SOLUCION DE PROBLEMAS

74. ¿De cuántas maneras se pueden repartir k billetes de un peso entre n personas?

1ª *solución.* Hacemos crecer de 1 a n el número de personas que participan en la repartición de los k billetes.

Si hay una sola persona, habrá un solo caso posible: ella recibe los k billetes.

Con dos personas P_1, P_2 la primera puede recibir $k, k-1, \ldots, 1, 0$ billetes: hay $k+1$ reparticiones diferentes posibles.

Con tres personas P_1, P_2, P_3, las primeras dos, consideradas juntas, pueden recibir $k, k-1, \ldots, 1, 0$ pesos; según el caso precedente habrá:

$$(k+1) + k + (k-1) + \ldots + 1 = (k+1)(k+2)/2$$

casos posibles, expresión a la que se puede dar la forma:

$$\binom{k+2}{2}.$$

Pasamos al caso de cuatro personas: P_1, P_2, P_3 y P_4. El grupo formado por los tres primeros podrá recibir $k, k-1, \ldots, 1, 0$ billetes. Aprovechando el resultado obtenido en el caso de tres personas, se ve que si son cuatro, el número de distribuciones diferentes vale:

$$\binom{k+2}{2} + \binom{k+1}{2} + \binom{k}{2} + \ldots + \binom{2}{2} = \binom{k+3}{3}$$

(véase Problema 102).

Los resultados válidos para estos primeros casos particulares sugieren que con n personas, el número de reparticiones será:

$$\binom{k+n-1}{n-1}.$$

Procedamos por inducción completa para demostrarla. La fórmula vale para 1, 2, 3, 4 personas. Supongamos que ella sea correcta para el caso de n personas. Si añadimos una persona más, el grupo formado por las n primeras podrá recibir k, $k-1, \ldots, 1, 0$ billetes mientras la $(n+1)$ -ésima recibe el resto. El número de las reparticiones posibles es, de acuerdo con la hipótesis de inducción:

$$\binom{k+n-1}{n-1}+\binom{k+n-2}{n-1}+\ldots+\binom{n-1}{n-1}=\binom{k+n}{n},$$

que es de la misma forma, lo que demuestra completamente la fórmula.

Guillermo Tello Y.

2ª *solución*. El problema es equivalente al siguiente: tenemos n objetos: $1, 2, \ldots, n$, ¿de cuántas maneras podemos formar grupos de k objetos, permitiendo que el mismo objeto figure varias veces y sin tener en cuenta el orden? Estos grupos se llaman **combinaciones con repetición de orden k de n elementos** (véase vol. II. pp. 27-28, donde está explicado el concepto de combinación sin repetición). El número total de estas combinaciones con repetición es

$$\binom{n+k-1}{k}. \tag{1}$$

Demostremos esta fórmula. Sea primero $k=1$; entonces las únicas combinaciones posibles son:

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n,$$

es decir

$$\binom{n}{1}$$

en número.

Sea $k=2$, entonces se pueden formar las combinaciones siguientes:

$$\begin{array}{llllll}
11 & & & & & \\
12 & 22 & & & & \\
13 & 23 & 33 & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1n & 2n & 3n & \cdot & \cdot & \cdot \quad nn,
\end{array}$$

es decir $n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = (n+1)\,n/2 =$

$$= \binom{n+1}{2}$$

combinaciones en total.

