# ANALISIS DE LA ECUACION GENERAL DE LAS SECCIONES CONICAS

Por: FERNANDO JOSE LOPEZ LOPEZ

( University of Texas )

Partiendo de la ecuación general de 2$^{\text{o}}$ grado en 2 variables

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

definimos las siguientes cantidades:

El determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix}$$

que llamaremos discriminante general.

Los menores correspondientes a cada letra de este determinante:

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 2C & E \\ E & 2F \end{vmatrix} = 4CF - E^2 \; ; \qquad \Delta_D = \begin{vmatrix} B & D \\ 2C & E \end{vmatrix} = BE - 2CD$$

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} B & D \\ E & 2F \end{vmatrix} = 2BF - DE \; ; \qquad \Delta_E = \begin{vmatrix} 2A & D \\ B & E \end{vmatrix} = 2AE - BD$$

$$\Delta_C = \begin{vmatrix} 2A & D \\ D & 2F \end{vmatrix} = 4AF - D^2 \; ; \qquad \Delta_F = \begin{vmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{vmatrix} = 4AC - B^2$$

Y las siguientes cantidades:

$$I = A + C \qquad\qquad \Delta_{AC} = \Delta_A + \Delta_C$$

A las cantidades $\Delta$, $\Delta_F$, I y el signo de $\Delta_{AC}$, los llamamos invariantes, pues su valor no cambia con las transformaciones de traslación y rotación, del sistema de coordenadas. El signo de $\Delta_F$, que llamaremos indicador, determinará el género de la curva.

En base a las anteriores definiciones, podemos formar la si guiente tabla de clasificación de las secciones conicas:

I) $\Delta_F > 0$ ; curva de género elíptico:

a) $I\Delta < 0$ ; elipse real; ( $I^2 = \Delta_F$ , circunferencia)

b) $I\Delta = 0$ ; un punto; ( elipse puntual )

c) $I\Delta > 0$ ; ningún lugar geométrico; ( elipse imaginaria.)

II) $\Delta_F < 0$ ; curva de género hiperbólico:

a) $\Delta \neq 0$ ; hiperbola real; ( $I = 0$; hipérbola equilátera )

b) $\Delta = 0$ ; dos rectas que se intersectan en un punto finito.

III) $\Delta_F = 0$ ; curva de género parabólico:

a) $\Delta \neq 0$ ; parábola real

b) $\Delta = 0$ : a') $\Delta_{AC} < 0$ ; dos rectas paralelas.

b') $\Delta_{AC} = 0$ ; una sola recta (paralelas coincidentes )

c') $\Delta_{AC} > 0$ ; ningún lugar geométrico (paralelas imaginarias ).

Consideraremos a continuación cada caso en particular, comenzando con los casos en que $\Delta_F \neq 0$ , llamados también curvas centrales.

En estos casos podemos efectuar una traslación del origen de coordenadas al punto O' ($x_0$, $y_0$), centro de la curva, eliminando los coeficientes de los términos de primer grado (D' y E') y calculando el nuevo valor del coeficiente libre (F').

Siendo la ecuación original de la curva:

$$A x^2 + B xy + C y^2 + D x + E y + F = 0 \qquad (1)$$

utilizaremos para la traslación, las ecuaciones de transformacion

$$x = y' + x_0 \qquad\qquad y = y' + y_0 \qquad (2)$$

y marcaremos con primas los nuevos coeficientes de la ecuación. Despues de substituir las ecuaciones (2) en la (1), obtenemos:

$$A' x'^2 + B' x' y' + C' y'^2 + D' x' + E' y' + F' = 0 \qquad (3)$$

en donde

$$\begin{aligned} A' &= A & D' &= 2A x_o + B y_o + D \\ B' &= B & E' &= B x_o + 2C y_o + E \\ C' &= C & F' &= \tfrac{1}{2}(D' x_o + E' y_o + D x_o + E y_o + 2F) \end{aligned} \qquad (4)$$

Haciendo D' = E' = 0, obtenemos las coordenadas del centro O' $(x_o, y_o)$, resultando:

$$x_o = \frac{BE - 2CD}{4AC - B^2} = \frac{\Delta_D}{\Delta_F}$$

$$y_o = \frac{BD - 2AE}{4AC - B^2} = -\frac{\Delta_E}{\Delta_F} \qquad (5)$$

El término independiente F' se puede escribir:

$$F' = \tfrac{1}{2}(D x_o + E y_o + 2F) = \frac{D\Delta_D - E\,\Delta_E + 2F\,\Delta_F}{2\,\Delta_F} = \frac{\Delta}{2\Delta_F} \qquad (6)$$

Con lo cual , la ecuación (3) toma la forma:

$$A\, x'^2 + B\, x' y' + C\, y'^2 + \frac{\Delta}{2\Delta_F} = 0 \qquad (7)$$

referida al nuevo sistema x'O'y', estando el nuevo origen en el punto:

$$O'(x_o, y_o) = O'\left(\frac{\Delta}{\Delta_F} \;,\; -\frac{\Delta_E}{\Delta_F}\right) \qquad (8)$$

Estas expresiones serán fáciles de recordar si se asocia siempre la abscisa-x con la letra D y la ordenada-y, con la letra E.

