Boletín de Matemáticas
Volumen VII, No. 5, 272-315

FUNDAMENTOS DE LA TEORIA DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA

(I)

JAIRO A. CHARRIS

PROLOGO

El propósito de un curso sobre la teoría de funciones de una variable compleja puede ser muy diverso. Esa diversidad de intereses determina en general la orientación de un tal curso. La teoría de funciones de una variable compleja es una de las ramas de la matemática que ha tenido el mayor número de aplicaciones dentro de casi todos los ramos de la ciencia: la Física, la Físico-química, la Estadística, la Ingeniería, la Biología, y recientemente las Ciencias Humanas, se han beneficiado de sus métodos. Es así que muchas veces el interés de un tal curso radica en las aplicaciones. El hecho de que la teoría de funciones de una variable compleja sea, a su vez, una de las teorías más evolucionadas de la matemática, ha dado a ella una gran autonomía. Sus métodos, tan altamente elaborados, la hacen, muchas veces, una teoría matemática casi independiente de las demás; y este hecho es enfatizado por casi todos los textos sobre el tema, independientemente de cuál sea el propósito del mismo.

El escribir un texto sobre el tema coloca entonces al autor en una difícil situación. Primero: es casi imposible mejorar la calidad de los abundantes textos existentes, cuyo interés especial está en las aplicaciones. Segundo: es casi imposible mejorar las exposiciones de la teoría desde el punto de vista de la autonomía de sus métodos. Una buena razón para escribir entonces un texto sobre el asunto parece difícil de encontrar. Pues el llenar los anteriores requisitos es un gran mérito. Teniendo en cuenta algunos hechos es sinembargo posible encontrar algunas. En primer lugar, el curso sobre el cual se ha basado este texto ha sido diseñado para estudiantes graduados. Tales estudiantes han sido generalmente expuestos a un curso elemental sobre el tema, sea desde el punto de vista de las aplicaciones, sea desde el punto de vista de presentarles una teoría de las más perfectas de la matemática. Tales estudiantes han entonces entrevisto el poder de la teoría desde el punto de vista de sus aplicaciones y apreciado su belleza desde el punto de vista de su autonomía. Esto dió cierta libertad en la escogencia del punto de vista del curso. En segundo lugar, textos escritos dentro de uno o ambos de los ideales antes mencionados, existen en abundancia y no parece entonces necesario uno más. Pero, creo que hay algo no satisfactorio en tales ideales. La teoría de funciones de una variable compleja, juega, dentro de la investigación matemática actual, un papel, aunque importante, secundario. Está reservada a ser la sirviente de otras teorías en plena evolución, aunque ella misma pueda no ser tan interesante al investigador. Es además solo un capítulo dentro de una teoría realmente extensa: El Análisis Complejo: la teoría de superficies de Riemann y la teoría de funciones de varias variables complejas, ramas todas en pleno desarrollo. En la mayor parte de los cursos que se hacen y de los textos existentes, la relación y aplicaciones de la teoría elemental de una variable a la de varias, o a la de las superficies de Riemann, es apenas entredicha, y casi exclusivamente desde el punto de vista analítico. Pero la mayor complicación del análisis complejo no es analítica sino topológica. Por otra parte, yo creo que la topología subyacente al análisis complejo de una variable no es del todo trivial. Y en mucho la aplicabilidad de la teoría a otras ramas de la ciencia se debe precisamente a su relación con problemas topológicos. Pero la autonomía de la teoría ha sido lograda, precisamente, esquivando las dificultades de la topología del plano, o escondiendo estas dificultades en una u otra forma. Es por eso que en la topología he encontrado, lo que creo, es una buena razón para escribir este texto. Afrontando directamente algunos de los problemas topológicos del plano, me propongo mostrar el significado esencialmente topológico del análisis complejo de una variable, acostumbrando al estudiante, en un caso relativamente simple, a un método que es imprescindible en el análisis complejo moderno. Otro de mis propósitos es dar una muestra de la enorme interacción entre topología y análisis, interacción que, desde Riemann, ha llamado profundamente la atención de los matemáticos y que en los últimos años ha tenido resonantes éxitos con los trabajos de De Rahm, Atiyah y Singer, etc. .

Si bien la anterior es la justificación del escribir un nuevo texto, otro propósito del mismo es dar una exposición rigurosa de la teoría clásica de funciones. El tiempo dirá si he tenido éxito en tal empresa. Es por esta razón que he decidido publicar este texto en una serie de artículos en el Boletín de Matemáticas del Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional y de la Sociedad Colombiana de Matemáticas. En cierta forma el trabajo es de índole investigativa a nivel elemental, y cae entonces dentro del espíritu del Boletín. Como tiene, por otra parte, un cierto sabor pedagógico, el Boletín lo pondrá al alcance de una gran cantidad de mis colegas, de quien gustoso recibiré cualquier crítica sobre el mismo.

El texto comenzará entonces con una revisión de ciertos resultados del cálculo diferencial e integral de varias variables. La sección sobre cálculo integral contendrá especialmente un teorema de aproximación que será fundamental en lo que sigue. Los diez capítulos siguientes estarán reservados a lo que se conoce con el nombre de teoría de Cauchy, comenzando con los elementos de las teorías de homología y homotopía. Esta parte contendrá una introducción a la Cohomología Compleja de De

Rahm. En los cinco capítulos siguientes se estudiará la teoría de Weierstrass de las funciones analíticas, incluyendo desarrollos especiales. El texto finalizará con una introducción a la representación conforme, la prolongación analítica y las superficies de Riemann.

Quiero agradecer a la Sociedad Colombiana de Matemáticas toda la colaboración que me ha prestado en la elaboración de este texto, así como al profesor Rolando Sáenz quien revisó las versiones iniciales del manuscrito y sugirió muchas mejoras en el mismo.

Finalmente, quiero dedicar esta serie de artículos a R. C. M. M., por el cariño y tolerancia que me ha demostrado, y que para mí han sido un estímulo en muchas situaciones.

Jairo Charris C.

CAPITULO I

Introducción.

En este primer capítulo revisaremos algunas nociones del cálculo diferencial e integral de funciones de varias variables. En primer lugar introduciremos algunas notaciones:

(a) $\mathbb{N}$ representará al conjunto de los números naturales o enteros positivos:

$0, 1, 2, 3, \ldots$.

(b) $\mathbb{Z}$ representará al conjunto de todos los enteros, positivos y negativos.

(c) $\mathbb{Q}$ representará al conjunto de los números racionales:

$$\mathbb{Q} = \{ m/n \mid m,n \in Z \ , \ n \neq 0 \}.$$

(d) $\mathbb{R}$ representará al conjunto de los números reales; Q representará al conjunto de los irracionales.

(e) C representará al conjunto de los números complejos:

$$C = \{ a + bi \mid a,b \in \mathbb{R} \} , \quad i^2 = -1$$

Los conjuntos $Z, Q, \mathbb{R}, C$ están provistos de estructuras de anillo para la adición y multiplicación corrientes. De hecho, $Q, \mathbb{R}, C$ son cuerpos para tales operaciones. C estará provisto de la topología definida por la distancia

$$d(x, y) = |x - y|$$

donde $|x| = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ si $x = a + bi$. Sobre $\mathbb{N}, Z, Q, \mathbb{R}$ se considerarán las topologías de subespacio de C, de modo que las inclusiones $\mathbb{N} \subseteq Z \subseteq Q \subseteq \mathbb{R} \subseteq C$ valen tanto en el sentido algebraico como en el sentido topológico. Para la métrica d; $\mathbb{R}$ y C son espacios métricos completos; $\mathbb{R}$ es, a su vez, el completado de Q para tal métrica.

(f) Si $\mathbb{K} = \mathbb{N} = \mathbb{N}, Q, \mathbb{R}, C, Z$, $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ denotará al conjunto de las matrices de orden $m\times n$ sobre $\mathbb{K}$. En lugar de $M_{m\times 1}(\mathbb{K})$ escribiremos simplemente $\mathbb{K}_m$; en lugar de $M_{1\times n}(\mathbb{K})$, escribiremos $\mathbb{K}^n$. Para denotar a las matrices usaremos paréntesis cuadrados

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} , \quad [a_1, \dots, a_n]$$

Sobre $M_{m\times n}(\mathbb{K})$, especialmente en los casos $m=1$ ó $n=1$, usaremos la topología definida por la métrica.

$$d(A, B) = \| A - B \|$$

donde

$||A|| = (\sum_{i,j} |a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$, supuesto que $A = [a_{ij}]$. Para esta métrica y para $\mathbb{K} = \mathbb{R}, C$, $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ es un espacio métrico completo. De hecho, un espacio de Banach, si se considera sobre este espacio la estructura de $\mathbb{K}$-espacio definida por las operaciones usuales entre matrices.

Sean ahora Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}_n$ y $f: \Omega \to \mathbb{R}$. Sea $a \in \Omega$, $a = [a_1, a_2, \ldots, a_n]^T$. Escribiremos $f([a_1, \ldots, a_n]^T) = f(a_1, \ldots, a_n)$. Si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}{h}$$

existe, lo denotaremos por $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$, y lo denominaremos la i-ésima derivada parcial de f en el punto a. Si

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$$

existe para $i = 1, 2, \ldots, n$, diremos que f es Jacobi-derivable (o simplemente derivable) en el punto a, y escribiremos

$$J_a(f) = J_f(a) = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(a), \ldots, \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)(a)\right].$$

La $1 \times n$ matriz $J_a(f) = J_f(a)$ se denomina la derivada (a-priori) de Jacobi de f en el punto a. Si $J_f(a)$ existe en todos los puntos $a \in \Omega$, es decir, si f es J-derivable en todo $a \in \Omega$, diremos que f es Jacobi-derivable (J-derivable) en Ω, y denotaremos por $J(\Omega, \mathbb{R})$ al conjunto de tales funciones. Si $n = 1$, es claro que $J_f(a) = f'(a)$, donde $f'(a)$ es la derivada corriente de f en el punto a. Por esta razón es costumbre escribir $f'(a) = J_f(a)$ aún en el caso $n > 1$. Nosotros evitaremos esta última notación para obviar ciertas confusiones.

Sean Ω en $\mathbb{R}_n$ y $f: \Omega \to \mathbb{R}_m$. Entonces existen funciones $f_i: \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, tales que $f(x) = [f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)]^T$. Si $a \in \Omega$ y $J_{f_i}(a)$ existe para todo $i=1, 2, \ldots, m$, diremos que f es Jacobi-derivable en el punto a, y escribiremos

$$J_f(a) = \begin{bmatrix} J_{f_1}(a) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ J_{f_m}(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)(a), \ldots, \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)(a) \\ \\ \left(\dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}\right)(a), \ldots, \left(\dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}\right)(a) \end{bmatrix}$$

La $m \times n$- matriz $J_f(a)$ se denomina la derivada (a-priori) de Jacobi de f en el punto a. Si $J_f(a)$ existe en todo punto $a \in \Omega$ (esto quiere decir que $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ existe en todo $a \in \Omega$, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$), se dirá que f es J-derivable en Ω; $J(\Omega, \mathbb{R}_m)$ denotará al conjunto de todas esas funciones. Es claro que $J(\Omega,\mathbb{R}_m)$ es un $\mathbb{R}$- espacio vectorial.

