SOLUCION DE PROBLEMAS

50. ¿Cuáles son los números naturales que no se pueden escribir como suma de varios números naturales consecutivos?

Solución. Todo número natural N que es la suma de k números naturales consecutivos, siendo el menor de ellos a, es de la forma

$$N = a + (a + 1) + \ldots + (a + k - 1) =$$

$$= \frac{k}{2} (2a + k - 1) = k \left(\frac{2a + k - 1}{2} \right),$$

de donde se ve que N debe contener por lo menos un factor impar > 1, puesto que si k es par, $2a + k - 1$ es impar.

Inversamente supongamos que N contiene un factor impar > 1. Entonces $2N = p.\, q$, donde $p > 1$ es impar y $q > 1$ es par. Poniendo

$$k = p, \; a = \frac{q - p + 1}{2}, \qquad q = 2a + k - 1,$$

o bien

$$k = q, \; a = \frac{p - q + 1}{2}, \quad p = 2a + k - 1,$$

según que $q > p$ o $p > q$, obtenemos

$$N = \frac{p \,.\, q}{2} = \frac{k(2a + k - 1)}{2},$$

es decir N es la suma de k números naturales consecutivos, siendo el menor de ellos a.

Son entonces los números naturales que contienen por lo menos un factor impar > 1, los que se pueden escribir como la suma de varios números naturales consecutivos, y las potencias de 2, las que no se pueden.

Soluciones de: *Alberto Ardila P., Juan Gómez Mora, Alvaro Rodríguez, Evaristo Sánchez Ruiz.*

Solución parcial de: *Armando Chaves Agudelo.*

51. ¿Cuáles son los números naturales que se pueden escribir como suma de por lo menos tres números naturales consecutivos?

Solución. Si N es la suma de $k \geqslant 3$ números naturales consecutivos, de la desigualdad $2a + k - 1 \geqslant 4$ sigue que N debe contener un factor impar > 1 y un factor par > 1.

Inversamente se ve de la solución precedente que si N contiene un factor impar $p > 1$ y un factor par $q/2 > 1$, entonces N es la suma de k números naturales consecutivos, donde

$$k = p \geqslant 3 \quad \text{si} \quad p < q,$$

y

$$k = q \geqslant 4 \quad \text{si} \quad p > q.$$

Son entonces los números naturales que contienen un factor impar > 1 y un factor par > 1 los que se pueden escribir como suma de por lo menos tres números naturales consecutivos.

Soluciones de: *Alberto Ardila P., Armando Chaves Agudelo, Juan Gómez Mora, Alvaro Rodríguez, Evaristo Sánchez Ruiz.*

52. Resolver la ecuación

$$16x^4 + 16x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0.$$

1ª *solución.*

$$16x^4 + 16x^3 - 4x^2 - 4x + 1 =$$

$$= 16x^4 + 4x^2 + 1 + 16x^3 - 8x^2 - 4x = (4x^2 + 2x - 1)^2$$

y

$$4x^2 + 2x - 1 = 0$$

se cumple para

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8}.$$

La ecuación tiene, pues, el par de raíces dobles:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \qquad \frac{-\sqrt{5}-1}{4}.$$

Armando Chaves Agudelo.

2ª *solución.* Siguiendo el método general hacemos $x = y - 1/4$ para eliminar el término cúbico. En este caso particular se obtiene una ecuación en la que faltan los términos cúbico y lineal:

$$16y^4 - 10y^2 + \frac{25}{16} = 0,$$

es decir

$$\left(4y^2 - \frac{5}{4}\right)^2 = 0.$$

De aquí $y = \pm \sqrt{5}/4$ y la ecuación propuesta tiene las dos raíces dobles

$$x = y - \frac{1}{4} = \frac{\pm\sqrt{5}-1}{4}.$$

Alfonso Cuevas Bustos.

Otras soluciones de: *Alberto Ardila P., Juan Gómez Mora, Alvaro Rodríguez, Evaristo Sánchez Ruiz.*

*53. Sean a_1 y a_2 dos números reales y para $n \geqslant 3$ sea a_n definida por la fórmula recursiva

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}.$$

Demostrar que la sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ es convergente.

