Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen **29** *(1995), páginas 127–144*

Recursión en categorías

FERNANDO ZALAMEA

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

ABSTRACT. The article splits in two parts. First, a survey of work done around recursion theory, in several categorical settings, is presented. Natural number objects in topoi, particularly in the recursive and effective topoi, Freyd's allegories and his reconstructions of the free and effective topoi, the representation of numerical functions in cartesian categories, are examined. Second, an axiomatic study of categorical versions of enumeration and parametrization (s-m-n) is presented in the general framework of partial cartesian categories, leading to a residual characterization, previously unnoticed in classical work.

Key words and phrases. Cartesian categories, topoi, natural number objects, recursion, sheafs, realizability, intuitionism, combinatory logic, enumeration, parametrization, fixed points, residuals.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 18B25. Secondary 03G30, 03D75, 03B40

RESUMEN. Este artículo está dividido en dos partes. Primero, se presenta una revisión de trabajos realizados sobre la teoría de la recursión dentro de varios contextos categóricos. Se examinan por ejemplo objetos de números naturales en topos, particularmente en los topos recursivo y efectivo, las alegorías de Freyd y su reconstrucción de los topos libre y efectivo, y la representación de funciones numéricas en categorías cartesianas. Segundo, se presenta un estudio axiomático de versiones categóricas de enumeración y parametrización (s-m-n) dentro del marco general de las categorías cartesianas parciales, lo cual conduce a una caracterización residual que ha pasado desapercibida en los trabajos clásicos.

Al hacer teoría de la recursión en el marco de la teoría de categorías, se buscan dos objetivos principales. Por un lado, definir y caracterizar, algebraica y categóricamente, propiedades de subclases de la clase de funciones recursivas $\mathcal{R}$, para poder extrapolar instrumentarios de computabilidad a modelos que posean una estructuración aritmética más débil que la de los números naturales (por ejemplo, una caracterización de $\mathcal{R}$ puede obviar las referencias a minimización (buen orden de los naturales) enfatizando, en cambio, propiedades sintéticas de

$\mathcal{R}$ (enumeración, parametrización, puntos fijos, etc.)). Por otro lado, proponer modelos naturales, alternativos a los construídos en la categoría de conjuntos, que se acomoden de manera más fiel a la recursión de orden superior y a la aritmética intuicionista.

Los topos permiten internalizar nociones de computabilidad. El topos recursivo de Mulry es un modelo natural para estudiar funcionales recursivos y recursión en tipos superiores; el topos efectivo de Hyland permite reconstruir la realizabilidad de Kleene via validez en el topos. En ambos topos se pueden caracterizar propiedades algebraicas de $\mathcal{R}$ y se puede internalizar la noción de función parcial via el clasificador de subobjetos. Pero no es necesario todo el poder expresivo de un topos para modelar recursión en categorías. Las propiedades sintéticas de $\mathcal{R}$ pueden expresarse eficazmente mediante la lógica combinatoria de Curry; las estructuras uniformes reflexivas de Wagner y Strong incorporan los combinadores básicos y modelan algebraicamente las propiedades sintéticas de $\mathcal{R}$. Las categorías parciales cartesianas (Moggi, Curien, Obtulowicz) son un marco natural para codificar esas propiedades y la dicotomía parcial/total; las álgebras de Wagner y Strong resultan ser subcategorías adecuadas. En ese marco, los teoremas básicos de enumeración y parametrización pueden ser caracterizados, muy concisamente, mediante la existencia de un apropiado residual en una categoría de oráculos.

Este artículo presenta un panorama *global* de trabajos que se han realizado en el área de *Recursión en Categorías* (1980-1992). La primera parte del artículo (secciones 1-5) es una exposición concertada de muchos resultados dispersos; dado el enfoque comprensivo que se propone, no se presentan pruebas (muchas de ellas extensas) de las proposiciones señaladas (cada enunciado va acompañado de una referencia a la literatura, donde se encontrarán pruebas); en cambio, se ha puesto especial énfasis en explicar el *desarrollo de los conceptos*. La segunda parte (secciones 6-7) expone resultados inéditos del autor, obtenidos en su tesis de doctorado; en esta segunda parte se presentan algunas pruebas ilustrativas. Una última sección (sección 8) plantea problemáticas abiertas.

1. Topos y objetos de números naturales

Fijemos algo de terminología. Una *categoría cartesiana* (c.c.) es una categoría con productos finitos. Una *categoría cartesiana cerrada* (c.c.c.) es una c.c. que, además, posee exponenciales (funtor producto posee adjunto derecho). Un *topos* es una c.c.c. que, además, posee clasificador de subobjetos. Pueden presentarse otras axiomatizaciones sencillas para un topos (por ejemplo, usando límites finitos y objetos potencia). Los topos se encuentran en el cruce entre teoría de conjuntos y geometría algebraica. La axiomatización via c.c.c. + clasificador refleja heurísticas de la teoría de haces. La axiomatización via límites finitos + potencias refleja heurísticas de la teoría de conjuntos. Referencias estándar sobre topos y categorías cartesianas son: [Barr & Wells 85], [Lambek & Scott 86], [MacLane & Moerdijk 92]. Una visión muy idiosincrática la proporciona [Freyd & Scedrov 90].

Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto terminal 1. Un *objeto de números naturales* (n.n.o.) en $\mathcal{C}$ consiste en una tripla (N, o, s), $1 \xrightarrow{o} N \xrightarrow{s} N$, que verifica la siguiente propiedad universal:

$$\forall\ 1 \xrightarrow{x_0} X \xrightarrow{f} X \quad \exists\,!\ N \xrightarrow{\psi} X \quad \text{tal que} \quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "o"] \arrow[d, equal] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\psi"] & N \arrow[d, "\psi"] \\ 1 \arrow[r, "x_0"] & X \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

En el caso $\mathcal{C} = \underline{\mathrm{Con}}$ (categoría de conjuntos) la anterior propiedad corresponde a la definición de ψ por *recursión simple*: (N, o, s) es la estructura $(\mathbb{N}, 0, s)$ con el cero 0 y sucesor $s(n) = n + 1$, y la conmutación de los diagramas corresponde a $\psi(0) = x_0 \quad \psi(n+1) = f(\psi(n))$.

El n.n.o., si existe, es único módulo isomorfismo. Es claro que no toda categoría posee n.n.o. Tampoco todo topos posee n.n.o.: por ejemplo, el topos de los conjuntos finitos no posee n.n.o. Sin embargo, si $\mathcal{C}$ tiene objeto terminal y coproductos enumerables entonces $\mathcal{C}$ tiene n.n.o., proporcionado por $\coprod_\omega 1$. En particular, todo topos de prehaces $\underline{\mathrm{Con}}^{\mathcal{C}^{op}}$ (y a fortiori todo topos de Grothendieck) posee n.n.o. Si $\mathcal{E}$ es un topos y j es una topología de Lawvere-Tierney en $\mathcal{E}$, se tiene el proceso de hacificación:

$$Sh_j(\mathcal{E}) \underset{a}{\overset{i}{\rightleftarrows}} \mathcal{E}$$

(i: funtor inclusión; a: adjunto izquierdo de i). En esta situación, si $\mathcal{E}$ tiene n.n.o. entonces $Sh_j(\mathcal{E})$ tiene n.n.o.: la imagen via a del n.n.o. en $\mathcal{E}$.

