NUMEROS PRIMOS IV

POR J. HORVÁTH

14. El teorema de CHEBISHEFF, demostrado en el artículo anterior, se puede enunciar en una forma menos fuerte, en la cual es más fácil de demostrar y que basta para muchas aplicaciones (cf. **17**).

Para enunciar el teorema de CHEBISHEFF en la nueva forma, necesitaremos el concepto de **logaritmo.** Sea ζ un número real superior a 1. Cualquiera que sea el número real positivo ξ, existe un número real η, tal que $\xi = \zeta^{\eta}$. (Esto se demuestra con todo rigor en los cursos de Cálculo, véase p. ej. REY PASTOR, PI CALLEJA, TREJO, Análisis matemático, vol. I., pág. 115). El número η se llama el logaritmo de ξ con respecto a la base ζ y se escribe

$$\eta = \log_{\zeta} \xi$$

Son conocidas las propiedades del logaritmo expresadas por las fórmulas

$$\log_{\zeta} \xi_1 \xi_2 = \log_{\zeta} \xi_1 + \log_{\zeta} \xi_2,$$

$$\log_{\zeta} (1/\xi) = -\log_{\zeta} \xi, \; \log_{\zeta} \xi^{\rho} = \rho \log_{\zeta} \xi,$$

Además, si ζ y ω son dos números reales, superiores a uno, y si

$$\eta = \log_{\zeta} \xi, \; \theta = \log_{\omega} \xi, \quad \text{entonces} \quad \xi = \zeta^{\eta} = \omega^{\theta},$$

es decir

$$\eta \log_{\zeta} \zeta = \theta \log_{\zeta} \omega$$

y

$$\log_{\zeta} \omega = \frac{\eta}{\theta} = \frac{\log_{\zeta} \xi}{\log_{\omega} \xi},$$

de donde finalmente

$$(14, 1) \qquad \log_\xi \xi = \log_\xi \omega \, . \, \log_\omega \xi$$

Con otras palabras: si uno quiere cambiar la base del logaritmo, debe multiplicar el logaritmo con respecto a la base primitiva por el logaritmo de esta base con respecto a la nueva. Cuando en este artículo escribamos un logaritmo sin indicar la base, esto significará que la relación en que el logaritmo interviene vale con cualquier base.

Otra propiedad del logaritmo que necesitaremos y que se demuestra en los cursos de Cálculo (op. cit. p. 482) es la siguiente: cualquiera que sea el número positivo Γ, existe un número positivo ξ_0, que depende de Γ, tal que

$$\log \xi < \Gamma \xi \qquad \text{si } \xi > \xi_0.$$

De este resulta que si ξ es superior al valor de ξ_0 que corresponde a $\Gamma/2$, entonces:

$$\log \xi^2 < \Gamma \xi,$$

es decir, poniendo $\xi^2 = \eta$, obtenemos el resultado siguiente:

Cualquiera que sea el número positivo Γ, *existe* η_0, *que depende de* Γ, *tal que*

$$(14, 2) \qquad \log \eta < \Gamma \sqrt{\eta} \qquad \text{si } \eta > \eta_0.$$

Ya tuvimos la ocasión de introducir la función $\pi(\xi)$ en el número **12** (p. 33); para ξ real positivo llamamos $\pi(\xi)$ el número de los números primos inferiores o iguales a ξ. Enunciaremos entonces el teorema de CHEBISHEFF en la forma siguiente.

Existen dos números positivos α_1 *y* α_2 *tales que para* $\xi \geqslant 2$

$$(14, 3) \qquad \alpha_1 \frac{\xi}{\log \xi} \leqslant \pi(\xi) \leqslant \alpha_2 \frac{\xi}{\log \xi}.$$

Por el momento no nos importa la base de los logaritmos en (14, 3), porque al cambiar la base, por (14, 1) cambiarán simplemente los valores α_1 y α_2.

