Operadores integrales

Por: Armando Chavez Agudelo (U.N. M/zales)

Sea la ecuación

$$a_0\frac{d^n y}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n y = f(x)$$

que, operatorialmente es

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n)\, y = f(x) \qquad (1)$$

Sea Y(x) la integral general de

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n)\, y = 0 \qquad (2)$$

entoces, dada la distributividad del operador diferencial lineal: $(a_0 D^n + \cdots + a_n)[Y(x) + \varphi(x)]$

$$= 0 + (a_0 D^n + \cdots + a_n)\,\varphi(x)$$

Como Y(x) implica n constantes arbitrarias, se trata de determinar una solución particular $\varphi(x)$, a fin de que $Y(x)+\varphi(x)$ sea la integral general de (I). $\varphi(x)$ lo da el operador integral:

$$\frac{1}{a_0 D^n + \cdots + a_n} f(x) = \varphi(x)$$

según sean las raices r_i, del operador diferencial, considerado como polinomio, se tiene

$$\frac{1}{a_0 D^n + \cdots + a_n} f(x) = \frac{1}{D - r_n}\cdot\frac{1}{D - r_{n-1}}\cdots\frac{1}{D - r_1}\,\frac{f(x)}{a_0}$$

se trata de resolver de una vez:

$$\frac{1}{(D-\alpha)^2 + \beta}\ \text{sen}\ mx$$

Voy a encontrar una solución de la forma: $\varphi(x) = A\,\text{sen}\,mx + B\cos mx$

luego, $\varphi'(x) = Am\cos mx - Bm\,\text{sen}\,mx$

$$\varphi''(x) = -Am^2\,\text{sen}\,mx - Bm^2\cos mx$$

Asi obtengo

$$[(D-\alpha)^2+\beta^2]\,\varphi(x)=[A(\alpha^2+\beta^2-m^2)+2B\alpha m]\ \mathrm{sen}\ mx$$
$$+[B(\alpha^2+\beta^2-m^2)-2A\alpha m]\cos mx$$

entonces

$$A=\frac{\alpha^2+\beta^2-m^2}{(\alpha^2+\beta^2-m^2)^2+4m^2\alpha^2}\qquad B=\frac{2\alpha m}{(\alpha^2+\beta^2-m^2)^2+4m^2\alpha^2}$$

o sea

$$\frac{1}{(D-\alpha)^2+\beta^2}\ \mathrm{sen}\ mx=\frac{(\alpha^2+\beta^2-m^2)\ \mathrm{sen}\ mx+2\alpha m\cos mx}{(\alpha^2+\beta^2-m^2)^2+4m^2\alpha^2}\tag{3}$$

hago $mx=\frac{\pi}{2}-mt$ como, entonces, $\frac{dt}{dx}=-1$

$$[(D-\alpha)^2+\beta^2]\,y=\cos mx\longrightarrow[(D+\alpha)^2+\beta^2]\,y=\mathrm{sen}\ mt$$

luego

$$\frac{1}{(D-\alpha)^2+\beta^2}\cos mx=\frac{(\alpha^2+\beta^2-m^2)\cos mx-2\alpha m\ \mathrm{sen}\ mx}{(\alpha^2+\beta^2-m^2)^2+4m^2\alpha^2}\tag{4}$$

Ahora si se trata de:

$$[(D-\alpha)^2+\beta^2]\,y=e^{nx}\ \mathrm{sen}\ mx$$

cambio la función según $y=e^{nx}z$ para obtener:

$$\{[D-(\alpha-n)^2]+\beta^2\}\,z=\mathrm{sen}\ mx$$

y finalmente, aplicando (3)

$$\frac{1}{(D-\alpha)^2+\beta^2}e^{nx}\ \mathrm{sen}\ mx=e^{nx}\frac{[(\alpha-n)^2+\beta^2-m^2]\ \mathrm{sen}\ mx+2m(\alpha-n)\cos mx}{[(\alpha-n)^2+\beta^2-m^2]^2+4m^2(\alpha-n)^2}\tag{5}$$

en forma análoga

$$\frac{1}{(D-\alpha)^2+\beta^2}e^{nx}\cos mx=e^{nx}\frac{[(\alpha-n)^2+\beta^2-m^2]\cos mx-2m(\alpha-n)\ \mathrm{sen}\ mx}{[(\alpha-n)^2+\beta^2-m^2]^2+4m^2(\alpha-n)^2}\tag{6}$$

resulta util hacer $\alpha=0$ en (3) y (4), y $\alpha=n$ en (5) y (6).