La definición de n.n.o. se debe a Lawvere; captura el comportamiento de la estructura de los naturales con respecto a la definibilidad de funciones via recursión simple. Si la categoría ambiente es, además, c.c.c. se obtiene entonces *recursión primitiva* (la anotación se debe a [Freyd 72]; para una prueba corta véase [Freyd & Scedrov 90]):

1.1 Proposición. *Sea $\mathcal{C}$ c.c.c.; sea $1 \xrightarrow{o} N \xrightarrow{s} N$ n.n.o. en $\mathcal{C}$. Entonces:*

$$\forall\ A \xrightarrow{g} B \quad \forall\ A \times N \times B \xrightarrow{h} B \quad \exists\,!\ A \times N \xrightarrow{f} B \quad \textit{tal que}$$

$$f(id_A \times o)(< id_A, !_A >) = g, \qquad f(id_A \times s) = h(< \pi_A, \pi_N, f >)$$

En $\underline{\mathrm{Con}}$ esta situación corresponde a construir (dadas $\mathbb{N}^n \xrightarrow{g} \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}^{n+2} \xrightarrow{h} \mathbb{N}$) la función $\mathbb{N}^{n+1} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ mediante la recursión primitiva $f(a, 0) = g(a) \quad f(a, x+1) = h(a, x, f(a, x))$.

Por otro lado, un n.n.o. puede caracterizarse, no por su poder de definibilidad (Lawvere), sino por su *exactitud* intrínseca (Freyd):

2.4 Proposición. *(Teorema del punto fijo).*

$$\forall f \in \underline{Rec}(N,N) \;\; \exists\, 1 \xrightarrow{a} N \;\; \text{tal que} \;\; \Phi_1 a = \Phi_1 f a.$$

El instrumentario algebraico minimal implícito en estas pruebas será puesto de relieve en la sección 6.

3. El topos efectivo

El topos recursivo geometriza la mirada recursiva: mira a $\mathbb{N}$ como objeto variable (vía la inmersión de Yoneda $\mathcal{M} \to \underline{\mathrm{Con}}^{\mathcal{M}^{op}}$) y luego como haz (vía la hacificación $\underline{\mathrm{Con}}^{\mathcal{M}^{op}} \xrightarrow{a} Sh_J(\underline{\mathrm{Con}}^{\mathcal{M}^{op}})$). El *topos efectivo* [Hyland 82] modela la realizabilidad recursiva de Kleene. [Kleene 45] introdujo sus nociones de realizabilidad para proporcionar interpretaciones y pruebas de consistencia e independencia para fragmentos de la aritmética intuicionista. La realizabilidad recursiva está basada en la estructura parcial $(\mathbb{N},*)$ donde $n * m = \varphi_n(m)$ ($(\varphi_n)_{n\geq 0}$ enumeración de las funciones parciales recursivas de una variable). Dada una sentencia ϕ de la aritmética intuicionista **HA**, dado $n \in \mathbb{N}$, se define inductivamente la noción de realizabilidad "n realiza ϕ": por ejemplo, "n realiza $\exists x\phi(x)$" ssi "$\pi_2(n)$ realiza $\phi(\lceil\pi_1(n)\rceil)$" donde $\mathbb{N} \xrightarrow{<\pi_1,\pi_2>} \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ es una codificación recursiva de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ fija desde el comienzo; "n realiza $\forall x\phi(x)$" ssi para todo m, $n*m$ converge y "$n*m$ realiza $\phi(\lceil m\rceil)$" (para un análisis detallado de la realizabilidad, véase [Kleene 73]).

Un procedimiento general permite construir el topos efectivo a partir de la estructura aplicativa parcial de Kleene $(\mathbb{N},*)$ [Hyland, Johnstone, Pitts 80]. Como resultado de ese proceso, el topos efectivo $\underline{\mathrm{Eff}}$ puede describirse así: los objetos de $\underline{\mathrm{Eff}}$ son los pares $(X,=_X)$ donde X es conjunto y donde $=_X$ es una función parcial $X\times X \xrightarrow{=_X} \wp(\mathbb{N})$ (igualdad no estándar); denotamos $||x = y|| = (x =_X y)$ (valores de verdad no estándar) y $E(x)$ el predicado $||x = x|| \neq \varnothing$; $(X,=_X) \xrightarrow{f} (Y,=_Y)$ es morfismo en $\underline{\mathrm{Eff}}$ ssi $X \xrightarrow{f} Y$ es relación funcional, total al restringirse a $dom(E)$, estricta (i.e. $E(x) \Longrightarrow E(fx)$) y substitutiva (i.e. $||fx = fy|| = ||x = y||$ cuando los valores de verdad están definidos).

$\underline{\mathrm{Eff}}$ posee n.n.o.: $(\mathbb{N},=_\mathbb{N})$ donde $(n =_\mathbb{N} m) = \{n\}$ si $n = m$ y $\varnothing$ si no. Este n.n.o. debe distinguirse del objeto asociado a la representación estándar de la igualdad $(\mathbb{N},=_{est})$ donde $(n =_{est} m) = \mathbb{N}$ si $n = m$ y $\varnothing$ si no; $(\mathbb{N},=_{est})$ no es n.n.o. en $\underline{\mathrm{Eff}}$. $\underline{\mathrm{Eff}}$ modela adecuadamente la realizabilidad:

3.1 Proposición. *Sea ϕ una sentencia de la aritmética intuicionista* **HA**. *Entonces: existe n tal que "n realiza ϕ" ssi ϕ vale en el n.n.o.* $(\mathbb{N},=_\mathbb{N})$.

La tesis de Church ("todas las funciones son recursivas") y el principio de Markov son realizados recursivamente; valen, por lo tanto, en el n.n.o. en $\underline{\mathrm{Eff}}$ (para mayor información ver [Hyland 82]).

Aparte de la adecuada modelización de técnicas constructivas relacionadas con la aritmética intuicionista, el topos efectivo ha adquirido preponderancia en el estudio de semánticas para los lenguajes de programación. En efecto, la categoría Per, definida a continuación, que es el modelo más sencillo conocido para estudiar nociones de polimorfismo (cálculo λ de segundo orden), resulta ser una plena sub-c.c.c. de Eff. Una p.e.r. (" relación de equivalencia parcial") es una relación simétrica y transitiva en $\mathbb{N}$; si A es una p.e.r., sea $Q(A) =$ dom$(A)/A$. Los objetos de Per son las p.e.r.; un morfismo $A \xrightarrow{f} B$ en Per es una función $Q(A) \xrightarrow{f} Q(B)$ representable en la estructura aplicativa de Kleene (i.e. $Q(A) \xrightarrow{f} Q(B)$ vive en Per ssi $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall m \in dom(A)\ n * m \downarrow$ y $f([m]_A) = [n * m]_B$). Es de notar que el hecho de que Per sea una categoría ya codifica bastante información recursiva: los teoremas clásicos de enumeración y parametrización permiten construir los combinadores k y s en $(\mathbb{N}, *)$ (ver sección 6); gracias a ellos se puede mostrar que composición de representables es representable y, por tanto, que la composición en Per está bien definida.

4. Las alegorías de Freyd

En las décadas del 70 y del 80 Peter Freyd desarrolló una poderosa maquinaria para clasificar categorías intermedias entre c.c.c. y topos. A través de axiomatizaciones de propiedades típicas en categorías de relaciones, y de un ubicuo uso de teoremas de representación, Freyd ha logrado presentar, de manera sistemática, los desarrollos de la teoría de los topos como casos particulares de concepciones "alegóricas" [Freyd & Scedrov 90]. En lo que aquí nos concierne, Freyd ha reconstruído el topos efectivo de Hyland y el *topos libre con n.n.o.*: $\mathcal{F}$, con n.n.o. $N_{\mathcal{F}}$, es libre ssi para todo topos $\mathcal{E}$, con n.n.o. $N_{\mathcal{E}}$, existe un (único salvo isomorfismo) funtor $\mathcal{F} \xrightarrow{F} \mathcal{E}$ tal que $F(N_{\mathcal{F}}) = N_{\mathcal{E}}$.