Observemos también que si podemos demostrar que α_2 se puede escoger tal que $\alpha_2 < 2\alpha_1$, entonces podremos ver que para ξ bastante grande existe un número primo entre ξ y 2ξ, que es un resultado sólo un poco menos fuerte que el que fue demostrado en el artículo precedente. En efecto por (14, 3)

$$\pi(2\xi) - \pi(\xi) \geqslant \alpha_1 \frac{2\xi}{log\ 2\xi} - \alpha_2 \frac{\xi}{log\ \xi} =$$

$$= \frac{(2\alpha_1 - \alpha_2)\ \xi\ log\ \xi - \alpha_2\ \xi\ log\ 2}{log\ \xi\ log\ 2\xi}$$

es decir

$$\pi(2\xi) - \pi(\xi) > 0 \quad \text{si} \quad log\ \xi > \frac{\alpha_2\ log\ 2}{2\alpha_1 - \alpha_2} > 0,$$

y $\pi(2\xi) > \pi(\xi)$ quiere decir precisamente que entre ξ y 2ξ hay un número primo. Sin embargo en este artículo no trataremos de obtener valores de α_1 y α_2 que verifican la relación mencionada.

Tenemos que introducir una notación de gran utilidad: la de la sumación. Sean $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ $n - m + 1$ números reales que dependen de los enteros entre m y n, entonces la suma

$$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n \quad \text{se escribirá:}$$

$$\sum_{i=m}^{n} a_i$$

En el caso de que $n < m$, este símbolo tendrá el valor cero por convención. *Ejemplos*:

$$\sum_{i=0}^{5} \gamma^i = 1 + \gamma + \gamma^2 + \gamma^3 + \gamma^4 + \gamma^5,$$

$$\sum_{i=2}^{6} (2i + 1) = 5 + 7 + 9 + 11 + 13,$$

$$\sum_{i=3}^{7} \frac{1}{2i} = \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14}, \quad \sum_{i=6}^{6} i^2 = 36.$$

Utilizaremos esta notación también en una forma un poco diferente. **En adelante** p, q, r **siempre denotarán números primos.** Si $\phi(p)$

es una cierta cantidad que depende del número primo p, la expresión

$$\sum_{p \leq \xi} \varphi(p)$$

denotará la suma de todos los valores $\phi(p)$ para p inferior o igual a ξ. *Ejemplos*:

$$\sum_{p \leq 16} p^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2,$$

$$\sum_{p \leq \xi} 1 = \sum_{p \leq \xi} p^0 = \pi(\xi),$$

porque en este último ejemplo $\phi(p) = p^0 = 1$ para cada p. De la misma manera hay que interpretar notaciones como $\sum_{p^\alpha \leq \xi}$, $\sum_{pq \leq \xi}$, etc. *Ejemplos*:

$$\sum_{p^2 \leq 30} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$$

porque ya $7^2 = 49 > 30$,

$$\sum_{pq \leq 20} (p + q) = (2 + 2) + (2 + 3) + (2 + 5) + (2 + 7) +$$
$$+ (3 + 2) + (3 + 3) + (3 + 5) + (5 + 2) + (5 + 3) +$$
$$+ (7 + 2) = 68.$$

Sentada esta notación vamos a introducir la función sumamente importante $\theta(\xi)$, definida por

$$\vartheta(\xi) = \sum_{p \leq \xi} log\, p$$

para ξ real positivo. Por ejemplo se tiene

$$\theta(1) = 0,\ \theta(2) = log\ 2,\ \theta(3) = log\ 6,$$

$$\theta(20, 6) = log\ 9\ 699\ 690.$$

Por la observación hecha arriba, la base del logaritmo considerado en la definición de $\theta(\xi)$ no importa por ahora; en el artículo siguiente vamos a tomar como base un número definido con toda precisión.

La expresión $\theta(\xi)$ tiene la ventaja de ser de manejo mucho más cómodo que $\pi(\xi)$ y sin embargo los teoremas que conciernen $\pi(\xi)$ se deducen fácilmente de teoremas sobre $\theta(\xi)$. Como primer ejemplo demostraremos el resultado siguiente:

Si existen dos números positivos β_1 y β_2 tales que

$$\beta_1\,\xi \leqslant \theta(\xi) \leqslant \beta_2\,\xi \tag{14, 4}$$

para $\xi \geqslant 2$, entonces existen dos números positivos α_1 y α_2 tales que se verifique (14, 3).

