Boletín de Matemáticas
Vol. XIX Nº 3 (1985) **APUNTES DE SEMINARIO**

ANILLOS DIMENSIONALES

José Oswaldo Lezama Serrano

INTRODUCCION. Es bien conocido que varias propiedades de los espacios vectoriales sobre campos, o más generalmente sobre anillos de división, se desprenden de la dimensionalidad que tienen estos últimos, es decir, de que en un espacio vectorial V de dimensión finita sobre un anillo de división K todas las bases poseen el mismo número de elementos.

Al considerar módulos libres sobre anillos (asociativos y con elemento identidad) esta propiedad de dimensionalidad en general no es válida. En efecto como mostraremos en estas notas, existen anillos sobre los cuales un módulo libre puede tener bases con diferente número de elementos. Esta no dimensionalidad de ciertos anillos trae algunas dificultades, como por ejemplo, al estudiar el grupo de automorfismos de un módulo libre finitamente generado sobre un anillo no dimensional Λ por medio de matrices. Si M es un módulo libre sobre Λ con una base de n elementos, entonces el grupo de automorfirmos de M es isomorfo al grupo lineal general de matrices $GL(n,\Lambda)$. Para anillos no dimensionales el estudio del grupo de automorfismos de M por medio del grupo $GL(n,\Lambda)$ presenta incertidumbre, ya que M puede tener una base de m elementos con $m \neq n$.

En el presente artículo haremos un estudio recopilativo de los anillos que en el sentido de la dimensionalidad se comportan como los anillos de división. Tales anillos son denominados *anillos dimensionales* o también se dice que satisfacen la propiedad IBN (Invariant Basis Number). La dimensionalidad de los anillos ha sido suficientemente estudiada, especialmente por W.G. Leavitt ([7],[8],[9]); varias propiedades y ejercicios interesantes relacionados con esta propiedad se encuentran además en las monografías de P.M. Cohn y C. Faith ([2],[3]). Motivados por lo que explicamos al principio, hemos resumido y redemostrado en estas notas los principales resultados concernientes a la propiedad de dimensionalidad de los anillos.

En el primer parágrafo haremos un estudio de la dimensionalidad para módulos libres que poseen bases de cardinal infinito. En el segundo parágrafo estudiamos la propiedad IBN propiamente dicha. El tercer parágrafo está dedicado a la demostración de algunos criterios que permiten establecer la dimensionalidad de anillos comunmente encontrados en cursos de álgebra. En el último parágrafo presentamos un ejemplo de anillo no dimensional.

A lo largo de todo el artículo consideramos que Λ es un anillo asociativo no nulo (no necesariamente conmutativo) con elemento identidad 1; además los módulos son unitarios y por lo general derechos. El símbolo ▲ indicará el final de una demostración

§1. BASES DE CARDINAL INFINITO.

Al considerar un módulo libre M sobre un anillo Λ es interesante preguntarnos si existe la posibilidad de tener en M dos bases, una con un número finito de elementos y otra cuyo cardinal sea infinito. En este parágrafo mostraremos que tal situación no es posible. Además, demostraremos (ver [5]) que si M posee una base de cardinal infinito α, entonces todas las bases de M tienen el mismo cardinal α. De tal manera que al considerar el problema de la dimensionalidad de un anillo Λ se pueden descartar los módulos de bases infinitas.

PROPOSICION 1. Sea M un módulo libre sobre el anillo Λ. Si M es finitamente generado, entonces M posee una base finita.

Demostración. Sea $X \subset M$, $X \neq \emptyset$ (ver nota) una base de M y sea $\mathfrak{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un sistema finito de generadores del módulo M. Cada elemento $m \in M$ es representable como combinación lineal de los elementos de $\mathfrak{V}$

$$m = v_1\lambda_1 + \ldots + v_n\lambda_n \,, \tag{1}$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son elementos de Λ.

De otra parte, como X es una base, entonces cada elemento de $\mathfrak{V}$ es representable como combinación lineal finita de elementos de X:

$$v_i = x_1^i\lambda_1^i + \ldots + x_{r_i}^i\lambda_{r_i}^i \,, \quad i = 1,2,\ldots,n, \tag{2}$$

donde los x's son de X y los λ's son de Λ. De (1) y (2) se desprende que el subconjunto finito X_0

$$X_o = \bigcup_{i=1}^{n} X_i, \qquad X_i = \{x_1^i, \ldots, x_{r_i}^i\},$$

genera M. Pero como X es una base entonces X_o es un sistema linealmente independiente, y así X_o es una base finita para M. ▲

NOTA. Si $M = 0$ es el módulo nulo entonces por definición $X = \emptyset$ es la única base de M, la cual posee 0 elementos. Así pues el análisis de los módulos nulos para el problema de la dimensionalidad es trivial, y por eso en adelante supondremos que $M \neq 0$.