Solución. Supongamos por ejemplo que $a_1 < a_2$. Entonces $a_1 < a_3 < a_2$, $a_3 < a_4 < a_2$, y en general

$$a_1 < a_3 < a_5 < \ldots < a_6 < a_4 < a_2.$$

Luego cada una de las sucesiones $a_1, a_3, a_5, \ldots$ y $a_2, a_4, a_6, \ldots$ es convergente, puesto que es monótona y acotada. Para demostrar que los dos límites son iguales, sea n par. Entonces

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{a_n - a_{n+1}}{2} = \frac{a_n - a_{n-1}}{4} = \ldots = \frac{a_2 - a_1}{2^n},$$

luego $a_{n+2} - a_{n+1} \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$; la sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ es convergente.

Alvaro Rodríguez.

Otras soluciones de: *Armando Chaves Agudelo, Juan Gómez Mora.*

54. Demostremos que si α es un ángulo entre $0°$ y $180°$, entonces la expresión

$$sen\ \alpha + \frac{sen\ 2\alpha}{2} + \frac{sen\ 3\alpha}{3}$$

es siempre positiva.

1ª *solución.* Puesto que

$$sen\ 2\alpha = 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha,$$

$$sen\ 3\alpha = sen\ (2\alpha + \alpha) = 3\ sen\ \alpha\ cos^2\alpha - sen^3\alpha,$$

tenemos

$$sen\ \alpha + \frac{1}{2}\ sen\ 2\alpha + \frac{1}{3}\ sen\ 3\alpha =$$

$$= sen\ \alpha + sen\ \alpha\ cos\ \alpha + sen\ \alpha\ cos^2\alpha - \frac{sen^3\alpha}{3} =$$

$$= \frac{sen\ \alpha}{3}\ (3 + 3\ cos\ \alpha + 3\ cos^2\alpha - sen^2\alpha) =$$

$$= \frac{sen\ \alpha}{3}\ (2 + 3\ cos\ \alpha + 4\ cos^2\alpha) =$$

$$= \frac{sen\ \alpha}{3}\ (1 + 2\ cos\ \alpha + cos^2\alpha + 1 + cos\ \alpha + 3\ cos^2\alpha) =$$

$$= \frac{sen\ \alpha}{3}\ \{(1 + cos\ \alpha)^2 + (1 + cos\ \alpha) + 3\ cos^2\alpha\}$$

y esta última expresión es obviamente positiva, puesto que $sen\ \alpha > 0$ y $cos\ \alpha > -1$ si $0° < \alpha < 180°$.

Alberto Ardila P.

2ª *solución*. Sea la función

$$y = sen\ x + \frac{sen\ 2x}{2} + \frac{sen\ 3x}{3} \ ;$$

su derivada es

$$y' = cos\ x + cos\ 2x + cos\ 3x =$$
$$= cos\ 2x\ (1 + 2\ cos\ x),$$

en donde

$$cos\ 2x > 0 \text{ para } x \text{ entre } 0 \text{ y } \frac{\pi}{4},$$

$$cos\ 2x < 0 \text{ para } x \text{ entre } \frac{\pi}{4} \text{ y } \frac{3\pi}{4},$$

$$cos\ 2x > 0 \text{ para } x \text{ entre } \frac{3\pi}{4} \text{ y } \pi,$$

$$1 + 2\ cos\ x > 0 \text{ para } x \text{ entre } 0 \text{ y } \frac{2\pi}{3},$$

$$1 + 2\ cos\ x < 0 \text{ para } x \text{ entre } \frac{2\pi}{3} \text{ y } \pi.$$

Ahora y es función decreciente para los valores de x comprendidos en los intervalos en que $y' < 0$, o sea de $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{2\pi}{3}$ y de $\frac{3\pi}{4}$ a π. Es claro que la función y toma sus valores menores en los extremos superiores de los intervalos en que decrece:

$$\text{para } x = \frac{2\pi}{3} \ : \ y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{para } x = \pi \ : \ y = 0.$$

Luego y en el intervalo de 0 a π no alcanza a decrecer hasta ser negativa.

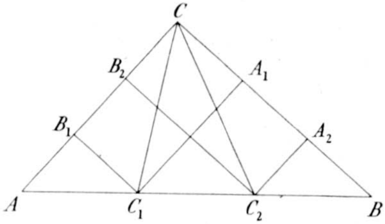
Armando Chaves Agudelo.

