UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE MINAS

ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE INGENIERÍA

PROBLEMAS DE MECÁNICA DE MATERIALES

ASIGNADOS EN EXÁMENES PARCIALES Y DE HABILITACIÓN

ÁLVARO GAVIRIA ORTIZ

PROFESOR ASOCIADO UNIVERSIDAD NACIONAL

PROFESOR TITULAR UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

OCTUBRE 2004

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Los textos de Mecánica de Materiales o de Sólidos, como se denomina hoy a lo que en el pasado se llamaba Resistencia de Materiales, se caracterizan por proponer a los profesores y estudiantes de la asignatura centenares de ejercicios y problemas que pueden solucionarse con el uso de las diversas teorías desarrolladas en el libro; muchos de esos problemas los debe resolver el estudiante al estudiar la materia, hacer tareas o prepararse para los exámenes parciales, buscando ganar experiencia en el uso de los conceptos y simplificaciones de carácter práctico que la asignatura suministra, y ojalá para dominarlos puesto que la Mecánica de Sólidos es la columna vertebral del Área de Estructuras de la Ingeniería Civil.

El presente escrito no pretende competir con la copiosa bibliografía actual. Se trata, simplemente, de recoger en un documento, debidamente organizados, los problemas que han sido asignados en los exámenes parciales o de habilitación que he realizado desde el segundo semestre académico de 1969, cuando me vinculé por primera vez al curso de Resistencia de Materiales en la Facultad de Minas de la Universidad Nacional, sede de Medellín, hasta la fecha.

Como parte de la reforma curricular adelantada por el Rector Antanas Mockus en la Universidad, los cursos existentes de Resistencia de Materiales I y II se unificaron con el de Estática, para dar lugar al curso actual, y la mayor parte de lo relacionado con las definiciones de tensión y deformación, relaciones lineales entre las mismas, rosètas y círculos de Mohr se llevaron al curso de Mecánica de los Medios Continuos, asignatura que precede a la de Resistencia de Materiales y que incluye, además de los sólidos, temas relacionadas con los fluidos, el calor, la electricidad y el magnetismo; por otro lado, los temas relacionados con el uso de los teoremas de la conservación de la energía, método del trabajo virtual, teoremas de Castigliano, integrales de Mohr, el teorema de los tres momentos y el método de la viga conjugada se desplazaron al curso de Análisis Estructural I o se suprimieron de los programas.

Los problemas consignados fueron inventados por mí, algunos, o tomados y adaptados de la bibliografía disponible, con la característica de haber sido asignados en un examen, lo que da una idea de la exigencia relativa que demandan y el tiempo en el que pueden resolverse por una persona que haya estudiado el tema respectivo. Al difundirlos, deseo ofrecerles una ayuda a los estudiantes matriculados en el curso cuando se preparan para los parciales, que se desesperan y tensionan tratando de resolver problemas demasiado difíciles o de extensa solución, que encuentran en los textos, más apropiados para trabajarlos en casa como tarea, y buscando temarios de exámenes antiguos. Sin que por ayuda se entienda que los mismos problemas volverán, necesariamente, a asignarse en el futuro.

En los enunciados no se incluyen las figuras respectivas, pero se da la información necesaria para que el estudiante las elabore. Hacer la figura es el primer paso para la solución de un problema de Mecánica de Materiales, puesto que ello exige interpretar adecuadamente la información; cuando el enunciado la incluye, paternalistamente, se facilita la solución, claro, pero se le restringe al estudiante el uso de su imaginación y el desarrollo de la habilidad para hacer planos y dibujos, con perspectiva gráfica, apropiados para transmitir información técnica.

Álvaro Gaviria Ortiz
Profesor Asociado Universidad Nacional de Colombia
Profesor Titular Universidad de Antioquia
Octubre de 2004

LISTA DE SÍMBOLOS

La siguiente lista de símbolos se refiere a las magnitudes más empleadas en la Mecánica de Materiales

Alfabeto latino

$\vec{A}$	Vector área
A	Área de una superficie
A_r	Área reducida
$\langle A \rangle$	Área encerrada por la línea media
$\vec{a}$	Aceleración
a, b, c	Longitudes, lados o radios
B	Módulo de compresibilidad
C	Centro de curvatura o constante de flexibilidad
C_c	Constante de columna
d	Diámetro de una circunferencia o de una esfera
E	Módulo de Young
E_s	Módulo de Young secante
E_t	Módulo de Young tangente
e	Base de los logaritmos naturales o deformación volumétrica
e_i	Excentricidad de una fuerza a lo largo del eje I
$\vec{F}$	Fuerza
f	Frecuencia
G	Módulo de cizalladura o módulo de rigidez
g	Aceleración de la gravedad
h	Altura de una sección recta
I_i	Segundo momento del área plana, o momento de inercia, con respecto al eje I
I_O	Segundo momento del área plana, o momento polar de inercia, con respecto al punto O
I_e	Momento polar de inercia equivalente
I_{ij}	Producto de inercia del área plana con respecto a los ejes I y J
$\vec{i}_i$	Versor en el sentido positivo del eje I
j	Cantidad imaginaria
K	Constante de rigidez, constante de resorte o factor de concentración de tensiones
l	Longitud, luz de una viga o contorno de una línea
l_e	Longitud efectiva de una columna
$\vec{M}$	Momento de una fuerza con respecto a un punto o de un par, o momento flector interno
M_i	Componente en dirección del eje I del momento de una fuerza o del par, o del momento flector interno
m	Masa
N	Número de ciclos o de elementos, o fuerza normal a una superficie
n	Razón entre los módulos de elasticidad o factor de seguridad
$\vec{P}$	Fuerza axial interna
P	Magnitud de la fuerza axial interna o potencia
p	Presión sobre una membrana o intensidad de la fuerza distribuida por unidad de longitud
Q_i	Primer momento de un área plana con respecto al eje I
q	Flujo de cortante
R	Radio de circunferencia o esfera, o distancia desde el centro de curvatura al eje neutro en viga curva
$\vec{r}$	Vector posición
r	Primera coordenada cilíndrica o distancia desde el centro de curvatura a la fibra arbitraria en viga curva
r_c	Distancia desde el centro de curvatura a la fibra centroidal en viga de eje curvo
r_i	Radio de giro con respecto al eje I
r_m	Radio de curvatura meridional en membranas

r_p	Radio de curvatura paralelo en membranas
S	Superficie o módulo elástico de la sección
s	Longitud de un arco de curva
$\vec{T}$	Momento torsor interno
T	Magnitud del momento torsor interno, período o temperatura
$\vec{t}$	Intensidad del momento torsor distribuido por unidad de longitud
t	Magnitud de la intensidad del momento torsor distribuido por unidad de longitud, tiempo o espesor
U	Energía de deformación
u	Densidad de energía o movimiento de un punto en dirección del eje X
$\vec{V}$	Fuerza cortante interna
V_i	Componente en dirección del eje I de la fuerza cortante interna
V	Volumen
v	Desplazamiento vertical de la elástica o movimiento de un punto en dirección del eje Y
W	Trabajo o peso de un objeto
w	Densidad de trabajo, peso específico o movimiento de un punto en dirección del eje Z
X	Primer eje de las coordenadas cartesianas
x	Primera coordenada cartesiana
x_c	Coordenada X del centroide
Y	Segundo eje de las coordenadas cartesianas
y	Segunda coordenada cartesiana
y_c	Coordenada Y del centroide
Z	Tercer eje de las coordenadas cartesianas o módulo plástico de la sección
z	Tercera coordenada cartesiana
z_c	Coordenada Z del centroide

Alfabeto griego

α	Aceleración angular
α	Coeficiente de expansión térmica o ángulo
β	Ángulo
Δ	Incremento de una variable
∇	Operador nabla
δ	Cambio de longitud o desplazamiento
δ_{ij}	Delta de Kroenecker
ε_i	Deformación lineal en dirección del eje I
ϕ	Ángulo
γ_{ij}	Deformación cortante con respecto al plano IJ
φ	Segunda coordenada cilíndrica circular o tercera coordenada esférica
λ	Símbolo que en el pandeo se usa para $(P/EI)^{1/2}$
μ	Módulo o relación de Poisson
π	Pi
θ	Ángulo, pendiente de la línea elástica o segunda coordenada esférica
ρ	Densidad volumétrica de masa o radio de curvatura
Σ	Operador de suma
σ_i	Tensión normal en dirección del eje I
τ_{ij}	Tensión cortante con respecto al plano IJ
$\vec{\omega}$	Velocidad angular
ω	Frecuencia angular

CAPÍTULO 1

ESTÁTICA

1.1 Sistemas mecánicamente equivalentes

1. **Mínimo del momento.** Una placa circular, de radio R, se pone en el plano XY de manera que su centro coincida con el punto A(R, 0), y una fuerza $\vec{F}_0$, cuya línea de acción pasa por el origen de coordenadas y hace un ángulo θ con respecto al eje X, obra sobre un punto arbitrario, B, del borde de la placa. Halle el valor de θ para el cual la magnitud del momento del sistema fuerza par, equivalente a la fuerza anterior, en el punto D(R, $-R$) es mínimo.

2. **Ángulo desconocido.** Una placa circular, de radio R, se pone en el plano XY de manera que su centro coincida con el origen de coordenadas; en los punto A(0, R) y B(R, 0) obran, respectivamente, las fuerzas $\vec{F}_1 = \vec{i}_x F_0$ y $\vec{F}_2 = F_0\left(\vec{i}_x \cos\beta + \vec{i}_y \operatorname{sen}\beta\right)$. Halle el valor de β para el cual la línea de acción de la resultante de las fuerzas dadas es tangente al borde del disco.

3. **Prisma triangular.** La sección recta de una cuña prismática es un triángulo rectángulo y los vértices de ésta son: A(0, 0, 0), B(0, b, c), C(a, b, c), D(a, b, 0), E(0, b, 0) y F(a, 0, 0). A lo largo de la arista AB, y con el sentido de A hacia B, actúa la fuerza $\vec{P}_1$, en la arista DC obra la fuerza $\vec{i}_z P_2$, en la arista AF está aplicada la fuerza $\vec{i}_x Q_1$ y las magnitudes de las fuerzas anteriores son iguales, numéricamente, a las longitudes de las aristas respectivas. Halle la fuerza $\vec{Q}_2$ tal que $\vec{Q}_1$ y $\vec{Q}_2$ sean mecánicamente equivalentes a $\vec{P}_1$ y $\vec{P}_2$.

4. **Cubo de fuerzas.** El origen de coordenadas es uno de los vértices de un cubo, de lado l, tres de las aristas de éste coinciden con los ejes X, Y y Z, y a lo largo de cada una de las doce aristas del mismo actúan sendas fuerzas de magnitudes iguales a F_0. En tres de las aristas paralelas al eje X las fuerzas tiene el sentido opuesto al de éste, y en la otra, la que pasa por el punto (0, 0, l), el sentido es el mismo del eje; en tres de las aristas paralelas al eje Y las fuerzas tiene el mismo sentido de éste, y en la otra, la que pasa por el punto (0, 0, l), el sentido es opuesto al del eje; finalmente, en las cuatro aristas paralelas al eje Z las fuerzas tiene el mismo sentido de éste. Halle el sistema fuerza par equivalente al de las fuerzas enunciadas, en el origen de coordenadas, y el motor del sistema de fuerzas, en fuerza, momento, dirección de su eje y punto de corte con el plano XY.

5. **Cubo de fuerzas.** El origen de coordenadas es uno de los vértices de un cubo, de lado a, tres de las aristas de éste coinciden con los ejes X, Y y Z, y a lo largo de tres de las aristas del mismo actúan sendas fuerzas. En la arista paralela al eje X que pasa por el punto (0, a, 0) obra la fuerza $\vec{i}_x 3P_0$, en la arista paralela al eje Y que pasa por el punto (a, a, 0) obra la fuerza $-\vec{i}_y 2P_0$ y en la arista paralela al eje Z que pasa por el origen obra la fuerza $\vec{i}_z P_0$. Halle el sistema fuerza par equivalente al de las fuerzas enunciadas, en el origen de coordenadas, y el motor del sistema de fuerzas, en fuerza, momento, dirección de su eje y punto de corte con el plano XY.

6. **Barra retorcida.** Una barra retorcida, empotrada en (0, 0, 0), está formada por tres segmentos; el primero se extiende entre los puntos (0, 0, 0) y (0, l, 0); el segundo, entre (0, l, 0) y (l, l, 0); el tercero, entre (l, l, 0) y (l, l, $-l$); y, además, las fuerzas, $-\vec{i}_z F_0$, $\vec{i}_x F_0$ y $\vec{i}_y F_0$, se aplican a la barra, respectivamente, en los puntos (0, l, 0), (l, l, 0) y (l, l, $-l$). Halle las reacciones en el empotramiento de la

barra y, de las fuerzas aplicadas a la misma, el motor, en fuerza, momento, dirección de su eje y punto de corte con el plano XZ.

7. **Paralelepípedo recto sometido a fuerzas.** Tres de las aristas de un paralelepípedo recto coinciden con los ejes X, Y y Z, sus longitudes son, respectivamente, a, b y c, y, además, sobre el cuerpo obran tres fuerzas. La primera, $\vec{i}_x F_0$, actúa a lo largo de la arista que va del punto (0, 0, c) al (a, 0, c); la segunda, $\vec{i}_y F_0$, actúa en la arista que va del punto (0, 0, 0) al (0, b, 0); y la tercera, $\vec{i}_z F_0$, actúa en la arista que va del punto (a, b, 0) al (a, b, c). Halle la relación entre a, b y c para que el sistema de fuerzas tenga resultante única.

1.2 Estructuras planas

1. **Minimáximo.** Un peso W está sostenido del punto C por medio de los cables AC y CB, amarrados del techo; con la horizontal, el cable AC forma un ángulo α y el CB un ángulo de 60°. Halle el valor de α que minimiza la tensión del cable AC y el valor de ese ángulo para el cual la mayor de las tracciones inducidas en los cables AC y CB se hace mínima; en ambos casos calcule las fuerzas en los cables.

2. **Armadura plana de tres barras.** Una armadura triangular está formada por tres barras que tienen articulaciones en sus extremos. Una de las barras se extiende entre los puntos (0, 0) y ($4l$, $3l$); la segunda, entre (0, $3l$) y ($4l$, $3l$); la tercera, entre ($2l$, $1{,}5l$) y ($2l$, $3l$); y, además, a la barra horizontal se aplican la fuerza, $-\vec{i}_y 3F_0$, en el punto (l, $3l$), y la fuerza, $-\vec{i}_y 5F_0$, en el punto ($3l$, $3l$). Si $F = 100$ [N] y $l = 4$ [m], halle las reacciones en los apoyos de la armadura y las fuerzas que obran sobre cada barra.

3. **Armadura plana de cuatro barras.** Una armadura está formada por cuatro barras que tienen articulaciones en sus extremos. Una de las barras se extiende entre los puntos (0, 0) y (0, $3l$); la segunda, entre ($1{,}5l$, 0) y ($1{,}5l$, $2l$); la tercera, entre (0, l) y ($1{,}5l$, l); la cuarta, entre (0, $3l$) y ($1{,}5l$, $2l$); y, además, la fuerza, $\vec{i}_x F_0$, se aplica en el punto (0, $3l$) a una barra vertical. Si $F_0 = 1.000$ [N] y $l = 1$ [m], halle las reacciones en los apoyos de la armadura y las fuerzas que obran sobre cada barra.

4. **Armadura plana de cuatro barras.** Una armadura plana, articulada a una pared vertical en los puntos (0, 0) y (0, l), está formada por cuatro barras articuladas en sus extremos. La primera barra se extiende entre los puntos (0, 0) y ($2l$, 0); la segunda, entre (0, 0) y (l, l); la tercera, entre (0, l) y (l, l); la cuarta, entre (l, l) y ($2l$, 0); y, además, la fuerza, $-\vec{i}_y F_0$, se aplica a la armadura en el punto ($2l$, 0). Si $F_0 = 100.000$ [N] y $l = 2$ [m], halle las reacciones en los apoyos de la armadura y las fuerzas que obran sobre cada barra.