COROLARIO. Sea M un módulo libre sobre el anillo Λ. Entonces, o todas las bases de M son finitas o todas son infinitas.

Demostración. Sea X una base finita del módulo M y sea Y otra base cualquiera de M. De acuerdo a la demostración de la proposición anterior existe en Y un subconjunto finito Y_o tal que Y_o es una base para M. Supóngase que existe $m \in Y \setminus Y_o$. Como Y_o es una base para M existen $m_1, \ldots, m_t \in Y_o$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \Lambda$ tales que

$$m = m_1\lambda_1 + \ldots + m_t\lambda_t\,,$$

donde según nuestra suposición $m \neq m_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, t$. Sea $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \Lambda$. Entonces

$$m\lambda + m_1(-\lambda_1\lambda)+\ldots+m_t(-\lambda_t\lambda) = 0.$$

Esta última relación implica que el subconjunto finito de Y, $Y_o \cup \{m\}$ es linealmente dependiente. Pero esto contradice el hecho de ser Y una base. Por lo tanto $Y \setminus Y_o = \emptyset$ y Y es también una base finita. ▲

Sea M un módulo libre de bases infinitas sobre el anillo Λ. Probaremos a continuación que todas las bases de M tienen el mismo cardinal. En [5] se demuestra esta afirmación para espacios vectoriales sobre anillos de división. Sin embargo como se verá la demostración es válida para anillos en general.

PROPOSICION 2. Sea M un módulo libre sobre el anillo Λ con bases infinitas X, Y. Entonces $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Y)$.

Demostración. La idea central de la demostración es mostrar que $\mathrm{Card}(X) \leqslant \mathrm{Card}(Y)$ y $\mathrm{Card}(Y) \leqslant \mathrm{Card}(X)$ para concluir por el teorema de Cantor-Bernstein-Schröder que $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Y)$. Cada elemento s de Y es representable mediante una combinación lineal finita de elementos de X. Además, dado $x \in X$ existe $s \in Y$ tal que x está en la representación de s. En efecto, sea

$$x = s_{\alpha_1}\lambda_1+\ldots+s_{\alpha_k}\lambda_k \qquad (*)$$

la representación de x en términos de elementos de Y. Cada elemento s_{α_i}, $i = 1,2,\ldots,k$, es representable como combinación lineal de elementos de X. Si suponemos que x no aparece en la representación de ningún elemento de Y, entonces x no aparece en la representación de ninguno de los elementos s_{α_i}, $i = 1,2,\ldots,k$.

Sea X_i el conjunto (finito!) de elementos de X que intervienen en la representación de s_{α_i} y sea

$$X_o = \bigcup_{i=1}^{k} X_i$$

Claramente se ve que X_o es finito y que $x \notin X_o$. De (*) se desprende que el subconjunto finito

$$X_o' = X_o \cup \{x\}$$

es linealmente dependiente lo cual contradice el hecho de ser X una base para M.

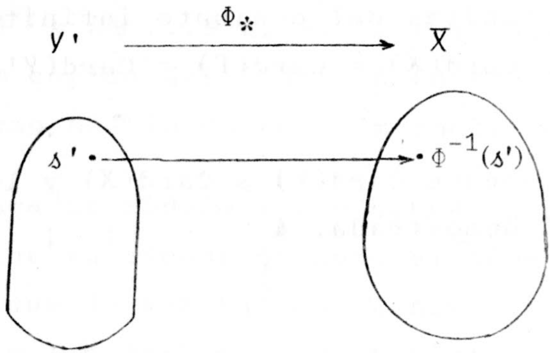
Así pues dado $x \in X$ existe al menos un $s \in Y$ tal que x está en la representación de s.

Con ayuda del axioma de elección definimos la función

$$\Phi : X \to Y$$

mediante la regla $\Phi(x) = s$.

Sea $\mathcal{Y}' = \Phi(X)$ y sea $s' \in \mathcal{Y}'$. $\Phi^{-1}(s')$ es un conjunto finito de elementos de X que intervienen en la representación de s'. Esto permite establecer una correspondencia Φ_* entre $\mathcal{Y}'$ y el conjunto de partes finitas de X.



$$\bar{X} = \{X' \subset X \mid X' \text{ es finito}\}$$

$$\Phi_*(s') = \Phi^{-1}(s')$$

Φ_* es una función inyectiva: sean $\Phi^{-1}(s') = \Phi^{-1}(s'')$, con $s', s'' \in \mathcal{Y}'$. Sea $x \in \Phi^{-1}(s')$ $(= \Phi^{-1}(s''))$. Entonces $\Phi(x) = s' = s''$. (Nótese que para s' y s'' elementos diferentes de $\mathcal{Y}'$ $\Phi^{-1}(s') \cap \Phi^{-1}(s'') = \phi$). Sea $\Gamma = Im\Phi_* = \{\Phi^{-1}(s') \mid s' \in \mathcal{Y}'\}$. Puesto que Φ_* es inyectiva entonces $\mathrm{Card}(\Gamma) = \mathrm{Card}(\mathcal{Y}')$.