Ahora podemos efectuar una rotación de los ejes coordenados , con un ángulo $|\varphi| < \pi/2$ , tal que haga desaparecer el término en x'y', (B'), y se puede expresar la ecuación de la curva en forma canónica.

Las ecuaciones de transformación son:

$$y' = x'' \operatorname{sen} \varphi + y'' \cos \varphi \qquad (9)$$
$$x' = x'' \cos \varphi - y'' \operatorname{sen} \varphi$$

y marcando también con biprimas los nuevos coeficientes, la ecuación (7) toma la forma

$$A'' x''^2 + B'' x'' y'' + C\, y''^2 + F'' = 0 \qquad (10)$$

en donde:

A" y C" se determinarán a continuación.

$$B'' = 0 \quad ; \quad F'' = F' = \frac{\Delta}{2\Delta_F} \qquad (11)$$

Llamando: $A'' = \lambda_1$ , $C'' = \lambda_2$ (12)

La ecuación se escribirá:

$$\lambda_1\, x''^2 + \lambda_2\, y''^2 + \frac{\Delta}{2\Delta_F} = 0 \qquad (13)$$

Usando los invariantes definidos al principio, se puede calcular indirectamente los valores de $\lambda_1$ y $\lambda_2$, de la siguiente manera:

$$I = A + C = A'' + C'' = \lambda_1 + \lambda_2$$
$$\Delta_F = 4AC - B^2 = 4\,A''C'' = 4\,\lambda_1 \lambda_2 \qquad (14)$$

de donde:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = I \quad , \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{\Delta_F}{4} \qquad (16)$$

Teniendo la suma y el producto de $\lambda_1$ y $\lambda_2$ las podemos suponer como raíces de una ecuación de 2° grado en $\lambda$ :

$$\lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\,\lambda + \lambda_1 \lambda_2 = 0 \qquad (17)$$

o sea

$$\lambda^2 - I\lambda + \frac{\Delta_F}{4} = 0 \qquad (18)$$

llamada Ecuación Característica y que es muy fácil determinar a partir de los coeficientes. De este modo $\lambda_1$ y $\lambda_2$ quedan determinadas, sin necesidad de llevar a cabo la transformación de rotación de ejes, paso a paso.

Vamos ahora a calcular las ecuaciones de los nuevos ejes O'x" y O'y" en función de los coeficientes:

Evidentemente los nuevos ejes de coordanadas pasarán por el centro de la curva y tendrán por ecuación:

$$\text{eje } x'' : \quad y - y_0 = m(x - x_0) \qquad (19)$$

$$\text{eje } y'' : \quad y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0) \qquad (20)$$

en donde $m = \tan\varphi$ .

Para calcular m, recurrimos a las expresiones para los coeficientes $A'' = \lambda_1$ y $B'' = 0$, obtenidas al aplicar las ecuaciones de transformación (9), y que son:

$$\begin{aligned} A'' &= A\cos^2\varphi + B\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi + C\,\text{sen}^2\varphi = \lambda_1 \\ B'' &= 2(C-A)\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi + B(\cos^2\varphi - \text{sen}^2\varphi) = 0 \end{aligned} \qquad (21)$$

Multiplicando la ecuación de arriba por $2\,\text{sen}\,\varphi$ , y la de abajo por $\cos\varphi$ y sumando se obtiene:

$$B\cos\varphi + 2C\,\text{sen}\,\varphi = 2\lambda_1\,\text{sen}\,\varphi \qquad (22)$$

o sea

$$m = \tan\varphi = \frac{B}{2(\lambda_1 - C)} \qquad (23)$$

La ecuación del eje-x", resulta entonces:

$$y - y_0 = \frac{B}{2(\lambda_1 - C)}(x - x_0) \qquad (24)$$

Se puede demostrar además que:

$$-\frac{1}{m} = -\frac{2(\lambda_1 - C)}{B} = \frac{B}{2(\lambda_2 - C)} \tag{25}$$

En efecto:

$$4(C-\lambda_1)(\lambda_2 - C) = B^2 \tag{26}$$

o bien:
$$-4\lambda_1\lambda_2 + 4(\lambda_1+\lambda_2) - 4C^2 = B^2 \tag{27}$$

y como:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = I = A + C \tag{28}$$

$$4\lambda_1\lambda_2 = \Delta_F = 4AC - B^2$$

tenemos:

$$-4AC + B^2 + 4AC + 4C^2 - 4C^2 = B^2 \tag{29}$$

Con lo cual, la ecuación del eje-y" , se puede escribir:

$$y - y_0 = \frac{B}{2(\lambda_2 - C)}(x - x_0) \tag{30}$$

Las ecuaciones (13), (24) y (30), se pueden recordar más fácilmente asociando siempre a $\lambda_1$ , con la abscisa-x , y a $\lambda_2$ con la ordanada-y.

El ángulo de giro está dado por la condición:

$$\cot 2\varphi = \frac{A-C}{B} \tag{31}$$

que se puede obtener de la segunda de las relaciones (21).