Fijemos la terminología de Freyd. Una categoría $\mathcal{C}$ es *regular* ssi posee límites finitos y coigualadores y los pullbacks preservan coigualadores. Dada una categoría regular $\mathcal{C}$, $Rel(\mathcal{C})$ es la categoría de relaciones en $\mathcal{C}$, vistas como pares mónicos (la regularidad de $\mathcal{C}$ asegura que se tenga una composición bien definida en $Rel(\mathcal{C})$). Una *alegoría* es una categoría con operaciones 1, $()^{\circ}$, $\sqcap$ (0-aria, 1-aria y binaria respectivamente) que verifican ciertos axiomas canónicos válidos en $Rel(\mathcal{C})$ [Freyd & Scedrov 90, p. 196]. Dada una alegoría $\mathcal{A}$, $Eq(\mathcal{A})$ es la categoría de relaciones de equivalencia en $\mathcal{A}$, y $Map(\mathcal{A})$ es la categoría de relaciones funcionales en $\mathcal{A}$ ($1 \subset R^{\circ}R$, $RR^{\circ} \subset 1$). Una categoría regular es *efectiva* ssi para toda relación de equivalencia (par mónico (f,g)) existe x tal que (f,g) es el núcleo de x. Por último, dada $\mathcal{I}$ clase de idempotentes en una categoría $\mathcal{A}$, $Split(\mathcal{I})$ es la categoría con clase de objetos $\{a \ : \ a \in \mathcal{I}\}$ y con morfismos $Hom(a,b) = \{x \text{ morfismo en } \mathcal{A} \ : \ xa = x = bx\}$.

4.1 Proposición. *La 'categoría' de categorías regulares efectivas es una 'subcategoría' reflexiva de la 'categoría' de categorías regulares. El adjunto izquier-*

do de la inclusión puede construirse explícitamente como:

$$\mathcal{C} \longmapsto Map(Split(Eq(Rel(\mathcal{C}))))$$

para toda categoría regular $\mathcal{C}$.

Este notable teorema de Freyd produce, en dos casos específicos, el topos efectivo y el topos libre con n.n.o., como sigue. Sea K una colección de endofunciones parciales sobre $\mathbb{N}$. Sea $\mathcal{C}_K$ con colección de objetos $\{(A, \{A_n : n \geq 0\}) : A \text{ conjunto }, A_n \subseteq A\}$ y con morfismos definidos por

$$(A, \{A_n : n \geq 0\}) \xrightarrow{f} (B, \{B_n : n \geq 0\})$$

es morfismo en $\mathcal{C}_K$ ssi $\bigcup_{n\geq 0} A_n \xrightarrow{f} \bigcup_{n\geq 0} B_n$ es función y existe $\varphi \in K$ tal que $\forall n \geq 0\ \forall x \in \bigcup_{n\geq 0} A_n\ \ x \in A_n \Longrightarrow \varphi(n)\downarrow$ y $f(x) \in B_{\varphi(n)}$. Si $K \ni id_{\mathbb{N}}$ y K es cerrada bajo composición entonces $\mathcal{C}_K$ (con la composición obvia) es categoría. Si, además, K contiene decodificadores de pares (i.e. $\mathbb{N} \xrightarrow{l_1} \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \xrightarrow{l_2} \mathbb{N}$ tal que $l_1(\langle n, m\rangle) = n$, $l_2(\langle n, m\rangle) = m$ donde $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\langle , \rangle} \mathbb{N}$ es alguna biyección dada) entonces $\mathcal{C}_K$ es regular. En particular, $K = \{$funciones parciales recursivas de una variable$\}$ cumple todas estas condiciones, y de la proposición 4.1 se obtiene:

4.2 Proposición. *$Map(Split(Eq(Rel(\mathcal{C}_{\{\text{func. parc. rec. unarias}\}}))))$ es un topos, equivalente al topos efectivo <u>Eff</u>.*

Por otro lado, Freyd y Scedrov construyen un 'alegoría libre' $\mathcal{A}_T$ asociada a una colección de sentencias T en la teoría (intuicionista) de tipos. Se tiene entonces, para T=**HA**:

4.3 Proposición. *$Map(Split(Cor(\mathcal{A}_{\mathbf{HA}})))$ es el topos libre con n.n.o. (donde $Cor(\mathcal{A})$ es la categoría de morfismos coreflexivos ($R \subset 1$) en $\mathcal{A}$).*

La construcción del topos libre con n.n.o. a partir de **HA** ya había sido explicitada en [Coste-Roy, Coste, Mahé 80]. Sin embargo, la metodología de Freyd y Scedrov esclarece los *pasos* de la construcción y permite preguntarse acerca de la existencia de categorías libres intermedias para fragmentos de la aritmética (ver sección 8).

5. Representabilidad de funciones recursivas

El problema de la representabilidad de ciertas clases de funciones numéricas ($\subseteq \bigcup_{n\geq 0} \mathbb{N}^{\mathbb{N}^n}$) en adecuados sistemas lógicos, ha sido un problema crucial en teoría de la prueba, desde la introducción de las funciones primitivas recursivas, por Gödel, en 1931, para probar su teorema de incompletitud. Gödel, Kleene, Grzegorczyk clasificaron varias clases de funciones, de acuerdo al poder de definibilidad de las *teorías* en que se representaban esas clases; la influencia de esa línea de trabajo impulsó, en parte, a la resolución del décimo problema de Hilbert. En los años 60, Lambek, motivado por extensos trabajos lingüísticos con sistemas deductivos y categorías, planteó el problema de la representabilidad en términos categóricos: clasificar clases de funciones numéricas de acuerdo al poder expresivo de las *categorías* en que se representaran esas clases. La escuela de Lambek (Lambek, Thibault, Scott, Román, etc.) ha obtenido los siguientes resultados (ver, por ejemplo, [Lambek & Scott 86], [Román 89]).

Sea $\mathcal{C}$ c.c. Sea $N \in Ob(\mathcal{C})$, con $1 \xrightarrow{o} N \xrightarrow{s} N$ dados. Sea $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ (en Con). f es N-representable en $\mathcal{C}$ ssi $\exists f^+ \in \mathcal{C}(N^n, N)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\natural^n"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "\natural"] \\ \mathcal{C}(1, N^n) \arrow[r, "f^+ \circ -"] & \mathcal{C}(1, N) \end{tikzcd}$$

donde $\natural(m) = \underbrace{s \circ s \cdots \circ s}_{m\text{-veces}} \circ o$ y $\natural^n(m_1, \cdots, m_n) = \langle \natural(m_1), \cdots, \natural(m_n) \rangle$. Diremos que N es d.p.r.n.n.o. ssi $1 \xrightarrow{o} N \xrightarrow{s} N$ satisface el esquema de recursión primitiva débil (propiedad de la proposición 1.1 sin exigir unicidad), y que N es d.n.n.o. ssi $1 \xrightarrow{o} N \xrightarrow{s} N$ satisface la propiedad definitoria de n.n.o. sin exigir unicidad. Se tiene entonces:

5.1 Proposición. *Para funciones totales en* $\bigcup_{n \geq 0} \mathbb{N}^{\mathbb{N}^n}$ *se tiene*

$$\begin{aligned} \{\textit{primitivas recursivas}\} &= \{\textit{representables en c.c. con d.p.r.n.n.o.}\} \\ &\subsetneq \{\textit{representables en c.c.c. con d.n.n.o.}\} \\ &\subsetneq \{\textit{representables en topos con n.n.o.}\} \\ &\subsetneq \{\textit{totales recursivas}\}. \end{aligned}$$

