INTRODUCCION A LA TEORIA DE LOS GRUPOS I.

Por Pablo Casas.

El propósito de estas notas (de acuerdo con el propósito general de la Revista) es el de iniciar a los estudiantes de últimos años de bachillerato y primero de Universidad en el conocimiento de uno de los conceptos más fundamentales en la matemática moderna: el concepto de Grupo.

No es, por lo tanto, esta introducción un nuevo tratado sobre teoría de grupos ni un vehículo para la exposición de nuevas ideas en este campo.

Antes de dar una definición de grupo debemos explicar otros conceptos, también fundamentales en matemáticas, y de los cuales diremos únicamente lo que sea necesario para poder desarrollar la teoría de los grupos.

I. CONJUNTO

A la palabra "Conjunto" le daremos el significado que corrientemente se le da a las palabras colección, agregado, rebaño, montón, rimero, set (en inglés), bunch (en inglés), Menge (en alemán), ensemble (en francés).

Según Georg Cantor (1845-1918), creador de la teoría de los conjuntos, "Entendemos por conjunto toda reunión en una sola clase de objetos bien distinguidos de nuestra intuición y de nuestro pensamiento".

La definición rigurosa de conjunto entraña una serie de problemas de orden lógico que serán tratados en un artículo aparte, por el profesor Carlo Federici, en próximo número de esta Revista.

Ejemplos:

El conjunto de todos los colombianos.

El conjunto de todos los números naturales.

El conjunto de todos los números reales.

El conjunto de las rotaciones de un plano alrededor de un eje.

Notaremos los conjuntos con letras mayúsculas, o indicando con minúsculas entre $\{\quad\}$, los objetos que forman el conjunto. Estos objetos los llamaremos "elementos" o "individuos" del conjunto.

Ejemplos:

El conjunto R de los números reales.

El conjunto de los números naturales $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

El conjunto $M = \{a, b, c, d, e\}$.

Es necesario tener en cuenta que las letras o símbolos con los cuales indicamos los elementos de un conjunto son precisamente *símbolos* (con los cuales representamos esos elementos) y no los elementos mismos.

Podemos escribir los símbolos, con los cuales representamos los objetos de un conjunto, en cualquier orden sin que esto afecte al conjunto mismo.

Ejemplos:

El conjunto de los números naturales lo podemos representar por:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5 \ldots\} \text{ o por, } N = \{\ldots 5, 4, 3, 2, 1\}$$

$$\text{o por, } N = \{1, 3, 5, 7, \ldots 2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

Escribir $A = \{a, b, c, d\}$ es lo mismo que escribir:

$$A = \{b, d, a, c\} \text{ o } A = \{d, a, c, b\}, \text{ etc.}$$

Elemento arbitrario o genérico. Por "elemento arbitrario" o "elemento genérico" (llamado también variable) entendemos el símbolo con el cual representamos cualquiera de los elementos de un conjunto.

Ejemplo:

Sea el conjunto de los números naturales $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ y sea x el símbolo con el cual indicamos cualquiera de los números naturales, x es, entonces, el elemento genérico o sea que x puede ser 1, o 2, o 3, o..., etc.

Cuando reemplazamos el elemento arbitrario por un elemento determinado (del mismo conjunto) decimos que le damos por "valor" ese elemento determinado.

Podemos también indicar un conjunto por medio de un elemento genérico con el símbolo siguiente: $N = \{x\}$.

Relación. Cuando decimos que x es un elemento de N, estamos estableciendo una relación entre x y N, o sea, entre un elemento de un conjunto y el conjunto mismo. Esta relación se llama de "pertenencia" y la notaremos simbólicamente así: $x \in N$. Diferentes tipos de relaciones usaremos durante el desarrollo de estas notas y a ellas nos referiremos en particular cuando sea necesario.

Conjunto vacío. Hemos dicho que un conjunto está formado por objetos que se llaman elementos o individuos del conjunto; cuando un conjunto no contiene elementos decimos que el conjunto es "vacío".

Ejemplos:

El conjunto de los números reales que son soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$ es un conjunto vacío.

El conjunto de los números enteros que son soluciones de la ecuación $3x + 5 = 0$ es un conjunto vacío.

El conjunto de los números naturales que son soluciones de la ecuación $4x + 8 = 0$ es un conjunto vacío.

Usaremos el símbolo ϕ para indicar el conjunto vacío.

RELACIONES Y OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Subconjunto. Si todos los elementos de un conjunto A son también elementos de un conjunto B, decimos que A es un "subconjunto" de B.

Ejemplos:

$$A = \{3, 4, 5\}, \qquad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A = \{a, b, c, d\}, \qquad B = \{a, b, c, d\}$$

Esta relación se llama de "inclusión" y la indicaremos simbólicamente así:

$A \subset B$ A está contenido en B, o

$B \supset A$ B contiene a A

Igualdad entre conjuntos. Cuando todos los elementos de un conjunto A son también elementos de un conjunto B y todos los elementos del conjunto B son elementos del conjunto A, se dice que A y B "coinciden" o que son iguales: $A = B$.