5. **Armadura plana de cinco barras.** Una armadura plana, articulada a una pared vertical en los puntos (0, 0) y (0, $3l$), está formada por cinco barras articuladas en sus extremos. La primera barra se extiende entre los puntos (0, 0) y ($4l$, 0); la segunda, entre ($4l$, 0) y ($8l$, 0); la tercera, entre (0, $3l$) y ($4l$, 0); la cuarta, entre (0, $3l$) y ($4l$, $3l$); la quinta, entre ($4l$, $3l$) y ($8l$, 0); y, además, la fuerza, $-\vec{i}_y F_0$, se aplica a la armadura en el punto ($1{,}5l$, $3l$). Si $F_0 = 8.000$ [N] y $l = 2$ [m], halle las reacciones en los apoyos de la armadura y las fuerzas que obran sobre cada barra.

6. **Armadura plana de seis barras.** Una armadura plana, articulada a una pared vertical en los puntos (0, 0) y (0, l), está formada por seis barras articuladas en sus extremos. La primera barra se extiende entre los puntos (0, 0) y ($1{,}5l$, 0); la segunda, entre ($1{,}5l$, 0) y ($3l$, 0); la tercera, entre (0, 0) y ($1.5l$, l); la cuarta, entre ($1{,}5l$, 0) y ($1{,}5l$, l); la quinta, entre (0, l) y ($1{,}5l$, l); la sexta, entre ($1{,}5l$, l) y ($3l$,

0); y, además, sendas fuerzas, $-\vec{i}_y F_0$, se aplican a la armadura en los puntos (1,5l, 0) y (3l, 0). Halle las reacciones en los apoyos de la armadura y las fuerzas que obran sobre cada barra.

7. **Armadura plana de siete barras.** Una armadura plana, apoyada en los puntos (0, 0), donde hay una articulación, y (0, 2l), donde el apoyo es de bola, está formada por siete barras iguales, de longitud l y articuladas en sus extremos, que definen tres triángulos equiláteros. Los nodos de la armadura son (0, 0), (l, 0), (2l, 0), (0,5l, 0,87l) y (1,5l, 0,87l); y, además, sendas fuerzas, $-\vec{i}_y F_0$, se aplican a la armadura en los puntos (0,5l, 0,87l) y (1,5l, 0,87l). Halle las reacciones en los apoyos de la armadura y las fuerzas que obran sobre cada barra.

8. **Armadura plana de nueve barras.** Una armadura plana, apoyada en los puntos (0, 0), donde hay una articulación, y (0, 3), donde el apoyo es de bola, está formada por nueve barras articuladas en sus extremos. La primera barra se extiende entre los puntos (0, 0) y (0, 3); la segunda, entre (0, 0) y (3, 3); la tercera, entre (0, 0) y (3, 6); la cuarta, entre (0, 0) y (0, 6); la quinta, entre (3, 0) y (3, 3); la sexta, entre (3, 3) y (3, 6); la séptima, entre (0, 6) y (3, 6); la octava, entre (3, 6) y (11, 6); la novena, entre (3, 3) y (11, 6); y, además, la fuerza, $-\vec{i}_y 500$, se aplica a la armadura en el punto (11, 6). Halle las reacciones en los apoyos de la armadura y las fuerzas que obran sobre cada barra.

9. **Armazón plana de cuatro barras.** Dos barras verticales, de longitudes iguales a 5l, están libres en sus extremos superiores y articuladas, respectivamente, a los puntos (0, 0) y (l, 0); otras dos barras, que forman una X, están articuladas a las anteriores en los puntos (0, 2l) y (l, 3l), la primera, y (0, 3l) y (l, 2l), la segunda; y, además, la fuerza, $\vec{i}_x F_0$, se aplica a una barra vertical en el punto (0, 5l). Si $F_0 = 500$ [N] y $l = 1$ [m], halle las reacciones en los apoyos del armazón y las fuerzas que obran sobre cada barra.

1.3 Estructuras tridimensionales

1. **Lámpara colgada del techo.** Una lámpara, de peso W, cuelga del techo, del que dista la distancia h, sostenida por cuatro cables iguales amarrados a sendos puntos del techo en el que forman un cuadrado, de lado $h/3$. Halle la fuerza de tracción en cada cable.

2. **Barra oblicua apoyada en la pared.** La barra ACB, de sección recta uniforme y peso W, dirigido en el sentido negativo del eje Y, se apoya en su extremo A(0, 24, 18), mediante un soporte de bolita, en el plano YZ, y en el extremo B(40, 0, 0) tiene una articulación. Además, la barra está sostenida desde su punto medio, C, del cable DC, el cual se amarra al punto D(0, 24, 0). Halle la fuerza que obra sobre el cable y las reacciones en los apoyos A y B.

3. **Tetraedro de barras.** 6 barras, de longitudes iguales a l y articuladas en sus extremos, forman un tetraedro regular, de base horizontal, apoyado en sus tres nodos en un piso sin fricción. Si en el vértice superior de la estructura se aplica una fuerza $-\vec{i}W$, halle la fuerza interna que obra en cada barra.

4. **Pirámide de base cuadrada.** Con 8 barras de longitudes iguales a l y articuladas en sus extremos se forma una pirámide de base cuadrada, apoyada en el suelo en sendos apoyos de bolita ubicados en los vértices de la base. Si en el vértice superior de la pirámide se aplica una fuerza vertical dirigida hacia abajo, W, halle las fuerzas internas en todas las barras.

5. **Poste vertical.** Un poste ABCD, de longitud $l = 16$ [m], está sostenido en su base A por una cuenca de bolita y por los cables ECF y FBG, que pasan por poleas sin fricción colocadas en los puntos C y B del poste; además, una fuerza, $\vec{P} = -\vec{i}9.000$ [N], se aplica en el extremo D del poste. Si las coorde-

nadas de los puntos mencionadas, en metros, son A(0, 0, 0), B(0, 4, 0), C(0, 12, 0), D(0, 16, 0), E(−12, 0, 0), F(0, 0, 12) y G(4, 0 ,0), y se supone sin peso al poste, halle las reacciones en A y las tracciones en los cables.

6. **Barra que carga un peso.** Una barra ACB, recta y homogénea, tiene un peso propio $\vec{W} = -\vec{i}_y W_0$ y sostiene una fuerza $\vec{F} = -\vec{i}_y 10 W_0$ en el punto B(−12*l*, 0, 0); la barra está apoyada en una rótula en el punto A(0, 0, 0), y sostenida, del punto C(−6*l*, 0,0), mediante sendos cables CD y CE, donde E(0, 0, 3*l*) y D(0, 5*l*, −10*l*). Halle las fuerzas que se desarrollan en los cables CD y CE, y en la rótula A.

7. **Poste inclinado.** Un poste inclinado, AB, de longitud 7, se apoya en una cuenca en el punto A(0, −3, 2) y tiene su extremo B(6, 0, 0) sostenido de los puntos C y D, amarrados a una pared, por los cables BC y BD, donde C(0, 6, 3) y D(0, 6, −3); en el punto B obra una fuerza $\vec{F} = -\vec{i}_y F_0$. Si las longitudes están en metros, las fuerzas en newton y el poste se supone sin peso, halle las fuerzas en los cables y la reacción en A cuando $F_0 = 90.000$ [N]; si en B obra, además, la fuerza $\vec{F}_1 = \vec{i}_z F_1$, halle la reacción en A y el valor de F_1 para que las fuerzas en los cables sean iguales.

CAPÍTULO 2

PROPIEDADES DEL ÁREA PLANA

2.1 Demostraciones

1. **Demostración.** Si I_x, I_y e I_{xy} son los momentos y el producto de inercia de un área plana con respecto a los ejes XY, de origen en O, demuestre que las cantidades $\left(I_x + I_y\right)$ e $\left(I_x I_y - I_{xy}^2\right)$ son invariantes en sistemas de ejes $X'Y'$, rotados, que tenga el mismo origen O.

2. **Demostración en una construcción.** Sean I_x, I_y e I_{xy} los momentos y el producto de inercia de un área plana con respecto a los ejes XY, de origen en O; en la dirección de Oy se marcan los segmentos OA y AB, con $\text{OA} = I_x$ y $\text{AB} = I_y$, y en la de Ox el segmento AC, tal que $\text{AC} = I_{xy}$, y se trazan la circunferencia OB, cuyo centro es el punto M, y el diámetro DE, que pasa por C. Demuestre que los segmentos OD y OE señalan las direcciones principales de inercia del área plana en O, y que los segmentos CE y CD son iguales a sus momentos principales de inercia.

2.2 Áreas individuales

1. **Inercias máxima y mínima.** De los momentos y el producto de inercia de un área plana, con respecto a los ejes XY, se sabe que: $I_x = 48 \times 10^{-8}$ [m^4], $I_y = 32 \times 10^{-8}$ [m^4] y $I_{xy} > 0$. Si el valor mínimo del momento de inercia del área con respecto a cualquier eje que pasa por el origen de coordenadas es $I_{min} = 30 \times 10^{-8}$ [m^4], halle el momento de inercia máximo del área y las orientaciones con respecto a los ejes de coordenadas de sus ejes principales de inercia.

2. **Rectángulo.** Los ejes XY coinciden con los bordes de un rectángulo, de lados a y b. Halle, por cálculo directo, el área y el centroide del rectángulo, I_x, I_y e I_{xy} del mismo en ejes centroidales, y los momentos y direcciones principales de inercia en el centroide.

3. **Triángulo rectángulo.** Los catetos de un triángulo rectángulo miden $3a$ y $4a$. Halle, por integración directa, el área y el centroide del rectángulo, I_x, I_y e I_{xy} del mismo en ejes centroidales, los momentos y direcciones principales de inercia en el centroide, y el momento polar de inercia en el centro de la hipotenusa.

4. **Triángulo.** Con respecto a ejes XY, los vértices de un triángulo son los puntos $(0, 0)$, $(b, 0)$ y (a, h). Halle, por integración directa, el área y el centroide del rectángulo, I_x, I_y e I_{xy} del mismo en ejes centroidales, y los momentos y direcciones principales de inercia en el centroide.

5. **Círculo.** Los ejes XY coinciden con dos de los diámetros de un circulo, de radio R. Halle, por cálculo directo, el área, I_x e I_y del círculo, así como los momentos y el producto de inercia con respecto a dos ejes mutuamente perpendiculares y tangentes al círculo.

6. **Cuadrante de círculo.** Un área plana está limitada por el eje Y, por el eje X y por una circunferencia de centro en el origen de coordenadas, de radio R. Halle el área y el centroide de la región descrita, I_x, I_y e I_{xy} con respecto a los ejes de coordenadas y a los ejes centroidales paralelos a los anteriores, y los momentos y direcciones principales de inercia en el centroide.

7. **Semicírculo.** Un área plana está limitada por el eje X y por una semicircunferencia de centro en el punto $(R, 0)$, radio R y curvatura negativa. Halle el área y el centroide de la región descrita, I_x, I_y e I_{xy} con respecto a los ejes

de coordenadas y a los ejes centroidales paralelos a los anteriores, y los momentos y direcciones principales de inercia en el centroide.

8. **Lámina semicircular.** Una lámina delgada, con la forma de un semicírculo de radio R y diámetro BC, tiene un peso W, uniformemente repartido en su área, y cuelga verticalmente, sostenida mediante un pasador que conecta el punto B del diámetro a una articulación, y con un cable amarrado al punto C de la lámina y a un punto O del techo, en el cual se ubica el origen de coordenadas; los puntos O y B están en la misma horizontal, definen el eje X, y el triángulo OBC es isósceles y rectángulo en C. Halle el centroide de la lámina, I_x, I_y e I_x, con respecto a los ejes XY, y, además, la tensión en el cable, T, la reacción en la articulación, F, y el ángulo, α, que F hace con el eje X.

9. **Área bajo una parábola.** Un área plana está limitada por el eje Y, por una recta paralela al eje X, que pasa por el punto (0, a), y por una parábola de vértice en el origen de coordenadas, curvatura positiva y que se extiende en el primer cuadrante hasta el punto (2a, a). Halle el área y el centroide de la región descrita, I_x, I_y e I_{xy} con respecto a los ejes de coordenadas y a los ejes centroidales paralelos a los anteriores, y los momentos y direcciones principales de inercia en el centroide.

10. **Área bajo una parábola cúbica.** Un área plana está limitada por el eje X, por una recta paralela al eje Y, que pasa por el punto (a, a), y por una parábola cúbica dada por $y = x^3/a^2$. Halle el área y el centroide de la región descrita, I_x, I_y e I_{xy} con respecto a los ejes de coordenadas y a los ejes centroidales paralelos a los anteriores, y los momentos y direcciones principales de inercia en el centroide.

11. **Cuadrante de elipse.** Un área plana está limitada por el eje X, por el eje Y y por una elipse de centro en el origen de coordenadas, de radio a, en la dirección del eje X, y radio b, en la dirección del eje Y. Halle el área y el centroide de la región descrita, I_x, I_y e I_{xy} con respecto a los ejes de coordenadas y a los ejes centroidales paralelos a los anteriores, y los momentos y direcciones principales de inercia en el centroide.

2.3 Áreas compuestas

1. **Cuadrado con hueco cuadrado.** A un cuadrado, de lado a, se le extrae un núcleo cuadrado, de lado na, con el mismo centro y rotado 45° con respecto al primero. Halle los momentos principales de inercia del área limitada por ambos cuadrados, con respecto a uno de los vértices del mayor, y, si los momentos de inercia anteriores están en la relación de 1/5, el valor que debe tener n.

2. **Sección en I de aletas diferentes.** La sección recta de un perfil metálico tiene la forma de una I, de aletas horizontales diferentes, y alma vertical simétrica con respecto a las aletas. La aleta inferior tiene $5t$ de largo y t de espesor, el alma tiene $3t$ de alto y t de espesor, y la aleta superior mide $3t$ de largo y t de espesor. Halle el área y el centroide de la sección descrita, I_x, I_y e I_{xy} de la misma en ejes centroidales, paralelo uno a las aletas y perpendicular el otro, y los momentos y direcciones principales de inercia en el centroide.

3. **Sección en I de aletas diferentes.** En un perfil en I, simétrico con respecto al alma, ésta es un rectángulo de altura $10t$ y espesor t, la aleta superior es un rectángulo de base $5t$ y espesor t, mientras que la aleta inferior es un rectángulo de base desconocida c y espesor t. Si el eje X es paralelo a la aleta y el Y paralelo al alma, halle la posición del centroide, en función de c, el momento de inercia con respecto a un eje X que pasa por la base de la I, en función de c, el valor de la dimensión c para la cual, en el centroide del perfil, $I_x = 3I_y$, y los momentos y el producto de inercia que se obtienen al rotar los ejes centroidales en un ángulo de $\theta = 30°$.

4. **Sección en T.** La sección recta de un perfil metálico tiene la forma de una T invertida y asimétrica, con alma vertical y aleta horizontal. La aleta tiene $5t$ de largo y t de espesor, y el alma, que se levanta a la distancia t del extremo izquierdo de la aleta, tiene $4t$ de alto y t de espesor. Halle el área y el centroide de la sección descrita, I_x, I_y e I_{xy} de la misma en ejes centroidales, paralelo uno a la aleta y perpendicular el otro, y los momentos y direcciones principales de inercia en el centroide.

5. **Sección en H.** La sección recta de un perfil metálico tiene la forma de una H, de aletas verticales y diferentes, y alma horizontal simétrica con respecto a las aletas. La aleta izquierda tiene $3t$ de alto y t de espesor, el alma tiene $4t$ de largo y t de espesor, y la aleta derecha tiene $4t$ de alto y t de espesor. Halle el área y el centroide de la sección descrita, I_x, I_y e I_{xy} de la misma en ejes centroidales, paralelo uno a las aletas y perpendicular el otro, y los momentos y direcciones principales de inercia en el centroide.

6. **Sección en C.** La sección recta de un perfil metálico tiene la forma de una C, de aletas horizontales y diferentes y alma vertical. La aleta inferior tiene $10t$ de largo y t de espesor, el alma tiene $6t$ de alto y t de espesor, y la aleta superior tiene $6t$ de largo y t de espesor. Halle el área y el centroide de la sección descrita, I_x, I_y e I_{xy} de la misma en ejes centroidales, paralelo uno a las aletas y perpendicular el otro, y los momentos y direcciones principales de inercia en el centroide.