Para $k = 3$ podemos obtener todas las combinaciones agregando primero 1 al principio de todas las combinaciones de orden dos:

$$\begin{array}{ccccccc}
111 & & & & & & \\
112 & 122 & & & & & \\
113 & 123 & 133 & & & & \\
. & . & . & . & & & \\
. & . & . & . & . & & \\
. & . & . & . & . & . & \\
11n & 12n & 13n & . & . & . & 1nn;
\end{array}$$

de tales combinaciones hay

$$\binom{n+1}{2};$$

luego, agregamos 2 al principio de todas las combinaciones de orden dos que empiezan por 2,3, ..., n:

$$\begin{array}{cccccc}
222 & & & & & \\
223 & 233 & & & & \\
. & . & . & & & \\
. & . & . & . & & \\
. & . & . & . & . & \\
22n & 23n & . & . & . & 2nn;
\end{array}$$

de tales combinaciones hay

$$\binom{n}{2};$$

ahora agregamos 3 al principio de todas las combinaciones de orden dos que empiezan por 3, ...,   :

$$\begin{array}{ccccc}
333 & & & & \\
. & . & & & \\
. & . & . & & \\
. & . & . & . & \\
33n & . & . & . & 3nn;
\end{array}$$

de tales combinaciones hay

$$\binom{n-1}{2}.$$

Siguiendo así, llegamos finalmente a agregar a la única combinación de orden dos que empieza por n:

$$nnn.$$

Claro está que hemos obtenido así todas las combinaciones de orden tres de n elementos; el número de ellas es entonces (véase Problema 102)

$$\binom{n+1}{2}+\binom{n}{2}+\binom{n-1}{2}+\ldots+\binom{2}{2}=\binom{n+2}{3}.$$

Hemos demostrado, pues, la fórmula (1) para $k = 1, 2, 3$. Ahora la demostraremos para el caso general por inducción completa, suponiéndola cierta para un valor k y pasando a $k + 1$ por el mismo método que acabamos de emplear en el caso $k = 2$, $k + 1 = 3$. Las combinaciones de orden $k + 1$ se obtienen a partir de las de orden k agregando el elemento 1 al principio de todas las combinaciones, luego el elemento 2 al principio de todas las combinaciones que empiezan por 2, 3, ..., n, etc. Este proceso da un total de (véase Problema 102)

$$\binom{n+k-1}{k}+\binom{n+k-2}{k}+\ldots+\binom{k}{k}=\binom{n+k}{k+1}$$

combinaciones con repetición de orden $k + 1$ de n elementos y la fórmula (1) queda completamente demostrada.

3ª *solución*. Demostraremos la fórmula (1) estableciendo una correspondencia biunívoca entre las combinaciones con repetición de orden k de n elementos y las combinaciones sin repetición de orden k de $n + k - 1$ elementos, lo que demostrará la fórmula (1). Sea entonces

$$(i_1, i_2, \ldots, i_k)$$

una combinación con repetición de orden k de los elementos 1,2, ..., n, donde $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n$. A esta combinación le hacemos corresponder

$$(2) \qquad (i_1, i_2 + 1, \ldots, i_k + k - 1)$$

la cual es una combinación sin repetición de orden k de los elementos 1, 2, ..., $n + k - 1$, puesto que cada elemento de (2) es inferior al siguiente y que en virtud de $i_k \leqslant n$ tenemos $i_k + k - 1 \leqslant n + k - 1$. Inversamente sea

$$(j_1, j_2, \ldots, j_k)$$

una combinación sin repetición de orden k de los elementos 1, 2, ..., $n + k - 1$, donde $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leqslant n + k - 1$. Esta combinación corresponde a

$$(j_1, j_2 - 1, \ldots, j_k - k + 1)$$

que es evidentemente una combinación con repetición de orden k de los elementos 1, 2, ..., n. Así la fórmula (1) queda otra vez demostrada.

Otra solución de: *Armando Chaves Agudelo.*

75. ¿De cuántas maneras se pueden repartir k billetes de un peso entre n personas ($k \geqslant n$) de manera que cada persona reciba por lo menos un billete?

Solución. Después de repartir a cada persona un billete, sobran $k - n$, los cuales se pueden repartir según el problema anterior de

$$\binom{n + (k - n) - 1}{k - n} = \binom{k - 1}{k - n}$$

maneras.

Armando Chaves Agudelo.

