2 \cos^2 \alpha + 2ar^2 \cos \alpha \sin \alpha + \frac{b}{2}r^2 \sin^2 \alpha$$

d'où:

$$\hat{X}_H^1(r, \alpha) = r^2 - a(\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha) - \frac{b}{2}(3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha)$$

$$= r^2 - a(\cos 3\alpha - \frac{b}{2} \sin 3\alpha) 3cr^2 - \frac{1}{2} \cos 3\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3\alpha,$$

et

$$\hat{X}_H^2(r, \alpha) = r - \frac{b}{2} \cos 3\alpha + a \sin 3\alpha = 3cr - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 3\alpha + \frac{1}{2} \sin 3\alpha.$$

mais

$$\cos(\frac{4\pi}{3} - 3\alpha) = -\frac{1}{2} \cos 3\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3\alpha,$$

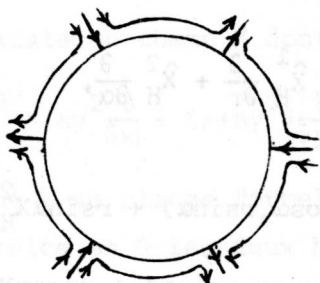
$$\sin(\frac{4\pi}{3} - 3\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 3\alpha + \frac{1}{2} \sin 3\alpha,$$

d'où

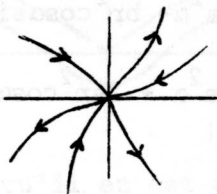
$$\hat{X}_H^1(r, \alpha) = 3cr^2 \cos(\frac{4\pi}{3} - 3\alpha),$$

$$\hat{X}_H^2(r, \alpha) = 3cr \sin(\frac{4\pi}{3} - 3\alpha).$$

Il s'en suit que les valeurs suivantes pour α annulent $\sin(\frac{4\pi}{3}-3\alpha)$; $\alpha_i = (1+3i)\frac{\pi}{9}$, $i = 0,1,\dots,5$, ce qui donne l'existence de 6 séparatrices pour le champ $\hat{\lambda}_H$, voir la figure ci-dessous:



D'après le théorème, tout germe ayant un 2-jet égal à (1) admet alors 3-séparatrices en $0 \in \mathbb{R}^2$, voir la figure ci-dessous



Notons encore le fait suivant: soit $f \in \text{Diff}(2)$ ayant pour partie linéaire la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos \lambda_i & -\sin \lambda_i \\ \sin \lambda_i & \cos \lambda_i \end{pmatrix}$$

$i = 1,2$, $\lambda_1 = \frac{2\pi}{3}$, $\lambda_2 = \frac{4\pi}{3}$. Alors l'itéré $f^3 = g$ de f a pour partie linéaire en 0 la matrice identité. Il est possible de montrer que g , après un changement C^∞ de coordonnées dans un voisinage de 0, s'écrit,

$$g(x,y) = (x+a_1x^2+2a_2xy-a_1y^2, y+a_2x^2-2a_1xy-a_2y^2)$$

+ termes d'ordre supérieur à 2.

Notre théorème affirme alors que $f \in \text{Diff}(2)$ admet 3 séparatrices en $0 \in \mathbb{R}^2$. Si l'on suppose maintenant que $\lambda_1 = \pi/2$,

$\lambda_2 = 3\pi/2$, en considérant l'itéré d'ordre 4 de f , on arrive à montrer de façon analogue que f admet 4 séparatrices par $0 \in \mathbb{R}^2$. Dans sa thèse, Aguiar F. (*Sobre a estrutura de órbitas de difeomorfismos do \mathbb{R}^2 no \mathbb{R}^2 , sob condições de ressonância*, IMPA (1976) pp.1-85), a démontré que pour le premier cas f est de 2-détermination finie topologique et pour le deuxième cas de 3-détermination finie topologique. Ce résultat sera obtenu comme cas particulier du théorème.

(3) Le germe $g \in \text{Diff}(2)$ considéré dans l'exemple (1) est C^∞ -conjugué au flot au temps 1 du champ X dont le 2-jet est

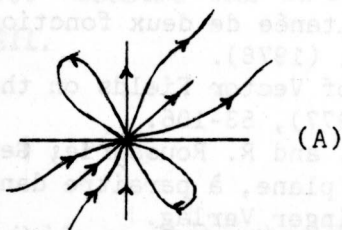
$$\tilde{X}^2 = ay^2 \frac{\partial}{\partial x} + (x+by^2) \frac{\partial}{\partial y}, \quad a \neq 0.$$

En effet, Takens $[T_3]$ a démontré que X admet après trois éclatements six singularités hyperboliques.