7. **Sección en U.** La sección recta de un perfil metálico tiene la forma de una U, de aletas verticales y diferentes y alma horizontal. La aleta izquierda tiene $9t$ de alto y t de espesor, el alma tiene $20t$ de largo y t de espesor, y la aleta derecha tiene $3t$ de alto y t de espesor. Halle el área y el centroide de la sección descrita, I_x, I_y e I_{xy} de la misma en ejes centroidales, paralelo uno a las aletas y perpendicular el otro, y los momentos y direcciones principales de inercia en el centroide.

8. **Sección en L.** La sección recta de un perfil metálico tiene la forma de una L, con alma vertical y aleta horizontal. La aleta tiene $4t$ de largo y t de espesor, y el alma tiene $5t$ de alto y t de espesor. Halle el área y el centroide de la sección descrita, I_x, I_y e I_{xy} de la misma en ejes centroidales, paralelo uno a la aleta y perpendicular el otro, y los momentos y direcciones principales de inercia en el centroide.

9. **Sección en Z invertida.** La sección recta de un perfil metálico tiene la forma de una Z invertida, con alma vertical y de aletas horizontales. La aleta inferior tiene $4t$ de largo y t de espesor, el alma tiene $8t$ de alto y $2t$ de espesor, y la aleta superior tiene $6t$ de largo y t de espesor. Halle el área y el centroide de la sección descrita, I_x, I_y e I_{xy} de la misma en ejes centroidales, paralelo uno a las aletas y perpendicular el otro, y los momentos y direcciones principales de inercia en el centroide.

10. **Área compuesta.** Un área compuesta está formada por un semicírculo, de radio R, y un triángulo rectángulo, de catetos $2R$ y b; el semicírculo y el triángulo están ubicados a lado y lado del segmento de longitud $2R$, que comparten. Si los ejes X y Y se hacen coincidir con los catetos del triángulo, halle el área y el centroide de la figura compuesta, los momentos y el producto de inercia en los ejes XY, los momentos y el producto de inercia en los ejes centroidales, y los momentos y direcciones principales de inercia centroidales.

CAPÍTULO 3

TENSIONES Y DEFORMACIONES

3.1 Tensiones

1. **Demostración.** Si σ_x, σ_y e τ_{xy} representan el estado de tensiones en un punto de una lámina con respecto a los ejes *XY*, de origen en O, demuestre que las cantidades $\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$ e $\left(\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2\right)$ son invariantes en sistemas de ejes *X'Y'*, rotados, que tenga el mismo origen O.

2. **Diedro de 60°.** Dos semiplanos se cortan definiendo un ángulo diedro de 60°, cuyo plano bisectriz es el plano *XZ*. En el vértice del diedro, pero actuando en cada uno de los planos, hay tensiones normales iguales, $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$ [MPa], y tensiones cortantes iguales dirigidas hacia la arista del diedro, $\tau_1 = \tau_2 = \sqrt{3}$ [MPa]. Halle, e ilustre los resultados con el croquis de un elemento de volumen, la magnitud, dirección y sentido de las tensiones principales en el vértice del diedro.

3. **Tensión normal desconocida.** Si en un punto de un cuerpo, $\sigma_y = 4.000$ [Pa], $\tau_{xy} = -7.000$ [Pa] y la tensión normal mínima es $\sigma_{min} = -2.000$ [Pa], halle, e ilustre los resultados con el croquis de un elemento de volumen, σ_x y las orientaciones de los ejes principales en el mismo punto.

4. **Intervalo de valores para un ángulo.** Si en un punto de un cuerpo, $\sigma_x = -8.000$ [Pa], $\sigma_y = 0$ y $\tau_{xy} = 3.000$ [Pa], halle el intervalo de valores de θ, medido con respecto al eje *X*, para los cuales la magnitud de la tensión cortante es igual o menor que 4.000 [Pa].

5. **Lámina tensionada.** Si el estado plano de tensiones en un punto de una lámina está dado por $\sigma_x = 50$ [MPa], $\sigma_{60} = 100$ [MPa] y $\tau_{xy} = 100$ [MPa], halle, e ilustre los resultados con el croquis de un elemento de volumen. σ_y, τ_{60°, las tensiones principales y sus direcciones, y la tensión cortante máxima.

6. **Lámina tensionada.** Si el estado plano de tensiones en un punto de una lámina está dado por $\sigma_x = 100$ [Mpa], $\sigma_y = -50$ [Mpa] y τ_{xy}, halle el intervalo de valores de τ_{xy} para los cuales la tensión cortante máxima en el plano es menor que 85 [MPa]..

7. **Superposición de tensiones.** El estado plano de tensiones en un punto de una lámina es el resultado de la acción conjunta en el mismo punto, de tres estados uniaxiales de tensiones. Con referencia a un sistema de coordenadas *XY*, el primer estado se define con $\sigma_x = 30$ [Mpa], el segundo con $\sigma_{x'} = -40$ [Mpa], donde el eje *X'* hace un ángulo de $-60°$ con respecto al eje *X*, y el tercero con $\sigma_{x''} = 20$ [Mpa], donde el eje *X''* hace un ángulo de 60° con respecto al eje *X*. Halle, e ilustre los resultados con el croquis de un elemento de volumen, las tensiones principales resultantes y sus direcciones, con respecto a los ejes *XY*, y la tensión cortante máxima.

8. **Superposición de tensiones.** El estado plano de tensiones en un punto de una lámina es el resultado de la acción conjunta en el mismo punto, de dos estados de tensiones. Con referencia a un sistema de coordenadas *XY*, el primer estado se define con $\sigma_x = 80$ [Mpa], $\sigma_y = 0$ y $\tau_{xy} = -70$ [Mpa], y el segundo con $\sigma_{x'} = 50$ [Mpa], $\sigma_{y'} = -30$ [Mpa] y $\tau_{x'y'} = 0$, donde los eje *X'Y'* hacen un ángulo de –60° con respecto a los ejes *XY*. Halle, e ilustre los resultados con el croquis de un elemento de volumen, las tensiones principales resultantes y sus direcciones, con respecto a los ejes *XY*, y la tensión cortante máxima.

9. **Tensor plano de tensiones.** Si, con referencia a ejes *XY:*

$$\sigma = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} [\text{MPa}]$$

halle las tensiones y las direcciones principales, la tensión cortante máxima y su dirección, y la tensiones normal y cortante, σ y τ, en la dirección del versor $\bar{i} = \left(\bar{i}_x + \bar{i}_y\right)/\sqrt{2}$.

10. **Tensor tridimensional de tensiones.** Hallar las tensiones principales y sus direcciones, y la tensión cortante máxima, si, con referencia a ejes *XYZ*:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} [\text{MPa}]$$

11. **Cizalladura octaédrica.** Si, con referencia a ejes *XYZ*, el estado de tensiones en un punto de un cuerpo es:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

halle, en ese punto, la expresión para la tensión cortante octaédrica y a lo que ésta se reduce cuando el estado de tensiones es principal.

12. **Tensiones en cierta dirección.** Si, con referencia a ejes *XYZ*,

$$\sigma = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} [\text{MPa}]$$

halle la tensiones normal y cortante, σ y τ, en la dirección del versor $\bar{i} = \left(\bar{i}_x + \bar{i}_y + \bar{i}_z\right)/\sqrt{3}$.

3.2 Deformaciones

1. **Movimiento de un punto del cuerpo tensionado.** De acuerdo con las definiciones para las deformaciones lineal y angular, ε y γ, y suponiendo que las componentes del movimiento de un punto arbitrario de un cuerpo elástico sometido a tensiones son u, v y w, halle las relaciones puntuales entre las deformaciones y los movimientos en el punto.

2. **Cálculo de *G*.** Deducir la expresión que permite calcular el módulo de Young en cizalladura, G, a partir de E y μ.

3. **Cálculo de *B*.** Deducir la expresión que permite calcular el módulo de deformación volumétrico, B, a partir de E y μ.

4. **Deformación de un triángulo rectángulo.** Si los catetos de un triángulo rectángulo isósceles se deforman ε_1 y la hipotenusa $-\varepsilon_2$, halle la deformación lineal, ε, de la altura que corresponde al ángulo recto y la deformación angular, γ, del ángulo recto mismo.

5. **Módulo de Poisson desconocido.** Un prisma cuadrado, de longitud $l = 0{,}125$ [m] y lado de la sección $a = l/3$, se contrae longitudinalmente la cantidad $\delta = 7{,}58 \times 10^{-4}$ [m]. Halle el módulo de Poisson del material del prisma si el volumen de éste no cambia.

3.3 Rosetas

1. **Fórmulas de la roseta rectangular.** Si $\varepsilon_{0°}$, $\varepsilon_{45°}$ y $\varepsilon_{90°}$ son, con referencia al eje X, las deformaciones lineales medidas por los extensómetros de una roseta rectangular en un punto de la superficie de un cuerpo elástico, de parámetros E y μ, halle, en el mismo punto, las componentes del estado de deformaciones, las deformaciones principales y sus direcciones; calcule también, y presente en forma simplificada, las tensiones principales.

2. **Fórmulas de la roseta equiangular.** Si $\varepsilon_{0°}$, $\varepsilon_{60°}$ y $\varepsilon_{120°}$ son, con referencia al eje X, las deformaciones lineales medidas por los extensómetros de una roseta equiangular en un punto de la superficie de un cuerpo elástico, de parámetros E y μ, halle, en el mismo punto, las componentes del estado de deformaciones, las deformaciones principales y sus direcciones.

3. **Roseta equiangular.** Demuestre que la suma de las 3 deformaciones medidas con una roseta equiangular es independiente de la orientación de la roseta con respecto a un sistema de ejes XY, e iguales a $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3\varepsilon_{\text{prom}}$, donde $\varepsilon_{\text{prom}}$ es la deformación que corresponde al centro del círculo de Mohr respectivo.

4. **Roseta equiangular.** Los datos para una roseta equiangular, fijada a un cuerpo, son $\varepsilon_{0°} = 400 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_{60°} = 400 \times 10^{-6}$ y $\varepsilon_{120°} = -400 \times 10^{-6}$. Si $E = 70$ [GPa] y $\mu = 0{,}25$, halle las tensiones principales y sus direcciones, y la tensión cortante máxima.

5. **Roseta equiangular.** Los datos para una roseta equiangular, fijada a un cuerpo, con respecto a un sistema de ejes XY son $\varepsilon_{30°} = 800 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_{90°} = -100 \times 10^{-6}$ y $\varepsilon_{150°} = 600 \times 10^{-6}$. Halle ε_x, ε_y y γ_{xy}, las deformaciones principales y sus direcciones, y la deformación angular máxima.

6. **Roseta de deformaciones.** Las deformaciones que se miden con una roseta, fijada a un cuerpo, son $\varepsilon_{0°} = 280 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_{45°} = -30 \times 10^{-6}$ y $\varepsilon_{135°} = 110 \times 10^{-6}$. Si $E = 70$ [GPa] y $\mu = 0.30$, halle las tensiones principales y sus direcciones, y la tensión cortante máxima.

7. **Roseta de deformaciones.** Las deformaciones que se miden con una roseta, fijada a un cuerpo, son $\varepsilon_{0°} = \varepsilon_0$, $\varepsilon_{30°} = 2\varepsilon_0$ y $\varepsilon_{60°} = \varepsilon_0/2$. Halle las deformaciones principales y sus direcciones, y la deformación angular máxima.

8. **Roseta con cuatro extensómetros.** Las deformaciones que se miden con una roseta, fijada a un cuerpo, son $\varepsilon_{0°} = -100 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_{45°} = 720 \times 10^{-6}$ y $\varepsilon_{135°} = 630 \times 10^{-6}$, y además, $\mu = 0{,}25$ y $E = 30$ [GPa]. Halle la lectura que debe registrar un cuarto extensómetro ubicado en $\theta = 90°$, las deformaciones principales, la deformación angular máxima, las tensiones principales y sus direcciones, y la tensión cortante máxima.

3.4 Relaciones tensión deformación

1. **Deformaciones conocidas.** Si, en un punto de la superficie de un cuerpo, $\varepsilon_x = 500 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_y = 150 \times 10^{-6}$, $\gamma_{xy} = -350 \times 10^{-6}$, $\sigma_z = 0$, $E = 70$ [GPa] y $\mu = 1/3$, halle las tensiones y las direcciones principales en el mismo punto, y la tensión cortante máxima.

2. **Deformaciones conocidas.** Si, en un punto de la superficie de un cuerpo, $\varepsilon_x = -400 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_y = 200 \times 10^{-6}$, $\gamma_{xy} = -600 \times 10^{-6}$, $\sigma_z = 0$, $E = 200$ [GPa] y $\mu = 0{,}3$, halle las tensiones y las direcciones principales en el mismo punto, y la tensión cortante máxima.

3. **Deformación angular máxima.** Si en un punto de una lámina tensionada, en la que $E = 300$ [GPa] y $\mu = 1/4$, se sabe que la deformación angular máxima es $\gamma_{máx} = 5 \times 10^{-4}$ y que la suma de las tensiones normales en dos planos perpendiculares que pasan por ese punto es de 40 [MPa], halle las magnitudes de las tensiones principales en el punto en cuestión.

4. **Compresión de un bloque.** Al someter a compresión un cilindro de cierto material, el diámetro original, $d = 0{,}15$ [m], se incrementa en $\Delta d = 1{,}27 \times 10^{-5}$ [m], y la longitud original, $l = 0{,}30$ [m], disminuye en $\Delta l = 2{,}794 \times 10^{-4}$ [m], bajo una carga de compresión centroidalmente aplicada, de $P = 232 \times 10^{3}$ [N]. Halle el módulo de Young, E, y la relación de Poisson, μ, del material.

5. **Tensor de deformaciones.** Si $E = 70$ [GPa] y $\mu = 1/3$, hallar las tensiones principales y sus direcciones, y la tensión cortante máxima, cuando, con referencia a ejes *XYZ*, se conoce el tensor de deformaciones:

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

6. **Deformación lineal nula.** Una lámina rectangular delgada, elástica, cuyos lados se orientan en las direcciones de los ejes *XY* y en la que el módulo de Poisson es $\mu = 1/3$, se somete a una tensión uniforme de tracción, σ_0, en los bordes perpendiculares al eje *Y*. Halle el ángulo, medido con respecto al eje *X*, en el que debe ponerse un extensómetro sobre la superficie de la lámina para que mida una deformación nula.

7. **Prisma rectangular tensionado.** Uno de los vértices de un prisma rectangular, de longitud 0,100 [m], es el origen de coordenadas, tres de sus aristas coinciden con los ejes *XYZ* y la sección recta del mismo es un rectángulo, cuyos lados miden 0,040 [m] y 0,025 [m] en la direcciones, respectivamente, de los ejes *Y* y *Z*. En las caras del sólido que son normales al eje *Y* obra la tensión uniforme σ_Y, y en las normales al eje *X* la tensión normal uniforme σ_X. Si $\sigma_x = -180$ [MPa], halle el valor de σ_Y para el cual es cero el cambio en el lado del prisma paralelo al eje *Y*, el cambio en el área de las caras del cuerpo paralelas al plano *XZ* y el cambio de volumen del mismo.

8. **Circunferencia en lámina tensionada.** Uno de los vértices de una lámina cuadrada, de lado $l = 0{,}25$ [m] y espesor $t = 0{,}02$ [m], es el origen de coordenadas y dos de los lados del cuadrado coinciden con los ejes *XY*; en aquella, $E = 70$ [GPa] y $\mu = 1/3$, y sobre la misma se dibuja una circunferencia, de radio $R = 0{,}10$ [m], concéntrica con el cuadrado. Si en los bordes de la lámina se aplican las tensiones $\sigma_x = 50$ [MPa] y $\sigma_y = 100$ [MPa], halle los cambios de longitud en los diámetros de la circunferencia que son paralelos a los ejes *XY*, y los cambios en el grueso de la lámina y en el volumen total.