Con todos estos datos, podemos expresar la ecuación (1) en forma canónica, de la siguiente manera:

Usando la ecuación ya transformada por traslación y rotación (3) , la podemos poner en la forma:

$$\frac{x''^2}{\dfrac{-\Delta}{2\lambda_1\Delta_F}} + \frac{y''^2}{\dfrac{-\Delta}{2\lambda_2\Delta_F}} = I \tag{32}$$

De donde se puede deducir fácilmente el valor de la excentricidad de la curva, resultando:

$$e = \sqrt{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \qquad (33)$$

Ahora pasaremos a discutir los casos particulares de $\Delta_F \neq 0$.

Para el caso $\Delta_F > 0$, (curva de género elíptico ), escogeremos:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \qquad (34)$$

o sea:

$$a \geqslant b \qquad (35)$$

Se puede ver entonces que:

a) Si:

$$I\,\Delta \leq 0 \;;\; (\lambda_1 \gtrless 0 ,\quad \lambda_2 \gtrless 0, \quad \Delta \lesseqgtr 0 ) \qquad (36)$$

se trata de la elipse real:

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1 \qquad (37)$$

en donde:

$$a = \sqrt{- \frac{\Delta}{2\lambda_1 \Delta_F}} \qquad (38)$$

$$b = \sqrt{- \frac{\Delta}{2\lambda_2 \Delta_F}} \qquad (39)$$

y la excentricidad resulta:

$$e = \sqrt{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \quad < 1 \qquad (40)$$

debido a la condición (34).

En el caso de que $\lambda_1 = \lambda_2$, la ecuación representa a la circunferencia:

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad (41)$$

en donde:

$$a = \sqrt{- \frac{\Delta}{2\lambda \Delta_F}} \qquad (42)$$

y la excentricidad se hace nula.

b) Si:

$$I\,\Delta = 0 \qquad (43)$$

la ecuación resultante:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0 \qquad (44)$$

sólo puede ser satisfecha por el punto $0'(x_o, y_o)$ y por lo tanto, representa a este punto. También se le llama elipse puntual o evanescente, pues se le puede considerar como una elipse degenerada en un punto.

c) Si $\quad I\Delta > 0 \quad ; \quad (\lambda_1 \gtrless 0\ ,\ \lambda_2 \gtrless 0\ ,\ \Delta \gtrless 0\ )$ (45)

la ecuación (32) no representa ningún lugar geométrico , pues a y b de las ecuaciones (38) y (39), no son números reales.

En el caso $\Delta_F < 0$ , tenemos que $\lambda_1\lambda_2 < 0$. Entonces:

a) Si:

$$\Delta > 0 \quad ; \quad \begin{pmatrix} a^2 > 0 \\ b^2 < 0 \end{pmatrix} \tag{46}$$

escogeremos: $\quad \lambda_1 > 0 \quad ; \quad \lambda_2 < 0$ (47)

y se trata de la hiperbola:

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1 \tag{48}$$

en donde:

$$a = \sqrt{-\frac{\Delta}{2\lambda_1 \Delta_F}} \tag{49}$$

$$b = \sqrt{+\frac{\Delta}{2\lambda_2 \Delta_F}} \tag{50}$$

y la excentricidad resulta:

$$e = \sqrt{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}} > 1 \tag{51}$$

debido a la condición (46).

Las ecuaciones de las asíntotas son :

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 0 \tag{52}$$

o bien:

$$A\ x'^2 + B\ x'\ y' + C\ y'^2 = 0 \tag{53}$$

que se puede factorizar y las ecuaciones quedan en la forma:

$$2Ax' + (B \pm \sqrt{-\Delta_F})\, y' = 0 \qquad (54)$$

o bien:

$$(B \pm \sqrt{-\Delta_F})\, x' + 2C\, y' = 0 \qquad (55)$$

tomando el signo de **arriba** se obtiene una ecuación y tomando el signo de abajo, la otra. Obsérvese que estas ecuaciones están referidas al sistema x'O'y'. Para obtenerlas, con referencia al sistema original xOy, aplicamos las ecuaciones de traslación (2) y obtenemos:

$$2Ax + (B \pm \sqrt{-\Delta_F})\, y = 2Ax_0 + (B \pm \sqrt{-\Delta_F})\, y_0 \qquad (56)$$

o bien

$$(B \pm \sqrt{-\Delta_F})\, x + 2C\, y = (B \pm \sqrt{-\Delta_F})\, x_0 + 2C\, y_0 \qquad (57)$$

que no son difíciles de recordar si observamos que la abscisa-$x_0$ y la abscisa-x tienen los mismos coeficientes , análogamente para las ordenadas-y, $y_0$ .

En el caso $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ , la hipérbola es equilátera:

$$x''^2 - y''^2 = a^2 \qquad (58)$$

en donde a está dada por la ecuación (49) o por la (50).

