Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen **29** *(1995), páginas 31–41*

Quelques exemples d'algebres A-convexes

MOHAMED OUDADESS

Ecole Normale Supérieure, Rabat, MAROC

ABSTRACT. We present several examples of A-convex algebras, highlighting some differences between them and m-convex algebras, namely, expression of the spectrum of an element, Jacobson radical, continuity of the product, completion, etc.

Keywords and phrases. m-convexity, A-convexity, spectrum, radical, structure.

1991 Mathematics Subject Classification. 46H05, 46H20.

ABSTRACT. Nous présentons ici divers exemples d'algèbres A-convexes qui mettent en relief quelques différences entre celles-ci et les algèbres m-convexes: expression du spectre d'un élément, radical de Jacobson, continuité du produit, complétion, etc.

0. Introduction

Après les algèbres localement multiplicativement convexes (a.l.m.c.) étudiées par R. ARENS [5], E. A. MICHAËL [16] et d'autres auteurs, les algèbres localement A-convexes (a.l.A-c.) ont fait l'objet d'intérêt chez plusieurs chercheurs ([8], [9], [17], [19], etc.). Le programme consiste à regarder quelles propriétés des premières restent vérifiées par les dernières.

En section 2, un contre-exemple [18] montre que l'expression du spectre par l'intermédiaire des caractères continus non nuls ne reste plus valide. Le même exemple montre que le radical de Jacobson n'est pas toujours fermé (cf. section 3).

En section 4, l'algèbre des multiplicateurs d'une H^*-algèbre commutative et de dimension infinie fait ressortir le fait que le porduit n'est pas toujours globalement continu [22].

La section 5 traite d'une topologie limite inductive d'algèbres de Banach qui n'est pas A-convexe et donc non m-convexe.

La section 6 est consacrée à la v-saturation des algèbres localement uniformément A-convexes (a.l.u.A-c.), que nous avons introduites à la suite de celle de saturation [23] qui s'est avérée trop rigide. Le but poursuivi est l'obtention d'un théorème du type Gelfand-Naimark. Nous montrons que toute a.l.u.A-c. unitaire, complète et v-saturée est algèbriquement une sous-algèbre fermée (pour la norme uniforme) d'une algèbre de fonctions continues sur un compact.

En section 7, il est montré que toute algèbre localement A-convexes complète est isomorphe à une limite projective d'algèbres A-normées. Malgré une affirmation de COCHRAN et al. [8], ce résultat ne reste pas vrai sans l'hypothèse de continuité.

En section 8 on montre que les a.l.A-c. ne sont pas toujours complétables en de telles algèbres, contrairement à ce qui se passe pour les a.l.m.c.

1. Preliminaires

Soit E une algèbre complexe muni d'une topologie τ d'espace localement convexe séparé donnée par une famille de semi-normes $(p_\lambda)_\lambda$. On dit que (E,τ) est une algèbre localement convexe (a.l.c.) si le produit $(x,y) \longmapsto x \cdot y$ est séparement continu.

(*i*) Une a.l.c. est dite A-convexe (a.l.A-c.) si pour tout λ et tout $x \in E$ il existe $M(\lambda,x) > 0$ et $N(\lambda,x) > 0$ telles que

$$p_\lambda(x \cdot y) \leq M(\lambda,x) \cdot p_\lambda(y)\,, \quad p_\lambda(y \cdot x) \leq N(\lambda,x) \cdot p_\lambda(y),$$

pour tout $y \in E$.

(*ii*) Une a.l.A-c. est dite uniformément A-convexe (a.l.u.A-c.) si $M(\lambda,x) = M(x)$ et $N(\lambda,x) = N(x)$ ne dépendent que de x.

(*iii*) Une a.l.c. est dite m-convexe (a.l.m.c.) si

$$p_\lambda(x \cdot y) \leq p_\lambda(x) \cdot p_\lambda(y),$$

quels que soient λ et $x, y \in E$.

Exemple 1. [8] Soint $E = C_b(\mathbb{R})$ l'algèbre des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On la munit de la topologie définie par la famille de semi-normes

$(p_\phi)_\phi$, $\phi \in C_b^0(\mathbb{R})$; $C_b^0(\mathbb{R})$ étant l'algèbre des fonctions $\phi \in E$ tendant vers o à l'infini, définies par

$$p_\phi(f) = \sup\{|f(x)| \cdot |\phi(x)| : x \in \mathbb{R}\}.$$

C'est une a.l.u.A-c. qui n'est pas m-convexe.