Queremos ahora probar que Γ es una partición del conjunto X. Por lo que anotamos hace un momento entre paréntesis, es suficiente pro bar que $X = \bigcup_{s' \in Y'} \Phi^{-1}(s')$. Obviamente $\bigcup_{s' \in Y'} \Phi^{-1}(s') \subseteq X$. Sea $x \in X$. Entonces $\Phi(x) = s' \in Y'$ y por lo tanto $x \in \Phi^{-1}(s') \subseteq \bigcup_{s' \in Y'} \Phi^{-1}(s')$.

Puesto que X es infinito Γ también lo es. En total se tiene que Γ es una partición infinita de partes finitas del conjunto infinito X; por lo tanto $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(\Gamma) = \mathrm{Card}(Y') \leqslant \mathrm{Card}(Y)$.

Simétricamente $\mathrm{Card}(Y) \leqslant \mathrm{Card}(X)$ y la proposición está demostrada. ▲

§2. **ANILLOS IBN** (Anillos dimensionales).

Si definimos la dimensión de un módulo libre como el cardinal de una de sus bases, entonces como se demostró en la Proposición 2 del parágrafo anterior, para módulos de bases infinitas la dimensión de dicho módulo está definida unívocamente.

En este parágrafo la palabra módulo libre indicará módulo de bases finitas.

DEFINICION. Se dice que el anillo Λ tiene la propiedad IBN (Invariant basis number) o también que Λ es un anillo dimensional, si para cada mó dulo libre sobre Λ dos bases cualesquiera de M tienen el mismo número de elementos. En otras palabras, el anillo Λ es dimensional si para m y n naturales cualesquiera se cumple

$$\Lambda^m \cong \Lambda^n \Rightarrow m = n,$$

donde $\Lambda^m = \Lambda \oplus \ldots \oplus \Lambda$, es la suma directa externa de m copias del módulo Λ (donde Λ es considerado como módulo sobre sí mismo).

Para un módulo libre sobre un anillo IBN se define su dimensión como el número de elementos de una de sus bases. Aunque la dimensionalidad de los anillos conmutativos es una consecuencia directa de uno de los criterios dados en el parágrafo §3 presentamos aquí una demostración directa de este hecho.

PROPOSICION 1. Los anillos conmutativos tienen la propiedad IBN.

Demostración "externa": Sea R un anillo conmutativo y M un módulo libre sobre R con bases $\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_k\}$. Sea $\mathfrak{A}$ un ideal maximal del anillo R. Obsérvese que

$$M\mathfrak{A} = \{ \sum_{j=1}^{s} m_j \lambda_j \mid m_j \in M, \ \lambda_j \in \mathfrak{A}, \quad s \geqslant 1\}$$

es un submódulo de M. Además, el factor $M/M\mathfrak{A}$

se puede dotar con estructura de módulo sobre el campo $R/\mathfrak{a}$ ya que $(M/M\mathfrak{a}).\ \mathfrak{a} = \{\bar{0}\}$; donde $\bar{0}$ denota la clase 0 módulo $M\mathfrak{a}$. La estructura en mención esta dada por

$$\bar{m}\bar{\lambda} = \bar{m}\ \lambda = \overline{m\lambda}\ ,$$

donde $\bar{m} = m+M\mathfrak{a}$, $\bar{\lambda} = \lambda+\mathfrak{a}$, $m \in M$, $\lambda \in R$. Tenemos, entonces, que $M/M\mathfrak{a}$ es un espacio vectorial sobre el campo $R/\mathfrak{a}$.

Si logramos probar que $\bar{\mathfrak{u}} = \{\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n\}$, $\bar{\mathfrak{v}} = \{\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_k\}$ son bases del espacio vectorial $M/M\mathfrak{a}$ y son tales que Card$(\bar{\mathfrak{u}})$ = Card$(\mathfrak{U})$ y Car$(\bar{\mathfrak{v}})$ = Card$(\mathfrak{V})$ entonces podemos concluir que $k = n$ ya que los campos tienen la propiedad IBN. (ver [6]).

