MOMENTO Revista Depto. Física Universidad Nacional de Colombia. Número 8, Abril de 1993

SIMETRIAS LOCALES EN ESPACIOS CURVOS

ROBERTO MARTINEZ[1]
DAVID BERENSTEIN[2]
JAIRO ALEXIS RODRIGUEZ [2]

Departamento de Física
Universidad Nacional de Colombia
Santafé de Bogotá
1 Profesor Asistente, 2 Estudiantes de la carrera de Física

RESUMEN.

En este artículo estudiamos las posibles simetrías locales en una variedad arbitraria y mostramos las propiedades del álgebra local. Luego hacemos algunos comentarios sobre el problema de fijar el gauge.

ABSTRACT.

In this paper we study local symmetries in an arbitrary manifold and we show the properties of the local algebra. We further make some comments on the problem of gauge fixing.

Introducción.

El problema de traspasar la teoría de campos relativista a un espacio tiempo general es un problema muy interesante desde el punto de vista físico. En general se espera que la curvatura del espacio tiempo juegue un papel muy importante en las propiedades físicas del sistema [1], y que modifique parámetros como las masas de las partículas. El sistema geometría + campos es en general muy complicado y por esta razón en esta vamos a explorar las posibilidades de formular una teoría general de campos interactuantes en una variedad general, donde se parte de un principio de simetría general para obtener un conjunto de Lagrangianos posibles que describan la interacción de campos con la gravedad.

Este trabajo es una continuación de nuestro primer trabajo [2], sobre simetrías del espacio-tiempo.

1. Construcción de Lagrangianas para una variedad.

Es muy conocido que los campos bosónicos siempre se pueden expresar como tensores en el espacio-tiempo plano, su transición al espacio-tiempo curvo es en general fácil de lograr; basta reemplazar las derivadas por derivadas covariantes [3] y agregar el factor $\sqrt{-g}$, el elemento de volumen en la métrica $g_{\mu\nu}$, a la densidad de Lagrangiana para obtener una teoría aceptable en un espacio tiempo curvo, donde se incluye la invarianza respecto del sistema de coordenadas.

Cuando intentamos incluir fermiones en la teoría el proceso de transición de la teoría plana a la teoría en una variedad arbitraria se complica ya que los campos de espín semientero no están en una representación que se acomode a tensores del espacio-tiempo de Minkowsky [4], y por lo tanto es necesario desarrollar una teoría más general de acoplamientos de campos con la gravedad.

Para esta construcción recurrimos al principio de equivalencia de Einstein, que implica que las variedades físicamente aceptables deben poseer en cada punto un sistema de coordenadas local que en vecindades pequeñas es isomorfo al espacio de Minkowsky. Para determinar uno de tales sistemas coordenados entonces es necesario indicar las cuatro direcciones correspondientes a los cuatro ejes coordenados (una base del espacio), estas direcciones se indican con cuatro 1-formas [5] de la variedad definidos en cada uno de los puntos

$$e^a = e^a_\mu dx^\mu, \tag{1.1}$$

el cual es un conjunto de cuatro vectores llamados la tétrada o vierbein. Adicionalmente está definido un producto interno entre los vectores (o las 1-formas), que es dado por la métrica $\eta^{ab} = \eta_{ab} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$, y por lo tanto

$$< e^a, e^b >= \eta^{ab} \tag{1.2}$$

Los tensores cartesianos del espacio de Minkowsky son tensores respecto del grupo $SO(3,1)$, cuando no realizamos traslaciones, y por lo tanto esta simetría debe convertirse en una simetría local de la variedad , ya que en principio no hay nada que relacione los sistemas coordenados en dos puntos distintos. La simetría del espacio respecto de traslaciones también debe ser local por la misma razón; y esta simetría se manifiesta a partir de la invarianza respecto a sistemas coordenados.