Sea $f \in J(\Omega, \mathbb{R}_m)$. Entonces, denotaremos por $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ a la aplicación

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : \Omega \to \mathbb{R}_m \quad , \qquad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$
$$a \to \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)(a)$$

Tal aplicación se denominará la derivada parcial de índice (i,j) de f. Si $m=1$, simplemente la derivada parcial de índice j de f. Si $(\partial f_i / \partial x_j)$ es, para todo índice (i,j), continua, se dirá que f es de clase C^1 en Ω. Denotaremos por $C^1(\Omega, \mathbb{R}_m)$ al subespacio de $J(\Omega, \mathbb{R}_m)$ de las aplicaciones de clase C^1. Supongamos ahora $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}_m)$. Si para todo (i,j),

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}),$$

diremos que f es de clase C^2 en Ω, y $C^2(\Omega, \mathbb{R}_m)$ denotará al subespacio de $C^1(\Omega, \mathbb{R}_m)$ formado por tales funciones. En tal caso denotaremos por

$(\partial^2 f_i / \partial x_k \partial x_j)$ a la derivada parcial de índice k de $(\partial f_i / \partial x_j)$. La función $(\partial^2 f_i / \partial x_k \partial x_j)$ se denomina también la segunda derivada parcial de f_i de índice (k,j) o, aún, la segunda derivada parcial de índice (i,k,j) de f. Por definición

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j},$$

y un teorema bien conocido del cálculo diferencial de funciones de varias variables asegura que si $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}_m)$,

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right) \tag{1.1}$$

Sea ahora $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Escribiremos $<\alpha> = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}_m$, $1 \leq i \leq m$. Si en cada punto $a \in \Omega$ el objeto

$$\left(\frac{\partial^{<\alpha>} f_i}{\partial x^{\alpha}}\right)(a) = \frac{\partial^{<\alpha>} f_i}{\partial x_n^{\alpha_n} \partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots \partial x_1^{\alpha_1}}(a),$$

cuya definición inductiva es $(m = Máx. \{k \mid \alpha_k \neq 0\})$

$$\left(\frac{\partial^{<\alpha>} f_i}{\partial x^{\alpha}}\right)(a) = \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - 1} f_i}{\partial x_m^{\alpha_{m-1}} \partial x_{m-1}^{\alpha_{m-1}} \ldots \partial x_1^{\alpha_1}}\right)(a),$$

existe, se denominará la $<\alpha>$ derivada parcial de orden (i, α) de f (o la $<\alpha>$-derivada parcial de índices α de f_i). Supongamos ahora que para todo índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, con $<\alpha> \leq p$, los objetos

$$\frac{\partial^{<\alpha>} f_i}{\partial x^{\alpha}}.$$

existen, para todo i, $1 \leq i \leq m$, y son funciones continuas de Ω en $\mathbb{R}$. En tal caso se dirá que f es de clase C^p sobre Ω, y se denotará por $C^p(\Omega, I\!R_m)$ al $I\!R$-espacio de tales funciones. La relación *(1.1)* se generaliza en este caso en la forma

$$\frac{\partial^{<\alpha>} f_i}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial^{<\alpha>} f_i}{\partial x_{\rho(n)}^{\alpha_{\rho(n)}} \cdots \partial x_{\rho(1)}^{\alpha_{\rho(1)}}}, \tag{1.2}$$

donde ρ es cualquier permutación de $\{1,2,\ldots,n\}$. Escribiremos finalmente

$$C^{\infty}(\Omega, I\!R_m) = \bigcap_{p=1}^{\infty} C^p(\Omega, I\!R_m) .$$

Claramente $C^{\infty}(\Omega, I\!R_m)$ contiene a las funciones constantes. En las próximas secciones veremos que contiene otra gran cantidad de funciones. Una función $f \in C^{\infty}(\Omega, I\!R_m)$ se denomina una función suavemente diferenciable, o, simplemente, suave.

1. *Algunos resultados del cálculo diferencial real.*

El siguiente teorema, bien conocido, será utilizado más tarde.

Teorema 1.1. *Sea $f \in C^1(\Omega, I\!R_m)$, donde Ω es un abierto de $I\!R_n$. Entonces para todo punto $x \in \Omega$,*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - J_f(x)\, h}{\|h\|} = 0 ;$$

El teorema anterior expresa simplemente que si $f \in C^1(\Omega, I\!R_m)$, entonces f es $I\!R$-derivable en todo punto $x \in \Omega$, en el sentido de que existe una aplicación lineal $L_x : I\!R_n \to I\!R_m$ tal que

$$\lim_{h \to o} \frac{f(x+h) - f(x) - L_x(h)}{\|h\|} = 0$$

Bajo las hipótesis del teorema resulta entonces que $J_f(x)$ es la matriz de la aplicación L_x .

Nota . Si $f \in J(\Omega, \mathbb{R}_m)$ no podemos, en general, asegurar que

$$\lim_{h \to o} \frac{f(x+h) - f(x) - J_f(x)\, h}{||h||} = 0 ,$$

ni la existencia de la aplicación lineal L_x .

Otro resultado que será utilizado en lo que sigue es el siguiente, también bien conocido :

Teorema 1.2. *Si Ω es un abierto conexo de $\mathbb{R}_n$ y si $f \in J(\Omega, \mathbb{R}_m)$ es tal que $J_f(x) = 0$ en todo punto $x \in \Omega$, entonces f es constante en Ω .*

Nótese que si f es constante en Ω, $J_f(x) = 0$ en todo punto $x \in \Omega$, aún si Ω no es conexo .

2. *Algunos resultados del cálculo integral.*

Sea $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por

$$\psi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}} & \text{si} \quad -1 < t < 1 \\ 0 & \text{si} \quad |t| \geq 1 . \end{cases}$$

Evidentemente $\psi \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Sea por otra parte $\phi : \mathbb{R}_p \to \mathbb{R}$ la aplicación

$$\phi(x) = ||x||^2 .$$

Es claro que $\phi \in C^{\infty}(\mathbb{R}_p, \mathbb{R})$. Por lo tanto, si $F : \mathbb{R}_p \to \mathbb{R}$ es la aplicación $F(x) = \psi \circ \phi$, entonces $F \in C^{\infty}(\mathbb{R}_p, \mathbb{R})$. Además, el soporte de F :

$$Supp\, F = \overline{\{ x \mid F(x) \neq 0 \}} = \{ x \mid |x| \leq 1 \}$$

es compacto, y $F(x) > 0$ en $\{ x \mid |x| < 1 \}$. Por lo tanto, $\int_{\mathbb{R}_p} F(x)\, dx > 0$, y si

$$\delta_1(x) = \frac{F(x)}{\int F(x)\, dx} \quad ,$$

$\delta_1 \in C^{\infty}(\mathbb{R}_p, \mathbb{R})$, $Supp\ \delta_k = \{ x \mid \| x \| \leq \frac{1}{k} \}$ y $\delta_p(x) > 0$ en $\{ x \mid \| x \| < \frac{1}{k} \}$.
Además

$$\int \delta_k(x) \ dx = 1 .$$

Sea ahora Ω un abierto de $\mathbb{R}_p$ y K un subconjunto compacto de Ω . Sea

$$\alpha = dist\ (K, \ \complement\Omega\ )$$

y escójase $m \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande para que $\frac{1}{m} < \alpha$. Para $n \geq m$ y $x \in K$, la función

$$t \to f(t)\ \delta_n(x - t)$$

se anula fuera del compacto

$$K_{1/m} = \{ t \mid dist\,(K,t) \leq 1/m \} \subseteq \Omega \ .$$

En efecto, si $t \notin K_{1/m}$, $\| x - t \| > \frac{1}{m}$ y entonces

$$\delta_n(x\text{-}t) = 0 \ .$$

Para $n \geq m$ y $x \in K$ la integral

$$\int_{\mathbb{R}_p} f(t)\ \ \delta_n(x - t)\ dt$$

está entonces bien definida, y de hecho ,

$$\int_{\mathbb{R}_p} f(t)\ \delta_n(x - t)\ dt = \int_{K_{1/m}} f(t)\ \delta_n(x - t)\ dt = \int_{K_{1/n}} f(t)\ \delta_n(x - t)\ \ dt \ .$$

Para $n \geq m$ escribamos entonces, para $x \in K$,

$$f_n(x) = \int f(t)\, \delta_n(x-t)\ dt\ .$$

Como $\int \delta_n(x-t)\, dt = 1$,

$$f_n(x) - f(x) = \int_{K_{1/n}} (f(t) - f(x))\, \delta_n(x-t)\, dt$$

de lo cual

$$| f_n(x) - f(x) | \leq \operatorname*{Supp}_{t \in K_{1/n}} | f(t) - f(x) | \int_{K_{1/n}} |\delta_n(x-t)|\ dt$$

$$= \operatorname*{Supp}_{t \in K_{1/n}} | f(t) - f(x) |\ .$$

Ahora, para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|| x - t || < \delta$ entonces

$$| f(x) - f(t) | < \varepsilon$$

cuando $x, t \in K_{1/m}$. Esto debido a la continuidad uniforme de f en $K_{1/m}$. Si $m_o \geq m$ y $\frac{1}{m_o} < \delta$ se tiene entonces

$$| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$$

para todo $x \in K$ y $n \geq m_o$. O sea ,

$$\operatorname*{Supp}_{x \in K} | f_n(x) - f(x) | \leq \varepsilon$$

de lo cual $f_n \to f$ uniformemente en K. Por otra parte, para $n \geq m$, $f_n \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, donde U es una vecindad relativamente compacta de K (por ejemplo

$$U = \{ t \mid dist(K, t) < 1/m \})$$

En efecto, si $e_j = [\delta_{1j}, \ldots, \delta_{pj}]^T$ $(\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j)$,

$$\left| \frac{f_n(x + h e_j) - f_n(x)}{h} - \int f(t) \frac{\partial \delta_n}{\partial x_j} (x - t)\, dt \right|$$

$$= \int | f(t) | \left| \frac{\delta_n(x+ h e_j - t) - \delta_n(x - t)}{h} - \frac{\partial \delta_n}{\partial x_j}(x - t) \right| dt$$

$$= \int |f(t)| \left| \frac{\partial \delta_n}{\partial x_j} (x + h' e_j - t) - \frac{\partial \delta_n}{\partial x_j}(x - t) \right| dt$$

$$= \int_{K_{1/m}} |f(t)| \left| \frac{\partial \delta_n}{\partial x_j} (x + h' e_j - t) - \frac{\partial \delta_n}{\partial x_j}(x - t) \right| dt, \ |h'| < |h|$$

Pero, si $\varepsilon > 0$ es arbitrario, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial \delta_n}{\partial x_j} (x + h' e_j - t) - \frac{\partial \delta_n}{\partial x_j} (x - t) \right| < \varepsilon$$

si $|h'| < \delta$. Para $|h'| < \delta$ se tiene entonces

$$\left| \frac{f_n(x + h e_j) - f(x)}{h} - \int f(t) \frac{\partial \delta_n}{\partial x_j} (x - t)\, dt \right| < M \varepsilon m (K_{1/m})$$

donde $M = \underset{t \in K_{1/m}}{Supp} |f(t)|$ y

$$m(K_{1/m}) = \int_{K_{1/m}} dt \ .$$

Se deduce entonces que

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_j} = \int f(t) \frac{\partial \delta_n}{\partial x_j} (x - t)\, dt \ ,$$

y de esto la afirmación. Las funciones f_n son entonces de clase C^∞ y aproximan a f uniformemente en compactos.