Exemple 2. Soint $C(\mathbb{R})$ l'algèbre des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$. On la munit de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{R}$. C'est une a.l.m.c. qui n'est pas uniformément A-convexe.

Exemple 3. Si on considère l'algèbre produit $C_b(\mathbb{R}) \times C(\mathbb{R})$ on obtient une a.l.A-c. qui n'est ni m-convexe ni uniformément A-convexe.

Exemple 4. [8] Soit E une algèbre de Banach commutative et sans ordre, *i.e.*, si $x \cdot E = \{0\}$ alors $x = 0$, où $x \cdot E = \{x \cdot y : y \in E\}$. Considerons l'algèbre des multiplicateurs $M(E)$ de E, c'est-à-dire, l'espace des applications linéaires $T : E \longrightarrow E$ telles que $T(x \cdot y) = x \cdot T(y) = T(x) \cdot y$ pour tout x et tout y. On munit $M(E)$ de la topologie définie par la famille $(p_x)_{x \in E}$ où $p_x(T) = \|T(x)\|$. C'est une a.l.u.A-c. qui n'est pas m-convexe en général.

Dans la suite, nous adopterons les notations suivantes.

Si (E, τ) est une a.l.c., nous désignerons par $\mathcal{M}^\sharp(E)$ (respectivement, $\mathcal{M}(E)$) l'espace des caractères (respectivement, des caractères continus) non nuls de E. On ècrira Spx pour le spectre d'un élément x de E.

2. Sur une expression du spectre

Dans une a.l.m.c. commutative complète quelconque nous avons la propriété (P) suivante:

(P) Pour tout $x \in E$, Spx$= \{\chi(x) \ : \chi \in \mathcal{M}(E)\}$.

Dans les a.l.A-c. cette propriété n'est pas vraie. Nous exhibons une classe d'a.l.u.A-c. qui ne la vérifient pas. Ce sont donc des exemples d'a.l.u.A-c. non l.m.c.

Contre-exemple. [18] Soint E une algèbre de Banach commutative radicale (i. e. dont le radical de Jacobson est réduit à $\{0\}$) et à unité approchée bornée (cf. [7]). Elle est alors nécessairement sans ordre et n'admet aucun caractére non nul.

Considerons l'algèbre $M(E)$ des multiplicateurs T de E munie de la topologie stricte β définie par la famille $(p_x)_x$, $x \in E$, où $p_x(T) = \|T(x)\|$. C'est une a.l.u.A-c. commutative unitaire et complète, cf. [8]; étant unitaire, son espace $\mathcal{M}^\sharp$ des caractères (algèbriques) non nuls n'est pas vide. Et l'on sait que tout $\chi \in \mathcal{M}^\sharp$ est β-borné [17]. Cepandant, comme E est à unité approchée, elle est β-dense dans $M(E)$, d'après le théorème 2.4 de [27]. Et comme E n'admet aucun caractère non nul, $M(E)$ n'admet aucun caractère non nul β-continu.

Ainsi le spectre global $\mathcal{M}(M(E))$ de $M(E)$ est vide. Donc $M(E)$ ne vérifie pas la propriété (P).

Pour avoir un cas où l'ensemble des caractères continus non nul n'est pas vide, posons $E_1 = M(E)$, $E_2 = \mathbb{C}$ et $F = E_1 \times E_2, F$ munie des opérations usuelles et de la topologie définie par la famille de semi-normes $(q_x)_x, x \in E$, avec $q_x(T, \alpha) = p_x(T) + |\alpha|$. Alors F est une a.l.u.A-c. unitaire commutative complète et telle que $\mathcal{M}(F) \neq \varnothing$; en fait, on a $\mathcal{M}(F) = \mathcal{M}(E_1) \cup \mathcal{M}(E_2)$. Soit e_1 l'unité de E_1 et posons $b = (e_1, 0)$. On a $\mathrm{Sp}_F b = \mathrm{Sp}_{E_1} e_1 \cup \mathrm{Sp}_{E_2} 0 = \{1, 0\}$ alors que $\{\chi(b) : \chi \in \mathcal{M}(F)\} = \{0\}$ (cf. [1]).