5.2 Proposición. *Para funciones parciales se tiene*

$$\{\textit{parciales recursivas}\} \subseteq \{\textit{representables en c.c. con igualadores y n.n.o.}\}.$$

Con una noción más débil de representabilidad ("representabilidad numeral" [Román 90]) se consigue la caracterización:

$$\begin{aligned} &\{\text{parciales recursivas}\} = \\ &\qquad \{\text{numeralmente representables en c.c. con igualadores y d.n.n.o.}\}. \end{aligned}$$

6. Estructuras uniformes reflexivas y categorías parciales cartesianas

Como las proposiciones 5.1 y 5.2 indican, no es necesaria toda la potencia expresiva de un topos para modelar en él nociones de recursividad. Por otro lado, no es necesaria toda la estructuración aritmética de $(\mathbb{N}, 0, s)$ para caracterizar clases de funciones recursivas; Kleene, por ejemplo, logró caracterizar a la clase de funciones parciales recursivas, evitando minimización en $\mathbb{N}$ y apoyándose, en cambio, en los teoremas de enumeración y parametrización (s-m-n). Propiedades de la *estructura* se pueden obviar, así, enfatizando en su lugar propiedades de la *clase* de funciones a definirse sobre la estructura dada; esto puede ser de suma importancia en categorías de estructuras que no poseen todo el arsenal aritmético de $\mathbb{N}$ y que, sin embargo, merecen que se estudie su computabilidad intrínseca. En esta sección recordamos el teorema clásico de Kleene [Kleene 59], explicamos la traducción de ese teorema a un marco algebraico estrechamente relacionado con la lógica combinatoria (las "estructuras uniformes reflexivas" de Wagner y Strong [Wagner 69], [Strong 68]), introducimos el marco categórico minimal en el que se pueden describir parcialidad/totalidad, morfismos constantes y productos ("categorías parciales cartesianas" [Curien & Obtulowicz 89]) y presentamos, en ese contexto, una axiomatización de las clases de funciones definibles en estructuras uniformes reflexivas [Zalamea 91].

Para cada $n \geq 1$, sea $(\varphi_e^n)_{e\geq 0}$ la enumeración de las funciones parciales recursivas de n variables obtenida gracias al teorema de la forma normal de Kleene. Los siguientes dos resultados clásicos serán básicos para nuestras consideraciones:

Teorema de parametrización, s-m-n.

$$\begin{gathered}\forall n, m \geq 1\ \exists\ \mathbb{N}^{n+1} \xrightarrow{s_n^m} \mathbb{N} \text{ primitiva recursiva tal que} \\ \forall e \in \mathbb{N}\ \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^n \forall \vec{y} \in \mathbb{N}^m \quad \varphi^m_{s_n^m(e,\vec{x})}(\vec{y}) = \varphi_e^{n+m}(\vec{x}, \vec{y})\end{gathered}$$

(la igualdad se lee: "iguales ssi ambos términos divergen o ambos convergen y son iguales").

Teorema de enumeración.

$$\forall n \geq 1\ \exists\ \mathbb{N}^{n+1} \xrightarrow{\Phi_n} \mathbb{N} \text{ parcial recursiva } \forall e \in \mathbb{N}\ \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^n \quad \Phi_n(e, \vec{x}) = \varphi_e^n(\vec{x}).$$

El teorema de enumeración expresa el doble rol fundamental de los números en teoría de la recursión: un número codifica al tiempo un elemento de $\mathbb{N}$ (significado natural) y una función parcial recursiva (índice via enumeración). El teorema de parametrización permite una transferencia uniforme y de bajo nivel de complejidad (s_n^m, mejor aún que primitiva recursiva, es elemental) entre los anteriores papeles del número.

En ésta y en la siguiente sección nos centraremos en el status axiomático de los teoremas de parametrización y de enumeración. Un resultado clásico muestra que estos teoremas pueden usarse para proveer un marco axiomático alternativo para la teoría de funciones recursivas [Kleene 59]:

6.1 Proposición. *Sea $\mathcal{P} = \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{P}_n$ una clase de funciones parciales en $\mathbb{N}$ ($\mathcal{P}_n \subseteq$ {funciones parciales de n variables}), que es cerrada bajo composición y contiene las funciones cero, sucesor, proyecciones y discriminador ($\delta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}^4}$ definida por $\delta(n,p,q,m) = q$ si $n = m$, $\delta(n,p,q,m) = p$ si $n \neq m$). Asuma que $\mathcal{P}$ satisface enumeración y parametrización, en el sentido siguiente:*

$$\forall n \geq 1\ \exists \Phi_n \in \mathcal{P}_{n+1}\ \forall f \in \mathcal{P}_n\ \exists e \in \mathbb{N} \text{ tal que } \Phi_n(e,\vec{x}) = f(\vec{x})$$

$$\forall n,m \geq 1\ \exists s_n^m \in \mathcal{P}_{n+1}\ s_n^m \text{ total tal que } \Phi_m(s_n^m(e,\vec{x}),\vec{y}) = \Phi_{n+m}(e,\vec{x},\vec{y})$$

Entonces: $\mathcal{P} \supseteq$ {parciales recursivas}.

Este resultado de Kleene caracteriza, entonces, a las funciones parciales recursivas como la mínima colección de funciones parciales en $\mathbb{N}$ que contiene adecuadas funciones iniciales y satisface las propiedades de enumeración y parametrización (para una prueba detallada, véase [Hennie 77, pp. 296–299]).

Contrariamente a los procesos de definición por recursión primitiva y por minimización, las propiedades de enumeración y de parametrización evitan una referencia explícita al buen orden de los naturales. En los años 60, Wagner usó este hecho para desarrollar una teoría de la computabilidad abstracta en un conjunto infinito arbitrario. Por otro lado, en los años 20, Schönfinkel y Curry habían desarrollado la ***lógica combinatoria*** para fundamentar un manejo, algebraico y sin variables, de la lógica de primer orden; en particular, en la lógica combinatoria se puede eliminar la noción de variable ligada y se permiten construcciones autoreferentes, en las cuales las funciones también pueden entrar como argumentos. El doble rol de los números en teoría de la recursión es análogo al doble rol de las funciones en lógica combinatoria. Estas ideas se concretan en las ***estructuras uniformes reflexivas*** [Wagner 69], [Strong 68]. Una u.r.s. (<u>u</u>niformly <u>r</u>eflexive <u>s</u>tructure) es una estructura $(D,*,\uparrow,k,s,t)$ donde: $*$ es una operación binaria en D (para simplificar la escritura notaremos $a*b = ab$ y asociaremos a la izquierda: $abc = ((ab)c)$) y $\uparrow$, k, s, t son elementos de D que satisfacen los siguientes axiomas: $k \neq s$, $\forall a \in D\ \ a\uparrow\ = \ \uparrow a = \ \uparrow$, $\forall a,b,c,d \in D \setminus \{\uparrow\}$ $tabcd = c$ si $a = d$ y $tabcd = b$ si $a \neq d$, $\forall a,b \in D\setminus\{\uparrow\}$ $kab = a$, $\forall a,b,c \in D\setminus\{\uparrow\}$ $sab \neq \uparrow$ y $sabc = ac(bc)$.