Nota. Si $f : \Omega \to I\!R_n$, $f = [f_1, \ldots, f_n]^T$, escribiremos

$$\int f \, dx = [\int f_1 \, dx, \ldots, \int f_n \, dx]^T .$$

Entonces,

$$\int f(t) \, \delta_k(x-t) \, dt = [\int f_1(t) \, \delta_k(x-t) \, dt, \ldots, \int f_n(t) \, \delta_k(x-t) \, dt]^T .$$

Nota . Para todos los resultados contenidos en este capítulo el lector puede consultar el libro de M. Spivack : Cálculo en variedades, Reverté, Barcelona.

CAPITULO II

HOMOTOPIA

1. Curvas .

En lo que sigue, I denotará al intervalo $[0, 1]$,

$$I^n = \underbrace{I \times I \times \cdots \times I}_{n \ veces} ,$$

y Ω será *un espacio topológico arbitrario.*

Por una *curva en* Ω entenderemos una aplicación continua $\gamma : I \to \Omega$; $\gamma(0)$ se denominará el *extremo inicial* de γ y $\gamma(1)$ el *extremo final* .

Sean $a, b \in \Omega$. Denotaremos por $\tilde{S}(\Omega ; a, b)$ al conjunto de todas las curvas con extremo inicial a y extremo final b. Si $\gamma(0) = \gamma(1)$, diremos que γ es una *curva cerrada*. Si $\gamma(0) \neq \gamma(1)$, γ se dirá *abierta* . Si la restricción de γ a $\mathring{I} = (0,1)$ es inyectiva, la curva se dirá *simple* .

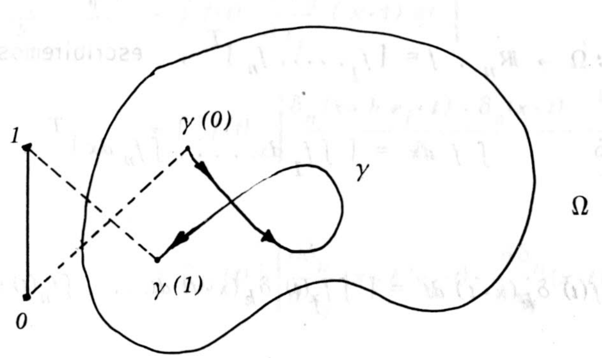

Fig. 1.1.

"Una curva en Ω . La flecha indica el sentido del recorrido"

Es importante no confundir una curva γ con el conjunto $Im\gamma = \{\gamma(t) \mid t \in I\}$, denominado la imagen de γ. Una curva es una función, no un conjunto de puntos. Es posible tener $Im\,\gamma = Im\,\gamma'$ sin que sea $\gamma = \gamma'$.

Ejemplo 1.1. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^2$, y sean $a \in \Omega$ y $r \geq 0$ tales que

$$S_r(a) = \{ x \mid \|x-a\| = r \} \subseteq \Omega .$$

Para cada $n \in Z$, sea $c_r^n(a) : I \to \Omega$ definida por

$$c_r^n(a)(t) = a + r\,e^{2\pi i n t} .$$

Es claro entonces que

$$Im\ c_r^n(a) = Im\ c_r^m(a)$$

para todos $m, n,\ m,n \neq 0$, pero $c_r^m(a) \neq c_r^n(a)$ si $m \neq n$. En particular $c_r^m(a)$ es simple si y sólo si $m = 1$. Si $m > 1$ y $b \in S_r(a)$, $\{t \mid c_r^m(a)(t) = b\}$ tiene exactamente m elementos. La curva $c_r^m(a)$ se denomina el círculo de radio r, *centro en* a, e *índice* m.

Sean $\sigma \in \tilde{S}(\Omega\ ;\ a,b)$, $\rho \in \tilde{S}(\Omega\ ;\ b,c)$. Denotaremos por $\sigma\rho$ la función

$$\sigma\rho : I \to \Omega$$

definida por

$$\sigma\rho(t) = \begin{cases} \sigma(2t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \rho(2t-1) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Puesto que $\sigma\rho(1/2) = \sigma(2 \cdot \frac{1}{2}) = \sigma(1) = b = \rho(1) = \rho(2 \cdot \frac{1}{2} - 1)$, es claro que $\sigma\rho$ está bien definida y continua. Es decir, $\sigma\rho \in \tilde{S}(\Omega\ ;\ a,c)$.

La aplicación $\sigma\rho$ se denomina el *producto* de σ y ρ. La aplicación

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S}(\Omega\ ;\ a,b) \times \tilde{S}(\Omega\ ;\ b,c) & \xrightarrow{\pi} & \tilde{S}(\Omega\ ;\ a,c) \\ (\sigma, \rho) & \to & \sigma\rho \end{array}$$

se denomina *el producto de curvas*.

Sea $\sigma \in \tilde{S}(\Omega\ ;\ a,b)$ y sea $\sigma^{-1} : I \to \Omega$ definida por

$$\sigma^{-1}(t) = \sigma(1-t).$$

Claramente $\sigma^{-1} \in \tilde{S}(\Omega\ ;\ b,a)$ y se denomina la *curva inversa* de σ. También es obvio que $\sigma\sigma^{-1} \in \tilde{S}(\Omega\ ;\ a,b)$, y $\sigma^{-1}\sigma \in \tilde{S}(\Omega\ ;\ b,b)$. Notaremos

$$\tau : \tilde{S}(\Omega\ ;\ a,b) \to \tilde{S}(\Omega\ ;\ b,\ a)$$

a la aplicación $\tau(\sigma) = \sigma^{-1}$.

Notación. En lugar de $\tilde{S}(\Omega\ ;\ a,a)$ escribiremos sencillamente $\tilde{S}(\Omega\ ,a)$; $\tilde{S}(\Omega\ ,\ a)$ denota entonces al conjunto de todas las *curvas cerradas de origen* a. Denotaremos por e_a a la curva en $\tilde{S}(\Omega\ ,\ a)$ definida por

$$e_a : I \to \Omega$$
$$t \to e_a(t) = a .$$

2. *Homotopías.*

Toda aplicación *continua* $F : I \times I \to \Omega$ se denomina una *homotopía* de Ω.

Definición 2.1. Sean $\sigma, \rho \in \tilde{S}(\Omega\ ;\ a,b)$. Diremos que σ es *homotopa* a ρ, y escribiremos $\sigma \approx \rho$, si existe una homotopía F, de Ω, tal que

$F(0,t) = \sigma(t)$, $F(1,t) = \rho(t)$

$F(\theta, 0) = a$, para todo $\theta \in I$, $F(\theta, 1) = b$, para todo $\theta \in I$.

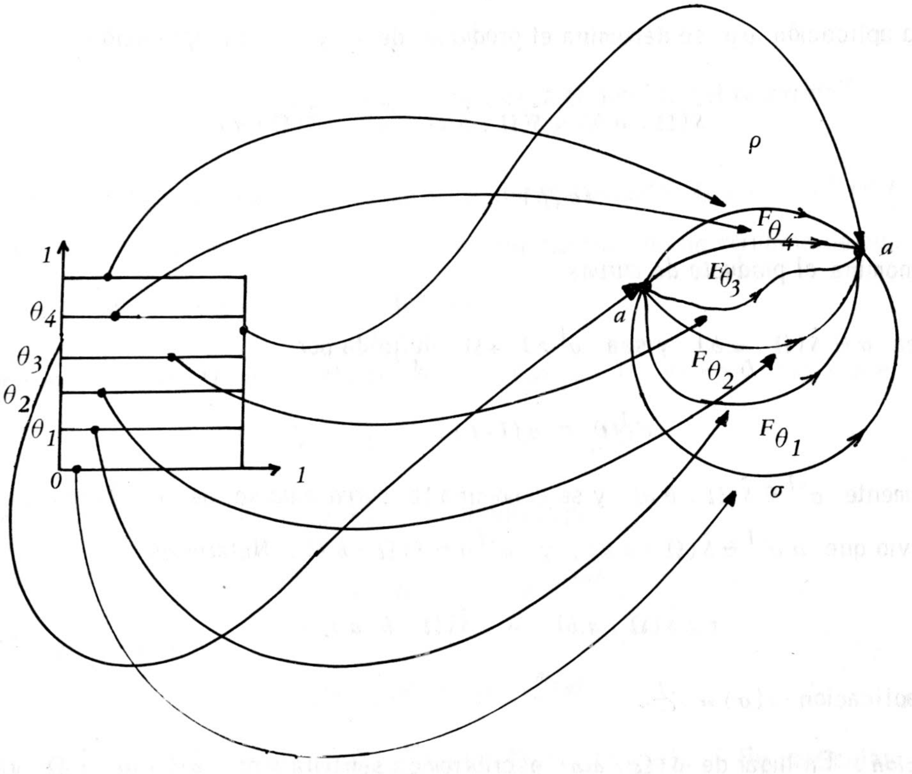

Fig. 2.1

Es claro que para todo $\theta \in [0,1]$ la aplicación $F_\theta : I \to \Omega$, definida por

$F_\theta(t) = F(\theta, t)$, es una curva en $\tilde{S}(\Omega, a,b)$. Además, $F_0 = \sigma$, $F_1 = \rho$. Podemos imaginar entonces a F_θ como una deformación de σ, y escribiremos $\sigma \approx \rho$ si σ puede deformarse *continuamente* en ρ. Escribiremos $F : \sigma \to \rho$ para indicar que F es una homotopía la cual deforma (continuamente) a σ en ρ.

Teorema 2.1. *La relación*

$$R = \{ (\sigma, \rho) \mid \sigma \approx \rho \}$$

es una relación de equivalencia sobre $\tilde{S}(\Omega ; a,b)$.

Demostración. (a) Es evidente que cualquiera que sea $\sigma \in \tilde{S}(\Omega, a,b)$ se tiene que $\sigma \approx \sigma$, pues basta tomar $F(\theta, t) = \sigma(t)$ para todo $\theta \in I$ para obtener una homotopía que deforme continuamente a σ en σ.

(b) Supongamos que $\sigma \approx \rho$, y sea $F : \sigma \to \rho$ una homotopía de Ω. Sea $G : I \times I \to \Omega$ definida por

$$G(\theta, t) = F(1-\theta, t).$$

Es claro que G es una homotopía de Ω y que $G : \rho \to \sigma$.