En estos sistemas locales están definidos los espinores, estos están relacionados con las representaciones irreducibles de espín semientero respecto del grupo local $SO(3,1)$ [4], y por lo tanto sus componentes son escalares respecto de la variedad. Las derivadas covariantes espaciales que se esperarían se convierten en derivadas covariantes respecto del grupo local, esto es

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - i w_\mu \tag{1.3}$$

donde w_μ es la conexión del grupo, una 1-forma y está en la representación adjunta del grupo local. Como grupo genérico podemos escoger $SO(3,1) \otimes G$ donde G es un grupo compacto, y corresponde a los grados de libertad gauge de teorías en el espacio plano (esta no es la única forma de realización de simetrías posibles [6], pero se elige por su parecído con el modelo estándar de las partículas elementales, donde la simetría local no se mezcla con la simetría del espacio de Minkowsky). Descomponemos la conexión de la siguiente forma

$$w_\mu = w_\mu^{ab}\Sigma^{ab} + A_\mu^i T^i \tag{1.4}$$

donde w_μ^{ab} correponde a la conexión de $SO(3,1)$, y A_μ^i a la conexión del grupo G. Definimos adicionalmente $D_a\phi = e_a^\mu D_\mu\phi$, y la lagrangiana la escribimos siempre en términos de las componentes planas correspondientes. Las matrices γ^a de Dirac se colocan en la base de las e^a. El elemento de volumen unidad se define en el espacio de Minkowsky, esto es $(e_1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4) = 1$, y por lo tanto el elemento de volumen del espacio viene dado por

$$e = \det(e_\mu^a) \tag{1.4}$$

que es el determinante del vierbein. Ahora se puede escribir una Lagrangiana apropiada multiplicando por "e" la Lagrangiana del espacio plano y reemplazando las derivadas por derivadas covariantes respecto del grupo.

Falta ahora escribir la parte de la Lagrangiana que corresponde a los campos e y a los campos w; de tal forma que se respete el principio de invarianza respecto del grupo local, esto es, debemos construir escalares a partir de e y w que sean escalares respecto del grupo. En general, para las conexiones w, el único tensor que podemos formar, tal que sólo tenga derivadas de primer orden, y tal que estas aparezcan linealmente [7], es el tensor de curvatura

$$dw + w \wedge w \tag{1.5}$$

que también está en la representación adjunta del grupo. Dividimos las dos partes de la curvatura (la que corresponde a $SO(3,1)$, y la que corresponde al grupo compacto), y las llamamos respectivamente R y F. La estructura de índices es la siguiente

$$R = \tfrac{1}{4}dx^\mu dx^\nu R_{\mu\nu}{}^{ab}\Sigma_{ab}$$

$$F = \tfrac{1}{2}dx^\mu dx^\nu F_{\mu\nu c}T^c \tag{1.6}$$

donde Σ_{ab} son los generadores del grupo de Lorentz, y T^c son los generadores del álgebra de Lie de G.

Para la parte del grupo G escogemos la lagrangiana de Yang-Mills, suponiendo que a bajas energías, en procesos donde no incluimos la gravitación, es una teoría correcta, por ejemplo la del modelo estándar de partículas, y por lo menos a primer orden tenemos una lagrangiana apropiada; nuevamente agregamos el factor e para obtener una densidad de lagrangiana de la variedad; adicionalmente, en $F_{\mu\nu}$ solamente aparecen derivadas de los campos de Yang-Mills, y no aparece la conexión correspondiente a

$SO(3,1)$, por lo que los campos de Yang-Mills sólo actuan directamente con e y con los campos de materia, a este orden en la Lagrangiana.

Sabemos que en la teoría de Einstein sobre la gravedad, la acción sólo depende de e_a, ya que los símbolos de Cristoffel se calculan directamente a partir de $g_{\mu\nu}$ [3], y por lo tanto los campos w_μ correspondientes a $SO(3,1)$ deben ser auxiliares, esto es, su ecuación de movimiento es algebraica y los podemos eliminar de alguna forma de la teoría; existen dos formas de hacer esta sustitución, elegir que no haya torsión en la variedad, es decir que la derivada covariante de las 1-formas correspondientes al vierbein se anulen, o bien reemplazar las w_μ por la solución de su ecuación movimiento con algunas o ninguna restricción. Estas dos formas de resolver el problema son equivalentes salvo la adición de un tensor en la representación adjunta de $SO(3,1)$, y esto es lo mismo que una redefinición del acoplamiento mínimo, la elección en cada caso dependa de la facilidad con que se quieran realizar los cálculos correspondientes. Como acción para el campo de las w, con o sin restricciones, tomamos el escalar de Ricci, que se obtiene contrayendo el tensor de curvatura correspondiente de la siguiente forma