9. **Circunferencia en lámina tensionada.** Uno de los vértices de una lámina cuadrada, de lado $l = 0{,}50$ [m] y espesor $t = 0{,}02$ [m], es el origen de coordenadas y dos de los lados del cuadrado coinciden con los ejes *XY;* en aquélla, $E = 210$ [GPa] y $\mu = 0{,}28$, y sobre la misma se dibuja una circunferencia, de radio $R = 0{,}15$ [m], concéntrica con el cuadrado. Si en los bordes de la lámina se aplican las tensiones $\sigma_x = 160$ [MPa], $\sigma_y = 20$ [MPa] y $\tau_{xy} = -100$ [MPa], halle las características geométricas que definen la curva en la que se transforma la circunferencia y los cambios en el grueso de la lámina y en el volumen total.

10. **Esfera sumergida.** Una esfera de acero macizo, de diámetro $d = 0{,}100$ [m], $\mu = 0{,}3$ y $E = 200$ [GPa], se sumerge en el mar donde la presión del agua es de $p_0 = 90$ [MPa]. Halle las disminuciones en el diámetro y en el volumen de la esfera, y el incremento porcentual en la densidad de la misma.

11. **Energía de deformación.** Si, con referencia a ejes *XYZ*, se conoce el estado de tensiones en un punto de un cuerpo:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

halle, en ese punto, la expresión de la energía de deformación por unidad de volumen y a lo que ésta se reduce cuando el estado de tensiones es principal.

12. **Energía de deformación.** Halle la energía de deformación por unidad de volumen en un punto de un cuerpo, en el cual $E = 200$ [GPa] y $G = 100$ [GPa], cuando, en ese punto:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 10 & -5 & 20 \\ -5 & 20 & -4 \\ 20 & -4 & 10 \end{bmatrix} \text{[MPa]}$$

13. **Cambio de volumen sin deformación.** Si, con referencia a ejes *XYZ*, se conoce el estado de tensiones principales en un punto de un cuerpo:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

halle, en ese punto, las tensiones principales del tensor que produce cambio de forma y no de volumen.

14. **Energía de distorsión.** Si, con referencia a ejes *XYZ*, se conoce el estado de tensiones principales en un punto de un cuerpo:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

halle, en ese punto, la expresión de la energía de distorsión por unidad de volumen.

15. **Prisma elástico en una zanja.** En un macizo sólido y semiinfinito, indeformable y de superficie horizontal, se abre una zanja, con forma de prisma rectangular y en cuyas paredes lisas no se desarrolla fricción, y se llena, homogéneamente, con un material elástico, de módulos E y μ, al cual se le aplica en la superficie una tensión uniforme de compresión, σ_0. Halle, en las direcciones de las aristas de la zanja, las deformaciones y tensiones que obran en un punto cualquiera del material, así como la tensión cortante máxima en el punto.

5. **Placa elástica entre paredes rígidas.** Una placa rectangular, de lados a, b y espesor d, se coloca entre dos paredes rígidas y paralelas, separadas la distancia d. Si la placa es de un material elástico, de módulos E y μ, está sometida a tensiones normales de tracción, uniformes e iguales a σ_1, en las caras de longitud a, y de compresión, uniformes e iguales a σ_2, en las caras de longitud b, halle la presión que la placa ejerce sobre las paredes y el cambio de volumen de aquélla.

6. **Cubo elástico en una zanja.** En un macizo sólido y semiinfinito, indeformable y de superficie horizontal, se abre una zanja, con forma de prisma rectangular y en cuyas paredes lisas no se desarrolla fricción, en la que se coloca, en contacto con las paredes laterales y el piso de aquélla, un cubo de un material elástico, de módulos E, μ y α, con α el módulo de dilatación térmica, al cual se le aplica en la superficie una tensión uniforme de compresión, σ_0, y se incrementa la temperatura en ΔT. Halle, en las direcciones de sus aristas, las deformaciones y tensiones que aparecen en un punto cualquiera del cubo, así como la tensión cortante máxima en el punto.

7. **Esquisto fisurado.** Un macizo semiinfinito y de superficie horizontal está constituido por un esquisto, cuyo peso específico y módulo de Poisson son $w = 25$ [kN/m^3] y $\mu = 0{,}2$. Si la tensión cortante máxima que el material soporta antes de fracturarse es $\tau_u = 4$ [MPa], calcule la profundidad a partir de la cual la roca se encuentra fisurada.

CAPÍTULO 4

FUERZA AXIAL

4.1 Tensiones normales, deformaciones y desplazamientos

1. **Plano de inclinación desconocida.** Si en el centroide de la sección recta de una barra prismática vertical, apoyada en el suelo, se aplica una fuerza de compresión, *P*, y las tensiones que aparecen en un plano de la barra que forma con el horizontal el ángulo diedro β son $\sigma = -10$ [MPa] y $\tau = 4$ [MPa], halle el valor de ese ángulo y la máxima tensión de compresión en la barra.

2. **Cambio de volumen en una barra cilíndrica.** Una barra cilíndrica, de longitud *l*, área *A*, peso específico *w* y módulo de Young *E*, está colgada de un techo rígido y sometida a una fuerza axial de tracción, F_0, en su extremo libre. Halle el alargamiento total de la barra y su cambio de volumen.

3. **Cambio de volumen en una barra troncónica.** De un techo rígido se sostiene una barra que tiene forma de tronco de cono, de longitud $20R$; el radio de la sección recta en contacto con el techo es $2R$ y en la del extremo libre es *R*, el módulo de Young es *E* y el de Poisson μ, y el peso específico del material es ω. Halle el alargamiento total de la barra y el cambio en el volumen.

4. **Columna de igual resistencia.** Una columna de revolución, apoyada en el piso, está sometida a su propio peso, de peso específico *w*, y a una fuerza $-\vec{i}_y F_0$ aplicada en el centro de la sección del extremo libre. Si la tensión normal en cada sección recta de la columna debe ser uniforme, halle la forma como debe variar el radio de las diferentes secciones rectas de aquélla, el acortamiento total de la misma y la energía potencial elástica; dibuje, además, el diagrama de carga axial.

5. **Sección de mínima tensión.** Una columna con la forma de un tronco de cono, de altura *h*, radio *R* en la base superior y $2R$ en la inferior, está apoyada en el piso y sometida a su propio peso, de peso específico *w*, y a una fuerza $-\vec{i}_y F_0$ aplicada en el centro de la sección del extremo libre. Halle la sección recta del troncoide en donde la tensión normal es mínima y el radio de esa sección.

6. **Cambio de longitud de una barra.** Una barra prismática, horizontal y en equilibrio, ABCD, de longitud $6l$, área *A* y módulo de Young *E*, en el extremo A(0), en el extremo D($6l$) y en los puntos intermedios B($3l$) y C($5l$) está sometida, respectivamente, a las fuerzas axiales $-\vec{i}_x 3F$, $\vec{i}_x 2F$, $\vec{i}_x 2F$, y $-\vec{F}_x$. Halle el cambio de longitud de la barra.

7. **Fuerzas desconocidas en una barra.** Una barra prismática, horizontal y en equilibrio. ABCD, de longitud $15l$, área *A* y módulo de Young *E*, en el extremo A(0), en el extremo D($15l$) y en los puntos intermedios B($4l$) y C($9l$) está sometida, respectivamente, a las fuerzas axiales $-\vec{i}_x F_1$, $\vec{i}_x F_4$, $\vec{i}_x F_2$ y $-\vec{i}_x F_3$. Si $l = 1$ [m], $A = 2{,}0 \times 10^{-3}$ [m^2], $E = 2{,}0 \times 10^{11}$ [Pa], $F_2 = 50$ [kN], $F_3 = 25$ [kN] y la elongación total de la barra es $\delta = 1{,}8 \times 10^{-3}$ [m], halle F_1 y F_2.

8. **Tira troncónica.** De una placa metálica, de espesor *a*, se cortan las tiras 1 y 2; la 1 tiene ancho constante $2a$ y longitud l_1, y la 2 tiene ancho $3a$ en un extremo, *a* en el otro y longitud l_2. Si ambas tiras se someten a la misma carga axial de tracción, *P*, halle la relación entre las longitudes respectivas para que se estiren lo mismo.

9. **Relación σ-ε lineal e inhomogénea.** Una barra prismática, de longitud *l*, con sección rectangular, de lados *b* y $2b$, está sometida a una fuerza axial, *P*; con referencia a un sistema de coordenadas, de origen en el centroide de

la sección, eje X normal a ésta y eje Y en la dirección del lado largo de la misma, la relación constitutiva del material es:

$$\sigma(x,y) = E_0\left[2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]\varepsilon$$

donde E_0 es uniforme. Halle en función de E_0, b y P, suponiendo que las secciones planas se mantienen planas, σ, el alargamiento de la barra y su energía potencial.

10. **Columna compuesta.** Una columna compuesta, ABC, tiene libre el extremo A, donde se aplica una fuerza axial dirigida hacia arriba, F, se apoya en el piso en C, y está formada por dos barras cilíndricas, coaxiales y verticales, la 1 o AB y la 2 o BC, que se unen en B, donde se aplica otra fuerza axial, dirigida hacia abajo, Q. Si $Q = 150$ [kN], y las longitudes, radios y módulos de Young de las barras son $1{,}5l_1 = l_2 = 0{,}9$ [m], $2R_1 = R_2 = 0{,}05$ [m] y $E_1 = E_2 = 210$ [GPa], halle el valor de F para que la movimiento del punto A sea cero, y la deflexión del punto B.

11. **Estructura crítica.** Dos barras rectas, AB y BC, articuladas a sendas paredes verticales en A y C, y entre sí en B, originalmente horizontales, que se suponen sin peso, cuyas áreas, longitudes y módulos de Young valen $A = 2{,}0 \times 10^{-4}$ [m^2], $l = 1{,}5$ [m] y $E = 2{,}0 \times 10^{11}$ [Pa], se someten a una fuerza vertical, $F = 100$ [N], aplicada en el punto común, B. Halle el desplazamiento vertical de B y la fuerza que toma cada barra.

12. **Dos barras rígidas horizontales apoyadas entre sí.** Dos barras rectas, originalmente horizontales y rígidas, AC y CD, están articuladas a sendas paredes verticales en los puntos A(0, 0) y D($6a$, $2R$), y se apoyan entre si, en el punto C($3a$, 0), mediante un rodillo de radio R; además, en el punto B($2a$, 0), la varilla BE, articulada al techo en el punto E($2a$, $3a$) y a la barra AC, ayuda a soportar la fuerza $-\vec{i}_y W$, aplicada a la barra CD en el punto F($4{,}5a$, $2R$). Si $W = 6 \times 10^4$ [N], $a = 1$ [m] y, de la varilla BE, $E = 200$ [GPa] y $A = 3 \times 10^{-4}$ [m^2], halle el desplazamiento vertical del rodillo ubicado en el punto C.

13. **Armadura plana de dos barras.** Una armadura plana y vertical, articulada a una pared en los puntos A(0, 0) y B(0, h), está formada por las barras AC y BC articuladas en C, las cuales tienen igual área y material, de módulo E; además, en C se aplica la fuerza, $-\vec{i}_y W$. Si el ángulo que la barra AC define con la pared es de 30° y el de la barra BC es de 45°, halle la posición deformada del punto C.

14. **Armadura plana de dos barras.** Una armadura plana y vertical, articulada a una pared en los puntos A(0, 0) y B(0, h), está formada por las barras AC y BC articuladas en C, las cuales tienen igual área y material, de módulo E; además, en C se aplica la fuerza, $-\vec{i}_y W$. Si el ángulo que la barra AC define con la pared es de 60° y el de la barra BC es de 120°, halle la posición deformada del punto C.

15. **Armadura plana de dos barras.** Una armadura plana y vertical, articulada a soportes rígidos en los puntos A(a, b) y C(a, $-d$), está formada por las barras AB y CB articuladas en B(0, 0), las cuales tienen igual área, A, y módulo de Young, E; además, en B se aplica la fuerza, $-\vec{i}_y W$. Si $a = b = 2{,}121$ [m], $d = 1$ [m], $A = 3 \times 10^{-4}$ [m^2] y $E = 200$ [GPa], halle la posición deformada del punto B.

16. **Armadura plana de dos barras.** Una armadura plana y vertical, articulada a soportes rígidos en los puntos A(0, 0) y C(a, $-b$), está formada por las barras AB y CB articuladas en B(a, 0), las cuales tienen igual área, A, y módulo de Young, E; además, en B se aplica la fuerza, $\vec{F} = F_0\left(\vec{i}_x \cos\theta + \vec{i}_y \operatorname{sen}\theta\right)$. Si $a = 1{,}5$ [m], $b = 0{,}8$ [m], $A = 6 \times 10^{-4}$ [m^2] y $E = 200$ [GPa], halle el valor de θ para el cual la deflexión del punto B es hacia arriba y a la derecha, a lo largo de una línea que hace un ángulo de 45° con la horizontal, y esa deflexión.

17. **Armadura cuadrada de cinco barras.** Con cuatro barras de igual longitud, l, se forma una armazón cuadrada, y una quinta barra ocupa una de las diagonales de aquélla; las cinco barras están articuladas en sus extremos, tienen igual área, A, y el mismo módulo de Young, E. Si dos fuerzas de tracción, opuestas entre sí e iguales a F_0, se aplican en los vértices del cuadrado que corresponden a la otra diagonal, orientadas a lo largo de la misma, halle la separación que experimentan esos vértices.

18. **Puente militar.** Al articular entre sí 11 barras iguales, de longitud l, área A y módulo de Young E, que definen 5 triángulos equiláteros, se construye un puente militar, cuya base, ABCD, cubre una luz de longitud $3l$. En A(0) el puente se apoya en una articulación y en D($3l$) en un apoyo de patín, y en los vértices B(l) y C($2l$) se aplican, respectivamente, las fuerzas verticales $3F$ y $5F$. Si se desprecia el peso del puente y se sabe que $l = 6$ [m], $A = 45 \times 10^{-4}$ [m^2], $E = 200$ [GPa] y $F = 100.000$ [N], halle el movimiento horizontal del apoyo D.

4.2 Uniones

1. **Resistencia de una unión encolada.** Una barra prismática, de sección rectangular y cuyos lados miden 0,05 [m] y 0,08 [m], está sometida a una fuerza axial de tracción, P; la barra se forma al encolar dos segmentos longitudinales a lo largo de un plano que forma un ángulo de 25° con el eje de aquélla. Si las tensiones admisibles para la unión y para el material de la barra son $\sigma_{uw} = 2$ [Mpa], $\tau_{uw} = 1$ [Mpa], $\sigma_{bw} = 20$ [Mpa] y $\tau_{uw} = 2$ [Mpa], halle el máximo valor que puede tomar P.

2. **Unión de dos platinas.** La platina 1, de ancho $a_1 = 0{,}12$ [m] y espesor $t_1 = 0{,}02$ [m], se une por medio de un traslapo a la platina 2, de ancho $a_2 = 0{,}12$ [m] y espesor $t_2 = 0{,}015$ [m], el cual se asegura con dos pernos, de diámetro d, y el conjunto soporta una fuerza axial de tracción $P = 1 \times 10^5$ [N]. Si el traslapo es lo suficientemente largo para evitar desgarres y se desprecia la concentración de tensiones debidas a los huecos, halle el valor aceptable del diámetro d, sabiendo que las tensiones admisibles al corte en los pernos, a la tracción en las platinas y al contacto entre el perno y éstas son, respectivamente, 100 [MPa], 150[MPa] y 300 [MPa].

3. **Unión de dos platinas.** La platina 1, de ancho $a_1 = 0{,}13$ [m] y espesor $t_1 = 0{,}025$ [m], se une por medio de un traslapo a la platina 2, de ancho $a_2 = 0{,}13$ [m] y espesor $t_2 = 0{,}020$ [m], el cual se asegura con dos pernos, de diámetro $d = 0{,}025$ [m], y el conjunto soporta una fuerza axial de tracción P. Si el traslapo es lo suficientemente largo para evitar desgarres y se desprecia la concentración de tensiones debidas a los huecos, halle el máximo valor de P, sabiendo que las tensiones admisibles al corte en los pernos, a la tracción en las platinas y al contacto entre el perno y éstas son, respectivamente, 60 [MPa], 140[MPa] y 110 [MPa].