(c) Supongamos que $\sigma \approx \rho$, $\rho \approx \gamma$. Sean F, G homotopías de Ω tales que

$$F : \sigma \to \rho \; ; \quad G : \rho \to \gamma .$$

Sea $H : I \times I \to \Omega$ definida por

$$H(\theta, t) = \begin{cases} F(2\theta, t) & 0 \leq \theta \leq 1/2 \\ G(2\theta - 1, t) & 1/2 \leq \theta \leq 1 \end{cases}$$

Puesto que $H(\frac{1}{2}, t) = F(1,t) = \sigma(t) = G(0,t)$ para todo t, H está bien definida y es continua en $I \times I$. Además,

$$H(0,t) = F(0,t) = \sigma(t)$$

$$H(1,t) = G(1,t) = \gamma(t)$$

$$H(\theta, 0) = a, \quad H(\theta, 1) = b.$$

De lo cual $H : \sigma \to \gamma$. Esto prueba el teorema.

Teorema 2.2. *Sean* $\sigma, \sigma' \in \tilde{S}(\Omega ; a,b)$; $\rho, \rho' \in \tilde{S}(\Omega ; b,c)$. *Supóngase además que :*

$$\sigma \approx \sigma' \quad , \quad \rho \approx \rho' \quad .$$

Entonces

(a) $\sigma\rho \approx \sigma'\rho'$

(b) $\sigma^{-1} \approx \sigma'^{-1}$

Demostración. Sean $F : \sigma \to \sigma'$; $G : \rho \to \rho'$, homotopías de Ω . Sea

$$H(\theta, t) = \begin{cases} F(\theta, 2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(\theta, 2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \ . \end{cases}$$

Entonces

$$H(0, t) = \begin{cases} F(0,2t) = \sigma(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(0,2t-1) = \rho(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \ . \end{cases}$$

Por lo tanto, $H(0,t) = \sigma\rho(t)$.

De otra parte,

$$H(1,t) = \begin{cases} F(1, 2t) = \sigma'(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(1,2t-1) = \rho'(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \ , \end{cases}$$

o sea que $H(1,t) = \sigma'\rho'(t)$. Además $H(\theta, 0) = a$; $H(\theta, 1) = b$, como es evidente. Por otra parte

$$H(\theta, 1/2) = F(\theta, 1) = b = G(\theta, 0),$$

lo cual prueba que H está bien definida y es continua. Con esto hemos demostrado la parte (a) . Demostremos ahora la parte (b). Sea $F : \sigma \to \sigma'$ una homotopía de Ω . Sea $G : I \times I \to \Omega$ definida por

$$G(\theta, t) = F(\theta, 1 - t).$$

En primer lugar, G es una homotopía de Ω. Por otra parte, evidentemente $G : \sigma^{-1} \to \sigma'^{-1}$. Esto demuestra el teorema .

Teorema 2.3. *Sea $\rho \in \tilde{S}(\Omega ; a,b)$. Entonces $\rho\rho^{-1}$ es una curva cerrada de origen a, homótopa a e_a .*

Demostración.

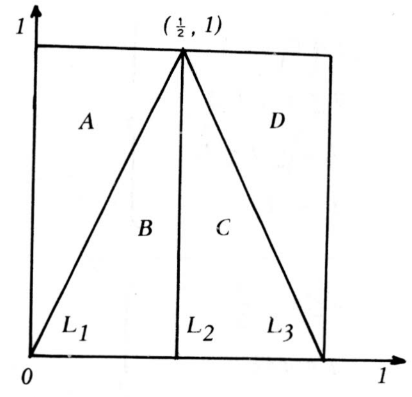

Fig. 2.2

Sea

$$F(\theta, t) = \begin{cases} e_a(t) & (\theta, t) \in A \\ \rho(2t-\theta) & (\theta, t) \in B \\ \rho^{-1}(2t-1+\theta) & (\theta, t) \in C \\ e_a(t) & (\theta, t) \in D \end{cases}$$

Donde (véase figura 2.2) ,

$$A = \{ (\theta, t) \mid 0 \leq t \leq 1/2 \quad , \quad 2t \leq \theta \leq 1 \}$$

$$B = \{ (\theta, t) \mid 0 \leq t \leq 1/2 \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2t \}$$

$$C = \{ (\theta, t) \mid 1/2 \leq t \leq 1 \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2-2t \}$$

$$D = \{ (\theta, t) \mid 1/2 \leq t \leq 1 \quad , \quad 2-2t \leq \theta \leq 1 \}$$

$L_1 = \{ (\theta, t) \mid t = \theta \}$; $L_2 = \{ (\theta, t) \mid \theta = 1/2 \}$; $L_3 = \{ (\theta, t) \mid \theta = 2-2t \}$

entonces

$$F(0,t) = \left\{ \begin{array}{lll} e_a(0) = a & , & t = 0 \\ \rho(2t) & , & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \rho^{1}(2t-1) & , & 1/2 \leq t \leq 1 \\ e_a(1) = a & , & t = 1 \end{array} \right\} = \rho\,\rho^{1}(t)$$

$$F(1,t) = \left\{ \begin{array}{lll} e_a(t) & , & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \rho(0) & , & t = 1/2 \\ \rho^{-1}(1) = \rho(0) & , & t = 1/2 \\ e_a(t) & , & 1/2 \leq t \leq 1 \end{array} \right\} = e_a(t)$$

Además, $F(\theta, 0) = e_a(0) = a$, para todo $\theta \in I$. Finalmente, si $(\theta, t) \in L_1$,

$F(\theta, t) = e_a(t) = \rho(2t-\theta) = \rho(0) = a$.

Si $(\theta, t) \in L_2$,

$$F(\theta,t) = \rho(2\cdot 1/2-\theta) = \rho(1-\theta) = \rho^{-1}(2\cdot 1/2 -1+\theta) = \rho^{-1}(\theta) = \rho(1-\theta)\ ,$$

y si $(\theta, t)\in L_3$,

$$F(\theta, t) = \rho^{-1}(2t-1+2-2t) = \rho^{-1}(1) = \rho(0) = a = e_a(t)\ ,$$

lo cual demuestra que F está bien definida y continua, y completa la demostración del teorema.

Teorema 2.4. *Sean* $\rho\in \tilde{S}(\Omega\ ; a,b)$, $\sigma\in \tilde{S}(\Omega\ ; b,c)$, $\gamma\in\tilde{S}(\Omega\ ; c,d)$. *Entonces*

$$\rho(\sigma\gamma) \approx (\rho\,\sigma)\gamma$$

Demostración.

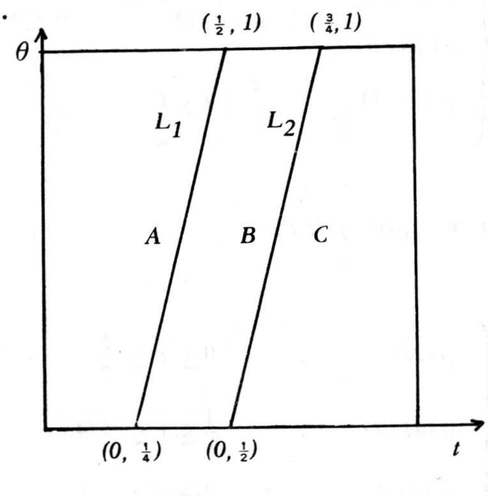

Fig. 2.3

Sea

$$F(\theta, t) = \begin{cases} \rho\left(\dfrac{4\,t}{\theta+1}\right) & (\theta, t)\in A \\ \sigma(4\,t-\theta-1 & (\theta, t)\in B \\ \gamma\left(\dfrac{4t-\theta-2}{2-\theta}\right) & (\theta, t)\in C \end{cases}$$

Donde (ver Fig. 2.3)

$$A = \{ (\theta, t) \mid 4t-1 \leq \theta \;, \quad 0 \leq \theta \leq 1 \}$$

$$B = \{ (\theta, t) \mid 0 \leq \theta \leq 1 \;, \quad 4t-2 \leq \theta \leq 4t-1 \}$$

$$C = \{ (\theta, t) \mid \theta \leq 4t-2 \}$$

$L_1 = \{ (\theta, t) \mid \theta = 4t-1 \}$, $L_2 = \{ (\theta, t) \mid \theta = 4t-2 \}$. Entonces ,

$$F(0,t) = \begin{cases} \rho(4t) & , \quad 0 \leq t \leq 1/4 \\ \sigma(4t-1) & , \quad 1/4 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma\left(\frac{4t-2}{2}\right) = \rho(2t-1), & \quad 1/2 \leq t \leq 1 \;. \end{cases}$$

De esto

$$F(0,t) = \begin{cases} \left.\begin{array}{l} \rho(2(2t)) \\ \sigma(2(2t)-1) \end{array}\right\} \rho\,\sigma\,(2t) & \quad 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma\,(2t-1) & \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

o sea que

$$F(0,t) = (\rho\sigma)\;\gamma\;(t)\;.$$

Por otra parte,

$$F(1,t) = \begin{cases} \rho(2t) & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(4t-2) & , \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 3/4 \\ \gamma(4t-3) & , \quad 3/4 \leq t \leq 1 \;. \end{cases}$$

De esto,

$$F(1,t) = \begin{cases} \rho(2t) & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \left.\begin{array}{l} \sigma(2(2t-1)) \\ \gamma(2(2t-1)-1) \end{array}\right\} \sigma\,\gamma\,(2t-1)\,, & \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \;, \end{cases}$$

o sea que $F(1,t) = \rho(\sigma\gamma)(t)$.

Puesto que $F(\theta, 0) = a$, $F(\theta, 1) = d$, todo lo que resta por ver es que F está bien definida. Ahora, para $(\theta, t) \in L_1$,

$$F(\theta, t) = \rho\left(\frac{4t}{(4t-1)+1}\right) = \rho(1) = \sigma(4t-(4t-1)-1) = \sigma(0) = b ,$$

y para $(\theta, t) \in L_2$

$$F(\theta, t) = \sigma(4t-(4t-2)-1) = \sigma(1) = c = \gamma\left(\frac{4t-(4t-2)-2}{2-(4t-2)}\right) = \gamma(0) .$$

Esto demuestra el teorema . Finalmente :

Teorema 2.5 . *Sea* $\rho \in \tilde{S}(\Omega ; a,b)$. *Entonces*

$$\rho\, e_b \approx \rho .$$

Demostración.

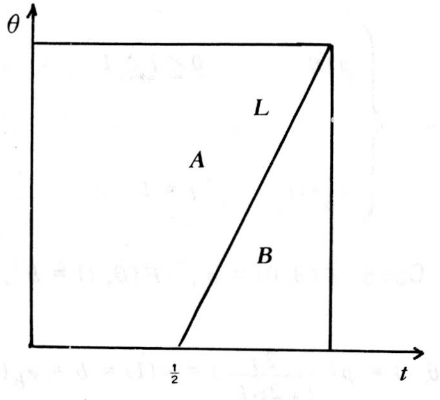

Fig. 2.4

Sea

$$F(\theta, t) = \begin{cases} \rho\left(\dfrac{2t}{1+\theta}\right), & (\theta, t) \in A \\ e_b(t) , & (\theta, t) \in B \end{cases}$$

donde (ver figura 2.4)

$$A = \{ (\theta, t) \mid 0 \leq \theta \leq 1 \;\; ; \quad 2t-1 \leq \theta \}$$

$$B = \{ (\theta, t) \mid 0 \leq \theta \leq 1 \;\; , \quad \theta \leq 2t-1 \}$$

$$L = \{ (\theta, t) \mid \theta = 2t-1 \} \; .$$

Entonces

$$F(0,t) = \begin{cases} \rho(2t) & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \\ e_b(t) = e_b(2t-1) & ; \quad 1/2 \leq t \leq 1 \; . \end{cases}$$

De esto $F(0,t) = \rho \, e_b(t)$.