La heurística detrás de las u.r.s. es la siguiente: $\uparrow$ representa un elemento 'indefinido', k y s representan los combinadores básicos de Schönfinkel (intuitivamente, un operador "constancia" y un operador "fusión") y t representa un discriminador (para permitir definiciones por casos). Las u.r.s. son estructuras algebraicamente 'sui generis': si $(D,*,\uparrow,k,s,t)$ es una u.r.s. entonces D es infinito, $*$ no es asociativa y $*$ no es conmutativa (folklore; para pruebas ver

[Zalamea 91]). El ejemplo básico de u.r.s. es la estructura parcial aplicativa de Kleene $(\mathbb{N}, *)$ (ver sección 3), donde k, s y t se obtienen usando parametrización y enumeración. Por ejemplo, k se obtiene de la siguiente manera: hay que encontrar $k \in \mathbb{N}$ t.q. $kab = a$, es decir $\varphi_{ka}(b) = a$ (por definición de la operación $*$); tenemos: $a = \pi_1^2(a,b) = \varphi_e^2(a,b) = \varphi^1_{s_1^1(e,a)}(b) = \varphi^1_{s_1^1(\kappa_e,id)(a)}(b) = \varphi^1_{\varphi^1_k(a)}(b) = \varphi^1_{ka}(b)$, donde: e es un índice de π_1^2 y k es un índice de $s_1^1(\kappa_e, id)$ (κ_e es la función constante con valor e). De manera similar, se pueden obtener explícitamente s y t (ver [Zalamea 91], en donde los cálculos se realizan *algebraicamente* en un marco más general, para toda u.r.s. en una categoría parcial cartesiana).

Las u.r.s. codifican, en una estructura algebraica, el comportamiento abstracto de clases de funciones similares a la clase de las parciales recursivas. Sea D un conjunto con más de dos elementos. Sea $\mathcal{P} = \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{P}_n$ una clase de funciones parciales en D. Para $a \in D$, sea κ_a la función constante con valor a. $\mathcal{P}$ es una b.r.f.t. (teoría básica de funciones recursivas) ssi $\forall a \in D$ $\kappa_a \in \mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ contiene las proyecciones y el discriminador, $\mathcal{P}$ es cerrada bajo composición y $\mathcal{P}$ satisface enumeración y parametrización, como en la proposición 6.1.

6.2 Proposición. *Sea D un conjunto con más de dos elementos. Sea $\mathcal{P} = \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{P}_n$ una clase de funciones parciales en D. Entonces: $\mathcal{P}$ es una b.r.f.t. ssi existe una u.r.s. $(D, *, \uparrow, k, s, t)$ que 'representa a $\mathcal{P}$', es decir*

$$\mathcal{P}_n = \{f \in D^{D^n} : \exists e \in D \text{ tal que } f(x_1, \cdots, x_n) = e * x_1 * \cdots * x_n\}$$

(identificando $f(\vec{x})\downarrow$, para $f \in \mathcal{P}_n$, con $f(\vec{x}) \neq \uparrow$, para $f \in D^{D^n}$).

Para pruebas, véanse [Wagner 69] y [Strong 68]. Volvamos ahora a consideraciones categóricas.

Para modelar u.r.s. y b.r.f.t. en una categoría necesitamos morfismos constantes, productos y la distinción parcial/total: es precisamente lo que proveen las categorías parciales cartesianas (definidas en otro contexto). Una *categoría parcial cartesiana* (p.c.c.) es una categoría localmente ordenada (los conjuntos Hom son conjuntos parcialmente ordenados compatibles con la composición), con un objeto terminal parcial 1 y con productos parciales (para una axiomatización de estos conceptos ver [Curien & Obtulowicz 89]). Dentro de las especificaciones de p.c.c. se tiene, para cada objeto A de la categoría, un morfismo $A \xrightarrow{!_A} 1$ que es el máximo de $\mathcal{C}(A,1)$. Un morfismo $f \in \mathcal{C}(A,B)$ se dice *total* ssi $!_B f = !_A$ (esto corresponde a una caracterización categórica de totalidad en conjuntos). Si $\mathcal{C}$ es p.c.c. entonces $\mathcal{C}_T$, la subcategoría de morfismos totales, es c.c. Definiendo, para cada $a \in \mathcal{C}(1,D)$, $\kappa_a = D \xrightarrow{!_D} 1 \xrightarrow{a} D$ se tiene el siguiente *cálculo de constantes* (inmediato, pero muy útil):

(i) a total $\Longrightarrow \kappa_a$ total;
(ii) $\forall g \in \mathcal{C}(D,D)$ g total $\Longrightarrow \kappa_a g = \kappa_a$;
(iii) $\forall h \in \mathcal{C}(D,D)$ $h\kappa_a = \kappa_{ha}$.

Sea $\mathcal{C}$ una p.c.c., sea $D \in Ob(\mathcal{C})$, sean $\mathcal{D} = \mathcal{C}(D, D)$, $\mathcal{D}_T = \mathcal{C}_T(D, D)$, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D}$, $\mathcal{I} = \mathcal{C}_T(1, D)$.

6.3 Definición. *$\mathcal{U}$ es un cono ssi $\mathcal{U}$ verifica los axiomas (A1)-(A5):*

(A1) $id_D \in \mathcal{U}$.
(A2) $\forall f, g \in \mathcal{U} \;\; fg \in \mathcal{U}$.
(A3) $\forall f, g \in \mathcal{U} \;\; (f, g) \in \mathcal{U}$.
(A4) $\forall f, g \in \mathcal{D}_T \;\; (f, g) \in \mathcal{D}_T$.
(A5) $\exists p_1 \neq p_2 \in \mathcal{U} \; \forall f, g \in \mathcal{D}_T \;\; p_1(f, g) = f$ *y* $p_2(f, g) = g$.

donde $(f, g) = \Psi < f, g >$ *para algún* $D \times D \xrightarrow{\Psi} D$ *fijo.*

Sea $\mathcal{U}$ un cono. $\mathcal{U}$ es $\mathcal{I}$-enumerado ssi $\mathcal{U}$ verifica los axiomas (A6)-(A7):

(A6) $\forall a \in \mathcal{I} \;\; \kappa_a \in \mathcal{U}$.
(A7) $\exists \Phi \in \mathcal{D} \; \forall f \in \mathcal{U} \; \exists a \in \mathcal{I} \;\; f = \Phi(\kappa_a, id_D)$.

Sea $\mathcal{U}$ un cono $\mathcal{I}$-enumerado. $\mathcal{U}$ satisface enumeración ssi $\mathcal{U}$ verifica (A8):

(A8) $\Phi \in \mathcal{U}$.

$\mathcal{U}$ satisface parametrización ssi $\mathcal{U}$ verifica (A9):

(A9) $\exists \tau \in \mathcal{U} \; \forall f, g, h \in \mathcal{D}_T \;\; \tau(f, g) \in \mathcal{D}_T$ *y* $\Phi(f, (g, h)) = \Phi(\tau(f, g), h)$.

EJEMPLOS. En $\mathcal{C}$=<u>Pfn</u> (categoría de conjuntos con funciones parciales), $\mathcal{U} = \{$parciales recursivas unarias$\} \subseteq$ <u>Pfn</u>$(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ satisface (A1)-(A9). En $\mathcal{C} = \underline{\text{Rec}}_P$ (<u>Rec</u> con morfismos parciales, representados en el topos por parejas con primera componente mono), $\mathcal{U} = \underline{\text{Rec}}_P(h_\mathbb{N}, h_\mathbb{N})$ satisface (A1)-(A9). En $\mathcal{C} = \underline{\text{Per}}_P$, $\mathcal{U} = \underline{\text{Per}}_P(Q(\Delta_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}))$ satisface (A1)-(A9). Sea $(E^n)_{n\geq 3}$ la jerarquía de Grzegorczyk (estratificación de las funciones primitivas recursivas); en $\mathcal{C} = \underline{\text{Con}}$, $\mathcal{U} = E^n_1 = \{$funciones unarias en $E^n\} \subseteq \underline{\text{Con}}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ satisface (A1)-(A7) y (A9), pero *no* satisface (A8) puesto que ninguna subclase de funciones recursivas totales puede ser enumerada por una función de la misma clase (argumento diagonal). Para pruebas y una discusión extensa de los conceptos anteriores, véase [Zalamea 91].