4. **Unión de tres platinas.** La platina 1, interna, de ancho $a_1 = 0{,}12$ [m] y espesor $t_1 = 0{,}02$ [m], se une por medio de un traslapo a las platinas 2, externas, de ancho $a_2 = 0{,}12$ [m] y espesor $t_2 = 0{,}015$ [m], el cual se asegura con dos pernos, de diámetro d, y el conjunto soporta una fuerza axial de tracción $P = 1 \times 10^5$ [N]. Si el traslapo es lo suficientemente largo para evitar desgarres y se desprecia la concentración de tensiones debidas a los huecos, halle el valor aceptable del diámetro d, sabiendo que las tensiones admisibles al corte en los pernos, a la tracción en las platinas y al contacto entre el perno y éstas son, respectivamente, 100 [MPa], 150[MPa] y 300 [MPa].

4.3 Magnitudes máximas o mínimas en barras isostáticas

1. **Fuerza axial máxima.** Una barra circular de pequeña longitud, de radio $R = 0{,}03$ [m], está formada con un material cuyas tensiones admisibles a tracción y compresión son $\sigma_{wT} = 100$ [Mpa] y $\sigma_{wC} = 40$ [Mpa]. Halle la máxima fuerza axial que puede aplicarse a tracción y a compresión.

2. **Diseño de una barra compuesta.** Una barra cilíndrica, de longitud l, peso específico w, módulo de Young E y tensión admisible σ_w, está colgada de un techo rígido y sometida a una fuerza axial de tracción, F_0, en su extremo

libre. Halle el área mínima de la barra y su alargamiento total cuando $l = 20$ [m], $\omega = 7{,}8 \times 10^4$ [N / m³], $E = 200$ [GPa], $\sigma_w = 60$ [MPa] y $F_0 = 60.000$ [N]. Si la barra anterior se compone de dos trozos, de 10 [m] cada uno y sección circular, halle los diámetros mínimos que deberán tener esos trozos, el alargamiento total de la barra compuesta y el ahorro de material, con respecto a la barra cilíndrica, que se obtiene.

3. **Ángulo rígido.** En una barra rígida, ABC, doblada y que forma un ángulo recto, el punto B(0, 0) es el vértice del ángulo y se apoya en una articulación, la longitud del lado AB es $3l$ y la del lado BC es l; el lado AB de la barra es horizontal cuando en el punto A($3l$, 0) se aplica una fuerza vertical $-\vec{i}_y Q$, mientras que el punto C(0, l) se sostiene del punto D($-6l$, l), de una pared, mediante una barra DC, de longitud $6l$, área A y módulo de Young E. Si $l = 0{,}3$ [m], $Q = 1000$ [N] y $E = 210$ [GPa], y al aplicar en el punto A una fuerza adicional $-\vec{i}_y P$, donde $P = 4.000$ [N], la deflexión vertical de ese punto es $\delta = 0{,}003$ [m], halle el área de la barra CD.

4. **Armadura rómbica de cinco barras.** Con cuatro barras iguales se forma una armazón rómbica, cuyas diagonales tienen longitudes a y b, y una quinta barra ocupa la diagonal mayor de aquélla; R_1 es el radio de las barras que forman el rombo, R_2 es el radio de la que ocupa la diagonal, y las cinco barras están articuladas en sus extremos. Dos fuerzas de tracción, opuestas entre sí e iguales a F, se aplican en los vértices del rombo que corresponden a la otra diagonal, mediante sendos cables de radio R_3, orientadas a lo largo de la misma; la tensión admisible para las barras que forman el rombo y los cables es σ_{w1} y para la varilla que ocupa la diagonal es σ_{w2}. Si $a = 0{,}48$ [m], $b = 0{,}36$ [m], $R_1 = 0{,}010$ [m], $R_2 = 0{,}024$ [m], $R_3 = 0{,}012$ [m], $\sigma_{w1} = 180$ [MPa] y $\sigma_{w2} = 60$ [MPa], halle el mayor valor que puede tomar F.

4.4 Máquinas y presión de contacto

1. **Barra rotante.** Una barra prismática y horizontal, de longitud l, área A, módulo de Young E y peso específico w, rota en un plano horizontal, con frecuencia constante f, alrededor de un eje vertical que pasa por el punto medio de la barra. Si el alargamiento total de la barra debido a la rotación es δ, halle f y la tensión normal máxima en aquella, σ.

2. **Tiovivo.** El carrito de un tiovivo y su pasajero tienen una masa total M y aquél se desliza sobre una superficie plana, muy lisa, arrastrado por una barra prismática y horizontal, de longitud l, área A, módulo de Young E, tensión admisible σ_w y peso específico w, que está empotrada en un eje vertical y rígido, de radio a, el cual rota con frecuencia constante f. Si el carrito y su pasajero se consideran como una masa puntual unida al extremo de la barra horizontal, halle el área mínima que debe tener ésta y su alargamiento total.

3. **Tubo rotante que se calienta.** Si un tubo delgado, de espesor t, longitud l, radio en la línea media R, módulo de Young E y módulo de dilatación térmica α, rota, con respecto a su eje, con velocidad angular ω y se somete a un incremento de temperatura ΔT, halle el incremento del radio del tubo y la tensión anular que se desarrolla en éste.

4. **Presión de contacto entre aros.** Dos aros delgados tienen iguales el espesor t, el ancho l, y el módulo de Young E, y a la temperatura del ambiente el diámetro exterior de uno es D mientras que el diámetro interior del otro es menor y vale $(1 - 1/1500)D$. Si al calentarlos se logra que el primer aro entre en el segundo, halle la presión de contacto que se desarrolla entre ambos.

5. **Presión de contacto entre tubos.** Al calentar un tubo de cobre a la temperatura de 135°C se acomoda exactamente sobre un tubo de acero cuya temperatura es de 20°C. Si la longitud, el radio de la superficie de contacto y el espesor de los tubos son $l = 1$ [m], $R = 0{,}5$ [m] y $t = 0{,}005$ [m], y de los materiales se conoce que $\alpha_c = 16{,}5 \times 10^{-6}$ [1/°C], $E_c = 110$ [GPa], $\alpha_a = 12{,}5 \times 10^{-6}$ [1/°C] y $E_a = 210$ [GPa], halle la presión de contacto entre los tubos y la tensión anular en cada uno cuando la temperatura común se sostiene en 20°C; repita los cálculos cuando esa temperatura se reduce a 0°C y determine la temperatura para la cual los tubos están a punto de despegarse.

6. **Presión de contacto en tubo relleno.** Una columna compuesta, apoyada en el piso, está formada por un tubo, el material 1, y un núcleo, el material 2, perfectamente adheridos entre si, y sostiene una tabla rígida sobre la que se coloca un peso W, cuya línea de acción coincide con el eje de aquélla. Si el espesor del tubo y el diámetro de su núcleo, y la longitud, el módulo de Young y el módulo de Poisson de los materiales cumplen: $30t_1 = D_2$, $l_1 = l_2$, $E_1 = 2E_2$ y $\mu_1 = 1{,}2\mu_2$, halle la parte de W que toma cada material y, suponiendo que no hay fricción entre las superficies cilíndricas, la tensión de contacto entre el tubo y el núcleo.

4.5 Columnas hiperestáticas

1. **Tabla apoyada en dos columnas concéntricas.** Un tubo cilíndrico, de radio interior R_2, exterior R_3 y módulo E_2, es coaxial con un cilindro macizo, de radio R_1 y módulo E_1; el conjunto está apoyado en el suelo, tiene altura h y soporta una tabla horizontal rígida. Si sobre la tabla actúa la fuerza $-\vec{i}_y W$, aplicada en el eje común de los cilindros, halle, sin tomar en cuenta el efecto debido al módulo de Poisson en las deformaciones y tensiones radiales de la columna, el acortamiento de éstos.

2. **Tabla apoyada en dos columnas contiguas.** Una columna cuadrada, de lado $2a$ y altura h, se forma con dos materiales distintos y contiguos, el 1 y el 2, de secciones rectangulares y lados a y $2a$; entre los módulos de Young de los materiales y las tensiones admisibles respectivas se cumple que $E_1/E_2 = 1/3$ y $\sigma_{w1}/\sigma_{w2} = 1/4$. Si sobre la superficie de la columna se pone una tabla horizontal y rígida, sobre la que obra la fuerza $-\vec{i}_y W$, y se supone despreciable el peso de la columna, halle el punto de la tabla en el que se debe aplicar la fuerza para que aquélla se mantenga horizontal, y el valor mínimo que puede tomar a.

3. **Columna de hormigón reforzado.** Una columna de hormigón reforzado soporta una fuerza axial de compresión, F. Si el módulo de Young del hormigón y el acero están en la relación de 1:10 y sus áreas en la relación 10:1, halle la porción de F que toma cada material.

4. **Columna de hormigón reforzado.** Una columna rectangular, de lados a y b, y altura h, se construye de hormigón reforzado con n varillas de acero, simétricamente repartidas en la sección recta y de diámetro d, para soportar una fuerza axial de compresión F. Si se sabe que $b = 0{,}25$ [m], $h = 1{,}5$ [m], $d = 0{,}02$ [m], $F = 1$ [MN], $E_a = 210$ [GPa], $E_c = 25$ [GPa], $\sigma_{wa} = 100$ [MPa] y $\sigma_{wc} = 12$ [MPa], halle el valor de a y el número de varillas de acero que deben usarse para soportar la fuerza aplicada, y el acortamiento de la columna.

5. **Tabla apoyada en tres columnas contiguas.** Una columna rectangular, de lados a y $7a$, y altura h, se forma con tres bloques de materiales distintos, contiguos y consecutivos, el 1, el 2 y el 3, de la misma altura h y cuyas secciones rectas tienen, respectivamente, lados a y a, a y $4a$, y a y $2a$. Los módulos de Young y las respectivas tensiones admisibles de los materiales son $E_1 = 200$ [GPa] y $\sigma_{w1} = 140$ [MPa], $E_2 = 70$ [GPa] y $\sigma_{w2} = 70$ [MPa], y $E_3 = 140$ [GPa] y $\sigma_{w3} = 110$ [MPa]; donde, $a = 0{,}05$ [m]. Si sobre la superficie de la columna se pone una tabla horizontal y rígida, sobre la que obra la fuerza $-\vec{i}_y W$, y se supone despreciable el peso de la columna, halle el punto de la tabla en el que se debe aplicar la fuerza para que aquélla se mantenga horizontal, y el máximo valor de W.

6. **Tabla apoyada en tres columnas concéntricas.** Una columna cilíndrica, de radio $R_3 = 0{,}100$ [m], apoyada en el suelo, soporta una fuerza de compresión $F_0 = 10.000$ [N], aplicada a lo largo del eje de aquélla mediante una placa rígida soldada en su extremo libre. La columna está formada por un núcleo cilíndrico circular de material 1, rodeada por tubos cilíndricos y coaxiales de los materiales 2 y 3, perfectamente adheridos entre sí. El radio del material del núcleo es $R_1 = 0{,}050$ [m], el radio exterior del material 2 es $R_2 = 0{,}075$ [m], y los módulos de Young correspondientes son $E_1 = 210$ [GPa], $E_2 = 105$ [GPa] y $E_3 = 125$ [GPa]. Calcule, sin tomar en cuenta el efecto debido al módulo de Poisson en las deformaciones y tensiones radiales de la columna, las tensiones normales axiales que se desarrollan en cada uno de los tres materiales y el acortamiento total de la columna.

7. **Tabla apoyada en tres columnas.** Una tabla horizontal y rígida, que soporta una fuerza vertical W, está apoyada en el piso por medio de tres columnas, de iguales módulo de Young y área, E y A, separados entre sí la distancia l, pero de diferente longitud; ésta en la primera es l, en la segunda $2l$, y $3l$ en la tercera. Si $l = 0{,}5$ [m], $W = 1{,}35 \times 10^5$ [N] y $E = 10$ [GPa], halle la distancia que debe haber entre la primera columna y la fuerza vertical para que la tabla permanezca horizontal.

8. **Columna pretensada.** Varillas de acero, rectas, paralelas y horizontales, están unidas a dos placas rígidas a las que se aplican sendas fuerza de tracción, Q_0, hasta que en las varillas se alcanza una tensión σ_0; luego se agrega hormigón entre las placas para formar una columna de hormigón reforzado. Después de que fragua el hormigón y éste alcanza su resistencia final se retiran las fuerzas traccionantes, Q_0, y se obtiene una columna pretensada. Si, en la columna, los módulos de Young del acero y el hormigón están en la relación de 12:1 y sus áreas en la de 1:15, halle las tensiones residuales en ambos materiales.

9. **Columna colgada y articulada a una barra horizontal.** Una columna vertical, ABC, formada por dos segmentos que tienen el mismo módulo de Young, E, está colgada y empotrada en el punto A(0, 0) a un techo rígido; el primer segmento, de área A_1 y longitud l_1, se extiende hasta el punto B(0, $-l_1$), y el segundo segmento, de área A_2 y longitud l_2, hasta el extremo libre C[0, $-(l_1 + l_2)$], donde se aplica la fuerza $-\vec{i}_y F_1$; además, una barra rígida y horizontal, DEB, articulada a la columna en el punto B, está apoyada en un patín en el punto E($-l_2$, $-l_1$) y tiene libre el extremo D($-3l_2$, $-l_1$), donde se aplica la fuerza $-\vec{i}_y F_2$. Halle la razón F_1/F_2 para que el desplazamiento vertical en el punto C sea cero.

10. **Calor sobre columna compuesta.** Una columna compuesta, apoyada en un piso rígido, está formada por un tubo hueco, de material 1, que contiene a un cilindro macizo coaxial, de material 2; el conjunto está sometido a una carga axial de compresión, $W = 25 \times 10^4$ [N], aplicada por medio de una placa rígida, que obra a lo largo del eje de la columna compuesta. Si el área de la sección recta, la longitud, el módulo de Young y el coeficiente de dilatación térmico de los cilindros cumplen: $3A_1 = A_2 = 60 \times 10^{-4}$ [m^2], $l_1 = l_2 = 6$ [m], $2E_1 = E_2 = 200$ [GPa] y $\alpha_1 = 2\alpha_2 = 20 \times 10^{-6}$ [1/° C], halle el incremento de temperatura necesario para que toda la carga descanse, justamente, sólo sobre el núcleo macizo.

4.6 Cuerpos rígidos e hiperestáticos, soportados por cables o barras

1. **Barra rígida colgada de dos cables.** Una barra rígida y horizontal, de longitud l, está suspendida de un techo por medio de dos cables verticales atados a sus extremos, y aunque los cables tiene igual sección recta y longitud, los módulos de Young son E_1 y E_2. Halle la distancia, medida desde un extremo, en donde debe aplicarse una fuerza vertical, $-\vec{i}_y W$, para que la barra permanezca horizontal.

2. **Barra rígida colgada de tres cables.** Una barra horizontal y rígida está colgada del techo por medio de tres cables verticales, de iguales módulo de Young, área y tensión admisible, E, A y σ_w, separados entre sí la distancia l, pero de diferente longitud; ésta en el primero es $0{,}6l$, en el segundo $0{,}8l$, y l en el tercero. Si a una distancia $1{,}2l$ del cable más corto se aplica a la barra el peso $-\vec{i}_y W$, halle la fuerza que toma cada cable y el menor valor que puede tener A.

3. **Barra rígida colgada de tres cables.** Una barra horizontal y rígida, de longitud l, está colgada del techo por medio de tres cables verticales, los cables 1, 2 y 3, separados entre sí la distancia $l/2$. Si las longitudes, áreas, módulos de Young y tensiones admisibles de los cables, cumplen $2l_1 = l_2 = 2l_3$, $2A_1 = 3A_2 = 2A_3$, $3E_1 = E_2 = 3E_3$ y $2\sigma_{1w} = \sigma_{2w} = 2\sigma_{3w}$, y a una distancia $l/3$ del cable 1 se aplica a la tabla el peso $-\vec{i}_y W$, halle la fuerza que toma cada cable y el menor valor que puede tener A.

4. **Barra rígida colgada de tres cables.** Una barra rígida, de longitud $2a$ y peso $W = 200$ [N], está colgada del techo por medio de tres cables verticales, de longitudes iguales a l y separados entre sí la distancia a; los cables exteriores son de acero y el central de aluminio, y la barra soporta una fuerza vertical, F, dirigida hacia abajo y aplicada a la distancia $b = 0{,}4a$ de un extremo de aquélla. Si los diámetros, módulos de Young y tensiones admisibles de los cables son $d_{ac} = 0{,}004$ [m] y $d_{al} = 0{,}005$ [m], $E_{ac} = 200$ [GPa] y $E_{al} = 70$ [GPa], $\sigma_{wal} = 140$ [MPa] y $\sigma_{wal} = 105$ [MPa], halle el valor máximo que puede tomar la fuerza F.