$$\mathcal{R} = R_{\mu\nu}{}^{ab} e_a^\mu e_b^\nu \tag{1.7}$$

y no incluimos términos adicionales para las e. Al plantear el problema de mínima acción, obtenemos las ecuaciones de movimiento para los campos e, que coincide con la ecuación de Einstein, y para los campos de materia corresponden a una versión en un espacio curvo de sus ecuaciones de movimiento en el espacio plano.

En una teoría general, podemos entonces asumir una lagrangiana de la forma

$$\mathcal{L} = e\mathcal{R} + e\tfrac{1}{4}\mathrm{tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) + e\mathcal{L}_0(D_a\phi, \phi) + e\mathcal{L}_2 \tag{1.8}$$

donde $\mathcal{L}_0(D_a\phi, \phi)$ es la densidad lagrangiana del espacio plano expresado en términos de derivadas covariantes, y $\mathcal{L}_2$ incluye términos de orden superior, que contiene las interacciones no mínimas de la gravedad y los campos de Yang-Mills con los campos de materia.

2. Términos adicionales en la Lagrangiana.

En esta sección queremos mostrar que términos adicionales pueden respetar las invarianzas exigidas en la teoría que estamos proponiendo, y que términos se pueden excluir. Los primeros términos que podemos excluir son términos donde los campos w correspondientes a alguno de los grupos, no aparezcan como parte del tensor de curvatura correspondiente o como parte de una derivada covariante, como estos campos transforman no homogéneamente respecto al grupo interno, y adicionarían un término a la lagrangiana, dañando la invarianza gauge (este razonamiento excluiría términos de masa para los bosones gauge, pero estos se pueden obtener con rompimiento espontáneo de la simetría).

Todo término adicional de la Lagrangiana debe ser un singlete del grupo completo de simetría y un escalar de la variedad; adicionalmente exigimos que no tenga derivadas de orden superior al primero en los campos de materia, ya que habría muchos problemas para definir una teorí]a cuántica correcta Son especialmente interesantes términos de la forma [1]

$$\mathcal{R}s + t \cdot F_{\mu\nu}\Sigma^{ab}e^{\mu}_{a}e^{\nu}_{b} \cdot u \tag{2.1}$$

donde s es un escalar del grupo, y t, u son polinomios en alguna representación no trivial del grupo de Lorentz y tal que el producto definido por "$\cdot$" produzca un escalar del grupo, que corresponden a interacciones no mínimas entre la gravedad y los campos de Yang-Mills con los campos de materia; los primeros son correciones gravitatorias a las ecuaciones de movimiento en el espacio plano (por ejemplo en un espacio de curvatura constante tendríamos correcciones a la masa y las constantes de interacción fundamentales), y los segundos son términos no renormalizables (como el momento magnético anómalo, cuando se incluye directamente en la Lagrangiana), y por lo tanto se descartan a primer orden.

Estos términos adicionales son lo que se conoce como acoplamiento no mínimo, y producen términos de intaracción adicionales a los que se obtienen de reemplazar las derivadas por derivadas covariantes.

Adicionalmente, se puede incluir un término de constante cosmológica, que pueda cancelar términos similares de otras partes de la lagrangiana para obtener una constante cosmológica efectiva nula.