Otra solución de: *Guillermo Tello Y.*

76. Sea la sucesión $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ definida poniendo $U_1 = 1$, $U_2 = 2$ y para $n \geqslant 3$

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}.$$

Así $U_3 = 3$, $U_4 = 5$, $U_5 = 8$, $U_6 = 13$, ... Los elementos de esta sucesión se llaman números de FIBONACCI (cf. Vol. I. p. 19, Vol. II. p. 125).

Demostrar

$$U_1 + U_3 + U_5 + \ldots + U_{2n-1} = U_{2n} - 1,$$
$$U_2 + U_4 + U_6 + \ldots + U_{2n} = U_{2n+1} - 1.$$

1ª *solución*. Por inducción completa: para $n = 2$, tenemos

$$U_4 - 1 = U_3 + U_2 - 1 = U_3 + 1 = U_3 + U_1,$$
$$U_5 - 1 = U_4 + U_3 - 1 = U_4 + U_2 + U_1 - 1 = U_4 + U_2.$$

Supongamos ahora que para n las dos relaciones sean ciertas; entonces

$$U_{2n+2} - 1 = U_{2n+1} + U_{2n} - 1 =$$
$$= U_{2n+1} + U_{2n-1} + \ldots + U_5 + U_3 + U_1,$$

$$U_{2n+3} - 1 = U_{2n+2} + U_{2n+1} - 1 =$$
$$= U_{2n+2} + U_{2n} + \ldots + U_6 + U_4 + U_2.$$

Humberto Aparicio.

2ª *solución*. Para simplificar, pongamos

$$S_n = U_1 + U_3 + \ldots + U_{2n-o1},$$
$$T_n = U_2 + U_4 + \ldots + U_{2n}.$$

Restando obtenemos

$$T_n - S_n = (U_2 - U_1) + (U_4 - U_3) + \ldots + (U_{2n} - U_{2n-1})$$
$$= 1 + U_2 + \ldots + U_{2n-2} = 1 + (T_n - U_{2n}),$$

de donde $S_n = U_{2n} - 1$.

Por otra parte

$$S_n - T_n = U_1 + (U_3 - U_2) + (U_5 - U_4) + \ldots +$$
$$(U_{2n-1} - U_{2n-2}) - U_{2n} = 1 + (U_1 + U_3 + \ldots + U_{2n-3}) -$$
$$U_{2n} = 1 + S_n - U_{2n-1} - U_{2n},$$

de donde

$$-T_n = 1 - (U_{2n-1} + U_{2n}) = 1 - U_{2n+1},$$

o

$$T_n = U_{2n+1} - 1.$$

Guillermo Tello Y.

Otras soluciones de: *Astolfo Arias, Armando Chaves Agudelo, Jaime Rocha R., Alvaro Rodríguez, Arturo Sánchez Weiss, Jaime Vanegas Gómez.*

* 77. (Continuación) Demostrar

$$U_{2n} = U_n^2 + U_{n-1}^2,$$
$$U_{2n+1} = U_{n+1}^2 - U_{n-1}^2.$$

Solución. Por inducción completa: para $n = 2$, tenemos

$$U_4 = 5 = U_2^2 + U_1^2,$$
$$U_5 = 8 = U_3^2 - U_1^2.$$

Supongamos ahora que para n las dos relaciones sean ciertas; entonces

$$U_{2n+2} = U_{2n+1} + U_{2n} =$$
$$= U_{n+1}^2 - U_{n-1}^2 + U_n^2 + U_{n-1}^2 = U_{n+1}^2 + U_n^2,$$
$$U_{2n+3} = U_{2n+2} + U_{2n+1} =$$
$$= U_{n+1}^2 + U_n^2 + U_{n+1}^2 - U_{n-1}^2 =$$
$$= 2U_{n+1}^2 + 2U_n^2 - U_{n-1}^2 - U_n^2 =$$
$$= 2U_{n+1}^2 + 2U_n^2 - (U_{n+1} - U_n)^2 - U_n^2 =$$
$$= U_{n+1}^2 + U_n^2 + 2U_{n+1}\,U_n - U_n^2 =$$
$$= (U_{n+1} + U_n)^2 - U_n^2 = U_{n+2}^2 - U_n^2.$$

Humberto Aparicio.