5. **Barra rígida colgada de tres cables.** Una barra rígida, de longitud $2l$ y peso $W = 800$ [N], cuelga del techo suspendida de tres cables verticales, de longitudes iguales a l y separados entre sí la distancia b; los cables exteriores son de acero, con $E_{ac} = 210$ [GPa], $\sigma_{wac} = 140$ [MPa] y diámetro $d_{ac} = 0{,}003$ [m], y el central es de aluminio, con $E_{al} = 70$ [GPa] y $\sigma_{wal} = 90$ [MPa] y diámetro $d_{al} = 0{,}009$ [m], Si, además, en el punto medio de la barra actúa una fuerza vertical dirigida hacia abajo, W_1, halle el valor máximo que esta fuerza puede tomar.

6. **Barra rígida oblicua colgada de tres cables.** Una barra oblicua y rígida está colgada del techo por medio de tres cables verticales, del mismo módulo de Young, área y tensión admisible, E, A y σ_w, separados entre sí la distancia b, pero de diferente longitud, ya que los que están en los extremos distan $2b$ y b del techo. Si a una distancia $0{,}5b$ del cable más largo se aplica a la tabla el peso $-\vec{i}_y W$, halle la fuerza que obra en cada cable y el menor valor que puede tomar A.

7. **Barra rígida colgada de cuatro cables.** Una barra horizontal y rígida está colgada del techo por medio de cuatro cables verticales, de iguales área y longitud, A y $3l$, separados entre sí la distancia l y cuyos módulos de Young y tensiones admisibles cumplen $E_1 = 1{,}5E_2$ y $\sigma_{w1} = 2\sigma_{w2}/3$, donde el subíndice 1 se refiere a los cables externos y el 2 a los internos. Si a la barra se aplica un par, de fuerzas verticales y de momento M_0, halle la fuerza que toma cada cable y el menor valor que puede tener A.

8. **Tabla que soporta una fuerza distribuida.** Una tabla horizontal y rígida, ABC, soporta una fuerza distribuida por unidad de longitud que varía linealmente desde 0, en el extremo A, hasta p_0, en el extremo C; la tabla está apoyada en el piso por medio de tres barras verticales y coplanares, de iguales módulo de Young, área, longitud y tensión admisible, E, A, l y σ_w, unidas a los puntos A, B y C de aquélla; las barras que van a los puntos A y B están separadas entre sí la distancia $2b$, y b las que van a los puntos B y C. Si $b = 1$ [m], $l = 1{,}5$ [m], $E = 12$ [GPa], $p_0 = 2 \times 10^4$ [N . m] y $\sigma_w = 10$ [MPa], y se ignora el pandeo sobre las barras verticales, halle la fuerza que obra en cada una de éstas, el área mínima de las mismas, de acuerdo con la teoría de Lamé y Rankine, y el ángulo de inclinación que le queda a la tabla ABC después de las deformaciones de aquéllas.

9. **Peso sostenido por tres alambres.** Tres alambres de acero, de área $A = 12 \times 10^{-6}$ [m^2] y módulo de Young $E = 2 \times 10^{11}$ [Pa], colgados de un mismo punto del techo, soportan un peso $W = 8.000$ [N]. Si las longitudes iniciales de los alambres son $l_1 = 25{,}000$ [m], $l_2 = 25{,}003$ [m] y $l_3 = 25{,}006$ [m], halle las tensiones en los tres alambres.

10. **Mesa de cuatro patas.** Una tabla rígida y cuadrada, de lado a, se apoya por sus vértices en cuatro patas iguales, de longitud l, área A y módulo de Young E. Si sobre un punto de la mesa, ubicado a la distancias $a/3$ y $a/4$ de los costados de una esquina, se aplica un peso W, halle la fuerza interna en cada pata.

11. **Tabla hexagonal colgada.** Una tabla rígida y horizontal, con la forma de un hexágono regular de lado a, se sostiene de un techo rígido mediante 6 barras verticales, articuladas a los vértices de aquél, de iguales longitud l, área A, y módulo de Young E. Si en un punto ubicado sobre una de las diagonales de la tabla, y que dista $a/2$ del vértice más cercano, se cuelga un peso W, halle la fuerza que toma cada barra.

4.7 Barras rígidas e hiperestáticas, articuladas y soportadas por cables o barras

1. **Barra rígida sostenida en una articulación y un cable.** Una barra rígida y horizontal, ABC, en el punto A(0, 0) está apoyada en una articulación, en el punto B(l, 0) está colgada del techo por medio de un cable de longitud 3l y radio R, y en el extremo C(4l, 0) dista t, verticalmente, de un punto G(4l, $-t$) que se encuentra por debajo. Si $l = 0{,}08$ [m], $R = 0{,}001$ [m], $t = 0{,}0015$ [m] y, en el cable, $E_a = 200$ [GPa], halle la posición sobre la barra en donde debe colocarse un peso, $W = 200$ [N], para que ocasione, justamente, el contacto entre C y G.

2. **Barra rígida sostenida en una articulación y dos cables.** Una barra rígida y horizontal, BCD, articulada a una pared vertical en el punto B(0, 0), en el punto C(l, 0) está colgada del punto A(0, l) de la misma pared, por medio de un cable, y en el extremo D(2l, 0) está colgada del punto A, por medio de otro cable. Si los cables tienen iguales área y módulo de Young, y en el punto D se aplica el peso $-\vec{i}_y W$, halle la fuerza que toma cada cable y la que se desarrolla en la articulación.

3. **Barra rígida sostenida en una articulación y dos barras.** Una barra rígida y horizontal, ABCD, en el punto A(0, 0) está apoyada en una articulación, en el punto B(l, 0) está unida a la barra BE, cuyo extremo E(l, l) está atado a una articulación, en el punto C(1,5l, 0) se somete a la fuerza $-\vec{i}_y W$, y en el punto D(2l, 0) está unida a la barra DF, cuyo extremo F(2l, 0,5l) está atado a otra articulación. Si las barras verticales tienen iguales área, A, módulo de Young, E, y tensión admisible, σ_w, calcule el valor mínimo de A, de acuerdo con la teoría de Tresca, y lo que baja el punto D.

4. **Barra rígida sostenida en una articulación y dos barras.** Una barra rígida y horizontal, ABCD, en el punto A(0, 0) está sometida a la fuerza $-\vec{i}_y W$, en el punto B(3l, 0) se apoya en una articulación, en el punto C(5l, 0) está unida a la barra CE, de área A y cuyo extremo E(5l, $-4l$) está atado a una articulación, y en el punto D(7l, 0) está unida a la barra DF, de área 2,5A y cuyo extremo F(7l, $-5l$) está atado a otra articulación. Calcule, si $l = 0{,}15$ [m], $W = 32.000$ [N] y, en las barras, $E_b = 70$ [GPa] y $\sigma_w = 150$ [MPa], el valor mínimo de A y lo que baja el punto A.

5. **Barra rígida sostenida en una articulación y dos barras.** Una barra rígida y horizontal, BCD, articulada a una pared vertical en el punto B(0, 0), en el punto C(l, 0) está colgada del punto A(l, l) de un techo, por medio de la varilla 1, en el extremo D(4,5l, 0) está colgada del punto E(4.5l, 3l) de otro techo, por medio de la varilla 2, y en el punto F(3l, 0) se le aplica la fuerza $-\vec{i}_y W$. Halle el máximo valor que puede tomar W, si $l = 1$ [m] y, en las varillas, $E_1 = 85$ [GPa], $A_1 = 12 \times 10^{-4}$ [m^2], $\sigma_{wq1} = 70$ [MPa], $E_2 = 210$ [GPa], $A_2 = 4 \times 10^{-4}$ [m^2] y $\sigma_{w2} = 125$ [MPa].

6. **Barra rígida sostenida en una articulación y dos barras.** Una barra rígida y horizontal, ABCD, en el punto A(0, 0) está unida a la barra AE, cuyo extremo E(0, l) está atado a una articulación del techo, en el punto B(l, 0) está conectada a la barra BF, cuyo extremo F(l, l) está unido a una articulación en el techo, sostenida por una bisagra en el punto C(2l, 0) y sometida a la fuerza $-\vec{i}_y W$, en el punto D(3l, 0). Si las barras verticales tienen iguales área, A, y módulo de Young, E, calcule las reacciones y el ángulo que gira la barra horizontal.

7. **Barra rígida sostenida en una articulación y dos cables.** Una barra rígida y horizontal ADFB, está articulada a una pared vertical en el punto A(0, 0), y soportada, en los puntos D(a, 0) y F(2a, 0), por sendos cables verticales DC y FE, de longitudes, diámetros, módulos de Young y tensiones permisibles iguales, respectivamente, a: $d_1 = 0{,}004$ [m], $d_2 = 0{,}003$ [m], $l_1 = 0{,}4$ [m], $l_2 = 0{,}3$ [m], $E_1 = 72$ [GPa], $E_2 = 45$ [GPa], $\sigma_{w1} = 200$ [MPa] y $\sigma_{w2} = 175$ [MPa]; además, en el punto B(3a, 0) se le aplica la fuerza $-\vec{i}_y W$. Halle el valor máximo que puede tomar W.

8. **Barra rígida sostenida en una articulación y dos barras.** Una barra rígida y originalmente horizontal, ABC, de peso W, en el punto $B(0, 0)$ se apoya en una articulación, en el punto $A(-a, 0)$ está unido a la barra AF, de área A y cuyo extremo $F(-a, -a)$ está atado a un apoyo, y en el punto $C(3a, 0)$ está unido a la barra CD, de área A y cuyo extremo $D(3a, 2a)$ está atado a otro apoyo. Si $a = 0{,}20$ [m], $W = 500.000$ [N], en las barras $E_b = 200$ [GPa] y $\sigma_w = 180$ [MPa], y la rotación máxima que puede sufrir la barra es de $\theta_{máx} = 0{,}05^\circ$, calcule el valor mínimo de A y lo que se mueve verticalmente el punto A.

9. **Barra rígida sostenida en una articulación y dos resortes.** Una barra rígida y horizontal, ABCD, está apoyada en una articulación en B, donde $x = 0{,}50$ [m], en un resorte de constante de resorte $k_1 = 12.000$ [N / m] en A, donde se ubica el origen de coordenadas, y en otro resorte de constante de resorte $k_2 = 40.000$ [N / m] en D, donde $x = 1{,}50$ [m]. Si una fuerza vertical dirigida hacia abajo, F, se aplica en el punto C, donde $x = 0{,}90$ [m], y el ángulo máximo de rotación en la barra debido a la acción de esa fuerza está limitado a 2°, halle el valor máximo que puede tomar F.

4.8 Barras y columnas hiperestáticas empotradas

1. **Barra alineal empotrada en sus extremos.** Una barra prismática, de longitud $3l$ y área A, está empotrada en sus extremos a paredes rígidas; la relación constitutiva en el material es $\sigma = K\varepsilon^n$, donde k y n son constantes. Si a la barra se le aplica una fuerza axial, a la distancia $2l$ de un extremo y de intensidad F, halle las reacciones en las paredes.

2. **Barra empotrada en sus extremos.** Una barra prismática, de longitud $4a$, área de la sección recta, A, y módulo de Young, E, está empotrada en sus extremos a paredes rígidas. Si a la barra se le aplican dos fuerzas axiales, una a la distancia a de un extremo y de intensidad F, y la otra a una distancia $3a$ del mismo extremo y de intensidad $2F$, halle las reacciones, la tensión normal máxima en la barra y el movimiento de su punto medio, y dibuje el diagrama de carga axial.

3. **Barra compuesta, empotrada en sus extremos.** Un eje está formado por dos barras prismáticas, coaxiales y consecutivas, la 1 y la 2, empotradas en paredes rígidas y que soportan una fuerza axial, F, en el punto donde se conectan. Si las longitudes, áreas, módulos de Young y tensiones admisibles en tensión normal y cortante de las barras están relacionas con: $l_1 = 2l_2$, $A_1 = 2A_2$, $3E_1 = E_2$, $\tau_{w1} = \tau_{w2} = \sigma_0 / 2$ y $2\sigma_{w1} = \sigma_{w2} = \sigma_0$, halle el área de cada barra y el movimiento del punto de conexión, y dibuje el diagrama de carga axial.

4. **Calor sobre barra compuesta, con rendija y empotrada.** Una barra horizontal, empotrada en una pared rígida, está formada por dos cilindros circulares, contiguos y coaxiales; la 1, en contacto con la pared, la 2, unida a la barra anterior y cuyo extremo libre se encuentra, cuando la temperatura es $T_i = 20°$ C, a la distancia $l_3 = 5 \times 10^{-4}$ [m] de otra pared rígida. Si la temperatura se incrementa en $\Delta T = 140°$ C y el área, la longitud, el módulo de Young y el coeficiente de dilatación térmico de los cilindros cumplen: $A_1 = 2{,}5A_2 = 2 \times 10^{-3}$ [m^2], $l_1 = 1{,}2l_2, = 0.3$ [m], $3E_1 = E_2 = 210$ [GPa] y $\alpha_1 = 1{,}5\alpha_2, = 24 \times 10^{-6}$ /°C, halle las reacciones que se desarrollan en las paredes, las tensiones normales en los cilindros y el incremento de longitud en el 1. Halle, además, la temperatura para la cual la tensión en el 2 es de $\sigma_2 = -150$ [MPa].

5. **Barra ahusada, empotrada en sus extremos.** La sección recta de una barra ahusada, AB, empotrada en sus extremos a sendas paredes rigidas, es rectangular; la barra tiene longitud l, espesor t, módulo de Young E y tensión admisible σ_w; los lados de la sección recta de la barra en A son t y $3t$, y t y $1{,}5t$ en B. Si a la barra se le aplica, a una distancia x de la pared A y en el sentido de B hacia A, una fuerza axial F, y

se sabe que $t = 0{,}04$ [m], $l = 1{,}2$ [m], $E = 60$ [GPa] y $\sigma_w = 1{,}5$ [MPa], halle el valor máximo de F y el valor respectivo de x en el que ocurre.

6. **Columna empotrada en sus extremos.** Una barra prismática, de longitud $4a$, área de la sección recta, A, módulo de Young, E, y peso específico ω, es vertical y está empotrada en sus extremos a un techo y un piso rígidos. Si a la barra se le aplica, a una distancia a del techo, una fuerza axial de intensidad $-\vec{i}_y W$, halle las reacciones, la tensión normal máxima en la barra y el movimiento de su punto medio, y dibuje el diagrama de carga axial.

7. **Columna troncónica empotrada en sus extremos.** Una columna con la forma de un tronco de cono, de longitud $8a$, radio de la sección recta en contacto con el techo, a, y en contacto con el piso, $2a$, módulo de Young, E, y peso específico ω, es vertical y está empotrada en sus extremos a un techo y un piso rígidos. Si a la barra se le aplica, a una distancia $4a$ del techo, una fuerza axial de intensidad $-\vec{i}_y W$, halle las reacciones, la tensión normal máxima en la barra y el movimiento de su punto medio, y dibuje el diagrama de carga axial.

8. **Calor sobre columna de dos elementos, empotrada en sus extremos.** Una columna, empotrada en un techo y un piso rígidos, está formada por dos cilindros circulares, contiguos y coaxiales; el 1, en contacto con el techo, y el 2, sobre el piso. Si el área, la longitud, el módulo de Young, el módulo de Poisson y el coeficiente de dilatación térmico de los cilindros cumplen: $2A_1 = A_2$, $l_1 = l_2$, $E_1 = 2E_2$, $\mu_1 = \mu_2$ y $\alpha_1 = 2\alpha_2$, y la temperatura se incrementa en ΔT, halle las reacciones que se desarrollan en el techo y en el piso, y el cambio de volumen de cada pieza.