Sea $\bar{m} \in \bar{M} = M/M\mathfrak{a}$. Existen $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in R$ tales que $m = u_1\lambda_1+\ldots+u_n\lambda_n$ y por lo tanto $\bar{m} = \bar{u}_1\bar{\lambda}_1+\ldots+\bar{u}_n\bar{\lambda}_n$, lo cual prueba que $\bar{\mathfrak{u}}$ genera al espacio $\bar{M}$. Supóngase que existen $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in R$ tales que $\bar{u}_1\bar{\lambda}_1+\ldots+\bar{u}_n\bar{\lambda}_n = \bar{0}$. Entonces $u_1\lambda_1+\ldots+u_n\lambda_n \in M\mathfrak{a}$ y obtenemos que

$$u_1\lambda_1+\ldots+u_n\lambda_n = m_1\theta_1+\ldots+m_s\theta_s, \tag{1}$$

donde $m_1,\ldots,m_s \in M$ y $\theta_1,\ldots,\theta_s \in \mathfrak{a}$. Cada elemento m_i, $i = 1,2,\ldots,s$, es representable como una combinación lineal de los elementos de $\mathfrak{U}$:

$$m_i = u_1\lambda_1^i + \ldots + u_n\lambda_n^i, \quad i = 1,2,\ldots,s. \tag{2}$$

Reemplazando (2) en (1) obtenemos

$$u_1\lambda_1 + \ldots + u_n\lambda_n = u_1\varepsilon_1 + \ldots + u_n\varepsilon_n,$$

donde $\varepsilon_i = \sum_{j=1}^{s} \lambda_i^j \theta_j$, $i = 1,2,\ldots,n$. Por ser $\mathcal{U}$ una base para M se tiene que

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{s} \lambda_i^j \theta_j, \qquad i = 1,2,\ldots,n \tag{3}$$

Pero como para cada $j = 1,2,\ldots,s$, $\theta_j \in \mathfrak{A}$, entonces $\lambda_i \in \mathfrak{A}$ para cada $i = 1,2,\ldots,n$. Esto implica que $\bar{\lambda}_i = \bar{0}$ para cada $i = 1,2,\ldots,n$, y por lo tanto $\bar{\mathcal{U}}$ es un sistema linealmente independiente. Hemos pues probado que $\bar{\mathcal{U}}$ es una base para $\bar{M}$.

De una manera completamente análoga se prueba que $\bar{\mathcal{V}}$ es una base para $\bar{M}$.

Solo resta verificar el asunto de la cardinalidad. Es suficiente efectuar la prueba para $\bar{\mathcal{U}}$. Supóngase que existen i,j, $i \neq j$, tales que $\bar{u}_i = \bar{u}_j$. Entonces $u_i - u_j \in M\mathfrak{A}$. Razonando como en (1) y (2), obtendríamos que $1 \in \mathfrak{A}$ con lo cual $\mathfrak{A} = R$. Pero esto no es posible ya que $\mathfrak{A}$ es maximal. Entonces $\bar{u}_i \neq \bar{u}_j$ para $i \neq j$ y de aquí $\mathrm{Card}(\bar{\mathcal{U}}) = \mathrm{Card}(\mathcal{U})$.

En la demostración que acabamos de efectuar si $\mathfrak{a} = 0$ entonces R es campo y no habría nada que demostrar.

Demostración *"interna"*: Supóngase que se tiene el isomorfismo de R-módulos $R^m \cong R^n$. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal maximal de R. Entonces se tiene el isomorfismo de $R/\mathfrak{a}$-módulos libres

$$R^m \otimes R/\mathfrak{a} \cong R^n \otimes R/\mathfrak{a} \Rightarrow (R\otimes R/\mathfrak{a})^m \cong (R\otimes R/\mathfrak{a})^n$$

$$\Rightarrow (R/\mathfrak{a})^m \cong (R/\mathfrak{a})^n \Rightarrow m = n. \blacktriangle$$

Hasta el momento todos los módulos sobre el anillo Λ han sido considerados a la derecha. Nos preguntamos si, para un anillo dimensional Λ, al considerar módulos izquierdos la propiedad IBN permanece invariante. A continuación demostraremos que un anillo Λ es dimensional a la derecha si y sólo si lo es a la izquieda. De tal manera que podemos referirnos en adelante únicamente a anillos dimensionales.

PROPOSICION 2. Λ es un anillo dimensional a la derecha si y sólo si Λ es dimensional a la izquierda.

Demostración. $\Rightarrow$) Sea Λ un anillo dimensional a la derecha y sea M un módulo libre izquierdo sobre el anillo Λ con bases de m y n elementos.