Otras soluciones de: *Juan Gómez Mora, Alvaro Rodríguez, Evaristo Sánchez Ruiz.*

55. Sea ABC un triángulo rectángulo y $AB = c$ su hipotenusa. Dividamos AB en tres partes iguales con los puntos C_1 y C_2. Demostrar que

$$\overline{CC_1}^2 + \overline{C_1C_2}^2 + \overline{C_2C}^2 = \frac{2}{3}\, c^2.$$

1ª *solución.* Tracemos las perpendiculares de C_1 y C_2 a los catetos AC resp. BC. Sean los pies de estas perpendiculares B_1 y B_2, resp. A_1 y A_2. B_1 y B_2 (resp. A_1 y A_2) dividen al cateto AC (resp. BC) en tres partes iguales. Del triángulo rectángulo B_1C_1C tenemos:



$$\overline{CC_1}^2 = \left(\frac{2b}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{4b^2}{9} + \frac{a^2}{9}.$$

Del triángulo rectángulo A_2CC_2 tenemos:

$$\overline{CC_2}^2 = \left(\frac{2a}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2 = \frac{4a^2}{9} + \frac{b^2}{9}.$$

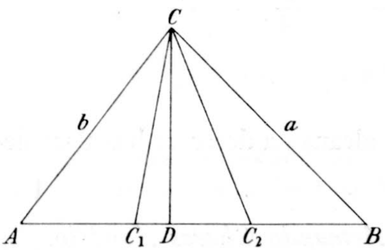
Como además
$$\overline{C_1C_2}^2 = \frac{c^2}{9},$$

tenemos

$$\overline{CC_1}^2 + \overline{C_1C_2}^2 + \overline{C_2C}^2 = \frac{5}{9}\,(a^2 + b^2) + \frac{c^2}{9} = \frac{2}{3}\, c^2.$$

Alvaro Rodríguez.

2ª *solución.* Sean a y b los catetos y CD la altura que va de C a la hipotenusa. Del triángulo AC_1C:



$$\overline{CC_1}^2 = b^2 + \frac{c^2}{9} - \frac{2c}{3}\left(\frac{c}{3} + C_1D\right).$$

Del triángulo BCC_2 :

$$\overline{CC_2}^2 = a^2 + \frac{c^2}{9} - \frac{2c}{3}\left(\frac{2c}{3} - C_1D\right).$$

Sumando

$$\overline{CC_1}^2 + \overline{CC_2}^2 = a^2 + b^2 - \frac{4}{9}\ c^2.$$

Pero $a^2 + b^2 = c^2$, luego

$$\overline{CC_1}^2 + \overline{CC_2}^2 = \frac{5}{9}\ c^2.$$

Pero $\overline{C_1C_2}^2 = c^2/9$, luego

$$\overline{CC_1}^2 + \overline{C_1C_2}^2 + \overline{C_2C}^2 = \frac{2}{3}\ c^2.$$

Q. E. D.

Armando Chaves Agudelo.

Otras soluciones de: *Alberto Ardila P., Alfonso Cuevas Bustos, Juan Gómez Mora, Evaristo Sánchez Ruiz.*

56. Entre todos los triángulos rectángulos que tienen el mismo perímetro, ¿cuál tiene la hipotenusa más pequeña?

Solución. Siendo p el perímetro constante, α uno de los ángulos agudos del triángulo y c la hipotenusa, se tiene:

$$p = c + c\ sen\ \alpha + c\ sen\ (90^\circ - \alpha) =$$
$$= c\ [1 + 2\ sen\ 45^\circ\ cos\ (45^\circ - \alpha)]$$

Luego

$$c = \frac{p}{1 + \sqrt{2}\ cos\ (45^\circ - \alpha)}$$

es mínimo si $cos\ (45^\circ - \alpha) = 1$, o sea para $\alpha = 45^\circ$. El triángulo buscado es el rectángulo isósceles.

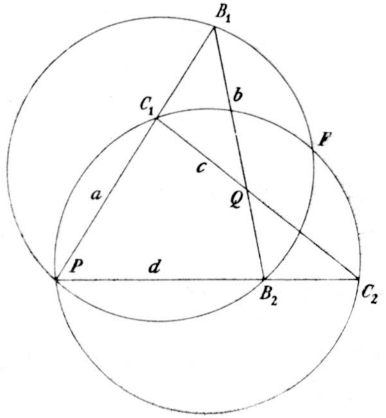
Armando Chaves Agudelo.

Otras soluciones de: *Alberto Ardila P., Alfonso Cuevas Bustos, Juan Gómez Mora, Alvaro Rodríguez, Evaristo Sánchez Ruiz.*

57. Consideremos en el plano cuatro líneas rectas, de las cuales dos siempre se cortan, pero tres no tienen jamás un punto común. Estas cuatro rectas determinan cuatro triángulos. Demostrar que los cuatro círculos circunscritos a estos triángulos tienen un punto en común.