En efecto por un lado

$$\theta(\xi) = \sum_{p<\xi} \log p \leqslant \pi(\xi)\log\xi$$

puesto que en la suma hay $\pi(\xi)$ términos de los cuales cada uno es inferior o igual a $\log\xi$. Por consiguiente si $\beta_1\,\xi \leqslant \theta(\xi)$, tenemos

$$\beta_1\,\xi \leqslant \pi(\xi)\log\xi$$

que es la primera desigualdad (14, 3) con $\alpha_1 = \beta_1$. Por otro lado

$$\vartheta(\xi) \geqslant \sum_{\sqrt{\xi}<p<\xi} \log p \geqslant \frac{1}{2}\log\xi\ \{\pi(\xi) - \pi(\sqrt{\xi})\},$$

puesto que en la suma hay $\pi(\xi) - \pi(\sqrt{\xi})$ términos de los cuales cada uno es superior o igual a $\log\sqrt{\xi}$. Como $\pi(\sqrt{\xi}) \leqslant \xi$, obtenemos, si $\theta(\xi) \leqslant \beta_2\,\xi$,

$$\pi(\xi) \leqslant \frac{2\,\theta(\xi)}{\log\xi} + \pi(\sqrt{\xi}) \leqslant \frac{2\,\beta_2\,\xi}{\log\xi} + \sqrt{\xi}. \tag{14, 5}$$

Escribiendo (14, 2) en la forma

$$\sqrt{\xi} \leqslant \frac{\Gamma\xi}{\log\xi},$$

(14, 5) nos da para $\xi \geqslant \xi_0$:

$$\pi(\xi) \leqslant (2\,\beta_2 + \Gamma)\,\frac{\xi}{\log\xi}\,.$$

Puesto que para $2 \leqslant \xi < \xi_0$ seguramente hay un número positivo superior a $(\pi(\xi)\ log\ \xi)\ /\ \xi$, la segunda desigualdad (14, 3) se verifica también.

15. Para demostrar la existencia de dos números positivos β_1 y β_2 con los cuales es cierta la relación (14, 4), vamos a considerar el coeficiente binomial

$$\binom{2n}{n}$$

ya utilizado en el número **12** (cf. fórmula (12, 1), p. 31) para demostrar la otra forma del teorema de CHEBISHEFF.

1º Cada número primo p con $n < p \leqslant 2n$ divide a $\binom{2n}{n}$, entonces el producto de estos números primos también divide a $\binom{2n}{n}$ (cf. **6**, Vol. I., p. 74) y por el teorema 15 del número **2** (Vol. I., p. 26) el producto de estos números primos es inferior o igual a $\binom{2n}{n}$. Por otro lado $\binom{2n}{n} \leqslant 2^{2n}$ (cf. **11**, p. 29), entonces

$$\sum_{n<p\leqslant 2n} log\, p = \theta(2n) - \theta(n) \leqslant 2n\ log\ 2.$$

Escribiendo estas desigualdades para $n = 1, 2, 2^2, \ldots, 2^{m-1}$ y sumando, puesto que $\theta(1) = 0$,

$$\vartheta(2^m) = \sum_{i=1}^{m} \left\{\vartheta(2^i) - \vartheta(2^{i-1})\right\} \leqslant log\, 2 \sum_{i=1}^{m} 2^i < 2^{m+1} log\, 2.$$

Si ahora $2^{m-1} < \xi \leqslant 2^m$:

$$\theta(\xi) \leqslant \theta(2^m) < 2^{m+1}\ log\ 2 < 4\ \xi\ log\ 2,$$

que es la segunda desigualdad (14, 4) con $\beta_2 = 4\ log\ 2$.

