DESIGUALDADES I.

Por Jean Aczél

(Traducido de Gazeta de Matemática, Nos. 39, 40, 41 y 42).

Introducción. Es bien conocida la desigualdad:

$$(1)\ (a+b)/\ 2 > \sqrt{ab}$$

que liga la media aritmética $(a+b)/\ 2$ y la media geométrica $\sqrt{ab}$ de dos números positivos a y b $(a \neq b)$. En el caso de que sea $a = b$, los dos miembros de (1) son evidentemente iguales.

Para demostrar (1) es necesario probar que la diferencia $(a+b)/\ 2 - \sqrt{ab}$ es positiva. Esto es inmediato si se recuerda la relación $a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$, pues el cuadrado de un número diferente de cero es siempre positivo (en sentido estricto).

Consideremos ahora algunas aplicaciones de esta desigualdad. Demostremos que la suma de un número positivo, diferente de uno, y de su inverso, es siempre superior a 2, es decir, que para $x > o$ $(x \neq 1)$ se tiene $x + 1/x > 2$. En efecto, según la desigualdad (1) se tiene $(x + 1/x)/\ 2 > \sqrt{x\,.\,1/x} = 1$.

Como segunda aplicación busquemos, entre los rectángulos del mismo perímetro, aquél que tiene el área mayor. Si llamamos los

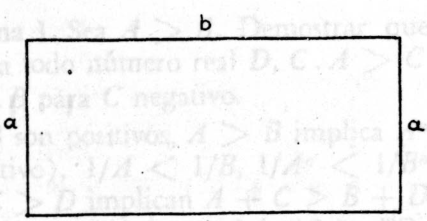

Fig. 1.

lados de un rectángulo a y b, su perímetro será $2a + 2b = k$ siendo k común a todos los rectángulos considerados. El área A de este rectángulo tiene por valor $a\,.\,b$, y a causa de (1) $\sqrt{A} < k/4$

excepto para el caso $a = b$ en el que se tiene $\sqrt{A} = a = k/4$. Tenemos pues, el siguiente resultado: entre todos los rectángulos del mismo perímetro el cuadrado es el de área mayor.

Ejercicio 1. En la figura 2 hemos dibujado algunos rectángulos que tienen el mismo perímetro, el mismo centro, y los lados paralelos. Si se dibujan *todos* esos rectángulos con ellos se recubre una parte del plano. ¿Cuál es la forma de esa parte?

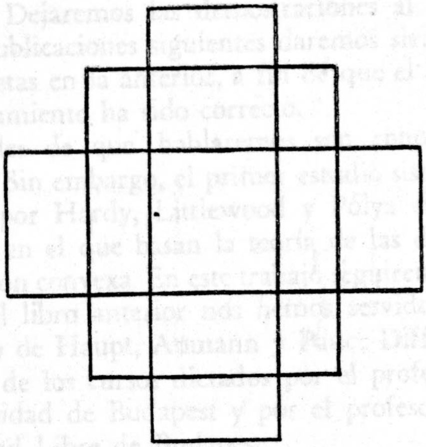

Fig. 2.

Ejercicio 2. Entre todos los rectángulos de igual área, ¿cuál es el de menor perímetro?

Ejercicio 3. Si se dibujan todos los rectángulos que tengan la misma área, el mismo centro, y los lados paralelos, ¿qué parte del plano recubren?

Problema 1. Sea $A > B$. Demostrar que se tiene $A + D > B + D$ para todo número real D, $C . A > C . B$ para C positivo y $C . A < C . B$ para C negativo.

Si A, B son positivos, $A > B$ implica $A^n > B^n$ (siendo n un entero positivo), $1/A < 1/B$, $1/A^n < 1/B^n$ (n entero positivo) $A > B$ y $C > D$ implican $A + C > B + D$, y si A, B, C, D, son todos positivos también se tendrá $AC > BD$.

Problema 2. Se llama media armónica de dos números positivos a y b el valor $2/(1/a + 1/b)$. Demostrar que para $a \neq b$ la media armónica es siempre inferior a la media geométrica, es decir, que $2/(1/a + 1/b) < \sqrt{ab}$.

Ejercicio 4. ¿Entre todos los triángulos rectángulos que tienen la misma altura sobre la hipotenusa, cuál es el que tiene la menor hipotenusa?

Ejercicio 5. ¿Entre todos los triángulos rectángulos que tienen la misma hipotenusa, cuál es el que tiene la mayor altura sobre la hipotenusa?

Hemos visto algunas aplicaciones de la desigualdad (1). En este artículo estudiaremos otras desigualdades y las aplicaremos a distintos problemas. Dejaremos las demostraciones al cuidado del lector, pero en las publicaciones siguientes daremos siempre las demostraciones propuestas en la anterior, a fin de que el lector pueda verificar si su razonamiento ha sido correcto.

Las desigualdades de que hablaremos son conocidas desde hace mucho tiempo. Sin embargo, el primer estudio sistemático sólo fue hecho en 1934 por Hardy, Littlewood y Pólya en su célebre libro "Inequalities", en el que basan la teoría de las desigualdades en la noción de función convexa. En este trabajo seguiremos el mismo camino. Además del libro anterior nos hemos servido del primer volumen del tratado de Haupt, Aumann y Pauc: Differential und Integralrechnung y de los cursos dictados por el profesor Frédéric Riesz en la Universidad de Budapest y por el profesor Tibor Gallai en la Universidad Libre de Budapest.