9. **Calor sobre columna de tres elementos, empotrada en sus extremos.** Una columna, empotrada en un techo y un piso rígidos, está formada por tres cilindros circulares, consecutivos y coaxiales; el 1, en contacto con el techo, el 2, cilindro intermedio, y el 3, sobre el piso. Si el área, la longitud, el módulo de Young y el coeficiente de dilatación térmico de los cilindros cumplen: $A_1 = A_2/2 = A_3/3$, $l_1 = l_2 = l_3$, $E_1/2 = E_2 = E_3/3$ y $\alpha_1 = 2\alpha_2 = \alpha_3$, la temperatura se incrementa en ΔT y hay fuerzas externas $-\vec{i}_y 2W$ y $-\vec{i}_y W$ aplicadas axialmente en la unión de los cilindros 1 y 2, la primera, y en la unión de los cilindros 2 y 3, la segunda, halle las reacciones que se desarrollan en el techo y en el piso.

4.9 Cerchas hiperestáticas

1. **Armadura plana de tres barras y fuerza vertical.** Una armadura plana y vertical, articulada a un techo en los puntos A($-a$, 0), B(0, 0) y C(a, 0), está formada por tres barras articuladas en el punto D(0, $-h$), las cuales tienen igual área y material, de módulo E y tensiones admisibles $\sigma_w = \sigma_0$ y $\tau_w = 0{,}25\sigma_0$; además, en el punto D se aplica la fuerza, $-\vec{i}_y W$. Halle la posición deformada del punto D y el área mínima que deben tener las barras.

2. **Armadura plana de tres barras y fuerza vertical.** Una armadura plana y vertical, articulada a un techo en el punto A(0, a) y al piso en los puntos B($-a$, $-1{,}25a$) y C(a, $-1{,}25a$), está formada por tres barras articuladas en el punto D(0, 0), las cuales tienen igual área y material, de módulo E y tensiones admisibles $\sigma_w = \sigma_0$ y $\tau_w = 0{,}25\sigma_0$; además, en el punto D se aplica la fuerza, $-\vec{i}_y W$. Halle la posición deformada del punto D y el área mínima que deben tener las barras.

3. **Armadura plana, asimétrica, de tres barras y fuerza vertical.** Una armadura plana y vertical, articulada a un techo en los puntos A($-a$, 0), B(0, 0) y C(1,5a, 0), está formada por tres barras articuladas en el punto D(0, $-2a$), las cuales tienen igual área y material, de módulo E y tensiones admisibles $\sigma_w = \sigma_0$ y

$\tau_w = 0{,}25\sigma_0$; además, en el punto D se aplica la fuerza, $-\vec{i}_y W$. Halle la posición deformada del punto D y el área mínima que deben tener las barras.

4. **Armadura plana de tres barras y fuerza horizontal.** Una armadura plana y vertical, articulada a un techo en los puntos A($-a$, 0), B(0, 0) y C(a, 0), está formada por tres barras articuladas en el punto D(0, $-h$), las cuales tienen igual área y material, de módulo E y tensiones admisibles $\sigma_w = \sigma_0$ y $\tau_w = 0{,}25\sigma_0$; además, en el punto D se aplica la fuerza, $-\vec{i}_y W$. Halle la posición deformada del punto D y el área mínima que deben tener las barras.

5. **Armadura plana de tres barras, defectuosa.** Una armadura plana y vertical, articulada a un techo en los puntos A($-a$, 0), B(0, 0) y C(a, 0), está formada por tres barras articuladas en el punto D(0, $-h$), de las cuales las oblicuas tienen igual área y módulo de Young, A_1 y E_1, mientras que en la central esas magnitudes son E_2 y A_2. Si al ensamblar la armadura se cometió un error, pues la barra central quedó con la longitud $h + \Delta h$, donde Δh es pequeño, halle la fuerza resultante en cada barra debida al error.

6. **Armadura plana de tres barras, calentada.** Una armadura plana y vertical, articulada a un techo en los puntos A($-a$, 0), B(0, 0) y C(a, 0), está formada por tres barras articuladas en el punto D(0, $-h$), las cuales tienen igual área y material, de módulos de Young E y de dilatación térmica α, y tensiones admisibles $\sigma_w = \sigma_0$ y $\tau_w = 0{,}25\sigma_0$. Si el sistema estructural se somete al incremento térmico ΔT, halle la posición deformada del punto D y el área mínima que deben tener las barras.

7. **Armadura plana de tres barras elastoplásticas y fuerza vertical.** Una armadura plana y vertical, articulada a un techo en los puntos A($-a$, 0), B(0, 0) y C(a, 0), está formada por tres barras articuladas en el punto D(0, $-2a$), que tienen iguales área y material, el cual es elastoplástico de tensión de cedencia σ_Y y módulo de Young E; además, en el punto D se aplica la fuerza, $-\vec{i}_y W$. Halle la razón entre las áreas mínimas de las barras, calculadas con base en la teoría elástica o en la teoría de resistencia última; en ambos casos use el mismo factor de seguridad n.

8. **Armadura plana de cinco barras y fuerza vertical.** Una armadura plana y vertical, articulada a un techo rígido en los puntos A($-2a$, 0), B($-a$, 0), C(0, 0), D(a, 0) y E($2a$, 0), está formada por cinco barras articuladas en el punto F(0, $-h$), las cuales tienen igual área y material, de módulo E y tensiones admisibles $\sigma_w = \sigma_0$ y $\tau_w = 0{,}25\sigma_0$; además, en el punto D se aplica la fuerza, $-\vec{i}_y W$. Halle la posición deformada del punto D y el área mínima que deben tener las barras.

9. **Armadura defectuosa de cinco barras.** Una armadura plana y vertical, articulada a un techo en los puntos E($-\sqrt{3}l/2, 3l/2$) y D ($\sqrt{3}l/2, 3l/2$), está formada por cinco barras, articuladas en sus extremos, de iguales área, A, y módulo de Young, E; dos de ellas, de longitudes iguales a l, van desde los puntos E y D hasta el A(0, l), otras dos, de longitudes iguales a $\sqrt{3}l$, se extienden desde los puntos E y D hasta el B(0, 0), y una quinta une el punto B con el C(0, $l - \Delta l$). Al construir la armazón ésta quedó con un error, ya que los puntos A y C, que debían coincidir, resultaron separados por una pequeña distancia, Δl. Halle las fuerzas que se desarrollan en las cinco barras cuando los puntos A y C se hacen coincidir y se aseguran con un pasador para mantenerlos unidos.

10. **Armadura plana de cinco barras elastoplásticas y fuerza vertical.** Una armadura plana y vertical, articulada a un techo rígido en los puntos A($-2a$, 0), B($-a$, 0), C(0, 0), D(a, 0) y E($2a$, 0), está formada por cinco barras articuladas en el punto F(0, $-2a$), que tienen iguales área y material, el cual es elastoplástico de tensión de cedencia σ_Y y módulo de Young E; además, en el punto D se aplica la fuerza, $-\vec{i}_y W$. Halle la razón entre las áreas mínimas de las barras, calculadas con base en la teoría elástica o en la teoría de resistencia última; en ambos casos use el mismo factor de seguridad n.

11. **Armadura cuadrada de seis barras.** Con cuatro barras del material 1, de igual longitud $l = 0{,}3$ [m], se forma una armazón cuadrada, y otras dos barras, del material 2, ocupan las diagonales de aquélla; las seis barras están articuladas en sus extremos y se encuentran libres de tensiones cuando la temperatura es de $T = 21°\text{C}$. Si la temperatura se aumenta a $T = 78°\text{C}$, y las áreas, módulos de Young y coeficientes de dilatación térmica de los materiales son $A_1 = 20A_2 = 6{,}45 \times 10^{-4}$ [m^2], $3E_1 = E_2 = 210$ [GPa] y $\alpha_1 = 1{,}5\alpha_2, = 24 \times 10^{-6} /° \text{C}$, halle la fuerza que se desarrolla en cada barra.

12. **Armadura triangular de seis barras.** Con tres barras, de igual longitud *l*, se forma una armazón triangular, y otras tres barras unen los vértices con el centro de aquélla; las seis barras están articuladas en sus extremos y tienen iguales área, módulo de Young y tensión admisible, A, E y σ_w Si en los vértices de la armazón obran sendas fuerzas iguales y de tracción, F, orientadas a lo largo de las medianas de aquélla, halle el área mínima de las barras.

13. **Armadura cuadrada de ocho barras.** Con cuatro barras de igual longitud, *l*, se forma una armazón cuadrada, y otras cuatro barras unen los vértices con el centro de aquélla; las ocho barras están articuladas en sus extremos, y tienen iguales área, módulo de Young y tensión admisible, A, E y σ_w Si en los vértices de la armazón obran sendas fuerzas iguales y de tracción, F, orientadas a lo largo de las diagonales de aquélla, halle el área mínima de las barras.

CAPÍTULO 5

TEORÍA ELEMENTAL DE MEMBRANAS

5.1 Cilindros y esferas sometidos a presión manométrica

1. **Caldera cilíndrica.** Un recipiente cilíndrico circular, de radio R en la línea media, longitud l, espesor uniforme t, módulo de Young E, coeficiente de Poisson μ y tensión admisible σ_w, está sometido a una presión manométrica p_0. Si $R = 1$ [m], $l = 5$ [m], $E = 200$ [GPa], $\mu = 0{,}25$, $\sigma_w = 200$ [MPa] y $p_0 = 1$ [MPa], halle las tensiones meridional y paralela en cualquier punto del recipiente, el espesor mínimo de éste, según la teoría de la máxima energía de distorsión por unidad de volumen, la deformación angular máxima en la pared del mismo, la deformación lineal paralela, ε_p, y el incremento en el radio de aquél.

2. **Tanque cilíndrico a presión.** Un tanque cilíndrico circular contiene un combustible muy volátil a presión; el módulo de elasticidad para el material, su relación de Poisson y la tensión cortante última son, respectivamente, $E = 205$ [GPa], $\mu = 0{,}30$ y $\tau_u = 82$ [MPa], y un extensómetro se coloca en la pared del tanque para medir la deformación longitudinal en éste y transmitir la información a un cuarto de control. Si se debe trabajar con un factor de seguridad $n = 2$, ¿para qué valor de la deformación registrada por el extensómetro los operadores deben tomar medidas a fin de reducir la presión en el tanque?

3. **Lámina helicoidal en caldera cilíndrica.** Un recipiente cilíndrico circular, de radio R en la línea media y espesor uniforme t, se fabrica con lámina soldada a lo largo de una junta helicoidal, la cual forma un ángulo β con el eje longitudinal, y está sometido a una presión manométrica p_0; las tensiones admisibles, normal y cortante a la soldadura, son σ_w y τ_w. Si $R = 1$ [m], $t = 0{,}005$ [m], $\beta = 30°$, $\sigma_w = 150$ [MPa] y $\tau_w = 60$ [MPa], halle el máximo valor de p_0 que puede soportar el recipiente.

4. **Lámina helicoidal en caldera cilíndrica.** Un recipiente cilíndrico circular, de radio R en la línea media y espesor uniforme t, se fabrica con lámina soldada a lo largo de una junta helicoidal, la cual forma un ángulo β con el eje longitudinal, y está sometido a una presión manométrica p_0. Si $R = 1{,}6$ [m], $t = 0{,}008$ [m] y $p_0 = 0{,}6$ [MPa], halle el máximo valor del ángulo β para que la tensión normal a la soldadura no supere el 85% de la máxima tensión normal en la caldera, y la correspondiente tensión cortante paralela a la soldadura.

5. **Lámina helicoidal en caldera cilíndrica.** Un recipiente cerrado y cilíndrico, de radio $R = 1{,}8$ [m] en la línea media y espesor uniforme $t = 0{,}002$ [m], se fabrica con lámina soldada a lo largo de una junta helicoidal, la cual forma un ángulo $\alpha = 60°$ con el eje longitudinal, está sometido a una presión manométrica p_0, tiene módulo de Young $E = 200$ [GPa] y de Poisson $\mu = 0{,}3$ [m], y cuyas tensiones admisibles son $\sigma_{aw} = 100$ [MPa] y $\tau_{aw} = 45$ [MPa]; además, la tensión admisible normal al cordón de soldadura es $\sigma_{sw} = 25$ [MPa] y la deformación lineal permisible en el tanque es $\varepsilon_w = 0{,}0003$. Halle la presión manométrica máxima que puede soportar el tanque.

6. **Lámina helicoidal en caldera cilíndrica.** Un recipiente cilíndrico circular, de radio R en la línea media y espesor uniforme t, se fabrica con lámina soldada a lo largo de una junta helicoidal, la cual forma un ángulo β con el eje longitudinal, y está sometido a una presión manométrica p_0; las tensiones admisibles normal a la lámina, y normal y tangencial al cordón de soldadura, son σ_w, σ_{sw} y τ_{sw}. Si $\beta = 50°$, $R = 0{,}25$ [m], $\sigma_w = 200$ [MPa], $\tau_{sw} = 10$ [MPa], $\sigma_{sw} = 30$ [MPa] y $p_0 = 1{,}5$ [MPa], halle el menor espesor que puede tener el tanque.

7. **Tanque cilíndrico empotrado.** Un recipiente cilíndrico circular, de radio R en la línea media, longitud l, espesor uniforme t, módulo de Young E y coeficiente de Poisson μ, tiene sus bases empotradas entre dos paredes rígidas y paralelas, y está sometido a una presión manométrica p_0. Halle las tensiones meridional y paralela que se inducen en cualquier punto, la deformación angular máxima en la pared del mismo, la deformación lineal paralela, ε_p y el cambio en el radio de aquél.

8. **Caldera esférica.** Un recipiente esférico, de radio R en la línea media, espesor uniforme t, módulo de Young E, coeficiente de Poisson μ y tensión admisible σ_w, está sometido a una presión manométrica p_0. Si $R = 1$ [m], $E = 200$ [GPa], $\mu = 0{,}25$, $\sigma_w = 200$ [MPa] y $p_0 = 1$ [MPa], halle las tensiones meridional y paralela que se inducen en cualquier punto del recipiente, el espesor mínimo de éste, según la teoría de la máxima energía de deformación por unidad de volumen, la deformación angular máxima en la pared del mismo, la deformación lineal paralela, ε_p, y el incremento en el radio de aquél.

9. **Laca sobre esfera.** Un recipiente esférico de acero, de radio $R = 0{,}30$ [m] en la línea media, espesor $t = 0{,}01$ [m], módulo de Young $E = 210$ [GPa] y módulo de Poisson $\mu = 0{,}30$, está sometido a una presión manométrica p_0 y recubierto con una laca frágil que se agrieta cuando la deformación lineal supera $\varepsilon_w = 200 \times 10^{-6}$. ¿Cuál es el valor máximo que puede tomar p_0?

5.2 Otras membranas sometidas a presión manométrica

1. **Caldera parabólica.** Una caldera parabólica de revolución, de radio R en la línea media de la base, altura h en el eje vertical de revolución y espesor uniforme t, está sometida a una presión manométrica p_0 y descansa sobre su base en una superficie lisa. Halle las tensiones meridional y paralela en cualquier punto y, cuando $h = 4R$, sus máximos respectivos.

2. **Ebullidor elipsoidal.** Un ebullidor con la forma de una bóveda semielíptica de revolución, cuyos radios en las líneas medias son a, en la base, y b en el eje vertical de revolución, tiene espesor uniforme t, está sometido a una presión manométrica p_0 y descansa sobre su base en una superficie lisa. Halle las tensiones meridional y paralela en cualquier punto y, cuando $a = 2b$, sus máximos respectivos.

3. **Toroide.** Un recipiente toroidal de sección circular, de radios b en la línea media y a en la sección recta, y de espesor uniforme t, está sometido a una presión manométrica p_0, y la tensión admisible del material es σ_w. Halle las tensiones meridional y paralela en cualquier punto y, según la teoría de Tresca, el espesor mínimo del toroide cuando $b = 4a$.

5.3 Membranas sometidas a presión no uniforme

1. **Tanque cilíndrico.** Un tanque cilíndrico circular, vertical, de radio R en la línea media, altura h y espesor uniforme t, está lleno de agua, cuyo peso específico es ω, y cuelga de un techo; la tensión admisible del material es σ_w. Halle las tensiones meridional y paralela en cualquier punto y, según la teoría de Tresca, el espesor mínimo del tanque si $R = 0{,}75$ [m], $h = 2$ [m], $w = 10^4$ [N m^{-3}] y $\sigma_w = 150$ [MPa].