En este caso, las asíntotas son perpendiculares entre sí , y también se pueden calcular de las expresiones (56) o (57).

b) Si

$$\Delta < 0 \qquad \left( \begin{matrix} a^2 < 0 \\ b^2 > 0 \end{matrix} \right) \qquad (59)$$

escogeremos: $\lambda_1 < 0 \quad ; \quad \lambda_2 > 0$

y se trata de la hiperbola:

$$-\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1 \qquad (60)$$

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1 \tag{61}$$

en donde:

$$a = \sqrt{+\frac{\Delta}{2\lambda_1 \Delta_F}} \tag{62}$$

$$b = \sqrt{-\frac{\Delta}{2\lambda_2 \Delta_F}} \tag{63}$$

y la excentricidad tiene la misma expresión que en la ecuación (51).

Las ecuaciones de las asíntotas también están dadas por las ecuaciones (56) o (57).

Análogamente si $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, la hipérbola es equilátera, y tiene por ecuación:

$$x''^2 - y''^2 = -a^2 \tag{64}$$

en donde $a$ se puede calcular de las ecuaciones (62) o (63).

c) Si:

$$\Delta = 0 \tag{65}$$

la ecuación resultante es:

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 0 \tag{66}$$

o bien:

$$\frac{x''}{a} + \frac{y''}{b} = 0 \qquad \frac{x''}{a} - \frac{y''}{b} = 0 \tag{67}$$

en donde

$$a = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \qquad b = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_2}} \tag{68}$$

que representa a dos rectas (67) que se intersectan en el punto $0'(x_o, y_o)$. Este caso se puede considerar como una degeneración de la hipérbola en sus asíntotas, como ya se hizo en el inciso a), de las ecuaciones (52) a (57), resultando las ecuaciones -

(56) o (57).

Discutiremos a continuación el caso en que $\Delta_F = 0$. En este caso no existe un centro definido de la curva y , por lo tanto, no podemos efectuar una traslación primero, pues las expresiones (5) no tendrán sentido. Así que deberemos comenzar con una rotación.

Antes de eso y para facilitar el manejo de la ecuación (1), procederemos como sigue:

Dado que en este caso:

$$\Delta_F = 4AC - B^2 = 0 \tag{69}$$

podemos escribir:

$$4AC = B^2 = 4\alpha^2\beta^2 \tag{70}$$

de donde:

$$A = \alpha^2 \quad , \qquad B = 2\alpha\beta \qquad C = \beta^2$$

en donde haremos la siguiente convención:

$$\alpha > 0 \qquad \text{si} \qquad B \gtrless 0 \tag{72}$$

$$\beta \gtrless 0 \qquad \text{si} \qquad B \gtrless 0 \tag{73}$$

Substituyendo las expresiones (71) en la ecuación (1), tenemos

$$\alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta\, xy + \beta y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

que se puede escribir en la forma:

$$(\alpha x + \beta y)^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{75}$$

Ahora podemos efectuar una rotación con un ángulo $|\varphi| < \pi/2$, tal que haga desaparecer el término xy en la ecuación (74), y por lo tanto sujeto a la condición (31), que se puede escribir:

$$\tan 2\varphi = \frac{B}{A-C} = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2} = \frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi} \tag{76}$$

De aqui obtenemos una ecuación de 2° grado en tan $\varphi$ , que es

$$\alpha\beta\tan^2\varphi + (\alpha^2-\beta^2)\tan\varphi - \alpha\beta = 0 \tag{77}$$

con las raíces:

$$\tan\varphi_1 = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad \tan\varphi_2 = -\frac{\alpha}{\beta} \tag{78}$$

se puede ver que estos dos ángulos $\varphi_1$ y $\varphi_2$ , difieren en $\pi/2$ , o sea:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \tag{79}$$

Para poder aplicar las ecuaciones de transformación por rotación:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\operatorname{sen}\varphi \\ y &= x'\operatorname{sen}\varphi + y'\cos\varphi \end{aligned} \tag{80}$$

que son equivalentes a las (9), calcularemos los valores sen y cos, con ayuda de las identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\varphi &= \pm\frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \\ \cos\varphi &= \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \end{aligned} \tag{81}$$

en donde se ha puesto $m = \tan\varphi$ y se ha tomado en cuenta que $|\varphi| < \pi/2$. El valor m representa por el momento cualquier de los dos valores de las raíces (78).

Substituyendo sen $\varphi$ y cos $\varphi$ de las (81) en las ecuaciones (80) obtenemos:

$$x = \frac{x' - my'}{\sqrt{1+m^2}} \qquad y = \frac{mx' + y'}{\sqrt{1+m^2}} \tag{82}$$

y la expresión cuadrática de la ecuación (75) se convierte en:

$$\alpha x + \beta y = \frac{\alpha + \beta m}{\sqrt{1+m^2}}\, x' - \frac{\beta - \alpha m}{\sqrt{1+m^2}}\, y' \tag{83}$$

Ahora bien, la única manera de que desaparezca el término xy en la ecuación (75), es que uno de los coeficientes, el de x' o el de y' en la ecuación (83), se anule. Si anulamos el coeficiente de x', el eje de simetría de la parábola será paralelo al eje-x; y si anulamos al coeficiente de y', dicho eje de simetría será paralelo al eje-y'.