Remarque. Il existe des a.l.u.A-c. dont les caractères ne sont pas tous continus. Le contre-exemple précédent correspond à la situation extrême où aucun caractère n'est continu.

Remarque. L'algèbre $C_b(\mathbb{R})$ est une a.l.u.A-c. commutative complète et non l.m.c. [8]; et cependant, elle vérifie la propriété (P). Donc la m-convexité n'est pas nécessaire pour avoir cette propriété.

3. Sur le radical de Jacobson

Dans une a.l.A-c. commutative complète, la propriété (P) implique que le radical est fermé. La propriété (P) n'étant pas toujours vérifiée, la question de savoir si le radical est toujours fermé se pose naturellement. Il s'avére que non.

Contre-exemple. Soit l'algèbre $M(E)$ de la section 2. Il existe une norme d'algèbre de Banach sur $M(E)$ [27] donc

$$\operatorname{Rad} M(E) = \{T \in M(E) \, : \rho(T) = 0\},$$

où ρ désigne le rayon spectral.

En identifiant tout x de E avec le multiplicateur $T_x : y \longmapsto xy$, on injecte E dans $M(E)$ avec $\|T_x\| \leq \|x\|$. On voit alors que $E \subseteq \operatorname{Rad} M(E)$ car E est radicale. Mais E est β-dense dans $M(E)$ et donc $\operatorname{Rad} M(E)$ ne peut pas être β-fermé, car sinon on aurait $M(E) = \operatorname{Rad} M(E)$, ce qui ne peut être, vu que $M(E)$ est unitaire. Pour plus de détails voir [20].

4. Discontinuite du produit

Dans une a.l.A-c. le produit est séparément continu; il est même séparément continu pour toute semi-norme p_λ de la famille qui définit la topologie. Il reste à voir s'il est toujours globalement continu. Ce n'est pas toujours le cas. Notre contre-exemple est l'algèbre des multiplicateurs d'une H^*–algèbre. Il est inspiré par le problème 111 de [12].

Une H^*-algèbre est une algèbre de Banach E munie d'une involution $*$ et qui est un espace de Hilbert pour un produit scalaire $\langle \cdot , \cdot \rangle$ tel que

(a) $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$, pour tout $x \in E$.
(b) $\|x^*\| = \|x\|$, pour tout $x \in E$.
(c) $x^* \cdot x \neq 0$, pour tout $x \in E - \{0\}$.
(d) $\langle xy, z\rangle = \langle y, x^* z\rangle = \langle x, zy^*\rangle$, quels que soient $x, y, z \in E$.

Dans une telle algèbre commutative il existe toujours un système orthogonal complet d'éléments idempotents et auto-adjoints [7].

Contre-exemple. Soit $(E, \|\cdot\|)$ une H^*-algèbre commutative de dimension infinie. Nous pouvons, sans perte de généralité, supposer E séparable. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots)$ un système orthogonal complet d'éléments idempotents et auto-adjoints. L'ensemble $\{\sqrt{k} \cdot e_k : k = 1, 2, \ldots\}$ n'est pas borné car $\|e_k\| \geq 1$ pour tout k, et il contient o dans sa fermeture faible ([12], problème 111). Donc il existe une suite généralisée $(k_i)_i$ d'entiers naturels telle que $(\sqrt{k_i} \cdot e_1)_i$ converge faiblement vers o (elle ne peut être une suite). Pour tout k, considérons le multiplicateur T_k défini par $T_k(x) = k' \cdot e_k \cdot x$ où k' est la racine quatrième de k. On a $\|T_{K_i}(x)\|^2 = \langle \sqrt{k_i} \cdot e_{k_i}, xx^*\rangle$, donc $\left\|T_{k_i}(x)\right\| \underset{i}{\rightarrow} 0$.

Mais $A^4_{k_i}(x) = k_i \cdot e_{k_i} \cdot x$, et donc, si nous prenons en particulier $x = (1, \ldots, n^{-1}, \ldots)$, alors $A^4_{k_i}(x) = e_{k_i}$. Ainsi $\|A^4_{k_i}(x)\| \geq 1$ pour tout i. Le produit n'est donc pas globalement continu.