3. Las simetrías de la teoría.

Cuando se hacen transformaciones infinitesimales de coordenadas, los escalares transforman de la siguiente forma $\phi'(x') = \phi(x)$, por lo que se puede ver que una transformación infinitesimal de coordenadas produce el siguiente cambio en un escalar

$$\delta\phi(x) = -a^{\mu}\partial_{\mu}\phi(x) \tag{3.1}$$

donde a^{μ} es el parámetro infinitesimal local de la transformación de coordenadas. No es claro que (3.1) sea covariante respecto del grupo de Lie interno, por lo que hacemos la siguiente modificación

$$\delta\phi(x) = -a^{\mu}D_{\mu}\phi(x) - ia^{\mu}(w_{\mu}\phi(x)) \tag{3.2}$$

y consideramos adicionalmente el término de transformaciones locales en el grupo interno de la siguiente forma [8]

$$\delta\phi(x) = -a^{\mu}D_{\mu}\phi(x) - ia^{\mu}(w_{\mu}\phi(x)) + i(b \cdot T)\phi(x) \tag{3.3}$$

donde T son los generadores del grupo de simetrías interno, actuado sobre los ϕ en la representación del álgebra correspondiente. Adicionalmente, vemos que al ser w_{μ} una 1-forma en la representación adjunta del grupo, entonces los dos últimos términos se combinan en (3.3) para dar un sólo término de transformación respecto del grupo interno. Esto es

$$\delta\phi = -a^\mu D_\mu \phi(x) + i(b' \cdot T)\phi(x) \tag{3.4}$$

Claramente se reconoce en (3.4) la covarianza respecto del grupo interno de transformaciones, esto es, $\delta\phi$ transforma de la misma forma que ϕ bajo transformaciones del grupo interno. Nos falta garantizar ahora la clausura del álgebra respecto a este tipo de transformaciones, ya que en general vimos que b depende de las conexiones del grupo. Los generadores van a ser T, y D_μ, multiplicados por parámetros que dependen de la posición. Los conmutadores que debemos calcular son

$$[ib \cdot T, ib' \cdot T]\phi = -b^i b'^j [T^i, T_j]\phi = -ib^i b^j f^{ijk} T^k \phi \tag{3.5}$$

debido al álgebra de Lie de los generadores del grupo G y

$$[a^\mu D_\mu, ib \cdot T]\phi = i(a^\mu(\partial_\mu b)T + ia^\mu A^i_\mu b^j f^{ijk} T^k)\phi = ia^\mu (D_\mu b) \cdot T \tag{3.6}$$

donde se reconoce la derivada covariante de la representación adjunta para el término b en (3.6). Por último, es necesario calcular el siguiente conmutador

$$[a^\mu D_\mu, a'^\nu D_\nu]$$

para obtener, después de un poco de álgebra

$$[a^\mu D_\mu, a'^\nu D_\nu] = a^\mu (D_\mu a'^\nu) D_\mu - a'^\nu (D_\nu a^\mu) D_\mu + a^\mu a^\nu [D_\mu, D_\nu] \tag{3.7}$$

pero se puede ver fácilmente que el conmutador de las derivadas covariantes es el tensor de curvatura del grupo interno, por lo que la transformación final es de la forma

$$[a^\mu D_\mu, a'^\nu D_\nu] = a^\mu (D_\mu a'^\nu) D_\mu - a'^\nu (D_\nu a^\mu) D_\mu + a^\mu a'^\nu R_{\mu\nu} \tag{3.7'}$$

y al ser $R_{\mu\nu}$ un tensor en la representación adjunta del grupo, entonces tiene la forma de $b \cdot T$; y hemos verificado la clausura del álgebra, esto es, todos los conmutadores son proporcionales a combinaciones lineales de los generadores. Es interesante, además, ver que en (3.5)-(3.7) las constantes de estructura del grupo dependen de la posición, por lo que se ve que el grupo de transformaciones que podríamos generar es infinito-dimensional; y los espacios de representación del grupo son espacios de funciones en la variedad.

Otra forma de ver las ecuaciones (3.5)-(3.7), es que nos indican la forma como transforman los objetos D, T bajo transformaciones generales del grupo, y por lo tanto nos dicen implícitamente como deben tansformarse las conexiones, para mantener la invarianza respecto del grupo de transformaciones.

4. El problema de fijar el gauge.

Nuestro propósito es ahora fijar el gauge de forma covariante (de la misma forma en todos los sistemas), como queremos cuantizar la teoría posteriormente, el número de grados de libertad es redundante.