Por otra parte,

$$F(1,t) = \begin{cases} \rho(t) & 0 \leq t \leq 1 \\ \\ e_b(1) & t = 1 \end{cases}$$

o sea, $F(1,t) = \rho(t)$. Como $F(\theta, 0) = a$, $F(\theta, 1) = b$, y como

$$F(\theta, t) = \rho\left(\frac{2t}{1 + 2t-1} \right) = \rho(1) = b = e_b(t) \, , \quad (\theta, t) \in L$$

se deduce que F está bien definida y continua. Esto demuestra el teorema .

3. *Grupo fundamental de homotopía .*

En virtud de los teoremas 2.2 y 2.3, la relación $R = \{ (\rho, \sigma) \mid \rho \approx \sigma \}$ sobre $\tilde{S}(\Omega \, ; \, a)$ es compatible con la formación de productos y de inversos. Se tienen entonces aplicaciones

$$\frac{\tilde{S}(\Omega, a)}{R} \times \frac{S(\Omega, a)}{R} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \frac{\tilde{S}(\Omega, a)}{R}$$

$$\frac{\tilde{S}(\Omega, a)}{R} \xrightarrow{\tilde{\tau}} \frac{\tilde{S}(\Omega, a)}{R}$$

obtenidos de π, y de τ por paso a los cocientes. Denotaremos por $\tilde{\pi}_1(\Omega, a)$ al conjunto cociente

$$\tilde{\pi}_1(\Omega, a) = \frac{\tilde{S}(\Omega, a)}{R}$$

Si $\rho \in \tilde{S}(\Omega, a)$, denotaremos por $[\rho]_a$, o simplemente $[\rho]$ si no hay lugar a confusión, a la clase módulo R de ρ.

Teorema 3.1. *Las aplicaciones $\tilde{\pi}$, $\tilde{\tau}$ definen sobre $\tilde{\pi}_1(\Omega, a)$ una estructura de grupo. Además, si $\rho, \sigma \in \tilde{S}(\Omega, a)$,*

$$[\rho][\sigma] = \tilde{\pi}([\rho], [\sigma]) = [\rho\sigma] ,$$

$$[\rho]^{-1} = \tilde{\tau}([\rho]) = [\rho^{-1}] .$$

El elemento neutro de $\tilde{\pi}_1(\Omega, a)$ es $1_a = [e_a]$

Demostración. En efecto, en virtud de los teoremas antes citados, $\tilde{\pi}$ es asociativa, pues

$$([\rho][\sigma])[\gamma] = ([\rho\sigma])[\gamma] = [(\rho\sigma)\gamma]$$

$$= [\rho(\sigma\gamma)] = [\rho][\sigma\gamma] = [\rho]([\sigma][\gamma]),$$

ya que $(\rho\sigma)\gamma \approx \rho(\sigma\gamma)$. Por otra parte, $[\rho]1_a = [\rho][e_a] = [\rho]$, puesto que $\rho e_a \approx \rho$.

Finalmente,

$$[\rho][\rho]^{-1} = [\rho][\rho^{-1}] = [\rho\rho^{-1}] = [e_a] = 1_a$$

pues se sabe que $\rho\rho^{-1} \approx e_a$. Esto demuestra el teorema.

Definición 3.1. El grupo $\tilde{\pi}_1(\Omega, a)$ se denomina el *grupo fundamental de homotopía de* Ω en el punto a.

Supongamos ahora que Ω es arco-conexo. Sean $a, b \in \Omega$ y sea $\gamma \in \tilde{S}(\Omega\ ;\ a, b)$. Sea además

$$\tilde{S}(\Omega, b) \xrightarrow{\gamma^*} S(\Omega, a)$$

definida por

$$\gamma^*(\rho) = \gamma\rho\gamma^{-1}$$

Si $\rho \approx \sigma$, $\gamma\rho\gamma^{-1} \approx \gamma\sigma\gamma^{-1}$. Por lo tanto γ define, por paso al cociente, una aplicación

$$\tilde{\gamma} : \tilde{\pi}_1(\Omega, b) \to \tilde{\pi}_1(\Omega, a)$$

dada por

$$\tilde{\gamma}([\rho]_b) = [\gamma\rho\gamma^{1}]_a \ .$$

Ahora, $\tilde{\gamma}$ es un homomorfismo, pues

$$\gamma^*(\rho\sigma) \approx (\gamma\rho\gamma^{-1})(\gamma\sigma\gamma^{-1})$$

como se deduce por asociatividad y por el hecho de que $\gamma^{-1}\gamma \approx e_a$. Por otra parte, si

$$\gamma\rho\gamma^{-1} \approx e_a ,$$

entonces

$$\rho \approx \gamma^{-1} e_a \gamma \approx e_b$$

Por lo tanto, γ es $1\text{-}1$. Como además,

$$\gamma(\gamma^{-1}\rho\gamma)\gamma^{-1} \approx \rho, \quad \rho \in \tilde{S}(\Omega\ ;\ a),$$

de lo cual se deduce que $\tilde{\gamma}$ es un isomorfismo. Por consiguiente tenemos :

Teorema 3.2. *Si* Ω *es un espacio topológico arco conexo y si* $a, b \in \Omega$, *entonces* $\tilde{\pi}_1(\Omega, b) \approx \tilde{\pi}_1(\Omega, a)$. *Para toda* $\gamma \in \tilde{S}(\Omega, a, b)$, *la aplicación*

$$\tilde{\gamma} : \tilde{\pi}_1(\Omega, b) \to \tilde{\pi}_1(\Omega, a)$$

dada por

$$\tilde{\gamma}([\rho]_b) = [\gamma \rho \gamma^{-1}]_a$$

es un isomorfismo entre estos grupos .

Cuando Ω es un espacio topológico arco conexo Ω denotaremos por $\tilde{\pi}_1(\Omega)$ a cualquiera de los grupos $\tilde{\pi}_1(\Omega, a)$, $a \in \Omega$. El grupo $\tilde{\pi}_1(\Omega)$ se denomina entonces el *grupo fundamental de homotopía de* Ω .

4. *Homotopía Suave* .

En lo que sigue Ω será un abierto de $\mathbb{R}_p$ para algún $p \geq 0$. Una aplicación $f : \Omega \to \mathbb{R}_n$ se dice *suave*, o de clase C^∞, si todas las derivadas parciales

$$\frac{\partial^k f_i}{\partial x_j^k} \quad , \qquad i = 1, 2, \ldots, n \ ; \ j = 1, 2, \ldots, p \ ; \ k \geq 0 \ ,$$

existen en todo punto de Ω y son continuas. Aquí se ha supuesto, naturalmente, que $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ es la aplicación

$$f_i = pr_i \circ f \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

donde $pr_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. Denotaremos por $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}_n)$ al $\mathbb{R}$-espacio de todas las aplicaciones suaves de Ω en $\mathbb{R}_n$.

Definición 4.1. Una curva $\rho \in \tilde{S}(\Omega ; a,b)$ se dice suave, si existen una vecindad abierta relativamente compacta U de I, un subconjunto finito F de U y una aplicación $\tilde{\rho} : U \to \Omega$ de clase C^∞ en $U - F$, tales que :

1) ρ es la restricción de $\tilde{\rho}$ a I .

2) $\int_U |\tilde{\rho}'(t)| \, dt < +\infty$

Aquí, $\tilde{\rho}'(t) = [\tilde{\rho}_1'(t), \tilde{\rho}_2'(t), \ldots, \tilde{\rho}_n'(t)]^T$. Denotaremos por $S_1(\Omega ; a,b)$ al conjunto de todas las curvas suaves de $\tilde{S}(\Omega\ ; a,b)$.

Es claro que toda poligonal ρ pertenece a $S_1(\Omega\ ; a,b)$. Recordamos que una poligonal es una curva tal que existe una partición $t_o = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_q = 1$ de I, para la cual $\rho([t_i, t_{i+1}])$ es un segmento de recta. Es claro también que para todo $a \in \Omega$, $S_1(\Omega\ ; a,a) = S_1(\Omega\ ; a)$. Si $\rho \in S_1(\Omega\ ; a,b)$, obviamente $\rho^{-1} \in S_1(\Omega\ ; b,a)$. También, si $\rho \in S_1(\Omega\ ; a,b)$, $\sigma \in S_1(\Omega\ ; b,c)$, entonces $\rho\sigma \in S_1(\Omega\ ; a,c)$.

Definición 4.2. Una *homotopía* $F : I \times I \to \Omega$ se dice suave, si existen una vecindad relativamente compacta V de I^2, un subconjunto F de $\mathbb{R}^2$ el cual es reunión de un número finito de puntos y rectas, y una aplicación $\tilde{F} : V \to \Omega$, de clase C^∞ en $V\text{-}F$, tales que

a) $\tilde{F} \mid I^2 = F$

b) $\int_V \|\tilde{F}'(\theta, t)\|\, d\theta\, dt < +\infty$.

Aquí,

$$\|\tilde{F}'(\theta, t)\| = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \left|\frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial \theta}\right|^2 + \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial t}\right|^2 \right\}^{1/2}$$

donde $\tilde{F}(\theta, t) = [\tilde{F}_1(\theta, t), \tilde{F}_2(\theta, t), \ldots, \tilde{F}_p(\theta, t)]^T$.

Si $\rho, \sigma \in S_1(\Omega\ ; a,b)$, diremos que ρ, σ son suavemente homótopas si existe una homotopía suave F de Ω la cual deforma a ρ en σ. Es decir, $F(0,t) = \rho(t)$, $F(1,t) = \sigma(t)$, $F(\theta, 0) = a$, $F(\theta, 1) = b$. En tal caso escribiremos

$$F : \rho \to \sigma$$

La relación $R_s = \{(\rho, \sigma) \mid \rho \equiv \sigma\}$ es una relación de equivalencia en $S_1(\Omega; a,b)$, y es claro que

$$\rho \equiv \sigma \quad \text{implica} \quad \rho \approx \sigma .$$

Es decir, R_s es menos fina que la restricción R' a $S_1(\Omega\ ; a,b)$ de la relación

R. Más adelante veremos que $R_s = R'$, pero esto no es completamente trivial. Por otra parte, en $S_1(\Omega, a)$, $a \in \Omega$, R_s es compatible con la formación de inversos y productos de curvas. Además, $\rho e_a \equiv e_a \rho \equiv \rho$ si $\rho \in S_1(\Omega ; a,b)$. Por lo tanto

$$\pi_1(\Omega, a) = \frac{S_1(\Omega ; a)}{R_s}$$

está dotado de una estructura de grupo determinada por las leyes

$$\{\rho\} \cdot \{\sigma\} = \{\rho\sigma\}$$
$$\{\sigma\}^{-1} = \{\sigma^{-1}\}$$

donde $\{\rho\}$ denota a la clase módulo R_s de $\rho \in S_1(\Omega ; a)$. El elemento neutro de $\pi_1(\Omega, a)$ es $\{e_a\} = 1_a$.