Remarques.

(1) Le produit est globalement continu dans l'algèbre $C_b(\mathbb{R})$ et dans toute algèbre de multiplicateurs $M(E)$, où E admet des factorisations, *i.e.*, où tout z de E s'écrit $x \cdot y$ avec x et y dans E.
(2) Le produit est toujours globalment séquentiellement continu.
(3) Le produit est toujours hypo-continu.

5. Limite inductive d'algebres normees

Soient E une algèbre et $\mathcal{F} = (E_i)_i$ une famile de sous-algèbre de E telle que

(1) $E = \bigcup_i E_i$
(2) E_i est une algébre normée, pour tout i.
(3) $\mathcal{F}$ est dirigée avec injections continues.

On considère la topologie localement convexe la plus fine sur E rendant continues les injections canoniques $f_i : E_i \longrightarrow E$. On la note τ_L. La question explicitement posée par A. Arosio [6] concerne la m-convexité de τ_L; en fait, S. Warner la soulève implicitement [26] en considérant la topologie localement m-convexe la plus fine rendant continues les f_i.

Dans [6], il est montré que τ_L est m-convexe si $\mathcal{F}$ est totalement ordonnée et aussi si $\mathcal{F}$ est dénombrable et E commutative. La réponse est négativa dans le cas non commutatif.

Contre-exemple. [24] Soit X un e.l.c. de Fréchet. Une application linéarie $T : X \longrightarrow X$ est dite fortement bornée s'il existe un voisinage V de zéro tel que $T(V)$ soit borné [25]. Soit $\mathcal{B}_0$ la famille des disques fermés bornés de X et $\mathcal{V}$ une base de voisinages de zéro, formée de disques, telle que $\cap\{V : V \in \mathcal{V}\} = \{0\}$. Notons par $\mathcal{B}(X)$ l'ensemble des opérateurs fortement bornés de X. C'est une sous-algbre de l'algèbre $\mathcal{L}(X)$ des opérateurs bornés de X.

Si pour tout V dans $\mathcal{V}$ et tout B dans $\mathcal{B}_0$ tel que $V \subseteq B$ on pose $X(V, B) = \{T \in \mathcal{B}(X) : \text{il existe } \alpha > 0, T(V) \subseteq \alpha B\}$, alors

(1) les $X(V, B)$ sont des sous-algèbres de $\mathcal{B}(X)$;
(2) chaque $X(V, B)$ peut être muni d'une norme d'algèbre par $\|T\|_{V,B} = \sup\{\|T(x)\|_B : x \in V\}$, où $\|\cdot\|_B$ est la jauge de B dans l'espace X_B engendré par B;
(3) la famille $(X(V, B))$ devient dirigée avec injections canoniques si l'on pose

$$(V_1, B_1) \leq (V_2, B_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} V_1 \supseteq V_2 \\ B_1 \subseteq r \cdot B_2, \text{ pour un certain } r > 0. \end{cases}$$

Maintenant, si nous posons

$$\Omega_{BV} = \{T \in \mathcal{B}(X) : T(B) \subseteq V\}, \ B \in \mathcal{B}_0 \text{ et } V \in \mathcal{V},$$

nous obtenons une base de voisinages pour une topologie localement convexe τ sur $\mathcal{B}(X)$. Elle est séparée et moins fine que τ_L. Ainsi τ_L est séparée.

Notons que $\mathcal{A}(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$, où $\mathcal{A}(X)$ est l'algèbre des opérateurs continus et de rang fini de X. Nous concluons que τ_L n'est pas m-convexe, par le fait que si X n'est pas normable alors $\mathcal{A}(X)$ n'admet aucune topologie séparée d'algèbre pour laquelle le produit est globalement continu [10].

6. v-saturation

Cette section clarifie et complète quelques idées introduites par A. C. Cochran [9]. La définition qu'il donne de la saturation s'avère trop rigide. Nous l'assouplissons et améliorons les résultats qu'il obtient.

Nous rappelons d'abord quelques résultats sur les a.l.u.A-c.