2º Hemos visto (**12**, p. 31, fórmula (*)) que si p es un número primo con $1 < p < 2n$, entonces el exponente de la potencia más alta de p que divide a $\binom{2n}{n}$ es igual a

$$(15, 1) \qquad \alpha_p = \sum_{i=1}^{t} \left(\left[\frac{2n}{p^i}\right] - 2\left[\frac{n}{p^i}\right]\right),$$

donde t es definida por $p^t \leqslant 2n < p^{t+1}$. Por consiguiente

$$t \leqslant \frac{\log 2n}{\log p} < t + 1,$$

es decir

$$t = \left[\frac{\log 2n}{\log p}\right].$$

Como por la relación $[2\rho] - 2[\rho] \leqslant 1$ (p. 31) cada término en la suma (15, 1) es inferior o igual a uno, se tiene

$$a_p \leqslant \left[\frac{\log 2n}{\log p}\right].$$

Por otro lado

$$\binom{2n}{n} = \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdots \frac{n+n}{n} > 2^n,$$

entonces siendo

$$\log \binom{2n}{n} = \sum_{p \leqslant 2n} \alpha_p \log p,$$

obtenemos que

$$n \log 2 \leqslant \sum_{p \leqslant 2n} \left[\frac{\log 2n}{\log p}\right] \log p$$

Ahora

$$\text{si } 1 < p \leqslant \sqrt{2n}, \ \left[\frac{\log 2n}{\log p}\right] \leqslant \frac{\log 2n}{\log p},$$

$$\text{si } \sqrt{2n} < p \leqslant 2n, \ \left[\frac{\log 2n}{\log p}\right] \leqslant 1.$$

Luego

$$n \log 2 \leqslant \sum_{p \leqslant \sqrt{2n}} \log 2n + \sum_{p \leqslant 2n} \log p \leqslant \sqrt{2n} (\log 2n) + \vartheta(2n).$$

es decir

$$\theta(2n) \geqslant n \log 2 - \sqrt{2n} (\log 2n).$$

Ahora poniendo en (14, 2) $\Gamma = (\log 2) / 8$ obtenemos

$$\sqrt{2n}\ log\ 2n < \frac{log\ 2}{4}\quad n$$

para n bastante grande, sea para $n \geqslant n_0$. Luego

$$\theta(2n) \geqslant n\ log\ 2 - \frac{n}{4} log\ 2 = \frac{3}{4} n\ log\ 2 \geqslant \frac{1}{2}(n+1)\ log\ 2.$$

Si $2n \leqslant \xi < 2n + 2\ (n \geqslant n_0)$:

$$\theta(\xi) \geqslant \theta(2n) \geqslant \frac{1}{2}\ (n+1)\ log\ 2 > \frac{1}{4}\ \xi\ log\ 2.$$

Ahora entre 2 y n_0 la expresión $\theta(\xi)/\xi$ es siempre positiva, luego superior a un número positivo δ. Tomando para β_1 el más pequeño de los números δ y $(log\ 2)/4$, obtenemos que para $\xi \geqslant 2$

$$\theta(\xi) \geqslant \beta_1\ \xi,$$

que es la primera desigualdad (14, 4).

Observación. El teorema de CHEBISHEFF en la forma (14, 3) se puede demostrar trabajando directamente con la función $\pi(\xi)$ en vez de la función $\theta(\xi)$, véase el libro citado de LANDAU, p. 66.

16. Para preparar los dos últimos artículos de esta serie, introduciremos unos conceptos sencillos y básicos del cálculo infinitesimal. Citaremos también unos resultados bien conocidos, pero en general no daremos demostraciones, puesto que no puede ser la finalidad de estos artículos dar una introducción al Cálculo.

Si tenemos una sucesión infinita de números reales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ se dice que esta sucesión de números tiende a α cuando $n \longrightarrow \infty$ ("n tiende a infinito"), si por pequeño que sea el número positivo ϵ, existe un número entero positivo n_1, que depende de ϵ, tal que $|\alpha_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$, si sólo el número entero n es superior a n_1. En este caso se dice también que α es el límite de α_n (para $n \longrightarrow \infty$) y se escribe

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha.$$

De manera semejante, sea $f(\xi)$ una función definida para $\xi \geqslant \xi_0$. Se dice que $f(\xi)$ tiende a Φ cuando $\xi \longrightarrow \infty$, si por pequeño que sea el número positivo ϵ, existe un número real ξ_1, que depende de ϵ, tal que $|f(\xi) - \phi| < \epsilon$, si sólo ξ es un número real superior a ξ_1. En este caso se dice también que ϕ es el límite de $f(\xi)$ (para $\xi \longrightarrow \infty$) y se escribe

$$\lim_{\xi \to \infty} f(\xi) = \Phi.$$

Por ejemplo un resultado del Nº **14** (p. 55) se puede expresar diciendo que

$$\lim_{\xi \to \infty} \frac{\log \xi}{\xi} = 0.$$

Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ es una sucesión infinita de números reales, la expresión