Aqui escogemos al eje x' como eje de referencia, o sea:

$$\frac{\alpha + \beta m}{\sqrt{1+m^2}} = 0 \tag{84}$$

con lo que:

$$m = -\frac{\alpha}{\beta} \tag{85}$$

o sea, debemos escoger como ángulo de giro: $\varphi = \varphi_2$. Por lo tanto, el término cuadrático en la (75) queda:

$$\alpha x + \beta y = \frac{\beta - \alpha m}{\sqrt{1+m^2}}\, y' = \sqrt{I}\, y' \tag{86}$$

además:

$$Dx + Ey + F = Dx' + E'y' + F \tag{87}$$

en donde:

$$D' = \frac{D + Em}{\sqrt{1+m^2}} = -\frac{\alpha E - \beta D}{\beta\sqrt{1+m^2}} = -\frac{\Delta_D}{2C\sqrt{1+m^2}} \tag{88}$$

$$E' = \frac{E - Dm}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{\alpha D + \beta E}{\sqrt{I}} = \frac{\delta}{\sqrt{I}} \tag{89}$$

$$\delta = \alpha D + \beta E \tag{90}$$

De este modo la ecuación (75) se transforma en la:

$$I\, y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0 \tag{91}$$

Esta ecuación la podemos simplificar aún más, poniendola en forma canónica y luego trasladando el origen de coordenadas al vértice de la curva, cuyas coordenadas serán ($x'_o$ , $y'_o$ ).

Para eso la ecuación (91) la podemos poner como:

$$\left(y'+\frac{E'}{2I}\right)^2 = -\frac{D'}{I}x' + \frac{E'^2}{4I^2} - \frac{F}{I} \qquad (92)$$

o también:

$$\left(y'+\frac{E'}{2I}\right)^2 = -\frac{D'}{I}\left[x' - \frac{I}{D'}\left(\frac{E'^2}{4I} - F\right)\right]; \quad D'' \neq 0 \qquad (93)$$

o finalmente:

$$(y - y'_o)^2 = 4p\,(x - x'_o) \qquad (94)$$

en donde:

$$y'_o = -\frac{E'}{2I} = -\frac{\delta}{2I\sqrt{I}} \qquad (95)$$

$$x'_o = \frac{I}{D'}(I\,y'^2_o - F)\ ; \quad D' \neq 0 \qquad (96)$$

$$p = -\frac{D'}{4I} = \frac{\Delta_D}{8IC\sqrt{1+m^2}} \qquad (97)$$

Transladando al vértice con la ayuda de las ecuaciones de trans formación :

$$x' = x'' + x''_o$$
$$y' = y'' + y''_o \qquad (98)$$

semejante a las (2), tenemos:

$$y''^2 = 4p\,x'' \qquad (99)$$

Ahora calcularemos la ecuación del eje de simetría que será- también el eje-x". Este eje tiene por ecuación:

$$y' = y'_o \qquad (100)$$

en el sistema x'O'y'. Utilizando las ecuaciones (86) y (95),se puede ver que la (106) se convierte en:

$$\alpha x + \beta y + \frac{\delta}{2I} = 0 \tag{101}$$

La intersección de este eje con la curva en la forma (75) nos dará las coordenadas del vértice $(x_o, y_o)$ que satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha x_o + \beta y_o + \frac{\delta}{2I} &= 0 \\ D x_o + E y_o + F + \frac{\delta^2}{4I^2} &= 0 \end{aligned} \tag{102}$$

También se pueden deducir las coordenadas del foco $(x_f, y_f)$ y las del punto de intersección de la directriz con el eje de simetría $(x_d, y_d)$, mediante una simple relación geométrica, resultado :

$$x_o \pm \frac{pm}{\sqrt{1+m^2}} = \begin{matrix} x_f \\ x_d \end{matrix} \quad ; \quad y_o \pm \frac{p}{\sqrt{1+m^2}} = \begin{matrix} y_f \\ y_d \end{matrix} \tag{103}$$

en donde p debe tomarse con todo y signo.

Teniendo el punto $(x_d, y_d)$ y la pendiente del eje de simetría, se puede calcular la ecuación de la directriz, que tras algunas simplificaciones, se puede expresar como sigue, en funciones de los coeficientes :

$$\Delta_D x - \Delta_E y - \frac{1}{2}\Delta_{AC} = 0 \tag{104}$$

Análogamente se puede expresar el eje-y" como:

$$\Delta_D x - \Delta_E y - \frac{1}{2}\Delta_{AC} + p\sqrt{\Delta_D^2 + \Delta_E^2} \tag{105}$$

Sin embargo, las fórmulas (110) y (111) no será necesario aplicarlas en un ejemplo dado, a menos qur no se desee saber ningún otro parámetro de la curva, pues resultan más fáciles de calcular con los datos antes obtenidos, como luego se verá en los ejemplos.

Todo lo dicho hasta ahora es válido , en tanto que $D' \neq 0$ . Vamos a analizar ahora el caso en que $D' = 0$. En este caso y debido a la relación (102), también tenemos que $\Delta = 0$ .