Theoreme 6.1. [21] *Sur toute a.l.u.A-c. unitaire et séquentiellemente complète (E, τ), il existe une norme d'algèbre de Banach $\|\cdot\|$ plus fine de τ et ayant les même bornés qu'elle.*

Theoreme 6.2. [19] *Toute a.l.u.A-c. commutative unitaire et séquentiellement complète est algèbriquement une algèbre de multiplicateurs. Si elle est semi-simple, alors c'est une algèbre de fonctions continues sur un espace compact.*

Definition 6.3. [9] Une a.l.u.A-c. est dite saturée si pour tout λ et tout x avec $p_\lambda(x) = 1$, il existe $m_0 \in \mathcal{M}$ et $m \in \mathcal{M}$ tels que

$$m_0(x) = \sup\{\widehat{y}(m) : p_\lambda(y) \leq 1\},$$

où $\widehat{y}$ est la transformée de Gelfand de y.

Lemme 6.4. *Toute a.l.u.A-c. unitaire complète et saturée est nécessairement commutative et semi-simple.*

Preuve. Soit ρ le rayon spectral. On montre que $\rho = \|\cdot\|$ (la norme du théorème 6.1). La semi-simplicité suit immédiatement. La commutativeté est due á un thórème de LEPAGE [15].

Soit $x \neq 0$. Pour tout λ, avec $p_\lambda(x) \neq 0$, il existe $m_0 \in \mathcal{M}$ tel que $m_0(x) \geq p_\lambda(x)$. Or cette inégalité est aussi vérifiée si $p_\lambda(x) = 0$. D'où $\rho(x) \geq \|x\|$. □

Corollaire 6.5. *La classe des a.l.u.A-c. unitaires complètes et saturées est en fait vide.*

Preuve. Par le théorème 6.2 une telle algèbre est une sous-algèbre d'une algb̀re de fonctions continues sur un compact. Et comme elle est unitaire, elle contient les constantes réelles. Mais le spectre d'une fonctions négative ne contient aucun nombre positif, ce qui contredit la saturation. □

Nous remplaçons la définition 6.3 par la suivante qui l'assouplit de deux manières: $\mathcal{M}^\sharp$ remplace $\mathcal{M}$ et $|m_0(x)|$ remplace $m_0(x)$.

Definition 6.6. [23] Une a.l.u.A-c. est dite v-saturée si quels que solent λ et $x \in E$ avec $p_\lambda(x) = 1$, il existe $m_0 \in \mathcal{M}^\sharp$ et $m \in \mathcal{M}^\sharp$ tels que $|m_0(x)| = \sup\{|\widehat{y}(m)| : p_\lambda(y) \leq 1\}$.

Avec les mêmes raisonnements que précédemment et en utilisant le théorème 6.2, nous obtenons la

Proposition 6.7. *Une a.l.u.A-c. unitaire complète et v-saturée est algèbriquement une sous-algèbre fermée (pour la norme uniforme) d'une algb̀re de fonctions continues sur un compact.*

Nous regardons maintenant la transformation de Gelfand $G : E \longrightarrow C(\mathcal{M}^\sharp)$, $x \longmapsto \widehat{x}$. Nous avons le résultat général suivant.

Proposition 6.8. *Si (E, τ) est une a.l.u.A-c. unitaire commutative et complète, alors $G : (E, \tau) \longrightarrow (C(\mathcal{M}^\sharp), \|\cdot\|_\infty)$ est bornée.*

Ce résultat semble être le meilleur que l'on puisse avoir. En effet, il y a la proposition restrictive suivante.

Proposition 6.9. [23] *Si (E, τ) est une a.l.u.A-c. unitaire commutative complète v-saturée et si G est supposée continue, alors (E, τ) est une algèbre de Banach.*

7. Theoremes de structure

E. A. MICHAËL a montré [16] que si $(E,(p_\lambda)_\lambda)$ est une a.l.m.c. complète, où l'ensemble d'indices Λ est filtrant croissant pour un certain préordre, et si $E_\lambda = E/N_\lambda$, où $N_\lambda = \{x \in E : p_\lambda(x) = 0\}$, alors E est la limite projective des algèbres de Banach $\widehat{E}_\lambda$ complètées des algèbres normées (E_λ, p^λ), p^λ efant définie par $p^\lambda(x + N_\lambda) = p_\lambda(x)$. Ainsi, toute a.l.m.c. complète est isomorphe á une limite projective d'algèbres de Banach:

(1) $\quad E = \varprojlim \widehat{E}_\lambda$

Remarque. La complètude est nécessaire pour avoir la représentation (1). En effet, soit $E = C([0,1])$ l'algèbre des fonctions complexes continues sur [0, 1] munie de la topologie de la convergence simple. Cette topologie est donnée par les seminormes p_F telles que $p_F(f) = \sup\{|f(x)| : x \in F\}$ où F est une partie finie de [0, 1]. Comme F/N_F est isomorphe à $\mathbb{C}^{\text{card } F}$, chaque E_F est complète et donc $\varprojlim E_F$ est complète. Or E n'est pas complète, et par conséquent $E \neq \varprojlim E_F$.

Comme dans le cas des a.l.m.c., cf. [16], on démontre les résultats suivants.

Theoreme 7.1. *Soit E une a.l.A-c. séparée. Alors E est isomorphe à une sous-algèbre d'un produit d'algèbres A-normées.*

Dans le cas complet on peut donner une description plus précise.

Theoreme 7.2. *Si E est une a.l.A-c. complète, alors elle est isomorphe à une limite projective d'algèbres A-normées.*

Notons que si $(E, (p_\lambda)_\lambda)$ est une a.l.A-c. séparée et si $\widehat{E}_\lambda$ désigne l'espace de Banach (qui n'est pas toujours une algèbre) obtenu par completion de l'algèbre A-normées (E_λ, p_λ), alors on a

(2) $\quad E \subseteq \varprojlim E_\lambda \subseteq \varprojlim \widehat{E}_\lambda$

Si E est complète, on a

$$E = \varprojlim E_\lambda = \varprojlim \widehat{E}_\lambda$$

Examinons maintenant quelques exemples [2].

Exemple 7.3. Soit $E = C(\mathbb{R})$ l'algèbre des fonctions complexes continues sur $\mathbb{R}$ munie de la topologie de la convergence uniforme sur les intervalles $[-n, n]$, i.e., définie par la famille $(p_n)_n$ de semi-normes telles que $p_n(f) = \sup\{|f(x)| : |x| \leq n\}$. Soit $E_n = E/N_n$, où $N_n = \{f \in E : p_n(f) = 0\}$. Chaque E_n est complète car isométriquement isomorphe à $C([-n, n])$, et l'on a $E = \varprojlim E_n$.

Exemple 7.4. Soit encore $E = C(\mathbb{R})$ mais munie de la famille $(I_n)_n$ de semi-normes définies par $I_n(f) = \int_{-n}^{n} |f(t)|\, dt$. Alors $(E, (I_n)_n)$ est une a.l.A-c. séparée non complète et non m-convexe. Pour $n \geq 1$, soit $M_n = \{f \in E :$

$I_n(f) = 0\}$. On a $M_n = N_n$ (N_n comme dans l'example 7.3) pour tout $n \geq 1$, donc $F_n = E/N_n = E_n$, et l'on a

$$E = \varprojlim E_n = \varprojlim F_n \subsetneq \varprojlim \widehat{F}_n$$

l'inclusion étant stricte, vu que E n'est pas complète.

Exemple 7.5 Soit $G = C_b(\mathbb{R})$ l'algèbre des fonctions complexes continues et bornées sur $\mathbb{R}$. On la munit des A-seminormes $(I_n)_n$, $n \geq 1$, de l'example 7.4. Elle devient une a.l.A-c. séparée, non complète et non convexe. Pour $n \geq 1$, soit $R_n = \{f \in G : I_n(f) = 0\}$ et $G_n = G/R_n$.

On a $G_n = E_n = F_n$, et $G \subsetneq \varprojlim G_n \subsetneq \varprojlim \widehat{G}_n$. Ainsi, G ne s'écrit pas comme la limite projective des algèbres A-normées quotients de G par les annulateurs des I_n.

Nous allons en fait montrer qu'elle ne peut s'écrire d'aucune façon comme limite projective d'algèbres A-normées.

Supposons que G s'écrive comme limite projective d'un systèmè projectif (B_i, f_{ij}) d'algèbres A-normées $(B_i, |\cdot|_i)$, $i \in J$, où $(J, \leq)$ est un ensemble préordonné. Pour chaque $j \in J$, soit $B'_j = \Pi_j(G)$, où Π_j est la jème projection. On peut sopposer que $B'_j = B_j$ pour tout $j \in J$, car $\varprojlim B'_j = G = \varprojlim B_j$.

