PROBLEMAS PROPUESTOS

Los problemas son señalados por cero, uno o dos asteriscos según su grado de dificultad. Las soluciones de los problemas deben ser enviadas a REVISTA DE MATEMÁTICAS ELEMENTALES, Universidad de los Andes, calle 18-A, carrera 1-E, Bogotá, Colombia, antes del 31 de agosto de 1953. La solución a cada problema debe venir en hoja por separado. Los alumnos de bachillerato deben enviar, junto con las soluciones, el nombre del colegio y de su profesor de matemáticas.

Proponemos nuevamente los problemas siguientes, de los cuales no han llegado soluciones correctas.

*21. Demostrar que el producto de tres enteros positivos consecutivos no puede ser un cuadrado perfecto, ni el doble de un cuadrado perfecto.

23. Resolver el sistema siguiente de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y &= 4, \\ xz + yu &= 7, \\ xz^2 + yu^2 &= 12, \\ xz^3 + yu^3 &= 21. \end{aligned}$$

26. Se dan en el espacio dos triángulos ABC y $A'BC$ teniendo el lado BC común, siendo AA' perpendicular al plano $A'BC$.

(a) Sea $A'K$ la altura del triángulo $A'BC$; ¿qué se puede afirmar de los planos $AA'K$ y ABC? Demostrarlo.

(b) Sean BL y BM las perpendiculares trazadas de B a $A'C$ y AC; mostrar que el plano LBM es perpendicular al plano del triángulo ABC. Si H' es el ortocentro del triángulo ABC y H el del triángulo $A'BC$, mostrar que H' es la proyección de H sobre el plano ABC.

(c) A se mueve sobre la semirrecta $A'x$ perpendicular al plano del triángulo fijo $A'BC$. Determinar el lugar del punto H'.

(d) Dado $A'B = c$, $A'C = b$, $AA' = m$ y el ángulo $BA'C = \alpha$, determinar el volumen del tetraedro $AA'BC$.

(Bachillerato, 1ª parte, Aix-Marseille, Francia, 1948).

43. Demostrar que cualquiera que sea el número entero positivo N, se pueden encontrar N enteros positivos consecutivos entre los cuales no hay ningún número primo.

44. Encontrar todos los números primos p tales que $p^2 + 2$ sea también un número primo.

T. Szele.

45. Siendo ξ un número real, denotemos por $[\xi]$ el número entero inmediatamente inferior o igual a ξ (véase p. 24). Demostrar que si n es un número entero positivo y ξ es un número real positivo, entonces

$$\left[\frac{[\xi]}{n}\right] = \left[\frac{\xi}{n}\right]$$

46. (Continuación). Si ξ es positivo

$$[2\xi] = [\xi] + \left[\xi + \frac{1}{2}\right].$$

47. Simplificar la siguiente suma:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3.1!} + \frac{1}{4.2!} + \ldots + \frac{1}{(n+1).(n-1)!}$$

48. Demostrar que si dos aristas de un tetraedro que no se cortan son iguales, entonces las secciones planas paralelas a estas dos aristas tienen todas el mismo perímetro.

Gy. Sz.-Nagy.

49. Demostrar que la longitud del radio del círculo inscrito en un triángulo está comprendida entre el tercio de la altura más grande y el tercio de la altura más pequeña.

Gy. Sz.-Nagy.