Entonces se tienen los Λ-isomorfismos. $M \cong \Lambda^m$, $M \cong \Lambda^n$. Los módulos duales de los módulos izquierdos Λ^m y Λ^n son módulos derechos e isomorfos. $\mathrm{Hom}(\Lambda^m,\Lambda) \cong \mathrm{Hom}(\Lambda^n,\Lambda)$; o sea, $\mathrm{Hom}(\Lambda,\Lambda)^m \cong \mathrm{Hom}(\Lambda,\Lambda)^n$; y de aquí obtenemos $\Lambda^m \cong \Lambda^n$ (isomorfismo de módulos libres derechos). Por lo tanto $m = n$.

$\Leftarrow$) La condición suficiente se demuestra de manera análoga. ▲

§3. CRITERIOS.

A continuación presentamos algunos criterios que permiten establecer la dimensionalidad de los tipos de anillos más comúnmente encontrados en álgebra.

PROPOSICION 1. Sea Λ un anillo y m, n enteros positivos. El isomorfismo de Λ-módulos

$$\Lambda^m \cong \Lambda^n$$

tiene lugar si y sólo existen matrices A y B sobre Λ de ordenes $m\times n$ y $n\times m$ respectivamente tales que $AB = E_m$, $BA = E_n$, donde E_m es la matriz idéntica de orden m y E_n es la matriz idéntica de orden n.

Demostración. $\Rightarrow$) Sea M un módulo libre sobre Λ con bases $\mathcal{U} = \{u_1,\ldots,u_m\}$, $\mathcal{V} = \{v_1,\ldots,v_n\}$ de m y n elementos respectivamente. Es decir, se tiene el isomorfismo $\Lambda^m \cong \Lambda^n \cong M$. Sea A la matriz de cambio de la base $\mathcal{U}$ a la base $\mathcal{V}$ y B la matriz de cambio de la base $\mathcal{V}$ a la base $\mathcal{U}$:

$$v_i = \sum_{k=1}^{m} u_k a_{ki}, \qquad i = 1,\ldots,n \tag{1}$$

$$u_j = \sum_{r=1}^{n} v_r b_{rj}, \qquad j = 1,\ldots,m. \tag{2}$$

Reemplazando (2) en (1) obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} v_r b_{rk} a_{ki} = v_i$$

Puesto que los elementos $v_1,\ldots,v_n$ son linealmente independientes, entonces

$$\sum_{k=1}^{m} b_{rk} a_{ki} = \begin{cases} 1 & r = i \\ 0 & r \neq i \end{cases}$$

De aquí se obtiene que $BA = E_n$.

Análogamente, si reemplazamos (1) en (2) obtenemos la relación $AB = E_m$.

$\Leftarrow$) Supóngase que sobre el anillo Λ existen matrices A y B de órdenes $m\times n$ y $n\times m$ respectivamente tales que $AB = E_m$ y $BA = E_n$. Consideremos los módulos libres Λ^m y Λ^n con las bases canônicas

$$\mathcal{U} = \{u_i = (0,\ldots,\underset{i}{1},\ldots,0) \mid i = 1,2,\ldots,m\},$$

$$\mathcal{V} = \{v_i = (0,\ldots,\underset{i}{1},\ldots,0) \mid i = 1,2,\ldots,n\}.$$

Definimos las correspondencias

$$\alpha: \Lambda^m \to \Lambda^n \quad \text{y} \quad \beta: \Lambda^n \to \Lambda^m$$

en términos de los elementos de las bases $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$

$$\alpha(u_i) = \sum_{k=1}^{n} v_k b_{k_i}, \quad \beta(v_i) = \sum_{k=1}^{m} u_k a_{k_i},$$

los cuales son extendibles de manera única a Λ-homomorfismos simbolizados también por α y β. Además,

$$\beta\alpha(u_i) = \beta\Big[\sum_{k=1}^{n} v_k b_{k_i}\Big] = \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} u_s a_{s_k} b_{k_i}$$

$$= \sum_{s=1}^{m} u_s \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{s_k} b_{k_i}\Big).$$

Para $s \neq i$ se tiene que $\sum_{k=1}^{n} a_{s_k} b_{k_i} = 0$, y para $s = i$, $\sum_{k=1}^{n} a_{s_k} b_{k_i} = 1$.

De aquí resulta que $\beta\alpha(u_i) = u_i$ para cada $i = 1,2,\ldots,m$, con lo cual $\beta\alpha = I_{\Lambda^m}$. Análogamente se demuestra que $\alpha\beta = I_{\Lambda^n}$ y por lo tanto los módulos Λ^m y Λ^n son isomorfos. ▲

El siguiente criterio permite en particular establecer la dimensionalidad de los anillos sumergibles en anillos de división.

PROPOSICION 2. El anillo Λ es dimensional si y sólo si existe un homomorfismo no nulo $f:\Lambda \to \Gamma$ de Λ en un anillo dimensional Γ.

