Operadores Simétricos y Simetrizables Finitos en un Espacio de Hilbert.

Por: Peter Paul Konder (U. Andes)

Se trata de conseguir una caracterización algebráica de operadores en un espacio de Hilbert, que tiene las propiedades esenciales de los operadores completamente continuos.

§ 1. Operadores simétricos finitos

Sea E un espacio vectorial con un producto escalar positivamente definido A un operador definido sobre E, es decir una transformación lineal de E en si mismo. A se llama simétrico si para todo par de elementos x, y de E, el producto escalar (Ax, y) es igual a (x, Ay). Un operador es simétrico si y solo si la forma cuadrática (Ax, x) tiene para todo x un valor real. Si A es simétrico, todo valor propio de A, es decir un número complejo λ tal que la ecuación $(A - \lambda I)x = 0$ tiene una solución no trivial en E, es real. Una solución no trivial se llama solución propia. Soluciones propias correspondientes a valores propios diferentes son ortogonales entre si. En general un operador simétrico no posee necesariamente un valor propio.

Ejemplo. E es el espacio vectorial de las funciones continuas definidas en el intervalo cerrado [1,2]. Para dos funciones x(t), y(t) de E se define un producto escalar por

$$(x, y) = \int_1^2 x(t)\overline{y}(t)\,dt$$

Sea A un operador lineal definido por $Ax(t) = tx(t)$. A es simétrico ya que

$$(Ax, x) = \int_1^2 t\, x(t)^2\,dt > 0 \quad \text{y real}$$

Para ningún λ la ecuación $(A - \lambda I)x = (t - \lambda)x = 0$, tiene una solución no trivial.

En la teoría clásica se exige que **A** sea **completamente** continuo, que es una propiedad topológica. Si **E** es completo, **A** simétrico y completamente continuo, entonces **A** tiene un valor propio diferente de cero, cada elemento del rango de **A** permite un desarrollo en serie de Fourier con respecto a un sistema ortonormal de soluciones propias para valores diferentes de cero y vale el teorema de ejes principales, es decir $(Ax,x) = \sum_1^{\infty} \lambda_i (x,e_i)(e_i,x) = \sum_1^{\infty} \lambda_i |\xi_i|^2$, $\xi_i = (x, e_i)$ donde $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ (símbolo de Kronecker), λ_i es valor propio de **A** correspondiente a la solución propia e_i, la dimensión del núcleo de $A - \lambda_i I$ es finita.

Wielandt (Tübunguen 1952) introdujo la propiedad finita para un operador y demostró que los operadores simétricos finitos tienen las mismas propiedades como los operadores simétricos completos continuos. Un operador se llana finito, si para todo complejo ζ la dimensión del núcleo de $(A - \zeta I)$ es igual al defecto de $(A - \zeta I)$. Si **A** es finito existe un valor propio no-cero real, un sistema ortonormal de soluciones propias tal que cada elemento del rango de **AE** permite un desarrollo en una serie de Fourier según el sistema ortonormal de las soluciones propias con respecto a los valores propios diferentes de cero.

Cada operador simétrico completamente continuo es finito. Existen operadores simétricos finitos no completamente continuos - también no acotados-, si el espacio no es completo. Si el espacio es completo, la clase de los operadores simétricos finitos es igual ala clase de los operadores simétricos completamente continuos (Heuser, MZ 74 1960).

§ 2. Operadores normales

Para operadores normales se encuentra también, que en un espacio completo, la clase de los operadores normales finitos coincide con la clase de los operadores completamente continuos (Heuser, Diss. Tübungen 1956).

§ 3. Operadores simetrizables.

Un operador A se llama simetrizable, si existe un operador simétrico positiva-semidefinido H , tal que el producto HA es simétrico.

Si se introduce en E un nuevo producto escalar $[x, y] = (Hx, y)$ se ve que A es simétrico con respecto al producto escalar $[x, y]$. Pero este producto escalar no es definido, sino solo positivamente semidefinido. Si A es acotado finito sobre E, simetrizable por H positivamente semidefinido y simétrico y si $HA \neq 0$, entonces A posee un valor propio real diferente de cero. Si además $He \neq 0$ para toda solución propia con respecto a un valor propio diferente de cero, de A , entonces vale el teorema de desarrollo en una serie de Fourier para el producto escalar $[x, y] = (Hx, y)$.

$$y = HAx = \sum^{\infty} \lambda_i (x, He_i) \cdot He_i$$