El grupo $\pi_1(\Omega, a)$ se denomina el *grupo de homotopía suave* de Ω en el punto a, o simplemente, el *grupo de homotopía* de Ω en a. Las demostraciones de todas las afirmaciones anteriores son idénticamente iguales a las de las secciones anteriores, con la sola observación obvia de que la *suavidad* de las homotopías construidas para tales demostraciones puede romperse solamente en puntos o rectas (como por ejemplo L_1, L_2, L_3 en el teorema 2.3; L_1, L_2 en el teorema 2.4; L en el teorema 2.5) y esto no afecta la suavidad global de las homotopías, según la definición misma (nótese en particular que estos son conjuntos de medida nula). Por otra parte, si $a, b \in \Omega$ y $\gamma \in S_1(\Omega ; a,b)$, γ define un isomorfismo

$$\tilde{\gamma} : \pi_1(\Omega ; b) \to \pi_1(\Omega ; a)$$

dado por

$$\tilde{\gamma}(\{\rho\}_b) = \{\gamma \rho \gamma^{-1}\}_a$$

y si Ω es arco conexo, para lo cual basta que sea conexo, podemos definir

$$\pi_1(\Omega) = \pi_1(\Omega, a),$$

donde a es cualquier punto de Ω, y $\pi_1(\Omega)$ se denominará *el grupo de homotopía de* Ω. Como $S_1(\Omega, a) \subseteq \tilde{S}(\Omega, a)$ y $\rho \equiv \sigma$ implica $\rho \approx \sigma$, podemos definir, por paso a los cocientes, una aplicación

$$\phi : \pi_1(\Omega, a) \to \tilde{\pi}_1(\Omega, a)$$

dada por

$$\phi(\{\rho\}) = [\rho],$$

y es evidente que ϕ es un homomorfismo de grupos. No es evidente, sin embargo, que ϕ sea, ni inyectiva ni superyectiva. Nótese que la inyectividad es equivalente a la afirmación $R_s = R'$, y la superyectividad equivalente a la afirmación de que dada $\rho \in \tilde{S}(\Omega, a)$ es posible encontrar $\sigma \in S_1(\Omega, a)$ tal que $\rho \approx \sigma$. Estos dos resultados no son triviales y serán el objeto de la próxima sección.

5. *Homotopía y Homotopía suave*.

En la sección anterior hemos establecido un homomorfismo

$$\phi : \pi_1(\Omega, a) \to \tilde{\pi}_1(\Omega, a),$$

cuando Ω es un abierto de $\mathbb{R}_p$, para algún $p \geq 0$, y $a \in \Omega$. Nos proponemos demostrar ahora que ϕ es un isomorfismo.

Teorema 5.1. *El homomorfismo $\phi : \pi_1(\Omega, a) \to \tilde{\pi}_1(\Omega, a)$ es superyectivo. Es decir, dada $\rho \in \tilde{S}(\Omega, a)$, existe $\gamma \in S_1(\Omega, a)$, tal que $\rho \approx \gamma$.*

Demostración. Sea $\rho \in \tilde{S}(\Omega, a)$, y sea

$$\alpha = \operatorname*{Inf}_{t \in [0,1]} d(\rho(t), \complement\Omega)$$

donde $d(\rho(t), \complement\Omega)$ es la distancia entre $\rho(t)$ y $\complement\Omega$. Como $Im\rho = \{\rho(t) \mid t \in [0,1]\}$

es compacto, $\alpha > 0$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $4\varepsilon < \alpha$. Como ρ es uniformemente continua, existe una partición $0 = t_o < t_1 < \ldots < t_n = 1$ de $[0,1]$ tal que si t, $t' \in [t_i, t_{i+1}]$, $|\rho(t) - \rho(t')] < \varepsilon$. Sea γ la poligonal obtenida uniendo por segmentos de recta dos puntos consecutivos. Se tiene, para $t \in [t_i, t_{i+1}]$,

$$||\rho(t) - \gamma(t)|| \leq ||\rho(t) - \rho(t_i)|| + ||\rho(t_i) - \gamma(t)|| \leq ||\rho(t) - \rho(t_i)|| + ||\rho(t_i) - \rho(t_{i+1})||$$

$$\leq 2\varepsilon,$$

y por lo tanto $Im\,\gamma \subseteq \Omega$.

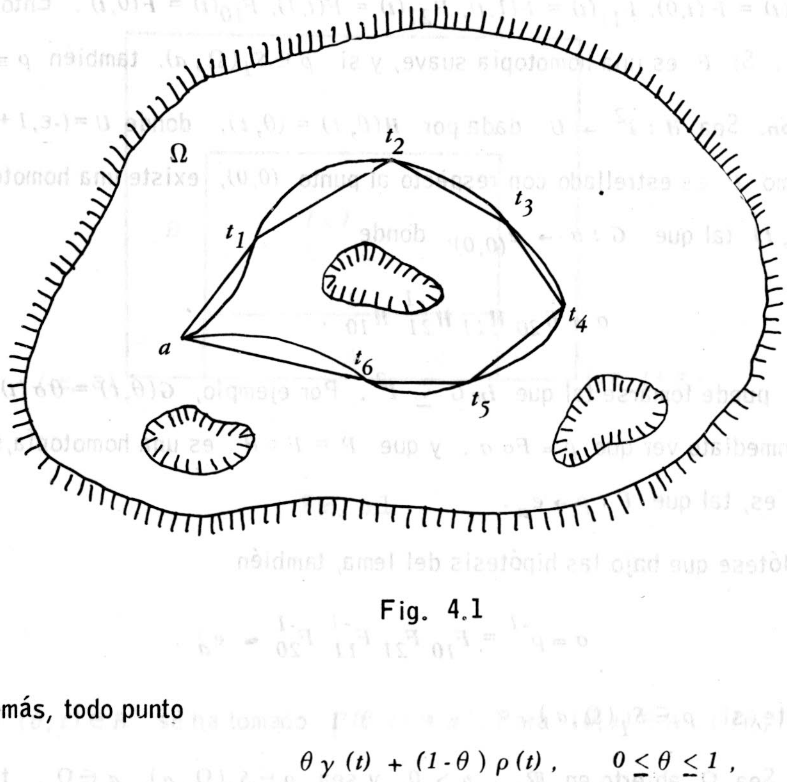

Fig. 4.1

Además, todo punto

$$\theta\gamma(t) + (1-\theta)\rho(t), \qquad 0 \leq \theta \leq 1,$$

del segmento $[\gamma(t), \rho(t)]$, está contenido en Ω. Sea entonces

$$F(\theta, t) = \theta\gamma(t) + (1-\theta)\rho(t). \tag{4.4}$$

Se deduce inmediatamente que F es una homotopía tal que $F: \rho \to \gamma$. Como evidentemente $\gamma \in S_1(\Omega, a)$, el teorema queda demostrado.

Nota. Nótese que si a las hipótesis del teorema añadimos que $\rho \in S_1(\Omega, a)$, entonces F, dada por 4.4, es una homotopía suave. Es decir, $\rho \equiv \gamma$.

Lema 5.1. Sea F una homotopía de Ω , $F(0,0) = a$, y sea ρ la curva

$$\rho(t) = F_{20}\, F_{11}\, F_{21}^{-1}\, F_{10}^{-1}(t),$$

donde $F_{20}(t) = F(t,0)$, $F_{11}(t) = F(1,t)$, $F_{21}(t) = F(t,1)$, $F_{10}(t) = F(0,t)$. Entonces $\rho \approx e_a$. Si F es una homotopía suave, y si $\rho \in S_1(\Omega, a)$, también $\rho \equiv e_a$.

Demostración. Sea $H: I^2 \to U$ dada por $H(\theta, t) = (\theta, t)$, donde $U = (-\varepsilon, 1+\varepsilon)^2$, $\varepsilon > 0$. Como U es estrellado con respecto al punto $(0,0)$, existe una homotopía suave $G(\theta, t)$ tal que $G: \sigma \to e_{(0,0)}$, donde

$$\sigma = H_{20}\, H_{11}\, H_{21}^{-1}\, H_{10}^{-1} .$$

Además, G puede tomarse tal que $Im\, G \subseteq I^2$. Por ejemplo, $G(\theta,t) = \theta\sigma(t)$. Ahora, es inmediato ver que $\rho = F \circ \sigma$, y que $P = F \circ H$ es una homotopía, suave si F lo es, tal que $P: \rho \to e_a$.

Nota. Nótese que bajo las hipótesis del lema, también

$$\sigma = \rho^{-1} = F_{10}\, F_{21}\, F_{11}^{-1}\, F_{20}^{-1} \approx e_a ,$$

y suavemente, si $\rho \in S_1(\Omega, a)$.

Lema 5.2. Sea Ω abierto en $\mathbb{R}_p$, $p \geq 0$, y sea $\rho \in S_1(\Omega, a)$, $a \in \Omega$, tal que $\rho \approx e_a$. Es decir, si existe una homotopía $F: \rho \to e_a$, existe también una homotopía suave $H: \rho \to e_a$.

Demostración. Tómese α y ε como en el teorema 4.1 y sea k lo suficientemente grande para que

$$\| G(\theta, t) - F(\theta, t) \| < \varepsilon \quad , \qquad (\theta, t) \in I^2$$

donde

$$G(\theta, t) = \int F(\theta - x, t - y)\, \delta_k(x,y)\, dx\, dy \;.$$

Aquí se ha prolongado a F continuamente a una vecindad de $I \times I$, de la siguiente manera (véase la figura 5.1) :

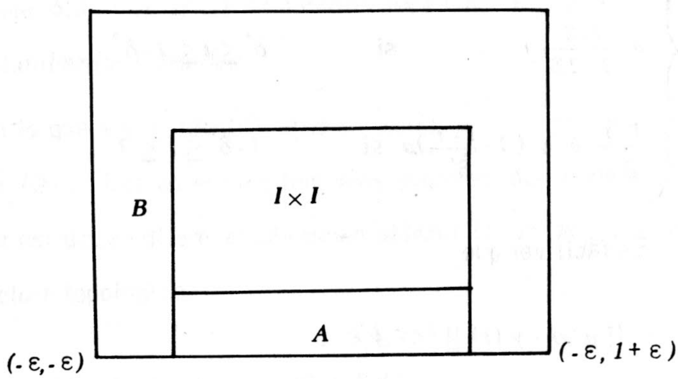

Fig. 5.1

Para $(\theta, t) \in B$ se ha tomado $F(\theta, t) = a$. Para $(\theta, t) \in A$, $F(\theta, t) = \rho(t)$.

