PROBLEMAS PROPUESTOS

121. Demostrar la desigualdad

$$X^r \leqq X^{r+1} + 1,$$

donde X y r son números positivos.

122. Demostrar que $n > 4$ se tiene

$$2^n > n^2$$

123. Demostrar que para $H > -1$ y n entero positivo se tiene

$$(1 + h)^n \geqslant 1 + nh$$

124. Encontrar el error en el raciocinio siguiente :

"Teorema. En un conjunto de n elementos (siendo n un entero positivo) todos los elementos son iguales.

Demostración por inducción. Para $n = 1$, el teorema es evidentemente cierto.

Supongamos ahora que el teorema sea cierto para n y consideremos un conjunto de $n+1$ elementos, designados por a_0, $a_1, \ldots, a_n$. Por la hipótesis de inducción se tiene,

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1}$$

y también

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n$$

Luego todos los elementos a_j $(0 \leqslant i \leqslant n)$ son iguales, lo que demuestra el teorema".

125. Se tiene un cono de revolución con vértice S, radio de la base R y altura h; se corta este cono por un plano P) paralelo al plano de la base, a una distancia X del vértice S.

a) Demostrar que la sección (c) así obtenida es un círculo y calcular su radio en función de R, h y x.

b) Calcular el área total Y del cilindro de revolución que tiene una de sus bases en el plano de la base del cono, siendo la otra base el círculo (c) . Qué condición debe satisfacer h para que Y sea primero creciente y después decreciente cuando X crece de O a h?

c) Pongamos de ahora en adelante $h = 3R$. Construir la gráfica que representa las variaciones de Y en función de X; determinar las tangentes en sus puntos extremos.

d) Determinar X para que Y tenga el valor dado 2 a . Para qué valores de a tiene el problema dos soluciones x^1 y x^{11}? Calcular en este caso, en función de R y de a, la suma de los volúmenes de los dos cilindros correspondientes.

(Bachillerato francés, 1a. parte, Montreal y Pondichéry, 1950)