Demostración. $\Rightarrow$) Si Λ es dimensional entonces tomamos $f = i$ y $\Gamma = \Lambda$.

$\Leftarrow$) Sean m y n enteros positivos tales que $\Lambda^m \cong \Lambda^n$. El anillo Γ puede ser considerado como (Λ,Γ)-bimódulo. Se tiene, entonces, el Γ-isomorfismo de módulos libres.

$$\Lambda^m \otimes \Gamma \cong \Lambda^n \otimes \Gamma$$

De aquí obtenemos $(\Lambda \otimes \Gamma)^m \cong (\Lambda \otimes \Gamma)^n$ y de esto concluimos $\Gamma^m \cong \Gamma^n$. Siendo Γ dimensional entonces $m = n$. ▲

De esta proposición se desprenden inmediatamente los siguientes resultados.

COROLARIO. i) Todo subanillo de un anillo dimensional es dimensional.

ii) Sea $\mathfrak{a}$ un ideal del anillo Λ. Si $\Lambda/\mathfrak{a}$ es dimensional entonces Λ es dimensional. En particular si Λ/J es dimensional, entonces Λ es dimensional (J denota el radical de Jacobson del anillo Λ).

iii) Todo anillo conmutativo es dimensional.

iv) Todo anillo sumergible es un anillo de división es dimensional (en consecuencia si Λ no es dimensional entonces Λ no puede ser sumergido en cuerpo alguno).

v) Λ es dimensional si y sólo si el anillo de polinomios $\Lambda[x]$ es dimensional.

PROPOSICION 3. Si Λ es un anillo dimensional entonces para cada entero positivo $n \geqslant 1$ el anillo de matrices $M(n,\Lambda)$ es dimensional. Recíprocamente, si existe $n \geqslant 1$ tal que $M(n,\Lambda)$ es dimensional, entonces Λ es dimensional.

Demostración. Sea n un entero positivo cualquiera. Sea $\Gamma = M(n,\Lambda)$. Supóngase que el anillo Λ es dimensional y sean p y q enteros positivos tales que se tiene el Γ-isomorfismo $\Gamma^p \overset{\varphi}{\cong} \Gamma^q$. Simbolicemos por ${}^n\Lambda$ el conjunto de matrices columna con componentes del anillo Λ:

$${}^n\Lambda = \left\{\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_i \in \Lambda,\ i = 1,2,\ldots,n\right\}$$

${}^n\Lambda$ tiene una estructura natural de (Γ,Λ)-bimódulo. Además ${}^n\Lambda$ es un Λ-módulo libre (isomorfo a Λ^n!) con base canónica

$$\mathfrak{v} = \left\{ v_i \mid v_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ i = 1,2,\dots,n,\ 1 \text{ está en la fila } i \right\}.$$

Nótese que la función idéntica

$$i\colon {}^n\Lambda \to {}^n\Lambda$$

es un (Γ,Λ)-isomorfismo. De aquí resulta que $\mathcal{S}\otimes i$ es en particular un Λ-isomorfismo:

$$\Gamma^p \otimes {}^n\Lambda \overset{\mathcal{S}\otimes i}{\cong} \Gamma^q \otimes {}^n\Lambda$$

De donde, obtenemos

$$\underbrace{(\Gamma\oplus\dots\oplus\Gamma)}_{p\text{-veces}} \otimes {}^n\Lambda \cong \underbrace{(\Gamma\oplus\dots\oplus\Gamma)}_{q\text{-veces}} \otimes {}^n\Lambda \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
(\Gamma\otimes {}^n\Lambda)^p &\cong (\Gamma\otimes {}^n\Lambda)^q \Rightarrow \\
({}^n\Lambda)^p &\cong ({}^n\Lambda)^q \Rightarrow \\
(\Lambda^n)^p &\cong (\Lambda^n)^q \Rightarrow \\
\Lambda^{np} &\cong \Lambda^{nq} \Rightarrow \\
np &= nq \Rightarrow \\
p &= q
\end{aligned}$$

Supóngase ahora que existe un entero positivo n tal que el anillo de matrices $M(n,\Lambda)$ es dimensional. La función

$$d\colon \Lambda \to M(n,\Lambda)$$

que asigna a cada elemento λ de Λ la matriz escalar $d(\lambda,\ldots,\lambda)$, es claramente un homomorfismo de anillos. Según la proposición 2 Λ es dimensional. ▲

COROLARIO. i) Todo anillo simple artiniano es dimensional.
ii) Todo anillo matricial local es dimensional.