Con un cono $\mathcal{I}$-enumerado que satisfaga enumeración (A8), parametrización (A9) y un axioma adicional para el discriminador, se obtienen, en una p.c.c. arbitraria, pruebas *puramente algebraicas* (uso ubicuo del cálculo de constantes en una p.c.c.) de los teoremas clásicos de la teoría de la recursión: teorema del punto fijo, segundo teorema de la recursión (en forma débil y en forma subrecursiva), teorema de Rice, etc.

Si $\mathcal{U}$ es un cono $\mathcal{I}$-enumerado, introducimos las siguientes notaciones: $f \odot g = \Phi(f, g)$ (con f, $g \in \mathcal{C}(X, D)$), θ_f = índice de f = algún $a \in \mathcal{I}$ para el cual vale (A7) (con $f \in \mathcal{U}$). En este contexto, los axiomas (A7) y (A9) pueden verse, desde un punto de vista algebraico, como propiedades de la operación $\odot$:

(A7) $\kappa_{\theta_f} \odot id_D = f$.
(A9) $f \odot (g, h) = \tau(f, g) \odot h$.

En la siguiente proposición resumimos algunos hechos elementales que se deducen de los axiomas en una p.c.c., de las definiciones de $(,)$ y de $\odot$ y del cálculo de constantes mencionado antes de la definición 6.3.

6.4 Proposición. *Sea $\mathcal{U}$ un cono $\mathcal{I}$-enumerado. Se tiene:*

(i) *Para $f, g \in \mathcal{D}$ y $h \in \mathcal{C}(X, D)$, $(f,g)h = (fh, gh)$, $(f \odot g)h = (fh) \odot (gh)$.*

(ii) *Para $a, b \in \mathcal{C}(1, D)$, $\kappa_{(a,b)} = (\kappa_a, \kappa_b)$.*

(iii) *Para $g \in \mathcal{D}_T$ y $f \in \mathcal{U}$, $\kappa_{\theta_f} \odot g = fg$ (donde yuxtaposición es composición en la categoría).*

6.5 Proposición. *(Teorema del punto fijo). Sea $\mathcal{U}$ un cono $\mathcal{I}$-enumerado que satisface también (A8) y (A9). Entonces: $\forall f \in \mathcal{U}\ \exists y \in \mathcal{I}\ \ \kappa_y \odot id_D = \kappa_{fy} \odot id_D$.*

Prueba: Sea $\iota = id_D$. Sea $f \in \mathcal{U}$. Por los axiomas (A2), (A3), (A5) y (A8) se tiene que $\Phi(f\Phi(p_1, p_1), p_2) \in \mathcal{U}$; usando (A7) se obtiene un índice de ese morfismo; denotemos x a un tal índice. Sea $h = \tau(\kappa_x, \iota)$; gracias a (A1), (A2), (A3), (A6) y (A9) se tiene que $h \in \mathcal{U}$; por lo tanto, usando de nuevo (A7), existe $\theta_h \in \mathcal{I}$. Como x total implica κ_x total (cálculo de constantes), entonces $h = \tau(\kappa_x, \iota)$ es total (usamos aquí (A9)). Entonces $h\theta_h \in \mathcal{I}$. Afirmación: $y = h\theta_h$ sirve como punto fijo. En efecto, para todo $c \in \mathcal{I}$ se tiene:

$$\kappa_{hc} \odot \iota = (h\kappa_c) \odot \iota = (\tau(\kappa_x, \iota)\kappa_c) \odot \iota = \tau(\kappa_x\kappa_c, \kappa_c) \odot \iota = \tau(\kappa_x, \kappa_c) \odot \iota =$$
$$\kappa_x \odot (\kappa_c, \iota) = \Phi(f\Phi(p_1, p_1), p_2))(\kappa_c, \iota) = \Phi(f\Phi(\kappa_c, \kappa_c), \iota) = (f(\kappa_c \odot \kappa_c)) \odot \iota.$$

En particular, para $c = \theta_h$, se obtiene $\kappa_{h\theta_h} \odot \iota = (f(\kappa_{\theta_h} \odot \kappa_{\theta_h})) \odot \iota = (f(h\kappa_{\theta_h})) \odot \iota = \kappa_{fh\theta_h} \odot \iota$. Es de notar que los cálculos son explícitos y que se realizan únicamente usando los axiomas (A1)-(A9), el cálculo de constantes y las anotaciones elementales de la proposición 6.4.

6.6 Proposición. *(Segundo teorema de la recursión). Sea $\mathcal{U}$ un cono $\mathcal{I}$-enumerado que satisface también (A8) y (A9). Entonces: $\forall a \in \mathcal{I}\ \exists y \in \mathcal{I}\ \ \kappa_y \odot id_D = \kappa_a \odot (\kappa_y, id_D)$.*

Prueba: Sean $\iota = id_D$, $a \in \mathcal{I}$. Entonces $f = \tau(\kappa_a, \iota) \in \mathcal{U}$. Por el teorema del punto fijo, existe $y \in \mathcal{I}$ tal que $\kappa_y \odot \iota = \kappa_{fy} \odot \iota$; pero entonces $\kappa_{fy} \odot \iota = \kappa_{\tau(\kappa_a, \iota)y} \odot \iota = (\tau(\kappa_a, \iota)\kappa_y) \odot \iota = \tau(\kappa_a, \kappa_y) \odot \iota = \kappa_a \odot (\kappa_y, \iota)$.

La prueba anterior utiliza el teorema del punto fijo. Asumiendo además p_1 y p_2 totales, se puede proporcionar una prueba independiente que no usa puntos fijos [Zalamea 91].

Por otro lado, el instrumentario algebraico recién exhibido es muy cómodo para realizar cálculos explícitos de los combinadores en una versión categórica del teorema de representación 6.2. La algebraización ayuda también a detectar un 'bloqueo' en el teorema de representación: éste sólo se consigue a medias en una p.c.c. arbitraria; para obtener una representación completa se necesita que la p.c.c. tenga "liftings" (ver sección siguiente).

7. Caracterización residual de enumeración y parametrización

La axiomatización de las b.r.f.t. en una p.c.c. arbitraria ha llevado a una caracterización de enumeración y parametrización que no había sido notada anteriormente, ni en el contexto clásico, ni en el contexto de las u.r.s. en Con. La caracterización, en cambio, surge de manera natural con la algebraización de las pruebas en un adecuado contexto categórico. La idea de que enumeración y parametrización podían ser forzadas por propiedades residuales en una categoría se debe a [Freyd & Scedrov 87], en la primera reconstrucción que propusieron para el topos efectivo. No sólo condiciones necesarias, sino también suficientes, y no en topos, sino en adecuadas p.c.c., para caracterizar enumeración + parametrización se encuentran en [Zalamea 91].

Una p.c.c. tiene *liftings* si y sólo si

$$\forall D \in \mathcal{C}\ \exists D^* \in \mathcal{C}\ \forall B \in \mathcal{C}\ \exists\ \mathcal{C}(B,D) \xrightarrow{\sharp} \mathcal{C}_T(B,D^*)$$

biyección tal que $(\sharp g)f \leq \sharp(gf)$. La biyección $\sharp$ provee una correspondencia entre morfismos parciales y totales que generaliza aquella entre $\underline{\text{Pfn}}(X\ ,Y)$ y $\underline{\text{Con}}(X\ ,Y \cup \{\uparrow\})$. Todo topos posee 'liftings'. En una p.c.c. con 'liftings' un objeto *completo* es un objeto que actúa como D^* (para una axiomatización y propiedades ver [Curien & Obtulowicz 89]). Si $\mathcal{C}$ es una p.c.c. con 'liftings' y D es un objeto completo, para toda $f \in \mathcal{C}(D,D)$ existe una *extensión* natural $\bar{f} \in \mathcal{C}_T(D,D)$ tal que $f \leq \bar{f}$.

