SOLUCION DE PROBLEMAS

4. Demostrar que si n es impar, $46^n + 296 \times 13^n$ es divisible por 1947.

1ª *solución*. $46^n + 296 \times 13^n = 46^n + 13^n + 295 \times 13^n$ es divisible por 59, puesto que $295 = 5 \times 59$ y, siendo n impar, $46^n + 13^n = (46 + 13)(46^{n-1} - 46^{n-2} \times 13 + \ldots + 13^{n-1})$. Por otro lado $46^n + 296 \times 13^n = 46^n - 13^n + 297 \times 13^n$ es divisible por 33, puesto que $297 = 9 \times 33$ y
$46^n - 13^n = (46 - 13)(46^{n-1} + 46^{n-2} \times 13 + \ldots. + 13^{n-1})$.
Ahora bien $33 \times 59 = 1947$.

Juan Azuero Rojas.

2ª *solución*. Por inducción completa. Para $n = 1$: $46 + 296 \times 13 = 3894 = 2 \times 1947$. Sea para $n = 2m - 1$: $46^{2m-1} + 296 \times 13^{2m-1} = k.\ 1947$, entonces

$$46^{2m+1} + 296 \times 13^{2m+1} = 46^{2m+1} + 13^2 (k\ .\ 1947 - 46^{2m-1}) =$$
$$= k\ .\ 13^2 \times 1947 + (46^2 - 13^2)\ 46^{2m-1}$$

y $46^2 - 13^2 = 1947$.

Joaquín Alvarez Arango.

Otra solución de: *Ernesto Gutiérrez Bodmín.*

27. Encontrar todas las soluciones de la ecuación diofántica:

$$x + y = xy.$$

Solución. Para cualquier número real t diferente de cero, las expresiones $x = 1 + t$, $y = 1 + 1/t$ son soluciones de la ecuación, puesto que

$$x + y = 2 + t + \frac{1}{t} = xy.$$

Por otro lado si $x = 1 + t$, de

$$1 + t + y = (1 + t)\ y$$

resulta $y = 1 + 1/t$.

Joaquín Alvarez Arango.

Otras soluciones de: *Juan Gómez Mora, Ernesto Gutiérrez Bodmín.*

29. **Crucigrama.** *Horizontales.* a) El año de nacimiento del señor Rodríguez. d) Nueve veces la edad del señor Rodríguez al nacer de su nieto Pepe, al principio de un mes de mayo. f) Once veces el número de nietos del señor Rodríguez. i) La edad del señor Rodríguez a su muerte. j) La raíz cuadrada del año de nacimiento del señor Rodríguez.

Verticales. a) El cubo del día en el cual nació el señor Rodríguez en un mes de noviembre. b) La calle en que vive el señor Rodríguez. c) La edad del señor Rodríguez en diciembre 1897. e) La edad de Pepe (en días) a la muerte de su abuelo el 1º de marzo de 1934. g) La edad del señor Rodríguez 20 años antes de su muerte. h) La edad del señor Rodríguez 40 años antes de su muerte.

Solución. Por i) Sr. Rodríguez no tenía 100 años a su muerte, entonces por e) nació después de 1834. Por c) Sr. Rodríguez nació antes de 1897. Por j) el año de nacimiento del Sr. Rodríguez es un cuadrado perfecto. El único cuadrado perfecto entre 1834 y 1897 es $1849 = 43^2$. Entonces $j = 43$, a) horizontal $= 1849$, $h = 44$, $g = 64$, $i = 84$. a) Vertical es un cubo perfecto de cuatro cifras empezando por 1 y terminando por 8, tal número es sólo $12^3 = 1728$. Por consiguiente $f = 264$ es divisible por once, Sr. Rodríguez tiene 24 nietos. Por a) vertical Sr. Rodríguez nació el 12 de noviembre de 1849, entonces $c = 48$. d) Empieza por 7, termina por 8, para que sea divisible por 9 debe ser igual a $738 = 9 \times 82$. Por consiguiente Sr. Rodríguez tenía 82 años cuando nació Pepe, es decir Pepe nació en mayo de 1932. Entre el 1º de mayo de 1932 y el 1º de marzo de 1934 hay 669 días. Entonces $e = 663$ y Pepe nació el 7 de mayo. Finalmente $b = 83$.

a 1	b 8	c 4	9
d 7	3	8	e 6
f 2	g 6	h 4	6
i 8	j 4	4	3

Juan Gómez Mora.

Otras soluciones de: *Joaquín Alvarez Arango, Ernesto Gutiérrez Bodmín, Raúl López Araújo, Guillermo Tello.*

30. Dados los polinomios

$$P = 196x^9 + 98x^8 + 394x^7 + 197x^6 - 2104x^5 - 1052x^4 -$$

$$- 2326x^3 - 1163x^2 - 600x - 300;$$

$$Q = 2x^{10} + x^9 + 8x^8 + 4x^7.$$

Hallar los valores de x que satisfagan a la ecuación $P \,/\, Q = 0$.

(Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Examen de Ingreso, Madrid, 1949).

Solución. $P \,/\, Q = 0$ tiene las mismas soluciones que $P = 0$, *a no ser que haya raices comunes.* Se puede transformar P:

$$P = 98x^8 (2x + 1) + 197x^6 (2x + 1) - 1052x^4 (2x + 1) -$$

$$- 1163x^2 (2x + 1) - 300 (2x + 1) = (2x + 1) (98x^8 + 197x^6 -$$

$$- 1052x^4 - 1163x^2 - 300),$$

$$Q = x^7 (2x^3 + x^2 + 8x + 4) = x^7 [x^2 (2x + 1) +$$

$$4(2x + 1)] = x^7 (2x + 1) (x^2 + 4).$$

Los dos polimonios tienen común el factor $2x + 1$; la descomposición de Q sugiere la posibilidad de que $x^2 + 4$ también sea factor de P; al reemplazar en P, x^2 por $- 4$, da efectivamente 0 y se puede dividir P por $x^2 + 4$, lo que da

$$P = (2x + 1) (x^2 + 4) (98x^6 - 195x^4 - 272x^2 - 75).$$

Busco una raíz entera para x^2 en el último paréntesis; debe ser un divisor de 75. Después de ver que $+ 1$ y $- 1$ no son raices, ensayo $x^2 = + 3$, y veo que sí es raíz. Dividiendo obtengo:

$$P = (2x + 1) (x^2 + 4) (x^2 - 3) (98x^4 + 99x^2 + 25).$$

El último factor es ahora bicuadrado, de modo que sus raices se sacan de la fórmula. Son, para x^2, $-1/2$ y $-25/49$, lo cual da para ese paréntesis la descomposición: $(2x^2 + 1) (49x^2 + 25)$.

Finalmente:

$$P = (2x + 1) (x^2 + 4) (x^2 - 3) (2x^2 + 1) (49x^2 + 25).$$

Luego

$$\frac{P}{Q} = \frac{(2x+1)\ (x^2+4)\ (x^2-3)\ (2x^2+1)\ (49x^2+25)}{x^7\ (2x+1)\ (x^2+4)} =$$

$$= \frac{(x^2-3)\ (2x^2+1)\ (49x^2+25)}{x^7}$$

se anula para $x = \pm \sqrt{3},\ x = \pm i\sqrt{2}/2,\ x = \pm i\ 5/7$.

Siendo el grado de Q superior al de P, se puede agregar $x = \pm \infty$.

Guillermo Tello.

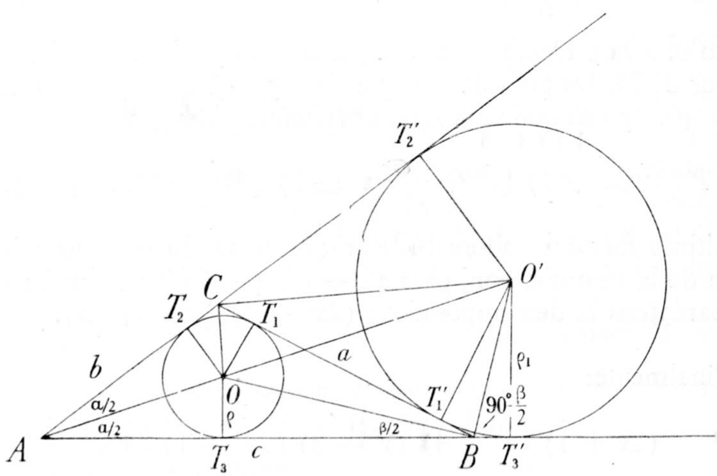
34. Sea ABC un triángulo, a, b, c sus lados y α, β, γ sus ángulos. Pongamos

$$S = \frac{a+b+c}{2}$$

$s_1 = s - a,\ s_2 = s_2 - b,\ s_3 = s - c$, y sean $\rho, \rho_1\ \rho_2, \rho_3$ los radios de los círculos tangentes al triángulo. Demostrar que el área T del triángulo es igual a

$$T = \rho s = \rho_1\ s_1 = \rho_2\ s_2 = \rho_3\ s_3.$$

Solución. Sea O el centro del círculo inscrito y O′ el centro del



círculo tangente exteriormente al lado a. Entonces

$$T = T_{OCA} + T_{OAB} + T_{OBC} = \frac{\rho b}{2} + \frac{\rho c}{2} + \frac{\rho a}{2} = \rho s,$$

$$T = T_{O'CA} + T_{O'AB} - T_{O'BC} = \frac{\rho_1 b}{2} + \frac{\rho_1 c}{2} - \frac{\rho_1 a}{2} = \rho_1 s_1,$$

y las otras dos expresiones se obtienen intercambiando los vértices entre sí.