Considérons sur G les A-semi-normes $(q_j)_j$ définies par

$$q_j\big((\Pi_i(x))_i\big) = \big|\Pi_j(x)\big|_j.$$

Nous pouvons supposer que le préordre dans J est défini de façon que $i \leq k_{ij} \cdot q_j$. En outre, les q_j définissent la topologie de G.

Soit $I = J \cup \mathbb{N}^*$. On le munit d'un préordre $\leq$ comme suit:

- la restricition de $\leq$ à J est le préordre de J
- la restricition de $\leq$ à $\mathbb{N}^*$ est le préordre de $\mathbb{N}^*$
- si $j \in J$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors $j \leq n$ (respectivement, $n \leq j$) si,

et seulement si, il existe $k_{j,n} > 0$ (respectivement, $k_{n,j} > 0$) tel que $q_j \leq k_{j,n} \cdot I_n$ (respectivement, $I_n \leq k_{n,j} \cdot q_j$).

On obtient de cette façon un ensemble préordonné filtrant croissant $(I, \leq)$ et dans lequel J et $\mathbb{N}^*$ sont chacune une partie cofinale. Si $i \in I$, on notera C_i l'algèbre correspondante (c'est une B_i ou une G_i).

Pour $i, j \in J$, $i \leq j$, soit $\varphi_{ij} : C_j \longrightarrow C_i$ définie par $\varphi_{ij}\big(\Pi_j(x)\big) = \Pi_i(x)$. On vérifie alors qu'on a un système projectif (C_i, φ_{ij}) d'algèbres A-normées, indexé sur I. D'après la proposition 3 de [2], on a

$$\varprojlim_{n \in N} G_n = \varprojlim_{i \in I} C_i = \varprojlim_{j \in J} B_j \quad \text{(à un homéomorphisme près)}.$$

Comme G est supposée être égale à $\varprojlim_{j\in J} B_j$, il y a contradiction avec la première inclusion dans l'exemple 7.5.

Cet exemple montre que, malgrè une affirmation dans [8], une a.l.A-c séparée quelconque n'est pas toujours une limite projective d'algèbre A-normées.

8. Completion des a.l.A-c.

On sait qu'une algèbre A-normée ne peut être complètée en une algèbre que si c'est une algèbre normée. On peut penser que dans le cas d'une a.l.A-c., la topologie étant définie par une famille de semi-normes, on puisse avoir un peu plus de souplesse. L'exemple et le résultat général suivants montrent que dans le cas dénombrable il n'en est rien.

Exemple 8.1. Soit $L^\omega = \cap_{p=1}^{\infty} L^p[0,1]$ l'algèbre d'Arens [4]. Sa topologie est définie par la suite $(p_n)_n$ de semi-normes telles que $p_n(f) = \left(\int_0^1 |f(t)|^n\, dt\right)^{\frac{1}{n}}$, $n = 1, 2, \ldots.$ Munie de la topologie induite, $C[0,1]$ est une a.l.u.A-c unitaire non complète et non m-convexe. Sa complétée L^ω n'est pas une a.l.A-c., car sinon elle serait une a.l.m.c. [16], ce qui est inexact [4].

On a plus généralement la

Proposition 8.2. *Si $(E, (p_n)_n)$ est une a.l.A-c séparée non m-convexe et non complète, alors le complété $\widehat{E}$ de E (en tant qu'espace métrique) n'est pas une a.l.A-c.*

Preuve. Si $\widehat{E}$ étrait une a.l.A-c., elle serait de Fréchet, et donc ce serait une a.l.m.c. [16]. Mais alors elle serait une a.l.m.c., ce qui n'est pas le cas. □

REMERCIEMENTS. Ce travail de synthèse a été réalisé en partie lors d'un séjour de l'auteur au département de Mathématiques de l'Université de Montréal (1994). Il remercie ce dernier pour les facilités qui lui ont été accordées. L'auteur remercie aussi le Professeur P. GAUTHIER pour son aide et le Professeur J. I. NIETO pour de nombreuses et stimulantes discussions.