Sea $\mathcal{C}$ una p.c.c. con 'liftings', D un objeto completo, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{C}(D,D)$. Usaremos la misma notación que precede a la definición 6.3. Asumamos que $\mathcal{C}_T$ posee igualadores y que $\bar{\mathcal{U}} = \{\bar{f} : f \in \mathcal{U}\}$ es un cono sobre $\mathcal{I}$ con constantes (axiomas (A1)-(A6) de la definición 6.3, para $\bar{\mathcal{U}}$). Asociamos a $\mathcal{U}$ la categoría $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ descrita por: $\alpha \in Ob(\mathcal{C}(\mathcal{U}))$ ssi $\alpha = (\alpha_h)_{h \in \mathcal{D}_T}$ donde $(\alpha_h)_h$ es una familia de morfismos totales con codominio D; $\alpha \xrightarrow{f} \beta$ es morfismo en $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ ssi $\bar{f} \in \bar{\mathcal{U}}$ y $\forall h \in \mathcal{D}_T\ \alpha_h \subset \beta_{\bar{f}h}$; composición: $\alpha \xrightarrow{f} \beta \xrightarrow{g} \gamma\ =\ \alpha \xrightarrow{\bar{g}\bar{f}} \gamma$. Los axiomas (A1) y (A2) aseguran que $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ es categoría. Como $\mathcal{C}_T$ es c.c. (pues $\mathcal{C}$ es p.c.c.) y tiene igualadores (hipótesis), entonces $\mathcal{C}_T$ tiene pullbacks y podemos definir una operación $\cap$ en $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ como sigue: para α y β sea $\alpha \cap \beta$ determinado por $(\alpha \cap \beta)_h =$ diagonal del pullback de $\alpha_{\bar{p_1}h}$ y $\beta_{\bar{p_2}h}$ (p_1, p_2 proporcionadas por el axioma (A5)). En $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ se tiene el preorden canónico: $\alpha \prec \beta$ ssi existe morfismo $\alpha \longrightarrow \beta$ en $\mathcal{C}(\mathcal{U})$. Sean ε^1, ε^2 en $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ definidos por: para $h \in \mathcal{D}_T$, $(\varepsilon^1)_h =$ igualador de $\bar{p_1}$ y h, $(\varepsilon^2)_h =$ igualador de $\bar{p_2}$ y h.

7.1 Proposición. *Asuma las notaciones e hipótesis de la discusión precedente. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) *$\bar{\mathcal{U}}$ es $\mathcal{I}$-enumerado y satisface enumeración y parametrización (axiomas (A7) + (A8) + (A9) de la definición 6.3).*

(ii) *El residual izquierdo $\varepsilon^1 : \varepsilon^2$ existe en el grupoide preordenado $(Ob(\mathcal{C}(\mathcal{U})), \cap, \prec)$ Es decir,* $\exists(\varepsilon^1 : \varepsilon^2)\ \forall\gamma\ \ \gamma \cap \varepsilon^2 \prec \varepsilon^1 \Longleftrightarrow \gamma \prec \varepsilon^1 : \varepsilon^2$.

Esta es una caracterización sorprendente. Indicamos un esbozo de la prueba a continuación. El hecho de que propiedades estructurales complejas como enumeración y parametrización se caractericen por la existencia de un residual muy específico abre nuevas perspectivas a la algebraización de los procesos recursivos.

Esbozo de prueba de la Proposición 7.1: Asuma (i). Sea $\iota = id_D$. Suponiendo $\gamma \cap \varepsilon^2 \prec \varepsilon^1$ hay que construir $\varepsilon^1 : \varepsilon^2$ tal que $\gamma \prec \varepsilon^1 : \varepsilon^2$. Ahora, $\gamma \cap \varepsilon^2 \prec \varepsilon^1$ significa (def. de $\prec$): $\exists \bar{\xi} \in \bar{\mathcal{U}}\ \forall h \in \mathcal{D}_T\ (\gamma \cap \varepsilon^2)_h \subset (\varepsilon^1)_{\bar{\xi}h}$; en particular, $\forall h \in \mathcal{D}_T\ (\gamma \cap \varepsilon^2)_{(h,\bar{p_2})} \subset (\varepsilon^1)_{\bar{\xi}(h,\bar{p_2})}$. Por definición de ε^1, $(\varepsilon^1)_{\bar{\xi}(h,\bar{p_2})}$ iguala $\bar{p_1}$ y $\bar{\xi}(h,\bar{p_2})$; por definición de ε^2, $(\varepsilon^2)_{\bar{p_2}} = \iota$; por lo tanto (usando def. de $\cap$) γ_h iguala $\bar{p_1}$ y $\bar{\xi}(h,\bar{p_2})$ $(*)$. Por otro lado, $\gamma \prec \varepsilon^1 : \varepsilon^2$ significa: $\exists \bar{\varphi} \in \bar{\mathcal{U}}\ \forall h \in \mathcal{D}_T\ \gamma_h \subset (\varepsilon^1 : \varepsilon^2)_{\bar{\varphi}h}$, es decir: $\exists \bar{\varphi} \in \bar{\mathcal{U}}\ \forall h \in \mathcal{D}_T\ \exists v\ \gamma_h = (\varepsilon^1 : \varepsilon^2)_{\bar{\varphi}h}\ v$. Teniendo en cuenta $(*)$, para mostrar esto último bastaría con definir $\varepsilon^1 : \varepsilon^2$ (a nivel h) como un igualador. Si se adopta la definición

$$(\varepsilon^1 : \varepsilon^2)_h = \text{igualador de } \bar{p_1} \text{ y } \bar{\Phi}(h,\bar{p_2})$$

basta entonces con chequear (recordando $(*)$) que $\bar{\Phi}(\bar{\varphi}h,\bar{p_2}) = \bar{\xi}(h,\bar{p_2})$ para un adecuado $\bar{\varphi}$ (independiente de h). Como $\bar{\xi} \in \bar{\mathcal{U}}$, por (A7) existe a tal que $\bar{\xi} = \bar{\Phi}(\kappa_a,\iota)$; entonces (usando (A9)) se tiene

$$\bar{\xi}(h,\bar{p_2}) = \bar{\Phi}(\kappa_a,\iota)(h,\bar{p_2}) = \bar{\Phi}(\kappa_a,(h,\bar{p_2})) = \bar{\Phi}(\bar{\tau}(\kappa_a,h),\bar{p_2})$$

y se puede tomar así $\bar{\varphi} = \bar{\tau}(\kappa_a,\iota)$. Lo anterior muestra cómo construir $\varepsilon^1 : \varepsilon^2$ (sólo usa (A7) y (A9)) para que $\gamma \cap \varepsilon^2 \prec \varepsilon^1 \implies \gamma \prec \varepsilon^1 : \varepsilon^2$. La implicación contraria también vale, y usa (A8) explícitamente en la prueba.