Otras soluciones de: *Armando Chaves Agudelo, Alvaro Rodríguez, Jaime Vanegas Gómez.*

78. Demostrar que si n es un número entero positivo,

$$(n^2 + 1) + (n^2 + 2) + \ldots + (n + 1)^2$$

es la suma de dos cubos consecutivos.

Solución.

$$(n^2 + 1) + (n^2 + 2) + \ldots + (n^2 + 2n + 1) =$$
$$= (2n + 1)(n^2 + n + 1) = 2n^3 + 3n^2 + 3n + 1 =$$
$$= n^3 + (n + 1)^3.$$

Oscar Villa Moreno.

Otras soluciones de: *Humberto Aparicio, Astolfo Arias, Armando Chaves Agudelo, Jaime Rocha R., Alvaro Rodríguez, Alvaro Sánchez Weiss, Jaime Vanegas Gómez.*

79. Resolver la ecuación

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} = 0.$$

Solución. La forma de la ecuación sugiere la solución $x = -3/2$, que se puede verificar inmediatamente. Suprimiendo denominadores, la ecuación toma la forma:

$$2x^3 + 9x^2 + 11x + 3 = 0.$$

Por tener la ecuación la solución $x = -3/2$, el primer miembro es divisible por $2x + 3$. Efectuando la división se ve que la ecuación se puede escribir:

$$(2x + 3)(x^2 + 3x + 1) = 0,$$

cuyas raíces son: la de $2x + 3 = 0$ ya encontrada, y las de $x^2 + 3x + 1 = 0$ que son:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

La ecuación propuesta tiene, pues, las tres raíces:

$$x = -\frac{3}{2}, \quad x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \quad x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}.$$

Guillermo Tello Y.

Observación. Armando Chaves Agudelo suma los términos de la ecuación de dos en dos, lo que da:

$$\frac{2x+3}{x(x+3)} + \frac{2x+3}{(x+1)\,(x+2)} =$$

$$(2x+3)\left(\frac{1}{x^2+3x} + \frac{1}{x^2+3x+2}\right) = 0,$$

de donde se ve también que $x = -3/2$ es raíz de la ecuación propuesta. El final de la solución puede hacerse como arriba.

Otras soluciones de: *Astolfo Arias, Humberto Aparicio, Alvaro Rodríguez, Jaime Vanegas Gómez, Oscar Villa Moreno.*

80. Llamemos C una superficie cónica de revolución con vértice S, cuyo semi-ángulo al vértice es de 45°, D una recta paralela al eje de revolución de C, y P el plano que pasa por S y es perpendicular a D. La recta D intersecta al plano P en O; pongamos $SO = 2a$. Sea L la perpendicular común a D y a una generatriz R de C; L corta a R en A y a D en B.

a) Siendo A' la proyección ortogonal de A sobre P, encontrar el lugar F del punto A' cuando R varía.

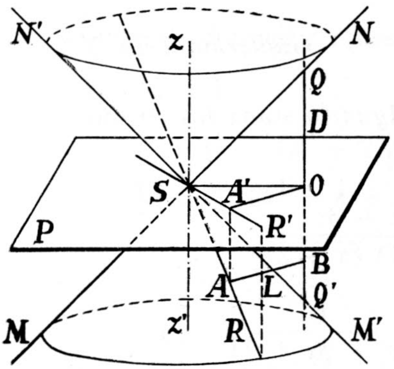
b) Construir las rectas L situadas en un plano π paralelo a P. Discutir cuando la distancia de los planos P y π varía.

c) Demostrar que los puntos A (cuando R varía) están situados sobre una esfera K de centro O.