Demostracion. i) Un anillo Λ se dice que es simple si Λ es no nulo y en Λ sólo hay dos ideales biláteros: 0 y Λ. El anillo Λ se dice que es artiniano (a la derecha) si cada cadena decreciente de ideales derechos de Λ

$$\mathfrak{a}_1 \supseteq \mathfrak{a}_2 \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{a}_n \supseteq \ldots$$

se detiene para algún $n \geqslant 1$; es decir $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{n+1} = \ldots$ Un anillo Λ se dice que es simple artiniano si Λ es simultaneamente simple y artiniano (a la derecha). Es posible demostrar (consultar [3]) que todo anillo simple artiniano es isomórfico a un anillo de matrices $M(n,T)$, donde $n \geqslant 1$ y T es un anillo de división.

Puesto que todo anillo de división es dimensional entonces según la Proposición 3 todo anillo simple artiniano es dimensional.

ii) Un anillo Λ se dice que es matricial local si su anillo factor Λ/J por el radical de Jacob son es simple artiniano.

De i) y del corolario a la Proposición 2 se desprende que todo anillo matricial local es dimensional.

PROPOSICION 4. Sea $\{\Lambda_i\}_{i\in I}$ una familia de anillos no nulos. Si al menos un anillo Λ_j $(j \in I)$ de dicha familia es dimensional, entonces, el anillo producto $\prod_{i\in I} \Lambda_i$ es dimensional.

Demostración. La afirmación se desprende de la proposición 2 y del epimorfismo canónico

$$\Pi_j : \prod_{i\in I} \Lambda_i \to \Lambda_j. \ \blacktriangle$$

COROLARIO. i) Todo anillo clásico semisimple es dimensional. ii) Todo anillo semilocal es dimensional. iii) Todo anillo semiperfecto es dimensional.

Demostración. i) Un anillo Λ se dice que es clásico semisimple (ver [3]) si Λ es artiniano y no contiene ideales nilpotentes no nulos. Esta definición es equivalente a decir que Λ es artiniano y su radical de Jacobson es nulo (ver [4]). Algunos autores denominan a los anillos clásicos semisimples como semisimples artinianos. Se puede demostrar (consultar [4]) que cada anillo clásico semisimple es suma directa de un número fi nito de anillos simples artinianos. De acuerdo a la Proposición 4 y al corolario de la Proposición 3, Λ es dimensional.

ii) Es posible tomar como definición de anillo semilocal aquel cuyo factor por el radical de Jacobson es clásico semisimple. Así de acuerdo a i) y al corolario de la Proposición 2, todo anillo semilocal es dimensional.

iii) Un anillo Λ se dice que es semiperfecto si el factor Λ/J de Λ por su radical de Jacobson es clásico semisimple y además los idempotentes de Λ/J pueden ser levantados hasta Λ (ver [1]). Según ii) todo anillo semiperfecto es semilocal y por lo tando dimensional. ▲

A continuación presentamos la prueba dada por Leavitt en [3] sobre la dimensionalidad de los anillos noeterianos.

PROPOSICION 5. Todo anillo noeteriano a la derecha es dimensional. En particular, todo anillo artiniano a la derecha es dimensional (La afirmación desde luego es válida para anillos noeterianos y artinianos a la izquierda).

Demostración. El anillo Λ es noeteriano a la derecha si cada cadena creciente de ideales derechos de Λ

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{a}_n \subseteq \cdots$$

Se detiene para algún $n \geq 1$, es decir $\mathfrak{a}_n =$

$\mathfrak{A}_{n+1} = \ldots$. Sea Λ un anillo noeteriano a la derecha y supóngase que Λ no tiene la propiedad IBN. Esto quiere decir que existen enteros positivos diferentes m y n tales que $\Lambda^m \cong \Lambda^n$.

Sea por ejemplo $n > m$. Entonces $\Lambda^m \cong \Lambda^{m+k}$, donde $k = n-m$. De aquí se obtiene la cadena de isomorfismos

$$\Lambda^m \cong \Lambda^{m+k} \cong \Lambda^{m+2k} \cong \Lambda^{m+3k} \cong \cdots,$$

de la cual a su vez resulta la cadena de submódulos de Λ^m

$$\Lambda^k \subsetneqq \Lambda^{2k} \subsetneqq \Lambda^{3k} \subsetneqq \cdots.$$

Pero por ser Λ noeteriano y Λ^m finitamente generado como módulo sobre Λ entonces (ver [6]) Λ^m es noeteriano, lo cual es contradictorio con la última cadena de submódulos obtenida. ▲

§4. ANILLOS NO DIMENSIONALES.

Hasta el momento pareciera que todos los anillos son dimensionales. Sin embargo ilustraremos con un ejemplo que realmente es posible encontrar anillos que no satisfacen la propiedad IBN. Es más, en [9] Leavitt hace una clasificación de los anillos según su tipo, descri biendo además un módulo de anillo no dimensional para cada tipo.