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots$$

ó

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \tag{16, 1}$$

se llama una **serie infinita.** Los números α_n se llaman los términos de la serie. Las sumas

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

se llaman las **sumas parciales** de la serie infinita (16, 1). Si existe un número σ tal que

$$\sigma = \lim_{n \to \infty} \sigma_n ,$$

se dice que la serie infinita (16, 1) es **convergente**, en este caso σ se llama la **suma** de la serie y se escribe

$$\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$$

Si no existe tal número σ, se dice que la serie (16, 1) es **divergente.**

Si por ejemplo $\alpha_i = \gamma^i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, tenemos:

$$\sigma_n = \frac{\gamma^{n+1} - 1}{\gamma - 1} = \frac{1}{1-\gamma} - \frac{\gamma^{n+1}}{1-\gamma}$$

(cf. Vol. I., p. 24). Si $|\gamma| < 1$ entonces $\lim\limits_{n \to \infty} \gamma^{n+1} = 0$ y

$\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \dfrac{1}{1-\gamma}$, entonces en este caso la serie $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \gamma^i$, que

se llama *serie geométrica,* es convergente y su suma es $\dfrac{1}{1-\gamma}$. Se ve fácilmente que si $|\gamma| \geqslant 1$, entonces la serie geométrica es divergente.

Si los números α_n son todos positivos, las sumas parciales σ_n forman una sucesión creciente, es decir para cada $n \geqslant 1$, $\sigma_n \leqslant \sigma_{n+1}$ En este caso es bien sabido que σ existe si y sólo si la sucesión σ_n es acotada, es decir si existe un número Δ tal que $\sigma_n \leqslant \Delta$ para cada $n \geqslant 1$. Además para las series con términos positivos valen los siguientes criterios de comparación:

1º Si $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ y $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \beta_i$ son dos series con términos positivos, si $\alpha_i \leqslant \beta_i$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$ y si la segunda serie es convergente, entonces la primera serie también es convergente.

2º Si $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ y $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \beta_i$ son dos series con términos positivos, si $\alpha_i \leqslant \beta_i$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$ y si la primera serie es divergente, entonces la segunda serie también es divergente.

Entre las series con términos positivos, las series de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}$$

tienen un papel importante. Es conocido que esta serie es convergente si $\beta > 1$ y es divergente si $\beta \leqslant 1$. En particular la serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

llamada *serie armónica,* es divergente. Este último hecho se ve muy fácilmente. En efecto

$$\frac{1}{2^m+1} + \frac{1}{2^m+2} + \ldots + \frac{1}{2^{m+1}} \geqslant \frac{2^{m+1} - 2^m}{2^{m+1}} = \frac{1}{2},$$

de donde

$$\sigma_{2^m} = 1 + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2^i+1} + \frac{1}{2^i+2} + \cdots + \frac{1}{2^{i+1}} > \frac{m}{2},$$

luego la sucesión σ_n no es acotada, la serie armónica es divergente.

Un resultado semejante es que la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\beta} n}$$

es convergente si $\beta > 1$ y es divergente si $\beta \leqslant 1$.

Sea ahora $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ la sucesión creciente de los números primos. Por ejemplo $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_{12} = 37$. Demostraremos que *la serie*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i}$$

es divergente.

Por la relación evidente $\pi(p_i) = i$ y por la primera desigualdad (14, 3)

(16, 2) $$\alpha_1 \frac{p_i}{\log p_i} \leqslant \pi(p_i) = i$$

Por (14, 2)

(16, 3) $$\frac{\log p_i}{\sqrt{p_i}} \leqslant \alpha,$$

si sólo $p_i > \eta_0$. De (16, 2) y (16, 3) resulta

$$\frac{\log p_i}{\sqrt{p_i}} \leqslant \alpha_1 \leqslant \frac{i \log p_i}{p_i}$$

o sea

$$\sqrt{p_i} \leqslant i, \; p_i \leqslant i^2; \quad \log p_i \leqslant 2 \log i.$$

Utilizando otra vez (16, 2) obtenemos de esta última desigualdad

$$\alpha_1 p_i \leqslant i \log p_i \leqslant 2\, i \log i,$$

es decir

$$\frac{1}{p_i} \geqslant \frac{\alpha_1}{2} \frac{1}{i \log i}$$

para $p_i \geqslant \eta_0$. De esta desigualdad y del 2º criterio de comparación ya resulta el teorema, puesto que la serie

$$\sum_{i \geqslant \eta_0} \frac{1}{i \log i}$$

es divergente.