Ejemplo:

$$A = \{a, b, c, d\}, \quad B = \{c, b, a, d\}$$

Decir que los conjuntos A y B son iguales, significa que las relaciones $A \subset B$ y $B \subset A$ se cumplen simultáneamente.

Si dos conjuntos A y B no son iguales indicaremos esta relación así: $A \neq B$ (A no es igual a B).

Subconjunto propio. Cuando un conjunto A está contenido en un conjunto B, siendo $B \neq A$, decimos que A es un "subconjunto propio" de B, o que B "contiene propiamente" a A.

Ejemplo:

El conjunto de los números naturales comprendidos entre 10 y 20 es un subconjunto propio del conjunto de todos los números naturales.

Hacemos la convención, muy natural, de que el conjunto vacío ϕ está contenido en todo otro conjunto.

Ejercicio 1.

Demostrar que si, $A \subset B$, y $B \subset C$, entonces $A \subset C$, o sea que, la relación de inclusión es transitiva.

Intersección de conjuntos. Dados dos conjuntos A y B, el conjunto D, formado por todos los elementos comunes a A y B, se llama la "intersección" de A y B. Lo indicaremos así: $D = A \cap B$. D es un subconjunto de A y de B.

Ejemplos:

$$A = \{a, b, c, d\}, \quad B = \{a, c, f, g, h\}, \quad D = \{a, c\}$$

$$A = \{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}, \quad B = \{10, 12, 14, 16, 18, 20\},$$

$$D = \{12, 14, 16, 18\}.$$

Ejercicio 2.

Demostrar que todo conjunto contenido en A y en B está contenido en D.

Conjuntos disyuntos. Dos conjuntos A y B cuya intersección D es vacío (o sea que $D = \phi$), se llaman "disyuntos" o "mutuamente excluyentes".

Decir lo anterior significa que los dos conjuntos no tienen elementos en común.

Ejemplo:

$$A = \{50, 51, 52, 53\}\,, \quad B = \{4, 7, 12, 16\}\,.$$

Unión de conjuntos. Dados dos conjuntos A y B, el conjunto E, formado por todos los elementos que pertenecen por lo menos a uno de los dos conjuntos dados, se llama la "unión" de A y B. Lo indicaremos así: $E = A \cup B$.

Ejemplos:

$$A = \{2, 3, 4, 5\}\,, \quad B = \{4, 5, 6, 7, 8\}\,, \quad E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}\,.$$

$$A = \{10, 11, 12\}\,, \quad B = \{20, 21, 22, 23\}\,,$$

$$E = \{10, 11, 12, 20, 21, 22, 23\}\,.$$

Ejercicio 3.

Demostrar que todo conjunto que contenga a A y a B contiene también a E.

II. COMPOSICION INTERNA

Llamaremos "composición interna" (ley de composición interna, operación de composición interna o producto) entre elementos de un conjunto, la relación que hace corresponder a cada dos elementos ordenados del conjunto un tercer elemento del mismo conjunto.

Indicaremos la composición interna así: $(x, y) \longrightarrow x \top y$.

Los elementos x e y se llaman "factores de la composición" o "componentes" y el elemento $x \top y$ se llama "compuesto".

Ejemplos:

En el conjunto de los números naturales $N = \{1, 2, 3, 4 \ldots.\}$ la suma ordinaria es una composición interna.

En efecto, por todo par ordenado (x, y) de números naturales, el compuesto $x+y$ es un número natural.

En el conjunto de los números reales la multiplicación ordinaria es una ley de composición interna.

La intersección $(A \cap B)$ y la unión $(A \cup B)$ entre conjuntos son relaciones de composición interna.

En el último ejemplo consideramos un conjunto M cuyos elementos son también conjuntos, $M = \{A, B, C, \ldots.\}$, este conjunto M es algunas veces llamado conjunto de segundo orden. Los conjuntos de segundo orden pueden ser también elementos de otros conjuntos de orden superior.

Composición interna asociativa. Una composición interna se llama "asociativa" si, cualquiera que sean los elementos $x, y, z,$ del conjunto, se tiene que: $(x \top y) \top z = x \top (y \top z)$.

Ejemplo:

La suma ordinaria entre números reales es una composición interna asociativa.

En efecto, cualquiera que sean los números reales $x, y, z,$ se tiene que: $(x + y) + z = x + (y + z)$.

Composición interna conmutativa. Una composición interna $(x, y) \longrightarrow x \top y$ se llama "conmutativa" si, cualquiera que sean los elementos x e y, se tiene que: $x \top y = y \top x$.

Ejemplo:

La multiplicación ordinaria entre números enteros es conmutativa.