Sean

$$\sigma = G_{10}\, G_{21}\, G_{11}^{-1}\, G_{20}^{-1} \quad ,$$

$$\gamma = F_{10}\, F_{21}\, F_{11}^{-1}\, F_{20}^{-1} \quad , \qquad b = G(0,0) \;.$$

Es claro que $\sigma \in S_1(\Omega, b)$ y que $\sigma \equiv e_b$. Además, es también claro que $\rho \equiv \gamma$.

Sea ahora $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño para que

$$||G(\theta, t) - F(\theta', t')|| < 2\varepsilon$$

si $|\theta - \theta'| \leq \delta$, $|t - t'| \leq \delta$. Sea $\delta' > 0$ tal que

$$\left|\frac{2\delta'}{1-2\delta'}\right| < \delta, \quad \delta' < \delta.$$

Defínase

$$\mu(t) = \begin{cases} \frac{t}{\delta'} b + (1 - \frac{t}{\delta'}) a & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \delta' \\ \sigma(\frac{t-\delta'}{1-2\delta'}), & \text{si} \quad \delta' \leq t \leq 1-\delta' \\ \frac{1-t}{\delta'} b + (1 - \frac{1-t}{\delta'}) a & \text{si} \quad 1-\delta' \leq t \leq 1. \end{cases}$$

donde $b = G(0,0)$. Es fácil ver que

$$||\mu(t) - \gamma(t)|| < 4\varepsilon,$$

para todo $t \in I$. Por otra parte, sea S una homotopía suave de Ω tal que $S : e_b \to \sigma$. Es fácil ver entonces que la función L definida por

$$L(\theta, t) = \begin{cases} \theta\,\alpha(t) + (1-\theta)\,a, & t \in [0, \delta'] \\ \theta\, S(\theta, \frac{t-\delta'}{1-2\delta'}) + (1-\theta)\,a, & t \in [\delta', 1-\delta'], \\ \theta\,\alpha^{-1}(t) + (1-\theta)\,a, & t \in [1-\delta', \delta'], \end{cases}$$

donde $\alpha(t) = (t/\delta')\, b + (1 - t/\delta')a$, es una homotopía suave de Ω, tal que $L : e_a \to \mu$. Como también $H(\theta, t) = \theta\,\gamma(t) + (1-\theta)\,\mu(t)$ es una homotopía suave de Ω tal que $H : \mu \to \gamma$, se tiene que $\rho \equiv e_a$. Esto demuestra el lema.

Corolario. Sean $\rho, \sigma \in S_1(\Omega, a)$. Si $\rho \approx \sigma$, entonces $\rho \equiv \sigma$.

Demostración. En efecto, $\rho\,\sigma^{-1} \equiv e_a$, de lo cual, $\rho \equiv e_a\sigma \equiv \sigma$. Esto demuestra el corolario.

Teorema 5.2. *El homomorfismo* $\phi : \pi_1(\Omega, a) \to \tilde{\pi}_1(\Omega, a)$ *es un isomorfismo*.

Demostración. Ya hemos visto que ϕ es sobre. Para ver que es inyectivo, nótese que si $\rho \in S_1(\Omega, a)$ es tal que $\phi(\{\rho\}) = [e_a]$, necesariamente $\rho \approx e_a$. Como también $\rho \equiv e_a$, se concluye que $\{\rho\} = \{e_a\}$. Esto demuestra el teorema.

Teorema 5.3. *Si* Ω *es un abierto conexo de* $\mathbb{R}_p$, $p \geq 0$, $\pi_1(\Omega)$ *y* $\tilde{\pi}_1(\Omega)$ *son naturalmente isomorfos*.

En lo que sigue, identificaremos $\pi_1(\Omega, a)$ y $\tilde{\pi}_1(\Omega, a)$, así como a $\pi_1(\Omega)$ con $\tilde{\pi}_1(\Omega)$. Los anteriores teoremas sugieren, por primera vez en este curso, que la estructura diferenciable de un abierto Ω de $\mathbb{R}_p$ está determinada por su estructura topológica.

6. Conexión simple y contractibilidad.

Sean Ω, Ω' espacios topológicos. Denotaremos por $\tilde{S}_1(\Omega)$ al conjunto de todas las curvas en Ω. Supóngase que existe una aplicación continua $\psi : \Omega \to \Omega'$. Si $\sigma \in \tilde{S}_1(\Omega)$ y si $\rho = \psi \circ \sigma$, es claro que $\rho \in \tilde{S}_1(\Omega')$. Para $a \in \Omega$, $b = \psi(a)$, podemos definir entonces una aplicación

$$\psi' : \tilde{S}_1(\Omega, a) \to \tilde{S}_1(\Omega', \psi(a))$$

por

$$\psi'(\sigma) = \psi \circ \sigma .$$

La aplicación ψ' es compatible con la relación de equivalencia de homotopía. En efecto, si $\sigma, \rho \in \tilde{S}_1(\Omega, a)$ y $F : \sigma \to \rho$, entonces $\psi \circ F : \psi \circ \sigma \to \psi \circ \rho$.

Por lo tanto, ψ' define, por paso al cociente, una aplicación

$$\psi^* \tilde{\pi}_1(\Omega\, , a) \to \tilde{\pi}_1(\Omega', \psi(a))$$

dada por

$$\psi^*([\sigma]) = [\psi'(\sigma)] = [\psi \circ \sigma]$$

y se tiene

Teorema 6.1. La aplicación ψ^* es un homomorfismo de $\tilde{\pi}_1(\Omega, a)$ en $\tilde{\pi}_1(\Omega', \psi(a))$.

Demostración. Se tiene

$$\psi^*([\sigma][\rho]) = \psi^*([\sigma\rho]) = [\psi\circ\sigma\rho].$$

Pero

$$\psi\circ\sigma\circ\rho = (\psi\circ\sigma)(\psi\circ\rho),$$

como se comprueba inmediatamente.

Corolario. Si Ω, Ω' son arco-conexos, ψ es un homomorfismo de $\tilde{\pi}_1(\Omega)$ en $\tilde{\pi}_1(\Omega')$.

Es fácil ver también que

Teorema 6.2. Si $\psi : \Omega \to \Omega'$ es un homomorfismo, ψ^* es un isomorfismo de $\tilde{\pi}_1(\Omega, a)$ sobre $\tilde{\pi}_1(\Omega', \psi(a))$. Si Ω y Ω' son arco conexos, $\psi^* : \tilde{\pi}_1(\Omega) \approx \tilde{\pi}_1(\Omega')$.

Corolario. Sean Ω, Ω' abiertos conexos homeomorfos de $\mathbb{R}^p$. Entonces $\pi_1(\Omega) \approx \pi_1(\Omega')$.

Nota. Al respecto del corolario anterior, nótese que si Ω, Ω' son difeomorfos, es decir, si existe una aplicación biyectiva $\psi : \Omega \to \Omega'$ tal que $\psi \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^p))$, $\psi^{-1} \in C^\infty(\Omega', \mathbb{R}^p)$, entonces ψ induce un isomorfismo $\psi : \pi_1(\Omega) \to \pi_1(\Omega')$ dado por $\psi(\{\sigma\}) = \{\psi\circ\sigma\}$.

Nótese, sin embargo, que basta que Ω, Ω' sean homeomorfos para tener un isomorfismo entre $\pi_1(\Omega)$ y $\pi_1(\Omega')$.

Definición 6.1. Un espacio topológico Ω se dice *contraible al punto* $a \in \Omega$, si $\tilde{\pi}_1(\Omega, a) = \{[e_a]\}$; es decir, si $\tilde{\pi}_1(\Omega, a)$ es trivial. Si Ω es contraible a algún punto, se dice que Ω es *contráctil*. Un espacio topológico arco-conexo y contráctil se dice *simplemente conexo*.

Si Ω es simplemente conexo, $\tilde{\pi}_1(\Omega) = \{1\}$ donde $1 = [e_a]$; y si Ω es abierto en algún $\mathbb{R}^p$, también $\pi_1(\Omega) = \{1\}$. En la próxima sección necesitaremos del siguiente lema, cuya demostración omitiremos en este momento, por ser consecuencia de un resultado que probaremos más adelante (sin incluir ningún círculo vicioso, como se comprobará al dar la demostración).

Lema de conformidad (C) : Sean Ω, Ω' abiertos simplemente conexos de C, diferentes, ambos de C. Entonces existe un difeomorfismo (y, en particular, un homeomorfismo) ψ de Ω sobre Ω'.

Se deduce entonces que si Ω es un abierto simplemente conexo de $C, \Omega \neq C$, Ω es difeomorfo (y homeomorfo) a cualquier bola abierta $B_r(a)$. En particular, al disco unidad $D = \{ z \mid |z| < 1 \}$.

Teorema 6.3. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^p$, el cual es estrellado con respecto a un punto $a \in \Omega$: es decir, tal que para todo $b \in \Omega$ el segmento $[a,b] = \{ tb + (1-t)a \mid 0 \leq t \leq 1 \}$ queda contenido en Ω. Entonces Ω es simplemente conexo.*

Demostración. El abierto Ω es conexo y, por lo tanto, arco conexo. Bastará entonces demostrar que Ω es contraible al punto a. Sea $\rho \in S_1(\Omega, a)$, y sea

$$F : I \times I \to \mathbb{R}^p$$

definida por

$$F(\theta, t) = \theta a + (1-\theta)\rho(t).$$

Evidentemente F es una homotopía de Ω. Por otra parte, $F : \rho \to e_a$.

Corolario 1. Si Ω es un abierto convexo de $\mathbb{R}^p$ (es decir, estrellado con respecto a cualquiera de sus puntos) entonces Ω es simplemente conexo.

Corolario 2. Para todo p, $\mathbb{R}^p$ es simplemente conexo.

7. *Abiertos 1-conexos.*

Definición 7.1. Un abierto Ω de C se dice 1-conexo si $\Omega = \Omega' - \{a\}$, donde Ω' es simplemente conexo y $a \in \Omega'$.

Sea Ω un abierto 1-conexo de C, $\Omega = \Omega' - \{a\}$ con $a \in \Omega'$, Ω' simplemente conexo. Entonces Ω' es difeomorfo a un abierto convexo U de C y Ω es difeomorfo a $U - \{b\}$, donde $b \in U$. Nos proponemos calcular $\pi_1(\Omega)$. Como $\pi_1(\Omega) \approx \pi_1(U - \{b\})$, calculemos primero a $\pi_1(U - \{b\})$. Tenemos entonces :

Teorema 7.1. Si U es un abierto convexo de C y $a \in U$, $\pi_1(U - \{b\})$ está generado por $c_\varepsilon(b)$, donde $\varepsilon > 0$ es lo suficientemente pequeño para que $\overline{B}_\varepsilon(b) \subseteq U$.

En realidad demostraremos un resultado aparentemente más fuerte.

Teorema 7.2. Si U es un abierto de C, estrellado con respecto a $b \in U$, $\pi_1(U - \{b\})$ está generado por $c_\varepsilon(b)$, donde $\overline{B}_\varepsilon(b) \subseteq U$.

Demostración. Sea entonces U un abierto de C, estrellado con respecto al punto $a \in U$, y sea $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B}_\varepsilon(a) \subseteq U$. No hay pérdida de generalidad en suponer que $a = (0,0)$.