17. En este número daremos otra demostración, debida a Harold N. Shapiro, completamente diferente de la primera, del teorema de Chebisheff mencionado en el Nº **14.**

Vamos a introducir primero dos notaciones muy cómodas, debidas a Bachmann y a Landau. Sea $f(\xi)$ una función definida para $\xi \geqslant \xi_0$ y sea $g(\xi)$ una función positiva definida para $\xi \geqslant \xi_0$.

Si existe un número positivo Γ tal que

$$\frac{|f(\xi)|}{g(\xi)} < \Gamma$$

para $\xi \geqslant \xi_0$, escribiremos $f(\xi) = O\,(g(\xi))$.

Si

$$\lim_{\xi \to \infty} \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = 0,$$

escribiremos $f(\xi) = o\,(g(\xi))$.

Ejemplos:

1º $2\xi + 3 = O\,(2\xi)$, puesto que

$$\frac{2\xi + 3}{2\xi} = 1 + \frac{3}{2\xi} < 3, \qquad \text{si } \xi \geqslant 1.$$

2º $\log \xi = o\,(\xi)$ (cf. p. 62).

3º La ecuación (14, 2) expresa el hecho de que

$$\log \xi = o\,(\sqrt{\xi}).$$

4º De manera semejante se puede deducir de $log\ \xi = o(\xi)$ que, cualesquiera que sean $\alpha > o$ y $\beta > 0$,

$$log\ \xi^{\alpha} = o(\xi^{\beta}).$$

Hay una notación análoga para sucesiones. $\alpha_n = O(\beta_n)$ significa que $|\alpha_n|/\beta_n$ es acotado y $\alpha_n = o(\beta_n)$ significa que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0.$$

Consideremos la sucesión de números

$$\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

1º *La sucesión* α_n *es creciente.* Demostremos primero la desigualdad

$$(17, 1) \qquad 1 + n\xi < (1 + \xi)^n,$$

que es válida cualesquiera que sean $\xi > -1$ $(\xi \neq 0)$ y el número entero n superior a 1. Haremos la demostración por inducción.

Para $n = 2$ la desigualdad es cierta:

$$1 + 2\xi < 1 + 2\xi + \xi^2 = (1 + \xi)^2,$$

puesto que $\xi^2 > 0$. Supongamos entonces que la desigualdad sea válida para $n = m$. Entonces, puesto que $1 + \xi > 0$, obtenemos

$$(1 + \xi)^{m+1} = (1 + \xi)^m (1 + \xi) > (1 + m\xi)(1 + \xi) =$$

$$= 1 + (m + 1)\xi + m\xi^2 > 1 + (m + 1)\xi,$$

es decir la desigualdad sigue siendo válida para $n = m + 1$. (17, 1) queda luego completamente demostrada.

Ahora

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) =$$

$$= \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n-1}{n}\right)^n \frac{n}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} \, .$$

Poniendo en (17, 1) $\xi = -1/n^2$ (con $n \geqslant 2$) da:

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{n}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$$

Entonces

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} > \frac{n-1}{n} \; \frac{n}{n-1} = 1 \, ;$$

es decir $\alpha_{n-1} < \alpha_n$.

2º *α_n es inferior a 3 para todo n.* Por el teorema binomial

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3,$$

donde hemos utilizado la desigualdad evidente $k! \geqslant 2^{k-1}$ para $k \geqslant 1$.

En el número siguiente volveremos a estudiar la sucesión α_n.