EJEMPLO. (ver [10] pp.61-62 y [3] p.539).
Sea M un módulo libre a la derecha sobre un anillo Γ con base $\mathcal{e} = \{e_1, e_2, \ldots\}$ equipotente al conjunto $\mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$ de los números naturales. Sea $\Lambda = \mathrm{End}_\Gamma(M)$, el anillo de endomorfismos del módulo M.

Λ tiene estructura natural de módulo a la izquierda sobre si mismo, siendo libre y con base $\{1\}$, donde 1 es su elemento neutro multiplicativo. Encontremos para Λ una base de dos elementos:

Sean $f:\mathcal{e} \to M$, y $g:\mathcal{e} \to M$ funciones definidas

$$f(e_i) = \begin{cases} e_n & \text{si } i = 2n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } i = 2n-1 \text{ es impar} \end{cases}$$

$$g(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 2n \text{ es par} \\ e_n & \text{si } i = 2n-1 \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por ser M un módulo libre las funciones anteriores pueden ser extendidas a Γ-homomorfismos $f:M \to M$ y $g:M \to M$. Tenemos pues definidos dos elementos f y g de Λ. Probemos que $\{f,g\}$ es una base del módulo Λ. Sea h un elemento cualquiera de Λ y sean t_1 y t_2 funciones de $\mathcal{C}$ en M definidas por

$$t_1(e_i) = h(e_{2i}),\ t_2(e_i) = h(e_{2i-1}),$$

para cada $i = 1,2,3,\ldots$. Simbolicemos también por t_1 y t_2 los Γ-homomorfismos inducidos por estas aplicaciones. Consideremos la combinación lineal $t_1 f + t_2 g$:

$$(t_1 f + t_2 g)(e_i) = t_1(f(e_i)) + t_2(g(e_i));$$

si $i = 2n$, es par entonces

$$\begin{aligned} t_1(f(e_i)) + t_2(g(e_i)) &= t_1(e_n) + t_2(0) \\ &= t_1(e_n) = h(e_{2n}) = h(e_i) \end{aligned}$$

Si $i = 2n-1$ es impar entonces

$$\begin{aligned} t_1(f(e_i)) + t_2(g(e_i)) &= t_1(0) + t_2(e_n) \\ &= h(e_{2n-1}) = h(e_i); \end{aligned}$$

por lo tanto $(t_1 f + t_2 g)(e_i) = h(e_i)$ para cada $i = 1,2,\ldots$; es decir $t_1 f + t_2 g = h$.

Sean ahora α_1 y α_2 elementos de Λ tales que $\alpha_1 f + \alpha_2 g = 0$. Entonces para todo i, $i = 1,2,\ldots$, $(\alpha_1 f + \alpha_2 g)(e_i) = 0$; en particular

$$(\alpha_1 f+\alpha_2 g)(e_{2i}) = \alpha_1[f(e_{2i})] = \alpha_1(e_i) = 0,$$

$$(\alpha_1 f+\alpha_2 g)(e_{2i-1}) = \alpha_2[g(e_{2i-1})] = \alpha_2(e_i) = 0$$

para cada $i = 1,2,\ldots$. Esto indica que $\alpha_1 = 0 = \alpha_2$.

Hemos probado que Λ posee también una base de dos elementos con lo cual $\Lambda \cong \Lambda^2$ y por lo tanto Λ no es dimensional. ▲

★

BIBLIOGRAFIA

[1] Bass, H., "Finistic dimension and a homological generalization of semi-primary ring", Amer. Math. Soc., 95, 3 (1960).

[2] Cohn, P.M., *Free rings and their relations*, Academic Press, London, 1971.

[3] Faith, C., *Algebra: Rings, Modules and categories, I*, Springer, Berlin, 1973.

[4] Herstein, I.N., "Noncommutative rings, The Mathematical Association of America (1968).

[5] Jacobson, N., *Lectures in Abstract Algebra II., Linear Algebra*, Springer, New York, 1975.

[6] Kasch, F., *Moduln und Ringe*, Teubner,

Stuttgart (1977).

[7] Leavitt, W.G., "Modules over rings of words", Proc. Amer. Math. Soc., 7 (1956), pp.188-193.

[8] ————————, "Modules without invariant basis number", Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 322-328.

[9] ————————, "The module type of a ring", Trans. Amer. Math. Soc., 103 (1962), pp.113-130.

[10] Skorniakov, L.A., *Elementos de algebra general*, Nauka, Moscú, 1983 (Edición en Idioma ruso).

* *

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia.
BOGOTA. D.E.