Asuma ahora (ii). Como $\varepsilon^1 : \varepsilon^2 \prec \varepsilon^1 : \varepsilon^2$ (via la identidad), entonces (por (ii)) $(\varepsilon^1 : \varepsilon^2) \cap \varepsilon^2 \prec \varepsilon^1$; por definición de $\prec$ existe entonces un morfismo $\bar{\Phi} \in \mathcal{C}(\mathcal{U})$ $(\varepsilon^1 : \varepsilon^2) \cap \varepsilon^2 \xrightarrow{\bar{\Phi}} \varepsilon^1$. Se puede demostrar que $\bar{\Phi}$ actúa como enumerador y que valen (A7) y (A8). Por otro lado, tenemos $\varepsilon^1 \cap \varepsilon^2 \prec \varepsilon^1$, puesto que $\varepsilon^1 \cap \varepsilon^2 \xrightarrow{\bar{p_1}} \varepsilon^1$ es morfismo en $\mathcal{C}(\mathcal{U})$; por lo tanto (use (ii)) $\varepsilon^1 \prec \varepsilon^1 : \varepsilon^2$. Además, $(\varepsilon^1 : \varepsilon^2) \cap \varepsilon^2 \prec \varepsilon^1$; por transitividad de $\prec$ se deduce $(\varepsilon^1 : \varepsilon^2) \cap \varepsilon^2 \prec \varepsilon^1 : \varepsilon^2$ (esto no es trivial: nótese que, en general, *no* vale $\gamma \cap \eta \prec \gamma$ para γ arbitrario). Por definición de $\prec$ existe entonces un morfismo $\bar{\tau} \in \mathcal{C}(\mathcal{U})$ $(\varepsilon^1 : \varepsilon^2) \cap \varepsilon^2 \xrightarrow{\bar{\tau}} \varepsilon^1 : \varepsilon^2$, y se puede mostrar que $\bar{\tau}$ actúa como parametrizador (vale (A9)).

Los detalles de las pruebas son extensos (requieren, por ejemplo, pullbacks escalonados): véase [Zalamea 91, pp. 51–61].

8. Cuestiones abiertas

Los temas de trabajo en *Recursión en Categorías* podrían clasificarse en tres grandes áreas: modelos ricos, modelos débiles, comportamientos locales.

1. *Modelos ricos.* Se estudiarían aquí las interrelaciones entre el topos recursivo, el topos efectivo y el topos libre con n.n.o. [Mulry 89a] ha avanzado algo en

esa dirección: ha demostrado que *no* existe una c.c.c. con n.n.o N sumergida plenamente en Rec y en Eff, enviando N en $h_{\mathbb{N}}$ y en $(\mathbb{N}, =_{\mathbb{N}})$ respectivamente. Sin embargo, no se conoce casi ninguna otra conexión entre los 'modelos ricos'. Para el estudio de esas interrelaciones podría ser muy útil usar la maquinaria alegórica de Freyd.

2. *Modelos débiles.* Se trataría aquí de caracterizar categorías más débiles que los topos, de acuerdo al poder de representación en ellas de conceptos básicos de la teoría de la recursión. Avances importantes en esta línea han sido realizados por la escuela de Lambek. Quedan, sin embargo, importantes interrogantes: caracterizaciones categóricas en el universo subrecursivo (todo lo que se ha hecho engloba clases de funciones que ya contienen a las primitivas recursivas), axiomatizaciones intrínsecas de n.n.o. débiles (todo lo hecho está basado en representaciones de externas funciones numéricas). Aquí, de nuevo, la maquinaria alegórica de Freyd podría resultar muy útil.

3. *Comportamientos locales.* Se estudiarían aquí problemas específicos que surgen en cada una de las áreas de trabajo. Por ejemplo: desarrollar la teoría clásica de la definibilidad (jerarquía aritmética de Kleene) en los 'modelos ricos'; asociar lógicas intermedias a los 'modelos débiles'; caracterizar, independientemente, enumeración y parametrización en adecuadas p.c.c. (esto es importante para la algebraización de procesos subrecursivos en los que no vale enumeración pero sí parametrización).

Bibliografía

[Barr & Wells 85] M. Barr & C. Wells, *Toposes, Triples and Theories*, Springer, New York, 1985.

[Coste-Roy, Coste & Mahé 80] M.F. Coste-Roy, M. Coste & L. Mahé, *Contribution to the study of the natural number object in elementary topoi*, Journal of Pure and Applied Algebra **17** (1980), pp. 35–68.

[Curien & Obtulowicz 89], P.L. Curien & A. Obtulowicz, *Partiality, cartesian closedness and toposes*, Inform. and Comput. **80** (1989), pp. 50–95.

[Freyd 72] P. Freyd, *Aspects of topoi*, Bull.Austr.Math.Soc. **7** (1972), pp. 1-76, 467–480.

[Freyd & Scedrov 87] P. Freyd & A. Scedrov, *Some semantic aspects of polymorphic lambda calculus*, en: 2nd Symposium on Logic in Computer Science, pp. 315–320, IEEE, Washington, 1987.

[Freyd & Scedrov 90] P. Freyd & A. Scedrov, *Categories, Allegories*, North-Holland, Amsterdam, 1990.

[Hennie 77] F. Hennie, *Introduction to Computability*, Addison-Wesley, London, 1977.

[Hyland 82] J.M.E Hyland, *The effective topos*, en: The L.E.J. Brouwer Centenary Symposium, North-Holland, Amsterdam, 1982.

[Hyland, Johnstone, & Pitts 80] J.M.E. Hyland, P.J. Johnstone & A.M. Pitts, *Tripos theory*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **88** (1980) pp. 205–232.

[Kleene 45] S.C. Kleene, *On the interpretation of intuitionistic number theory*, Journal of Symbolic Logic **10** (1945), pp. 109–124.

[Kleene 59] S.C. Kleene, *Recursive functionals and quantifiers of finite types I*, Trans. Amer. Math. Soc. **91** (1959), pp. 1–52.

[Kleene 73] S.C. Kleene, *Realizability: a retrospective survey*, en: Cambridge Summer School in Mathematical Logic, LNM 337, Springer, New York, 1973.

[Lambek & Scott 86], J. Lambek & P.J. Scott, *Introduction to Higher Order Categorical Logic*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[MacLane & Moerdijk 92] S. MacLane & I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic. A First Introduction to Topos Theory*, Springer, New York, 1992.

[Mulry 80] P. Mulry, *The topos of recursive sets*, Ph.D. Thesis, Buffalo, 1980.

[Mulry 89a] P. Mulry, *Some connections between models of computation*, en: Categories in Computer Science and Logic, AMS, Contemporary Mathematics vol. 92, 1989.

[Mulry 89b] P. Mulry, *A categorical approach to the theory of computation*, Annals of Pure and Applied Logic **43** (1989), pp. 293–305.

[Román 89] L. Román, *Cartesian categories with natural numbers object*, Journal of Pure and Applied Algebra **58** (1989), pp. 267–278.

[Román 90] L. Román, *Categories with finite limits and natural numbers object*, preprint, UNAM, México, 1990.

[Rosolini 86] G. Rosolini, *Continuity and effectiveness in topoi*, Ph.D. Thesis, Oxford, 1986.

[Strong 68] H.R. Strong, *Algebraically generalized recursive function theory*, IBM J. Res. Develop. **12** (1968), pp. 465–475.

[Wagner 69] E.G. Wagner, *Uniformly reflexive structures: on the nature of gödelizations and relative computability*, Trans. Amer. Math. Soc. **144** (1969), pp. 1–41.

[Zalamea 91] F. Zalamea, *Axiomatic enumeration and parametrization: a category-theoretic approach*, Ph.D. Thesis, Univ. of Massachusetts, 1991.

(Recibido en noviembre de 1994; revisado en mayo de 1995)

Fernando Zalamea
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá – COLOMBIA
e-mail: fzalamea@ciencias.ciencias.unal.edu.co