En este caso , la ecuación (92) queda en la forma:

$$\left(y' + \frac{E'}{4I^2}\right)^2 = \frac{E'^2}{4I^2} - \frac{F}{I} \tag{106}$$

Con la ayuda de la expresión:

$$D'^2 = AE^2 + CD^2 - BDE = 0 \tag{107}$$

el miembro de la derecha de la ecuación (112), puede transformarse y simplificarse, quedando:

$$\frac{E'^2}{4I^2} - \frac{F}{I} = -\frac{\Delta_{AC}}{4I^2} \tag{108}$$

con lo cual la ecuación (112) queda:

$$y' = \frac{-E = \sqrt{-\Delta_{AC}}}{2I} \tag{109}$$

que transformada al sistema original xOy, con la ayuda de la ecuación (86), queda:

$$\alpha x + \beta y + \frac{\delta}{2I} = \pm \frac{\sqrt{-I\ \Delta_{AC}}}{2I} \tag{110}$$

que tomando en cuenta que $I > 0$ representa:

a) dos rectas paralelas y equidistantes del eje de simetría si $\Delta_{AC} < 0$ .

b) dos rectas coincidentes con el eje de simetría si $\Delta_{AC} = 0$

c) ningún lugar geometrico si $\Delta_{AC} > 0$ .

<u>EJEMPLO</u> 1.

$$x^2 + xy + y^2 - 3x - 1 = 0$$

Primero determinamos , el discriminante general:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -24 \neq 0$$ **( curva propia)**

Ahora calculamos el indicador:

$$\Delta_F = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$ (curva de género elíptico)

Como I = 2, tenemos:

$$I\,\Delta = -48 < 0$$ **(elipse real)**

Sabiendo que $\Delta_D = 6$ y $\Delta_E = 3$ , calculamos ahora las coordanadas del centro de la curva.

$$x_0 = \frac{\Delta_D}{\Delta_F} = 2 \qquad\qquad y_0 = -\frac{\Delta_E}{\Delta_F} = -1$$

O sea, O'(2,-1).

El término independiente F', resulta:

$$F' = \frac{\Delta}{2\,\Delta_F} = -4$$

La ecuación característica es

$$\lambda^2 - I\lambda + \frac{\Delta_F}{4} = \lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4} = 0$$

Con las raíces:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad \lambda_2 = \frac{3}{2}$$

La ecuación del eje-x" es:

$$y - y_0 = \frac{B}{2(\lambda_2 - C)}(x - x_0)$$

o sea $$x + y - 1 = 0$$

Y la ecuación del eje-y" es:

$$y - y_0 = \frac{B}{2(\lambda_2 - C)}(x - x_0)$$

o sea: $$x - y - 3 = 0$$

La ecuación de la curva en el nuevo sistema queda entonces:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \frac{\Delta}{2\Delta_F} = 0$$

o sea $$\frac{1}{2} x''^2 + \frac{3}{2} y''^2 - 4 = 0$$

que expresada en forma canónoca es:

$$\frac{x''^2}{8} + \frac{y''^2}{8/3} = 1$$

de donde:

$$a = 2\sqrt{2} \quad ; \quad b = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

La excentricidad resulta:

$$e = \sqrt{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$$

y la semidistancia focal es entonces:

$$c = ae = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Ahora se puede trazar la curva como se ilustra en la Fig. 1.

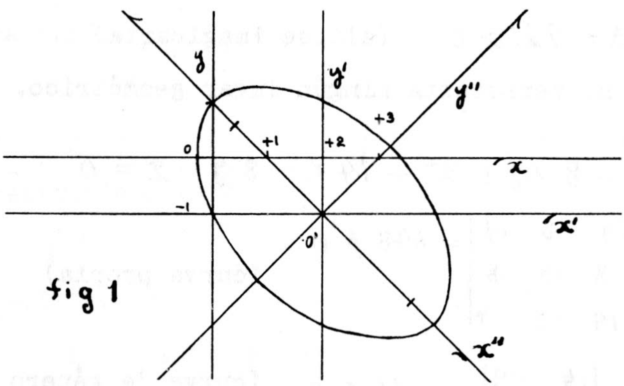



fig 1

EJEMPLO 2.

$$5x^2 + 4xy + y^2 - 10x - 2y + 10 = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 4 & -10 \\ 4 & 2 & -2 \\ -10 & -2 & 20 \end{vmatrix} = 0 \; ; \quad \text{( curva degenerada)}$$

$$\Delta_F = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \; ; \quad \text{(curva de género elíptico)}$$

$I\,\Delta = 0$ (elipse puntual)

En este caso la ecuación representa al punto cuyas coordenadas son:

$$x_0 = \frac{\Delta_D}{\Delta_F} = 3 \quad ; \quad y_0 = -\frac{\Delta_E}{\Delta_F} = -5$$

o sea el punto O'(3,-5).

EJEMPLO 3.

$$2x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$$ (curva propia)

$$\Delta_F = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0$$ (curva de género elíptico)

$$I = 3$$

$$I\,\Delta = 72 > 0$$ (elipse imaginaria)

La ecuación no representa ningún lugar geométrico.