Demostremos ahora la fórmula

$$(17, 2) \qquad \log n! = n \log n + O(n) \, .$$

Se tiene

$$\log n! = \sum_{i=1}^{n-1} \log (i+1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ (i+1) \log (i+1) - i \log i - i \log \left(1 + \frac{1}{i}\right) \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \{ (i+1) \log (i+1) - i \log i \} - \sum_{i=1}^{n-1} i \log \left(1 + \frac{1}{i}\right) =$$

$$= n \log n - \sum_{i=1}^{n-1} \log \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i}.$$

Ahora, puesto que la sucesión a_n es creciente,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \log \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i} \leqslant n \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \leqslant n \log 3 = O(n),$$

lo que demuestra completamente la fórmula (17, 2).

Consideremos ahora la expresión $n!$. En vista de la relación de Legendre (10, 1) (p. 23) podemos escribir

$$\log n! = \sum_{p^i \leqslant n} \log p \left[\frac{n}{p^i}\right],$$

o, utilizando la expresión (17, 2).

$$\text{(17, 3)} \qquad \sum_{p^i \leqslant n} \log p \left[\frac{n}{p^i}\right] = n \log n + O(n).$$

Consideremos en la suma todos los términos donde i es superior a 2. Obtenemos

$$\sum_{\substack{p^i \leqslant n \\ i \geqslant 2}} \log p \left[\frac{n}{p^i}\right] \leqslant \sum_{p \leqslant n} \log p \sum_{i=2}^{\infty} \left[\frac{n}{p^i}\right] \leqslant$$

$$\leqslant n \sum_{p \leqslant n} \log p \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{p^i} = n \sum_{p \leqslant n} \frac{\log p}{p(p-1)} \leqslant$$

$$\leqslant n \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\log i}{i(i-1)} = O(n),$$

puesto que

$$\frac{\log i}{i(i-1)} \leqslant \frac{1}{(i-1)^{3/2}} \qquad \text{para } i > i_0$$

y la serie

$$\sum_{i \geq i_0} \frac{1}{(i-1)^{3/2}}$$

es convergente.

De (17, 3) resulta entonces

$$\sum_{p \leq n} \left[\frac{n}{p}\right] \log p = n \log n + O(n). \tag{17, 4}$$

Si ξ es un número real positivo, entonces, utilizando la relación

$$\left[\frac{\xi}{n}\right] = \left[\frac{[\xi]}{n}\right]$$

(cf. Problema 45, p. 48), obtenemos

$$\sum_{p \leq \xi} \left[\frac{\xi}{p}\right] \log p = [\xi] \log [\xi] + O(\xi).$$

Ahora

$$\xi \log \xi - [\xi] \log [\xi] = \xi \log \frac{\xi}{[\xi]} + (\xi - [\xi]) \log \xi =$$

$$= O(\xi) + O(\log \xi) = O(\xi).$$

Así resulta de (17, 4) finalmente la fórmula

$$\sum_{p \leq \xi} \left[\frac{\xi}{p}\right] \log p = \xi \log \xi + O(\xi).$$

De esta fórmula Shapiro deduce el teorema de Chebisheff con ya ayuda del teorema siguiente.

Teorema de Shapiro. *Sea ρ_n una sucesión de números positivos con $\rho_1 = 0$ y supongamos que para $\xi > 0$*

$$P(\xi) = \sum_{n \leq \xi} \left[\frac{\xi}{n}\right] \rho_n = \xi \log \xi + O(\xi). \tag{17, 5}$$

Sea $\Phi(\xi) = \sum_{n \leq \xi} \rho_n$. *Entonces existen dos números positivos β_1 y β_2 y un número positivo ξ_0, tales que*

$$\beta_1 \xi \leqslant \phi(\xi) \leqslant \beta_2 \xi \qquad \text{para } \xi > \xi_0. \tag{17, 6}$$

De aquí el teorema de CHEBISHEFF sigue inmediatamente poniendo

$$\rho_n = \log n \quad \text{si } n \text{ es un número primo,}$$

$$\rho_n = 0 \quad \text{si } n \text{ no es primo,}$$

porque en este caso

$$\Phi(\xi) = \sum_{n \leq \xi} \rho_n = \sum_{p \leq \xi} \log p = \vartheta(\xi).$$