Joaquín Alvarez Arango

Otra solución de: *Iván Restrepo Lince* (Colegio San Ignacio, Medellín).

35. (Continuación). Demostrar que

$$T = ss_1 \, tg\,(\alpha/2) = ss_2 \, tg\,(\beta/2) = ss_3 \, tg\,(\gamma/2),$$

y que

$$T = s_2 s_3 \, ctg\,(\alpha/2) = s_1 s_3 \, ctg\,(\beta/2) = s_1 s_2 \, ctg\,(\gamma/2).$$

36. (Continuación). Demostrar que

$$T = \rho\rho_1 \, ctg\,(\alpha/2) = \rho\rho_2 \, ctg\,(\beta/2) = \rho\rho_3 \, ctg\,(\gamma/2),$$

y que

$$T = \rho_2 \rho_3 \, tg\,(\alpha/2) = \rho_1 \rho_3 \, tg\,(\beta/2) = \rho_1 \rho_2 \, tg\,(\gamma/2).$$

Solución a los problemas 35 *y* 36. Sean T_1, T_2, T_3 los puntos en los cuales el círculo inscrito toca al triángulo y T'_1, T'_2, T'_3 los puntos en los cuales el círculo tangente exteriormente al lado a toca los lados, resp. las prolongaciones de estos (véase fig.).

Entonces

$$CT_1 = CT_2, \; AT_2 = AT_3, \; BT_3 = BT_1,$$

y

$$a = CT_1 + BT_1 = s - AT_2,$$

es decir

$$AT_2 = s - a = s_1,$$

y de la misma manera

$$BT_1 = s_2,\ CT_1 = s_3.$$

Por otro lado

$$BT_3' = BT_1',\ CT_1' = CT_2',\ AT_2' = AT_3',$$

entonces

$$AT_2' = s,\ BT_1' = s - c = s_3,\ CT_1' = s_2.$$

Puesto que O es el punto de intersección de tres bisectrices interiores y O' es el punto de intersección de una bisectriz interior y de dos bisectrices exteriores, del triángulo rectángulo BOT_1, que tiene ángulo $\beta/2$ en B, resulta

$$\rho = s_2\ tg\ (\beta/2),$$

del triángulo rectángulo $BO'T'_3$, que tiene ángulo $90° - (\beta/2)$ en B, resulta

$$\rho_1 = s_3\ ctg\ (\beta/2),\ s_3 = \rho_1\ tg\ (\beta/2)$$

y del triángulo $AO'T_3'$, que tiene ángulo $\alpha/2$ en A, resulta

$$s = \rho_1\ ctg\ (\alpha/2).$$

Reemplazando en estas relaciones $T = \rho_1 s_1 = \rho_2 s_2 = \rho_3 s_3 = \rho s$ (Problema 34) obtenemos

$$T = ss_2\ tg\ (\beta/2) = s_1 s_3\ ctg\ (\beta/2) = \rho\rho_1\ ctg\ (\alpha/2) =$$

$$= \rho_1 \rho_3\ tg\ (\beta/2).$$

Las otras expresiones se obtienen intercambiando los vértices entre sí.

Joaquín Alvarez Arango.

37. Sea ABC un triángulo rectángulo en A. Sea AH la altura perpendicular a la base BC. Pongamos $BC = a$, $AC = x$, $AB = y$, $AH = h$.

a) Calcular h en función de a, x, y.

b) Dar en función de x, y la expresión del volumen V generado al girar del triángulo ABC alrededor del lado AB.

c) Dar en función de x, y la expresión del volumen V' generado al girar del triángulo ABC alrededor del lado AC.

d) Determinar la condición para que la suma $V + V'$ sea igual al volumen S de la esfera con centro A y tangente a BC.

e) Dados a y h, determinar x e y para que $V + V' = S$. ¿Cuál es la condición para que el problema sea posible?

(Bachillerato, 1ª parte, Lyon, Francia, 1948).

Solución. a) Los triángulos ABC y HAC son semejantes, entonces

$$\frac{y}{a} = \frac{h}{x}, \quad h = \frac{xy}{a} .$$

b) $$V = \frac{\pi x^2 y}{3} .$$

c) $$V' = \frac{\pi x y^2}{3} .$$

d) La condición es

$$\frac{4\pi h^3}{3} = \frac{4\pi x^3 y^3}{3 a^3} = V + V' = \frac{\pi}{3} xy\,(x + y),$$

es decir

$$4x^2 y^2 = a^3 (x + y).$$

e) x e y deben verificar

$$x + y = \frac{4h^2}{a}$$

y se necesita que sea $x + y > a$, es decir $a^2 < 4h^2$, $a < 2h$.

Ernesto Gutiérrez Bodmín.

Otra solución de: *Juan Gómez Mora.*