En primer lugar, si $\rho \in S_1(U - a, b)$, donde $b = c_\varepsilon^1(a)(0)$, ρ es homótopa en $U - \{a\}$ a

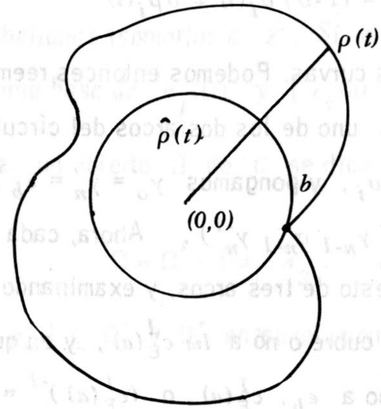

Fig. 7.1

Tenemos finalmente

$$\hat{\rho}(t) = \frac{\rho(t)}{|\rho(t)|}$$

En efecto, el segmento $[\rho(t), \hat{\rho}(t)] \subseteq U\text{-}a$, y entonces

$$F(\theta, t) = (1-\theta)\,\rho(t) + \theta\,\hat{\rho}(t)$$

es una homotopía entre estas curvas. Sea ahora $\delta > 0$ tal que si $|t - t'| < \delta$ entonces $|\rho(t) - \rho(t')| < \varepsilon/4$. Sea $\{t_o, \ldots, t_n\}$, $0 = t_o < t_1 \ldots < t_n = 1$, una partición de $[0, 1]$ tal que $|t_{i+1} - t_i| < \delta$ para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Defínase

$$\rho_i(t) = \rho((t_{i+1} - t_i)\,t + t_i),$$

y sea a su vez σ_i el arco de $c^1_\varepsilon(a)$ comprendido entre los puntos $\rho_i(0) = \rho(t_i)$ y $\rho_i(1) = \rho(t_{i+1})$. Como ρ_i tiene su imagen comprendida totalmente en este arco, y dos puntos cualesquiera de este arco están entre sí a una distancia $< \varepsilon/4$, se deduce que el segmento $[\sigma_i(t), \rho_i(t)] \subseteq U - \{a\}$. Por lo tanto,

$$F_i(\theta, t) = (1-\theta)\,\sigma_i(t) + \theta\rho_i(t)$$

es una homotopía entre estas dos curvas. Podemos entonces reemplazar ρ_i por σ_i. Para $1 \leq i \leq n-1$, sea γ_i uno de los dos arcos del círculo $c^1_\varepsilon(a)$, desde b hasta el punto inicial de σ_i, y pongamos $\gamma_o = \gamma_n = e_b$. Se tiene $\rho \approx (\gamma_o \sigma_o \gamma_1^{-1})(\gamma_1 \sigma_1 \gamma_2^{-1}) \ldots (\gamma_{n-1} \sigma_{n-1} \gamma_n^{-1})$. Ahora, cada uno de los factores $\gamma_k \sigma_k \gamma_{k+1}$ está compuesto de tres arcos, y examinando las diferentes posibilidades (cuando su imagen cubre o nó a $Im\ c^1_\varepsilon(a)$, y en qué dirección), se deduce que tal factor es homótopo a e_b, $c^1_\varepsilon(a)$, o $(c^1_\varepsilon(a))^{-1} = c^{-1}_\varepsilon(a)$. Por lo tanto, $\rho \approx (c_\varepsilon(a))^n = c^n_\varepsilon(a)$ para algún $n \in Z$. Esto demuestra el teorema.

Tenemos finalmente :

Teorema 7.3. *Si Ω es 1-conexo, $\Omega = \Omega' - \{a\}$, $a \in \Omega'$, Ω' simplemente conexo, $\pi_1(\Omega)$ está generado por $c_\varepsilon(a)$ cuando $\bar{B}_\varepsilon(a) \subseteq \Omega$.*

Demostración. Sea $\psi : \Omega \to U - \{b\}$, donde U es un abierto convexo y $b = \psi(a) \in U$, un difeomorfismo. Sea $\delta > 0$ tal que $B_\delta(b) \subseteq U$. Claramente $\rho = \psi^{-1} \circ c_\delta(b)$ genera a $\pi_1(\Omega)$. Por otra parte, si $\varepsilon > 0$ es como en el enunciado y si $\delta > 0$ es lo suficientemente pequeño, para $\varepsilon' > \varepsilon$, con $B_{\varepsilon'}(a) \subseteq \Omega$, se tiene que $Im\ \rho \subseteq B_{\varepsilon'}(a)$. Como $B_{\varepsilon'}(a)$ es convexo, $\rho \approx c^n_\varepsilon(a)$ para algún $n \in Z$. Pero esto implica claramente que $c_\varepsilon(a)$ genera a $\pi_1(\Omega)$.

Corolario. La afirmación del teorema es válida reemplazando a $\pi_1(\Omega)$ por $\tilde{\pi}_1(\Omega)$.

Sabemos entonces que si Ω es I-conexo, $\pi_1(\Omega)$ es un grupo abeliano generado por un único elemento. La pregunta es entonces : ¿Es $\pi_1(\Omega) \approx Z$? Para que esto sea cierto es necesario que $c_\varepsilon(a)$ no sea homótopo a 1. No demostraremos esto en este momento. La demostración se dará en el capítulo VI, una vez que hayamos introducido ciertos conceptos. Enunciamos, sin embargo, el resultado.

Teorema 7.4. *Bajo las hipótesis del teorema 6.3,* $\pi_1(\Omega)$ *y, por lo tanto,* $\tilde{\pi}_1(\Omega)$ *son grupos abelianos isomorfos a* Z. *Si* $\varepsilon > 0$ *es como en tal teorema,* $\{ c_\varepsilon(a) \}$ *es una base de* $\pi_1(\Omega)$ *y* $[c_\varepsilon(a)]$ *una base de* $\pi_1(\Omega)$.

Nota. En general, un abierto Ω de C se dice *n-conexo*, o *de conexión finita n*, si

$$\Omega = \Omega' - \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \},$$

donde $\{ a_1, \ldots, a_n \} \subseteq \Omega'$ y Ω' es simplemente conexo.

Ejercicios

1) Sean X, Y espacios topológicos, $f, g : X \to Y$ aplicaciones continuas. Diremos que f es *homótopa* a g, y escribiremos $f \approx g$, si existe una aplicación continua

$$F : X \times I \to Y$$

tal que $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$, $x \in X$. F se dice entonces una *homotopía* de f en g.

a) Demuestre que la relación $f \approx g$ es una relación de equivalencia en $C(X,X)$.

b) Sea X un espacio topológico, Ω un subconjunto de $\mathbb{R}_p$ el cual es estrellado con respecto al punto a. Demuestre que si $f \in C(X, \Omega)$, $f \approx g_a$ donde $g_a(x) = a$ para todo $x \in X$. Por lo tanto

$$C(X, \Omega)/_R = \{ [g_a] \}$$

donde $[g_a]$ es la clase de homotopía de g_a y $R = \{ (f,g) \mid f \approx g \}$.

2) Una aplicación $f: X \to Y$ se dice nul-homótopa si existe una función constan-

te $g : X \to Y$ tal que $f \approx g$. Dé un ejemplo de dos espacios topológicos X, Y y dos funciones continuas $f, g : X \to Y$, ambas nul-homótopas, y tales que $f \not\approx g$.

3) Demuestre que, si en el ejercicio 2 Y es arco-conexo, y si f y g son nul-homótopas. entonces $f \approx g$.

4) Sean $f, g : X \to Y$ aplicaciones continuas, $f \approx g$. Demuestre que entonces $\tilde{f} = \tilde{g}$, donde $\tilde{f}, \tilde{g}$ son los homomorfismos de $\tilde{\pi}_1(X) \to \tilde{\pi}_1(Y)$ inducidos por f y g.

5) Demuestre que si X es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}_p$ y Y es un espacio topológico arbitrario, toda aplicación continua $f : X \to Y$ es nul-homótopa.

6) Sean $f \approx g : X \to Y$, $f' \approx g' : Y \to Z$. Demuestre que $f' \circ f \approx g' \circ g : X \to Z$.

7) Un espacio topológico X se dice f-contraible al punto $a \in X$ si $i_X \approx g_a$, donde i_X es la identidad de X y donde $g_a(x) = a$ para todo $x \subset X$. Si X es f-contraible a algún punto, X se dirá f-contráctil. Demuestre que si X es f-contráctil al punto $a \subset X$ entonces $\pi_1(X, a) = \{1_a\}$. Demuestre que si X es f-contráctil y arco-conexo entonces X es simplemente conexo.

8) Demuestre que si X es f-contráctil entonces, para todo espacio topológico Y, toda aplicación continua $f : X \to Y$ es nul-homótopa.

9) Dos espacios topológicos X, Y se dicen del *mismo tipo de homotopía* si existen aplicaciones continuas $f : X \to Y$, $g : Y \to X$, tales que $g \circ f \approx i_X$, $f \circ g \approx i_Y$.

a) Demuestre que la relación $X \approx Y$ si X y Y son del mismo tipo de homotopía es una relación de equivalencia sobre cualquier conjunto de espacios topológicos.

b) Demuestre que un espacio topológico es f-contráctil si y sólo si es del mismo tipo de homotopía de un espacio reducido a un punto.

c) Demuestre que si X, Y son arco conexos y $X \approx Y$ entonces $\pi_1(X) \approx \tilde{\pi}_1(Y)$

10) Demuestre que todo subconjunto de $\mathbb{R}_p$, el cual sea estrellado con respecto a un punto, es f-contráctil.

11) Sea X un espacio topológico, Y un espacio topológico f-contráctil. Sean $f, g: X \to Y$ aplicaciones continuas. Demuestre que $f \approx g$.

12) Demuestre que si X es contráctil, toda aplicación continua $f: X \to Y$ es nul-homótopa.

13) Demuestre que si X es f-contráctil entonces X es f-contraible a cualquiera de sus puntos.

14) Demuestre que si X,Y son f-contraibles y si $f: X \to Y$ es continua entonces existe $g: Y \to X$ tal que $f \circ g \approx i_Y$, $g \circ f \approx i_X$.

15) Cuál es el grupo fundamental de homotopía de $S_1 = \{ z \in C \mid |z| = 1 \}$.

16) Cuál es el grupo de homotopía de $S_2 = \{ x \in \mathbb{R}_3 \mid ||x|| = 1 \}$.

17) Sea $S_n = \{ x \in \mathbb{R}_{n+1} | \; ||x|| = 1 \}$. Sea Y un espacio topológico. Demuestre que si $f: S_n \to Y$ es continua, las proposiciones siguientes son equivalentes:

a) f es nul-homótopa

b) f puede extenderse en una aplicación continua $\tilde{f}: \mathbb{R}_{n+1} \to Y$.

c) Existen una homotopía $F: S_n X I \to Y$ y puntos $a \in S_n$, $b \in Y$, tales que

$$F(z,0) = f(z) \quad , \quad z \in S_n$$

$$F(z,1) = b \quad , \quad z \in S_n$$

$$F(a,t) = b \quad , \quad t \in I .$$