PROBLEMAS PROPUESTOS

Los problemas son señalados por cero, uno o dos asteriscos según su grado de dificultad. Las soluciones deben ser enviadas a REVISTA DE MATEMÁTICAS ELEMENTALES, Universidad de los Andes, calle 18-A, carrera 1-E, Bogotá, Colombia, antes del 31 de octubre de 1954. La solución a cada problema debe venir en hoja por separado. Los alumnos de bachillerato deben enviar, junto con las soluciones, el nombre del colegio y de su profesor de matemáticas.

74. ¿De cuántas maneras se pueden repartir k billetes de un peso entre n personas?

75. ¿De cuántas maneras se pueden repartir k billetes de un peso entre n personas ($k \geqslant n$) de manera que cada persona reciba por lo menos un billete?

76. Sea la sucesión $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ definida poniendo $U_1 = 1, U_2 = 2$ y para $n \geqslant 3$

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}.$$

Así $U_3 = 3, U_4 = 5, U_5 = 8, U_6 = 13, \ldots$ Los elementos de esta sucesión se llaman los números de Fibonacci (cf. Vol. I. p. 19, Vol. II. p. 125)[1].

Demostrar:

$$U_1 + U_3 + U_5 + \ldots + U_{2n-1} = U_{2n} - 1,$$

$$U_2 + U_4 + U_6 + \ldots + U_{2n} = U_{2n+1} - 1.$$

*77. (Continuación) Demostrar

$$U_{2n} = U^2_n + U^2_{n-1},$$

$$U_{2n+1} = U^2_{n+1} - U^2_{n-1}.$$

[1] Los ejercicios 76 y 77 fueron tomados de K. SUBBA RAO: Some properties of FIBONACCI Numbers, American Mathematical Monthly, 60 (1953) pp. 680-682, donde se encuentran muchas otras propiedades de los números de Fibonacci.

78. Demostrar que si n es un número entero positivo,

$$(n^2 + 1) + (n^2 + 2) + \ldots + (n + 1)^2$$

es la suma de dos cubos consecutivos.

79. Resolver la ecuación

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} = 0.$$

80. Llamemos C una superficie cónica de revolución con vértice S, cuyo semi-ángulo al vértice es de 45°, D una recta paralela al eje de revolución de C, y P el plano que pasa por S y es perpendicular a D. La recta D intersecta el plano P en O; pongamos $SO = 2a$. Sea L la perpendicular común a D y a una generatriz R de C; L corta R en A y D en B.

a) Siendo A' la proyección ortogonal de A sobre P, encontrar el lugar F del punto A' cuando R varía.

b) Construir las rectas L situadas en un plano Π paralelo a P. Discutir cuando la distancia de los planos P y Π varía.

c) Demostrar que los puntos A (cuando R varía) están situados sobre una esfera K de centro O.

(Bachillerato, 1ª parte, Lyon, Francia, 1950).