EJEMPLO 4.

$$7x^2 - 8xy + y^2 + 14x - 8y - 2 = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 14 & -8 & 14 \\ -8 & +8 & -8 \\ 14 & -8 & -4 \end{vmatrix} = 648 \neq 0$$ (curva propia)

$$\Delta_F = \begin{vmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} = -36 < 0$$ (curva de género hiperbólico, hipérbola)

$$I = 8$$

Como $\Delta_D = 36$ y $\Delta_E = 0$, el centro de la curva está en:

$$x_0 = \frac{\Delta_D}{\Delta_F} = -1 \quad ; \quad y_0 = -\frac{\Delta_E}{\Delta_F} = 0$$

o sea en el punto O'(-1,0).

El término independiente F' resulta:

$$F' = \Delta / 2\Delta_F = -9$$

La ecuación característica es:

$$\lambda^2 - I\lambda + \frac{\Delta_F}{4} = \lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0$$

con las raíces: $\lambda_1 = 9$ $\lambda_2 = -1$

el nuevo eje-x" , es:

$$y - y_0 = \frac{B}{2(\lambda_1 - C)}(x - x_0)$$

o sea $x + 2y + 1 = 0$

El nuevo eje-y" es:

$$y - y_0 = \frac{B}{2(\lambda_2 - C)}(x - x_0)$$

o sea $2x - y + 2 = 0$

La ecuación de la cónica referida al nuevo sistema, resulta:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \frac{\Delta}{2\Delta_F} = 0$$

o sea $9x''^2 - y''^2 = 9$

o en forma canónica :

$$x''^2 - \frac{y''^2}{9} = 1$$

de donde: $a = 1$ $b = 3$

La excentricidad resulta:

$$e \sqrt{I - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \quad \sqrt{10} > 1$$

y la semi-distancia focal es entonces:

$$c = ae = \sqrt{10}$$

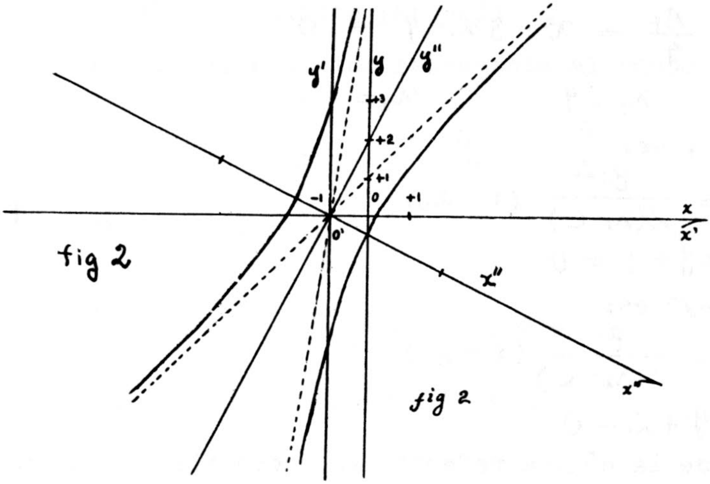
Las ecuaciones de las asíntotas son:

$$2Ax + (B \pm \sqrt{-\Delta_F})\,y = 2Ax_0 - (B \pm \sqrt{-\Delta_F})\,y_0$$

o sea:

$$7x - y + 7 = 0 \;; \qquad x - y + 1 = 0$$

Ahora se puede proceder a trazar la curva como se ilustra en la figura 2.




EJEMPLO 5.

$$6x^2 - 10xy - 4y^2 - 7x - 7y - 3 = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & -10 & -7 \\ -10 & -8 & -7 \\ -7 & -7 & -6 \end{vmatrix} = 0$$ ; (curva degenerada)

$$\Delta_F = \begin{vmatrix} -12 & -10 \\ -10 & -8 \end{vmatrix} = -196 < 0$$ ; (curva de género hiperbólico, dos rectas que se cortan)

El centro de esta curva degenerada está en:

$$x_0 = \frac{\Delta_D}{\Delta_F} = -\frac{1}{14} \quad ; \quad y_0 = -\frac{\Delta_E}{\Delta_F} = -\frac{11}{14}$$

La curva ha degenerada en dos rectas, que se cortan en el punto, $0'(-\frac{1}{14}, -\frac{11}{14})$ y que coinciden con las asíntotas, siendo sus ecuaciones:

$$2Ax - (B \pm \sqrt{-\Delta_F})y = 2Ax_0 - (B \pm \sqrt{-\Delta_F})y_0$$

o sea $$3x + y + 1 = 0$$

y $$2x - 4y - 3 = 0$$

EJEMPLO 6. $$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \qquad \text{(curva propia)}$$

$$\Delta_F = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(curva de género parabólico)}$$

$$I = A + C = 2 \quad ; \quad \delta = \alpha D + \beta E = 3$$

$$\alpha = \sqrt{A} = 1 \quad ; \quad \Delta_E = -2 < 0$$

$$\beta = \sqrt{C} = 1 \quad ; \quad p = -\frac{1}{4I}\sqrt{-\frac{\Delta}{2I}} = -\frac{\sqrt{2}}{16}$$