(4) Soit $X \in V(2)$ dont le 2-jet est égal à

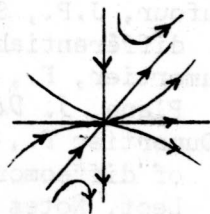
$$\tilde{X}^2 = (a_0y^2 + a_1xy + a_2x^2) \frac{\partial}{\partial x} + (b_0y^2 + b_1xy) \frac{\partial}{\partial y}$$

avec les conditions $b_1 \neq a_2$ et $(b_0 - a_1)^2 + 4a_0(b_1 - a_2) > 0$. Dumortier $[D_2]$ a montré que X est génériquement un des types suivants:



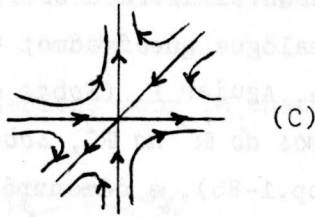
(A)

$$(x^2 + 2xy) \frac{\partial}{\partial x} + (2xy + y^2) \frac{\partial}{\partial y}$$



(B)

$$x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (2xy - y^2) \frac{\partial}{\partial y}$$



$$(x^2 - 2xy) \frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - 2xy) \frac{\partial}{\partial y} .$$

D'après notre théorème, tout germe $g \in \text{Diff}(2)$ qui se plonge formellement en X ayant le type B ou C est C^∞ conjugué à $X, 1$. Plus généralement, on a le résultat de conjugaison C^∞ dans le plan pour tous les germes de difféomorphismes qui sont formellement plongeables dans des germes de champs homogènes n'ayant pas de secteurs en boucles.

* *

RÉFÉRENCES

- [B] Belitskii, G.R., Functional Equations and local conjugacy of Mappings of Class C, *Math. USSR. Sb.*, 20, 4 (1973), 587-602.
- [C] Chen, K.T., On non elementary hyperbolic Fixed Points of Diffeomorphisms, *Diff. Eq. and Dyn. Systems*, (Ed. by J. Hale and J. La Salle, Acad. Press), N.Y. (1967), 525-530.
- [D₁] Dufour, J.P., Stabilité simultanée de deux fonctions différentiables, préprint, (1978).
- [D₂] Dumortier, F., Singularités of Vector Fields on the Plane, *J. Diff. Eq.*, 23(1977), 53-106.
- [DRR] Dumortier F., Rodrigues P.R. and R. Roussarie, Germs of diffeomorphisms in the plane, à paraître dans *Lect. Notes in Math.*, Springer Verlag.
- [L] Lewis Jr., B.C., On formal Power Series transformations, *Duke Math. J.*, 5, (1939), 794-805.
- [P₁] Palis Jr., J., On Morse-Smale Dynamical Systems, *Topology*, 8, (1969), 385-405.
- [P₂] Palis Jr., J., *Rigidity of the centralizers of Diffeo-*

morphisms and Structural Stability of Suspended Foliations, Lecture Notes in Mathematics, 652, (1978), 114-121.

- [R] Roussarie, R., Modèles locaux de champs et de formes, *Astérisque* 30 (1975), 1-181.
- [RR] Rodrigues, P.R. and Roussarie, R., Topological embedding diffeomorphism germs of the plane in flow germs. Preprint.
- [S₁] Sternberg, S., Local contractions and a theorem of Poincaré, *Amer. J. Math.*, 79, (1957), 809-824.
- [S₂] Sternberg, S., The structure of local homeomorphism II, *Amer. J. Math.*, 80, (1958), 623-632.
- [S₃] Sternberg, S., The structure of local homeomorphism III, *Amer. J. Math.*, 81, (1959), 578-604.
- [T₁] Takens, F., Normal Forms for certain singularities of Vector Fields, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 23, 2 (1973), 163-195.
- [T₂] Takens, F., Forced oscillations and bifurcations, *Comm. of the Math. Inst. Rijksuniversiteit Utrecht*, 3 (1974), 1-59.
- [T₃] Takens, F., Singularities of Vector Fields, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 43, (1974), 46-100.
- [T₄] Takens, F., Partially hyperbolic fixed Points, *Topology*, 10, (1971), 133-147.

Departamento de Geometria
Universidade Federal Fluminense
24.000- Niterói- Rio de Janeiro.
BRASIL.

(Recibido en Septiembre de 1980)