Elemento neutro. Dada una composición interna entre elementos de un conjunto, llamaremos "elemento neutro a izquierda" al elemento e del conjunto tal que, $e \top x = x$, por cualquier elemento x del conjunto, y llamaremos "elemento neutro a derecha" al elemento e' del conjunto tal que $x \top e' = x$.

El elemento neutro a izquierda y el elemento neutro a derecha son llamados, por algunos autores, identidad izquierda e identidad derecha.

Ejemplo:

En el conjunto de los números reales y con la multiplicación ordinaria como operación de composición interna, el número real 1 es el elemento neutro a izquierda y también el elemento neutro a derecha.

Teorema. Si un conjunto posee un elemento neutro a izquierda e y un elemento neutro a derecha e', estos dos elementos neutros son iguales.

Demostración:

Consideremos, primero, al elemento e' como un elemento cualquiera del conjunto; tenemos entonces, por la definición de elemento neutro a izquierda que: $e \top e' = e'$ (1).

Consideremos, ahora, el elemento e como un elemento cualquiera del conjunto; tenemos entonces, por la definición de elemento neutro a derecha que: $e \top e' = e$ (2).

De las relaciones (1) y (2) deducimos que $e = e'$.

Esta demostración la podemos sintetizar así: $e = e \top e' = e'$.

Elemento simétrico. Dada una composición interna entre elementos de un conjunto, y admitiendo un elemento neutro e, decimos que x' es "simétrico a izquierda" de x si, $x' \top x = e$, y que x' es simétrico a derecha de x si, $x \top x' = e$.

Los elementos simétricos a izquierda y derecha son llamados, por algunos autores, inverso izquierdo e inverso derecho.

Ejemplo:

En el conjunto de los números enteros (positivos y negativos) con la suma ordinaria como composición interna y con 0 como elemento neutro, el elemento $-x$ es el simétrico a izquierda y también a derecha del elemento x, siendo x cualquier número entero.

En efecto, $-x + x = 0$, y, $x + (-x) = 0$.

III. GRUPOS

Definición. Dado un conjunto G, no vacío, y una composición interna entre sus elementos, el conjunto se llama "grupo" si:

1) la composición interna es asociativa, o sea si,

$$(x \top y) \top z = x \top (y \top z), \text{ por todo } x, y, z, \text{ de } G;$$

2) existe en G el elemento neutro a izquierda e, o sea si,

$$e \top x = x, \text{ por todo } x \text{ de } G;$$

3) existe en G un elemento simétrico a izquierda x, o sea si,

$$x' \top x = e, \text{ por todo } x \text{ de } G.$$

Un grupo se llama "abeliano" o "conmutativo" si la composición interna es conmutativa, o sea, si siempre se tiene que $x \top y = y \top x$ por todo elemento x y todo elemento y de G.

Ejemplos:

El conjunto de los números racionales, diferentes de 0, con la multiplicación ordinaria como composición interna forman un grupo.

Demostración:

1) $(x . y) . z = x . (y . z)$ por todo x, y, z racional.
2) $1 . x = x = x . 1$, por todo número x racional, o sea que, el racional 1 es el elemento neutro a izquierda y también a derecha.

3) $1/x . x = 1 = x . 1/x$, por todo racional $x \neq 0$, o sea que, el racional $1/x$ es el elemento simétrico a izquierda y también a derecha.

El conjunto de los números racionales, con la adición ordinaria como composición interna, forman un grupo.

Demostración:

1) $(x + y) + z = x + (y + z)$, por todo x, y, z racional.
2) $0 + x = x = x + 0$, por todo número x racional.
3) $-x + x = 0 = x + (-x)$, por todo número racional x.

El conjunto de todas las rotaciones alrededor de un punto o, en el plano, con la resultante como composición interna, forman un grupo. Llamando θ el ángulo de cualquier rotación, $\theta = 0$ es el elemento neutro y $-\theta$ es el elemento simétrico del elemento θ.

El conjunto de todos los vectores en el plano, con la suma vectorial como composición interna, forman un grupo.

Ejercicios.

4. Demostrar que los grupos de los dos primeros ejemplos son grupos abelianos.
5. Decir si los números reales positivos, con la adición ordinaria como operación de composición, forman un grupo.

6. Demostrar que si en un grupo, $x \top x = x$, entonces $x = e$.
7. Demostrar que el conjunto formado por la totalidad de parejas de números reales (a, b) para los cuales $a \neq 0$, con la operación de composición definida por la fórmula,

   $(a, b) \top (c, d) = (ac, bc+d)$ forman un grupo.

8. Demostrar que los elementos e, a forman un grupo abeliano si la operación de composición interna está definida por:

$$e \top e = e, \; e \top a = a, \; a \top e = a, \; a \top a = e.$$

9. Demostrar que si $x \top x = e$, para todos los elementos de un grupo, entonces el grupo es abeliano.
10. Demostrar que un grupo con 4 o menos elementos es necesariamente conmutativo.