La ecuación de la curva se puede poner en la forma

$$(x+y)^2 + 2x + y = 0$$

La ecuación del eje de simetría es:

$$x + y + \frac{3}{4} = 0$$

De estas dos últimas ecuaciones se pueden deducir las coordenadas del vértice, que satisfacen las ecuaciones:

$$x_0 + y_0 + \frac{3}{4} = 0 \quad ; \quad 2x_0 + y_0 + \frac{9}{16} = 0$$

resultando:

$$x_0 = \frac{3}{16} \quad ; \quad y_0 = -\frac{15}{16}$$

Las coordanadas del foco y el punto de intersección de la directriz son:

$$y_0 \mp \frac{p\alpha}{\sqrt{I}} = -\frac{15}{16} \pm \frac{1}{16} = \begin{cases} \frac{1}{8} = x_f \\ \frac{1}{4} = x_d \end{cases}$$

$$x_0 \pm \frac{p\beta}{\sqrt{I}} = -\frac{3}{16} \mp \frac{1}{16} = \begin{cases} -\frac{7}{8} = y_f \\ -1 = y_d \end{cases}$$

La ecuación de la directriz resulta: $4x - 4y - 5 = 0$

utilizando el punto $(x_d, y_d)$ y la pendiente del eje de simetría.

Análogamente la ecuación del eje-y", resulta:

$$8x - 8y - 9 = 0$$

utilizando el vértice $(x_0, y_0)$ y la pendiente del eje de simetría. La ecuación transformada por rotación y traslación queda finalmente como:

$$y''^2 = -\frac{\sqrt{2}}{4}\, x''$$

Ahora podemos proceder a trazar la curva como se ilustra en la figura 3.

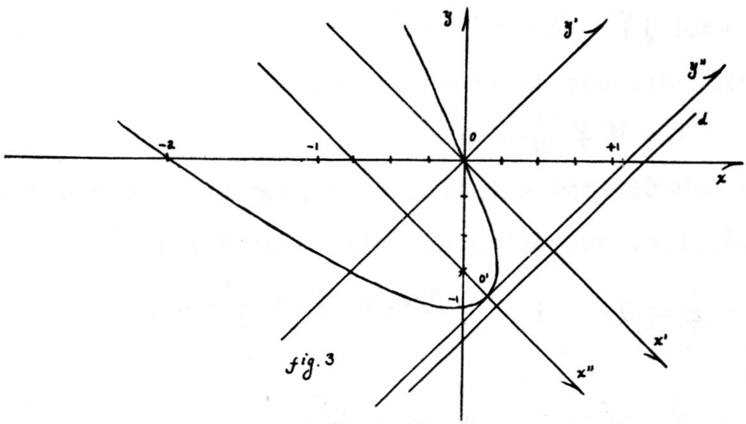



fig. 3

EJEMPLO 7

$$8x^2 + 24xy + 18y^2 - 14x - 21y + 3 = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 16 & 24 & -14 \\ 24 & 36 & -21 \\ -14 & -21 & 6 \end{vmatrix} = 0 \; ; \qquad \text{(curva degenerada)}$$

$$\Delta_F = \begin{vmatrix} 16 & 24 \\ 24 & 36 \end{vmatrix} = 0 \; ; \qquad \text{(curva de género parabólico)}$$

$$\Delta_{AC} = -325 > 0 \; ; \qquad \text{(dos rectas paralelas)}$$

$$I = 26 \qquad ; \qquad \beta = 3\sqrt{2}$$

$$\alpha = 2\sqrt{2} \qquad ; \qquad \delta = -91\sqrt{2}$$

Aplicando la ecuación (116), tenemos:

$$2x + 3y - \frac{7}{4} = \pm \frac{5}{4}$$

de donde el eje de simetría tiene por ecuación

$$8x + 12y - 7 = 0$$

y la curva ha degenerada en las dos rectas paralelas:

$$2x + 3y - 12 = 0$$

y

$$4x + 6y - 1 = 0$$

<u>EJEMPLO</u> 8.

$$x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 6y + 9 = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -6 \\ -2 & 2 & 6 \\ -6 & 6 & 18 \end{vmatrix} = 0$$ (curva degenerada)

$$\Delta_F = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$ (curva de género parabólico)

$\Delta_{AC} = 0$ (una sola recta)

$I = 2 \quad ; \quad \beta = -1 \quad (B < 0)$

$\alpha = 1 \quad ; \quad \delta = -12$

La curva ha degenerado en la recta:

$$x - y - 3 = 0$$

--------- --- ------

BIBLIOGRAFIA

KORN, G.A. & T.M. KORN. Math. Handbook for Scientists and Engineers, McGraw-Hill, New York, 1961

OSGOOD, GRAUSTEIN, Plane and Solid Analytic Geometry. MacMillan, London.

PRIVALOV, I.I., Analytichyeskaya Geometriya. Gosizdat. Moskvá/55

( Recibido Febrero de 1965 )