DEMOSTRACION DEL TEOREMA. Puesto que siempre $[2\rho] - 2[\rho] \geqslant 0$ (cf. p. 31)

$$\mathrm{P}(\xi) - 2\,\mathrm{P}\left(\frac{\xi}{2}\right) = \sum_{n \leq \xi} \left\{\left[\frac{\xi}{n}\right] - 2\left[\frac{\xi}{2n}\right]\right\} \rho_n \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{\frac{\xi}{2} < n \leq \xi} \left[\frac{\xi}{n}\right] \rho_n = \sum_{\frac{\xi}{2} < n \leq \xi} \rho_n = \Phi(\xi) - \Phi\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Por la hipótesis (17, 5)

$$\mathrm{P}(\xi) - 2\mathrm{P}\left(\frac{\xi}{2}\right) = \xi \log \xi - \xi \log \frac{\xi}{2} + \mathrm{O}(\xi) = \mathrm{O}(\xi).$$

Comparando estas dos relaciones resulta que existe una constante positiva γ_1 tal que

$$\phi(\xi) - \phi\left(\frac{\xi}{2}\right) \leqslant \gamma_1 \xi.$$

Entonces (cf. p. 59)

$$\Phi(2^m) = \sum_{i=1}^{m} \left\{\Phi(2^i) - \Phi(2^{i-1})\right\} <$$

$$< \gamma_1 \sum_{i=1}^{m} 2^i \leq \gamma_1 2^{m+1}$$

Si ahora $2^{m-1} < \xi \leqslant 2^m$:

$$\phi(\xi) \leqslant \phi(2^m) \leqslant \gamma_1 2^{m+1} < 4\gamma_1 \xi,$$

que es la segunda desigualdad (17, 6) con $\beta_2 = 4\gamma_1$.

Por otro lado, puesto que

$$0 \leqslant \frac{\xi}{n} - \left[\frac{\xi}{n}\right] < 1$$

y, como acabamos de ver, $\phi(\xi) = O(\xi)$,

$$\sum_{n \leqslant \xi} \left[\frac{\xi}{n}\right] \rho n = \sum_{n \leqslant \xi} \rho n \left\{\frac{\xi}{n} + O(1)\right\} =$$

$$= \xi \sum_{n \leqslant \xi} \frac{\rho_n}{n} + O\Big(\phi(\xi)\Big) = \xi \sum_{n \leqslant \xi} \frac{\rho_n}{n} + O(\xi).$$

Comparando esta relación con (17, 5), obtenemos

$$\Lambda(\xi) = \sum_{n \leqslant \xi} \frac{\rho_n}{n} = log\ \xi + O(1),$$

es decir $\Lambda(\xi)$ se puede escribir en la forma

$$\Lambda(\xi) = log\ \xi + \lambda(\xi),$$

donde $|\lambda(\xi)| \leqslant \gamma_2$ para $\xi > \xi_0$, siendo γ_2 una constante positiva.

Pongamos $\beta_1 = \zeta^{-2\gamma_2^{-1}}$, donde ζ es la base de los logaritmos con los cuales estamos trabajando. Entonces

$$\Lambda(\xi) - \Lambda(\beta_1\xi) = \sum_{\beta_1\xi < n \leqslant \xi} \frac{\rho_n}{n} =$$

$$= log\ \xi - log\ (\beta_1\xi) + \lambda(\xi) - \lambda(\beta_1\xi) =$$

$$= log\ \frac{1}{\beta_1} + \lambda(\xi) - \lambda(\beta_1\ \xi).$$

Por consiguiente, utilizando la definición de β_1,

$$\frac{1}{\beta_1\xi}\phi(\xi) \geqslant \frac{1}{\beta_1\xi} \sum_{\beta_1\xi < n < \xi} \rho_n \geqslant$$

$$\geqslant \log \frac{1}{\beta_1} - 2\gamma_2 = 2\gamma_2 + 1 - 2\gamma_2 = 1,$$

es decir

$$\phi(\xi) \geqslant \beta_1 \xi$$

para $\xi > \xi_0$, que es la primera desigualdad (17, 6).

Bibliografía

HAROLD N. SHAPIRO: On the number of primes less than or equal *x*. Proceedings of the American Mathematical Society, **1** (1950) pp. 346-348.