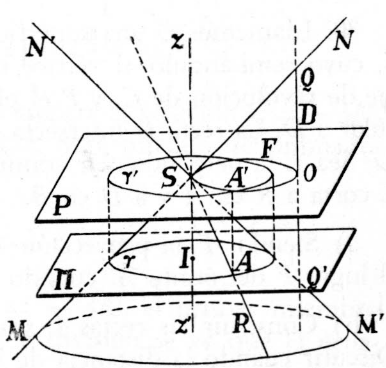
(Bachillerato, 1ª parte, Lyon, Francia, 1950).

Solución. Supongamos que el eje $z'z$ del cono C sea vertical. El plano determinado por D y $z'z$ es un plano meridiano que corta a C a lo largo de dos generatrices perpendiculares MN y $M'N'$ cuya bisectriz es $z'z$. D corta a estas dos generatrices en Q y en Q' respectivamente y el triángulo QSQ' es restángulo e isósceles: $OS = OQ = OQ' = 2a$.

a) Sea R una generatriz cualquiera de C y R' su proyección ortogonal sobre P. La perpendicular común AB a D y a R es paralela a P, puesto que D es perpendicular a P; el ángulo recto SAB, que tiene un lado paralelo a P, se proyecta entonces sobre P en un ángulo recto $SA'O$ y, ya que los puntos S y O son fijos, el punto A' está sobre el círculo F de diámetro SO situado en el plano P. Inversamente, sea A' un punto de este círculo; el plano $(A', z'z)$ corta a C a lo largo de dos generatrices; sea R una de ellas. A' es la proyección sobre P de un punto A de R; tracemos el plano paralelo a P que pasa por A: éste corta a D en un punto B; el ángulo SAB tiene el lado AB paralelo a P y como su proyección sobre P es recto, debe ser recto él mismo; AB es también perpendicular a D, puesto que es paralelo a un plano perpendicular a D. AB es entonces la perpendicular común a D y a R y A' es un punto del lugar F buscado, que es, pues, todo el círculo de diámetro OS situado en P.



b) Consideremos un plano π paralelo a P; π corta a C a lo largo de un círculo γ que tiene por eje $z'z$. Decir que una recta L está situada en π quiere decir que existe un punto A sobre γ, cuya proyección A' sobre P está situada sobre el círculo F. Sea I el centro de γ; el radio r de γ es igual a SI y la proyección γ' de γ sobre P es el círculo de centro S y radio r. El número de puntos A situados en el plano π depende del número de puntos de intersección de los círculos γ' y F; este número sólo depende del radio del círculo γ y vemos que:



si $r < 2a$, γ' corta a F en dos puntos; hay dos puntos A en el plano π, que contiene por lo tanto dos rectas L que sabemos construir;

si $r > 2a$, F es interior a γ'; no hay punto A en π, que no contiene, pues, recta L alguna;

si $r = O$, π coincide con P, el punto S es un punto A; las generatrices R están en el plano perpendicular en S a OS;

si $r = 2a$, el círculo γ' toca a F en O; el plano π pasa por Q o Q'; las generatrices R son MN o $M'N'$; la perpendicular común es entonces la perpendicular al plano $(D, z'z)$ en Q o Q'.

En resumen todos los puntos A están situados entre los dos planos paralelos a P que pasan por Q y Q'.

c) De la primera figura se ve que el triángulo $OA'A$ es rectángulo y que $A'A = SA'$, puesto que el ángulo $A'SA$ vale $45°$. Los dos triángulos $OA'S$ y $OA'A$ son entonces iguales y sus hipotenusas OS y OA son iguales. Luego todo punto A está situado sobre la esfera de centro O y de radio $2a$; Q, S, Q' pertenecen a esta esfera.

Solución tomada de: Annales corrigées du Baccalauréat, editadas por la casa Librairie Vuibert, París.

Otras soluciones de: *Armando Chaves Agudelo, Jaime Rocha R., Alvaro Rodríguez, Jaime Vanegas Gómez.*