References

1. M. AKKAR, M. EL AZHARI & M. OUDADESS, *On an expression of the spectrum in BP^*-algebras*, Period. Math. Hungarica **19(1)** (1988), 65–67.
2. M. AKKAR, O. H. CHEIKH, M. OUDADESS, *Sur la structure des algèbres localement A-convexes*, Bull. Acad. Polonaise Sci. Math. **37** (1989), 567–570.
3. G. R. ALLAN, *A spectral theory for locally convex algebras*, Proc. London Math. Soc. **(3)**, **15** (1965), 399–421.
4. R. ARENS, *The space L^ω and convex topological rings*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 913–935.
5. ———, *Dense inverse limit rings*, Michigan Math. J. **5** (1958), 169–182.
6. A. AROSIO, *Locally convexe inductive limits of normed algebras*, Rend. Sem. Mat., Univ. Padova **51** (1974), 333–359.

7. F. F. Bonsall & J. Duncan, *Complete normed algebras*, Erg. der Math., Band 80, Springer Verlag, 1973.
8. A. C. Cochran, R. Keown, *On a class of topological algebras*, Pacif. J. Math. **34** (1970), 17–25.
9. A. C. Cochran, *Representation of A-convex algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **41** (1973), 473–479.
10. J. Esterle, *Sur la non métrisabilité de certaines algèbres d'opérateurs*, Rev. Roumaine Math. pures et appliquées **24** (1979), 1157–1164.
11. A. Guichardet, *Leçons sur certaines algèbres topologiques*, Gordon and Breach-Dunod, Paris, 1967.
12. P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, 2nd. edition, Springer-Verlag, 1974.
13. T. Husain, S. A. Warsi, *A note on A- convex algebras*, Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, 45è Année No. 5–8 (1976), 163–165.
14. R. Larsen, *The multiplier problem*, Lecture Notes in Mathematics, No. 105, Springer–Verlag, 1969.
15. C. Lepage, *Sur quelques conditions entrainant la commutativité dans les algèbres de Banach*, C. R. Acad. Sc. Paris, Serie A-B **265** (1967), 1235–1237.
16. E. A. Michael, *Locally multiplicatively convex topological algebras*, Memoirs Amer. Math. Soc. **11** (1952).
17. M. Oudadess, *Théorèmes de structures et propriétés fondamentales des algèbres uniformément A- convexes*, C. R. Acad. Sc. Paris, Serie I **296** (1983), 851– 853.
18. ______, *Sur le spectre ponctuel dans les algèbres localement A-convexes*, Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, 54è année No. 2 (1985), 65–68.
19. ______, *Théorèmes de type Gelfand-Naïmark dans les algèbres uniformément A-convexes*, Ann. Sc. Math. Quebec **9** (1985), 78–82.
20. ______, *Sur le radical de Jacobson dans les algèbres localement A-convexes*, C. R. Math. Rep., Acad. Sci. Canada **7** (1985), 21–25.
21. ______, *Une norme d'algèbre de Banach dans les algèbres uniformément localement A-convexes*, Africa Matematica **4** (1987), 15–22.
22. ______, *Discontinuity of the product in multiplier algebras*, Publications Mathématiques **34** (1990), 397–401.
23. ______, *v-saturated uniformly A-convex algebras*, Math. Japonica **35** (1990), 615–620.
24. ______, *Inductive limits of normed algebras and m-convex structures*, Proc. Amer. Math. Soc. **109** (1990), 399–401.
25. P. Uss, *Sur les opérateurs bornés dans les espaces localement convexes*, Studia Math. **37** (1971), 139–158.
26. S. Warner, *Inductive limits of normed algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **82** (1956), 190–216.
27. J. K. Wang, *Multipliers of commutative Banach algebras*, Pacific J. Math. **11** (1961), 1131–1149.
28. W. Zelazko, *Selected topics in topological algebras*, Lect. notes series 31 (1971), Matematisk Institut, Aarhus Univ..
29. ______, *A non m-convexe algebra on wich operate all entire fuctions*, Ann. Polinici Math **46** (1985), 389–394.

(Recibido en noviembre de 1994)

Mohamed Oudadess
Ecole Normale Supérieure
B. P. 5118, Takaddoum 10 000
Rabat, MAROC