PROBLEMAS PROPUESTOS

Los problemas son señalados por cero, uno o dos asteriscos según su grado de dificultad. Las soluciones de los problemas deben ser enviadas a REVISTA DE MATEMATICAS ELEMENTALES, Universidad de los Andes, calle 18-A, carrera 1-E, Bogotá, Colombia, antes del 31 de diciembre de 1954. Los alumnos de bachillerato deben enviar, junto con las soluciones, el nombre del colegio y de su profesor de matemáticas.

81. Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\frac{x(y+z)}{x+y+z} = b + c$$

$$\frac{y(z+x)}{x+y+z} = c + a$$

$$\frac{z(x+y)}{x+y+z} = a + b,$$

en que a, b, c son conocidos.

82. Sea una progresión aritmética en la cual el primer término es a, y la suma de los p primeros términos vale cero. Demostrar que la suma de los q términos siguientes vale:

$$-\frac{aq(p+q)}{p-1}.$$

83. Demostrar que si n es un entero cualquiera, $n^{13} - n$ es divisible por 2730.

84. Encontrar un número de cuatro cifras cuyo cuadrado es de la forma: $abc90abc$. (a, b, c representan cifras).

85. Demostrar que el cubo de un entero cualquiera es igual a la diferencia de los cuadrados de dos enteros.

86. Demostrar la identidad:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2n}.$$

87. Se trazan una circunferencia de centro O, y un lado AB del cuadrado inscrito en ella. Se traza luégo el triángulo equilátero ABC situado dentro de la circunferencia. Demostrar que CO es el lado del dodecágono inscrito.

(*Manuel María Quevedo Sánchez*)

88. Demostrar que el punto simétrico del ortocentro de un triángulo con respecto a cualquiera de los lados está sobre la circunferencia circunscrita al triángulo.

89. Demostrar que el centro de la circunferencia de los nueve puntos (o de EULER) es el punto medio del segmento que une el ortocentro con el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo, y que su radio es la mitad del de esa circunferencia.

90. Dos rectas ortogonales, (D) y (D'), tienen como perpendicular común AB (A sobre D y B sobre D'). Se toma un punto variable M sobre (D) y un punto variable N sobre (D').

1º Mostrar que las caras del tetraedro $ABMN$ son triángulos rectángulos.

2º Determinar el centro de la esfera circunscrita a $ABMN$. Deducir de ello el lugar geométrico del punto medio de MN cuando M recorre (D) y N recorre (D')

3º Cuando la longitud MN es constante, ¿cuál es el lugar geométrico del punto medio de MN?

4º Se dan $AB = d$, $AM = BN = n$. Expresar el volumen del tetraedro en función de d y de n. ¿Para qué valor de n será el tetraedro equivalente a un cubo de arista $d/2$? ¿Cuánto miden entonces las aristas del tetraedro?

(Bachillerato, 1ª parte, Besançon, Francia, 1951).