Claramente el conjunto de transformaciones (3.4) no preserva el gauge escogido, por lo que el conjunto de transformaciones generales debe restringirse, esto es, los parámetros no pueden ser todos independientes. Como exigimos siempre la invarianza bajo transformaciones generales de coordenadas, entonces en principio los únicos parámetros que no pueden ser restringidos son los que llamamos a. Todos los demás deben quedar expresados en términos de estos, y posiblemente otros parámetros independientes.

Debemos fijar el gauge en dos partes. Primero en el grupo gauge, y luego en el grupo de Lorentz. Para las conexiones, tenemos la descomposición en ambos grupos. Tomemos primero $A_a = e^{\mu}_{a} A_{\mu}$, entonces tenemos las siguientes posibilidades, que pueden ser covariantes respecto del espacio-tiempo:

$$\eta^{ab} D_b A^i_a = 0 \text{(Gauge de Lorentz)}$$

$$t^a A^i_a = 0 \text{(Gauge Axial)}$$

$$\beta^{ab} D_b A^i_a = 0 \text{(Generalización del gauge de Lorentz)} \tag{4.1}$$

con β^{ab} un tensor simétrico, para mayor facilidad. La elección de cualquiera de estos gauges, hace que podamos mantener una invarianza global de transformaciones del grupo interno, (con parámetro constante en toda la variedad), que puede luego servirnos para mostrar algunas cancelaciones o propiedades de la teoría.

Para la parte correspondiente al grupo de Lorentz, no podemos usar ninguna de estas formas de fijar el gauge, ya que los índices del grupo se pueden convertir en índices de la variedad y viceversa. Resulta más conveniente fijar el gauge de alguna de las siguiente formas:

a) Usar el gauge de tiempo de Schwinger [9], donde se escoge e^0 de tal forma que sea proporcional a dx^0, y faltaría fijar el gauge de las rotaciones adicionales, ya que sólo hemos fijado la dirección temporal del vierbein.

b) Escoger un gauge simétrico $e_{\mu a} = e_{a\mu}$, y términos adicionales para fijar los grados de libertad restantes [10].

Las ventajas de cada uno de los métodos depende del problema que se está considerando. En cualquiera de estos casos se puede ver que los parámetros b dependen de las transformaciones de coordenadas, y nos queda un principio de invarianza restringida.

6. Conclusiones.

En el trabajo empezamos construyendo una teoría general de interacciones en una variedad curva y mostramos como se debe modificar una lagrangiana para obtener el acoplamiento mínimo con la gravedad. Adicionalmente vimos que se podían eliminar algunos grados de libertad de la teoría al calcular $w(e)$ y como introducir acoplamientos no mínimos que pueden ser interesantes. Mostramos explícitamente como se desarrolla el álgebra de Lie local correspondiente a las transformaciones de un grupo de gauge y de transformaciones generales de coordenadas y demostramos que el álgebra es cerrada bajo estas operaciones. Finalmente se dieron las bases para calcular los parámetros de transformación del grupo interno de simetrías en función de los parámetros de una transformación general de coordenadas de tal forma que se preserve un gauge escogido anteriormente.

REFERENCIAS

[1] N. Birrel, P. Davies, *Quantum fields in curved space*, Cambridge University Press, London, 1982.

[2] D. Berenstein, R. Martínez, J. A. Rodriguez, *Simetrías del espacio tiempo*, Revista Momento Oct (1991).

[3] C. Misner, k. Thorne, J. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman & co., New York, 1973.

[4] P. Ramond, *Field Theory: a Modern Primer, 2nd Ed*, Addison-Wesley publ. Co., New York, 1989.

[5] T. Regge, *The Group Manifold aproach to Unified Gravity*, CERN preprint TH.3772 (1983).

[6] P. van Nieuwenhuizen, *Supergravity*, Phys. Rep. 101, 4 (1981).

[7] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1983.

[8] P. Howe, *Supergravity in Superspace*, CERN preprint TH.3117 (1981).

[9] J. Schwinger, *Quantized Gravitational Field*, Phys Rev **130,3** (1963), 1253.

[10] P. van Nieuwenhuizen, *Anomalies in Quantum Field Theory*, Leuven University Press, Leuven, 1989.