Gy. Sz. -Nagy.

Solución. Entre las cuatro rectas dos tienen la propiedad de que los tres puntos de intersección de las otras tres rectas quedan al mismo lado. Llamemos estas dos rectas a y d. Sea c la recta cuya intersección con a está entre los otros dos puntos de intersección que existen sobre a; sea b la cuarta recta. Sea P el punto de intersección de a y d, Q el de b y c. Sean B_1, C_1, resp. B_2, C_2 los puntos de intersección de a resp. de d con b y c. Tracemos los círculos circunscritos a los triángulos PB_1B_2 y PC_1C_2. Cada uno de estos dos círculos tiene un punto en el interior del otro: el primero B_2, el segundo C_1. Luego los dos círculos tienen fuera de P un segundo punto en común, llamemos este punto F. Demostraremos que



(1) $$\angle B_1FC_1 = \angle B_1QC_1,$$

es decir que el círculo circunscrito al triángulo B_1QC_1 pasa también por el punto F. Reemplazando B_1 y C_1 por B_2 y C_2, se ve de la misma manera que el círculo circunscrito al triángulo B_2C_2Q pasa también por el punto F.

Tenemos

(2) $$\angle B_1FC_1 = \angle B_1FP - \angle C_1FP.$$

Pero

$$\angle B_1FP = \angle B_1B_2P =$$

$$= \angle C_1C_2P + \angle B_2QC_2 = \qquad \text{(ángulo exterior)}$$

$$= \angle C_1C_2P + \angle B_1QC_1$$

y

$$\angle C_1FP = \angle C_1C_2P.$$

Reemplazando estas dos últimas relaciones en (2) obtenemos (1), que termina la demostración.

Solución de: *Armando Chaves Agudelo.*

58. Sea $ABCD$ una pirámide regular, cuyas cuatro caras son triángulos equiláteros con lado a.

a) Calcular la superficie S y el volumen V de la pirámide en función de a.

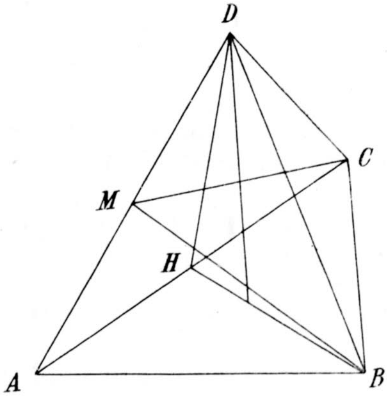
b) El punto medio M de AD y la arista BC determinan un plano. Demostrar que este plano divide la pirámide en dos pirámides iguales.

c) Calcular el área del triángulo MBC en función de a.

(Bachillerato, 1ª parte, Lille, France, 1948).

Solución. a) Siendo la superficie de un triángulo equilátero $a^2\sqrt{3}/4$, tenemos

$$S = a^2\sqrt{3}.$$



Sea H el pie de la perpendicular que va del vértice B a la arista AC. La altura h de la pirámide es igual a la altura del triángulo BDH perpendicular al lado BH. Luego el área del triángulo isósceles BDH es igual a

$$\frac{h\,a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4},$$

de donde

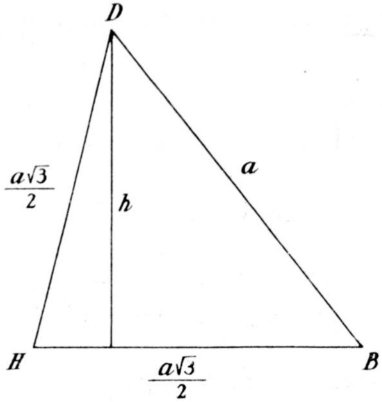
$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

y

$$V = \frac{1}{3}\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\,h = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

b) AD es perpendicular a BM y a CM, luego al plano BCM. Como $AM = MD$, sigue que las dos pirámides $ABCM$ y $DBCM$ son iguales.

c) Si S' es el área del triángulo MBC, tenemos



$$V = \frac{1}{3} a S' = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12},$$

de donde

$$S' = \frac{a^2 \sqrt{2}}{4}.$$

Soluciones de: *Alberto Ardila P., Alfonso Cuevas Bustos, Armando Chaves Agudelo, Juan Gómez Mora, Alvaro Rodríguez, Evaristo Sánchez Ruiz.*