1. Funciones continuas convexas. Una función $y = f(x)$ es continua si su gráfico no presenta saltos. Esta noción intuitiva puede reemplazarse por una definición precisa a partir de la cual se puede demostrar de una manera rigurosa que la mayor parte de las funciones elementales (por ejemplo las funciones $y = x$, $y = x^2$, $y = x^n$ (n entero), $y = a^x$, $y = \log x$, $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$) son continuas. No daremos esa definición, pero sí utilizaremos la continuidad de las funciones mencionadas. Una de las propiedades más importantes de una función continua es la propiedad de Darboux: si una función continua toma dos valores diferentes $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ $(x_1 < x_2)$, toma todos los valores comprendidos entre y_1 e y_2 en el intervalo $x_1 < x < x_2$. Por ejemplo, la función $y = \operatorname{sen} x$ de la que ya hemos indicado que es continua, es igual a 0 para $x = 0$ y a 1 para $x = \pi/2$; se puede estar seguro de que tomará todos los valores comprendidos entre 0 y 1 en el intervalo $0 < x < \pi/2$.

Una función se llamará *convexa* si una cuerda cualquiera de su gráfico deja el arco comprendido entre sus dos extremidades por debajo de ella (fig. 3).

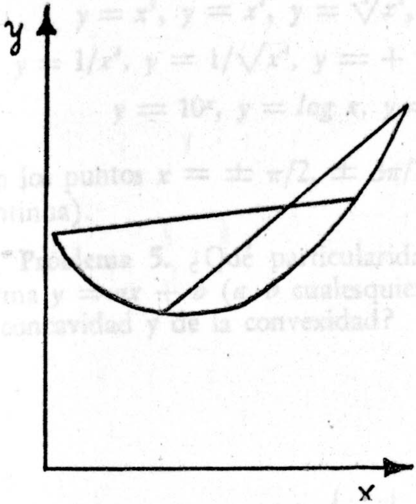

Fig. 3.

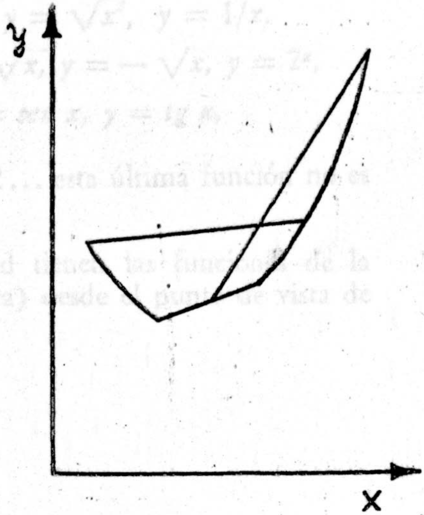

Fig. 4.

Notemos que más allá de las extremidades de la cuerda la curva está situada encima de la recta que soporta la cuerda. Diremos que una función es *convexa en el sentido amplio* si su gráfico está formado de arcos convexos y de segmentos de recta (fig. 4) en este caso un arco de la curva puede coincidir con la cuerda.

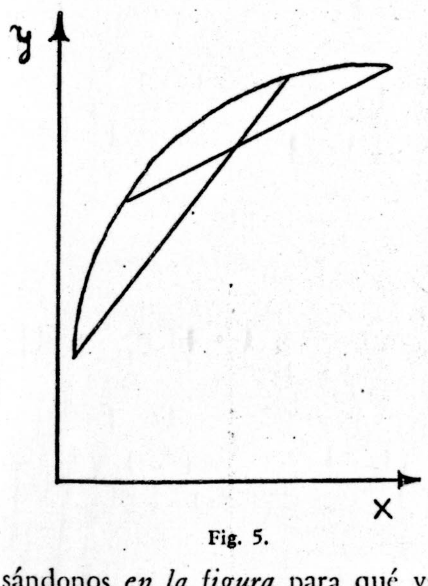

Fig. 5.

Se llamará *cóncava* una función cuando una cuerda cualquiera de su gráfico deja encima de ella el arco que subtiende (fig. 5). La *concavidad en el sentido amplio* se define de una manera análoga a la de la convexidad en el sentido amplio.

Problema 3. Si la función $y = f(x)$ es convexa, la función $y = -f(x)$ es cóncava, y recíprocamente.

Problema 4. Hagamos el gráfico de las funciones siguientes, y determinemos, basándonos *en la figura* para qué valores de x son convexas o cóncavas:

$$y = x^2,\ y = x^3,\ y = \sqrt[3]{x^2},\ y = \sqrt{x^3},\ \ y = 1/x,$$
$$y = 1/x^3,\ y = 1/\sqrt{x^3},\ y = +\sqrt{x},\ y = -\sqrt{x},\ y = 2^x,$$
$$y = 10^x,\ y = log\ x,\ y = sen\ x,\ y = tg\ x,$$

(en los puntos $x = \pm\ \pi/2, \pm\ 3\pi/2\ldots$ esta última función no es continua).

Problema 5. ¿Qué particularidad tienen las funciones de la forma $y = ax + b$ (a, b cualesquiera) desde el punto de vista de la concavidad y de la convexidad?