2. **Tanque cónico.** Un tanque cónico, delgado, de radio R en la línea media de la base, altura h y espesor uniforme t, está lleno de agua, cuyo peso específico es ω, y cuelga, con su vértice hacia abajo, de un techo. Halle las tensiones meridional y paralela en cualquier punto y, según la teoría de Tresca, el espesor mínimo del tanque cuando $h = 4R$ y la tensión admisible del material es σ_w.

3. **Tanque cónico.** Un tanque cónico, delgado, de radio R en la línea media de la base, altura h y espesor uniforme t, está lleno de agua, cuyo peso específico es ω, y cuelga, con su vértice hacia abajo, de un techo. Halle las tensiones meridional y paralela en cualquier punto y, según la teoría de la máxima energía de distorsión por unidad de volumen, el espesor mínimo del tanque cuando $h = 4R$ y la tensión admisible del material es σ_w.

4. **Tanque troncónico.** Un tanque troncónico, delgado, de radios $2a$, en la línea media de la base mayor, y a, en la línea media de la base menor, altura $6a$ y espesor uniforme t, está lleno de agua, cuyo peso específico es ω, y cuelga, con su base menor hacia abajo, de un techo. Halle las tensiones meridional y paralela en cualquier punto y, según la teoría de Tresca, el espesor mínimo del tanque.

5. **Tanque semiesférico.** Un tanque semiesférico, delgado, de radio R en la línea media y espesor uniforme t, está lleno de agua, cuyo peso específico es ω, y cuelga, con su vértice hacia abajo, de un techo. Halle las tensiones meridional y paralela en cualquier punto.

6. **Tanque esférico.** Un tanque esférico, delgado, de radio R en la línea media y espesor uniforme t, está lleno de agua, cuyo peso específico es ω, y descansa sobre una superficie lisa. Si se ignoran las tensiones de concha que se originan en el punto de contacto entre el tanque y el piso, halle las tensiones meridional y paralela en cualquier punto y los máximos respectivos.

7. **Bóveda semiesférica sumergida.** Una bóveda semiesférica, delgada, de radio R en la línea media y espesor uniforme t, se sumerge en agua, cuyo peso específico es ω, de manera que el vértice de aquélla se encuentra a la distancia $10R$ de la superficie del agua, y descansa sobre su base en un piso liso. Si en el interior de la bóveda la presión es atmosférica, halle las tensiones meridional y paralela en cualquier punto y los máximos respectivos.

8. **Esfera sumergida.** Una esfera, de radio R en la línea media y espesor uniforme t, módulo de Young E y módulo de Poisson μ, se sumerge en agua, cuyo peso específico es ω, de manera que la cima de aquélla se encuentra a la distancia $1.000R$ de la superficie del agua, y descansa sobre un piso liso. Si en el interior de la esfera la presión es atmosférica, halle las tensiones meridional y paralela en cualquier punto, las disminuciones aproximadas del volumen de la esfera y de su radio, y la energía potencial elástica almacenada en la misma.

9. **Bóveda semiesférica.** Una bóveda semiesférica, delgada, de radio R en la línea media y espesor uniforme t, está sometida a su propio peso, el cual, por unidad de área, es q, y descansa sobre una superficie lisa. Halle las tensiones meridional y paralela en cualquier punto de la bóveda y sus máximos respectivos, y el ángulo máximo, medido con respecto al eje de simetría de la misma, para el cual ambas tensiones son de compresión.

10. **Tanque cilíndrico esférico.** Un tanque cilíndrico, vertical, delgado, de radio R en la línea media, altura $2R$ y espesor uniforme t, está sostenido por su borde superior de un techo, y su fondo es una semiesfera, de radio R en la línea media. Si el conjunto está lleno de agua, cuyo peso específico es w, halle las tensiones meridional y paralela en cualquier punto del conjunto.

11. **Tanque semielíptico.** Un tanque semielíptico, de revolución, de radios medios a, en la base, y b en el eje vertical de revolución, y espesor uniforme t, está lleno de agua, cuyo peso específico es ω, y descansa sobre una superficie lisa. Si se ignoran los efectos de borde que se originan en el punto de contacto entre el tanque y el piso, halle las tensiones meridional y paralela en cualquier punto y, cuando $a = 2b$, sus máximos respectivos.

CAPÍTULO 6

TORSIÓN

6.1 Ejes cilíndrico circulares isostáticos

1. **Taladro perforador.** Cuando se perfora un pozo petrolero, el extremo del tubo perforador encuentra una resistencia a la torsión, T_A; también el suelo, a lo largo de la longitud del tubo, l, desarrolla un par de fricción distribuido a lo largo de la longitud, que varía linealmente desde cero, en la superficie B, hasta t_A en A. El tubo tiene radio interior R y exterior $1{,}25R$, y su módulo es G. Halle el par torsor mínimo, T_B, que la unidad impulsora debe desarrollar para vencer los pares resistentes, el diagrama del momento torsor interno, la tensión cortante máxima en el tubo y el ángulo que el eje gira entre sus extremos.

2. **Eje para transmitir potencia.** Un eje circular, de radio $R = 0{,}075$ [m], módulo $G = 140$ [GPa] y tensión cortante admisible del mismo $\tau_w = 140$ [MPa], transmite una potencia $P = 100$ [kW]. Halle el máximo valor que puede tomar la velocidad angular con la que rota el eje para transmitir la potencia antedicha y, con ese valor, la longitud del eje que permitiría una rotación entre los extremos de $\theta = 6°$.

3. **Eje para transmitir potencia.** Un eje circular, de radio R, longitud $l = 2{,}5$ [m], módulo $G = 80$ [GPa] y tensión admisible $\tau_w = 50$ [MPa], transmite una potencia $P = 150$ [kW], con una velocidad angular $\omega = 12\pi$ [Hz]. Si la rotación aceptable máxima entre los extremos es $\theta_w = 3°$, halle el valor mínimo que puede tomar el radio del eje.

4. **Eje para transmitir potencia.** Un eje circular, de radio R, longitud $l = 40R$ [m], módulo $G = 85$ [GPa] y tensión admisible $\tau_w = 65$ [MPa], transmite una potencia $P = 150$ [kW], con una velocidad angular $\omega = 350$ [RPM]. Si la rotación aceptable máxima entre los extremos es $\theta_w = 1°$, halle el valor mínimo que puede tomar el radio del eje.

5. **Eje hueco para transmitir potencia.** Un eje circular hueco, de radio externo R e interno $R/2$, transmite una potencia P con una velocidad angular ω. Si $P = 150$ [kW], $\omega = 4\pi$ [Hz] y la tensión cortante admisible del mismo es $\tau_w = 40$ [MPa], halle el valor mínimo que puede tomar R.

6. **Eje hueco para transmitir potencia.** Un eje circular hueco, de longitud l, radio externo $2{,}5R$ e interno R, módulo G y tensión admisible τ_w, se retuerce entre sus extremos el ángulo θ, al transmitir una potencia P, con una velocidad angular ω. Si $\omega = 500$ [RPM], $l = 3$ [m], $\tau_w = 60$ [MPa], $G = 73$ [GPa] y $\theta = 1{,}5°$, halle el valor mínimo que puede tomar R y la potencia transmitida; calcule también el radio del eje, si éste fuese macizo, y la relación de pesos con el hueco.

7. **Eje motriz de la hélice de un barco.** La hélice de un barco se mueve mediante un eje circular, de radio $R = 0{,}16$ [m]. Si el módulo del material y la tensión admisible del mismo son $G = 80$ [GPa] y $\tau_w = 50$ [MPa], y el ángulo máximo girado por el eje no puede superar un grado en quince diámetros de longitud, halle el torque máximo que el eje puede transmitir. Si el eje descrito se aligera con un hueco coaxial, de radio $R_h = 0{,}08$ [m], halle los porcentajes en los que se reducen el torque máximo transmitido y el peso.

8. **Ejes motrices para la hélice de un barco.** Un buque cuenta con una turbina que gira a una velocidad angular de $\omega_1 = 1.800$ [RPM] y entrega una potencia de $P = 8{,}5$ [MW]. La potencia se transmite mediante un eje circular reductor, de radio R_1, el cual, con una eficiencia del 90%, reduce la velocidad angular a $\omega_2 = 107$ [RPM]. Un

segundo eje, de radio R_2, transmite entonces la potencia hasta la hélice del barco. Si la tensión admisible del material de los ejes es $\tau_w = 350$ [MPa], halle los radios mínimos de éstos.

9. **Núcleo de un eje circular.** Un eje circular, de radio R, está sometido a un momento torsor T. Halle el radio a, del núcleo circular del eje mencionado, que toma la enésima parte del momento torsor aplicado.

10. **Eje circular hueco.** Con un trozo de metal, de peso W, peso específico w y tensión admisible τ_w, se quiere fabricar un tubo circular, de longitud l. Calcule los radios interior r y exterior R del tubo.

11. **Momentos opuestos.** Un eje circular, de radio R, longitud l_2 módulo G, y tensión admisible τ_w, está empotrado en un extremo y sometido a un momento torsor T_2, en su extremo libre; a una distancia l_1 del empotramiento se aplica, además, un momento torsor T_1, de sentido opuesto a T_2. Si $2T_1 = T_2 = 1000$ [Nm], $2{,}5l_1 = l_2 = 5$ [m], $G = 83$ [GPa] y $\tau_w = 60$ [MPa], halle el radio del eje de manera que el ángulo de rotación en el extremo libre no supere 4°.

12. **Dos ejes circulares engranados.** Se tienen dos ejes, paralelos, del mismo material, cuya tensión admisible es τ_w. Uno, el ABC, de radio R_1, tiene empotrado el extremo C en una pared rígida, e insertado el A en una balinera en la que puede girar libremente; el otro, DEF, de radio R_2, tiene sus extremos D y F insertados en sendas balineras en las que pueden girar libremente. El eje ABC tiene soldado en el punto B un disco dentado y rígido, de radio $3a$, cuyos dientes engranan con los del disco dentado y rígido, de radio a, soldado en el punto E del eje DEF, de manera que la rotación de un eje se le transmite íntegramente al otro. Si $a = 0{,}05$ [m], $\tau_w = 55$ [MPa] y se aplica un momento torsor $T_0 = 1.500$ [Nm] al eje DEF, halle los radios mínimos de ambos ejes.

13. **Dos ejes circulares engranados.** Se tienen dos ejes, paralelos, del mismo material, cuyo módulo es G. Uno, el ABC, de radio R_1 y longitud $2l$, tiene sus extremos A y C insertados en sendas balineras en las que pueden girar libremente; el otro, DEF, de radio R_2 y longitud l, tiene empotrado el extremo F en una pared rígida, e insertado el D en una balinera en la que puede girar libremente. El eje ABC tiene soldado en el punto B un disco dentado y rígido, de radio a, cuyos dientes engranan con los del disco dentado y rígido, de radio $3a$, soldado en el punto E del eje DEF, de manera que la rotación de un eje se le transmite íntegramente al otro. Si $a = 0{,}10$ [m], $l = 1{,}0$ [m], $R_1 = 0{,}075$ [m], $G = 83$ [GPa] y se aplica un momento torsor, T_0, al eje ABC, que le provoca una tensión cortante máxima de $\tau_1 = 62$ [MPa], halle el valor de T_0; calcule, además, R_2, si la tensión máxima del eje DEF es $\tau_2 = 72$ [MPa], así como el ángulo girado por A.

14. **Extensómetro para determinar torque.** Una barra cilíndrico circular, de radio $R = 0{,}045$ [m] y módulo $G = 75$ [GPa], está sometida a un momento torsor T. Halle el valor de T cuando un extensómetro eléctrico, colocado en la superficie de la barra de manera que hace un ángulo $\alpha = 60°$ con el eje horizontal de la misma, mide una deformación lineal $\varepsilon = 250 \times 10^{-6}$.

15. **Ejes equivalentes.** Un eje circular hueco tiene radio exterior R_e, interior R_i y longitud l. Halle el radio mínimo de un eje macizo, de igual material y longitud, que sustituirá el eje hueco, de manera que ni la tensión máxima ni el ángulo girado por la torsión excedan los valores del diseño original.

16. **Ejes de igual peso.** Dos ejes rectos del mismo material, peso y longitud están sometidos a un momento torsor: uno es macizo, de radio c_0, y el otro es hueco, de radio interior c_1 y exterior c_2, donde $c_1 = nc_2$. Demuestre que la razón T_m/T_h, entre el torque aplicado al eje macizo, T_m, y el del hueco, T_h, es $\sqrt{1-n^2}/(1+n^2)$, si la tensión cortante máxima es igual en cada eje, y $1 - n^2/(1+n^2)$, cuando el ángulo girado es el mismo en cada eje.

17. **Eje elastoplástico ideal.** Con un material elastoplástico ideal, de módulo G y tensión de cedencia τ_y, se elabora un eje cilíndrico circular, de radio R, que se somete a un momento torsor. Calcule el momento torsor plástico, M_P, en la sección recta y el porcentaje por el que supera al momento de cedencia, M_Y.

6.2 Ejes macizos no cilíndricos circulares

1. **Eje troncónico.** Un eje, sometido al momento torsor T, tiene la forma de un tronco de cono, de longitud l y radios R_1 y R_2 en las bases. Si el módulo del material es G, halle el ángulo girado entre las bases del mismo.

2. **Eje troncónico.** Un eje, sometido al momento torsor T, tiene la forma de un tronco de cono, de longitud l y radios R_1 y 1,4 R_1 en las bases. Si el módulo del material es G, halle el porcentaje en el error que se comete al calcular el ángulo girado entre las bases del eje empleando el radio promedio de éstas.

3. **Diseño de un eje troncónico.** Un eje, de módulo G y tensión admisible τ_w, sometido al momento torsor T, tiene la forma de un tronco de cono, de longitud $20R$ y radios R y $2R$ en las bases. Si $G = 100$ [GPa], $T = 10.000$ [Nm] y $\tau_w = 80$ [MPa], y el ángulo girado entre las bases del eje no puede superar $\theta = 3°$, halle el mínimo valor de R.

4. **Diseño de un eje troncónico.** Una barra recta, AB, tiene la forma de un tronco de cono macizo, de longitud $l = 2{,}5$ [m], diámetros en sus bases d_A y d_B, donde $d_B = 1{,}5 d_A$, módulo de Young en cortante $G = 30$ [GPa] y tensión cortante admisible $\tau_w = 60$ [MPa]. Si la barra está sometida a un momento torsor $T = 3000$ [Nm] y el ángulo de torsión admisible es de $\theta_w = 3{,}0°$, halle el valor mínimo que debe tener d_A.

5. **Ejes cuadrado y circular.** Compare la resistencia y la rigidez a la torsión de dos ejes de iguales material, longitud y área de la sección recta, cuando uno es circular y cuadrado el otro.

6. **Ejes cuadrado y elíptico.** Compare la resistencia y la rigidez a la torsión de dos ejes de iguales material, longitud y área de la sección recta, cuando uno es circular y elíptico el otro; en este último el radio mayor es el doble del menor.

7. **Eje cuadrado doblemente empotrado.** Un eje prismático, de longitud l, sección cuadrada, de lado a, tensión admisible τ_w y módulo G, está empotrado entre dos paredes rígidas y sometido a un momento torsor T_0, aplicado en la dirección del eje del prisma en un punto que dista $l/3$ de una pared. Halle, ignorando las tensiones normales introducidas por las paredes, el valor mínimo que puede tener el lado de la sección cuadrada y el ángulo que gira, con respecto a una pared, la sección recta del eje en la que se aplicó el momento torsor.

6.3 Ejes circulares hiperestáticos

1. **Coaxial de dos materiales.** Un tubo de bronce, de radio exterior R_e, interior R_i y módulo G_b, se coloca, bajo presión, sobre una barra de acero, de módulo G_a, para formar un eje compuesto que trabaja como una unidad, tiene longitud l y se somete al momento torsor T. Si $G_a = 2G_b = 80$ [GPa], $l = 1$ [m], $R_e = 0{,}10$ [m], $R_i = 0{,}05$ [m], $\tau_{wa} = 1{,}25\tau_{wb} = 100$ [MPa], halle el torque máximo que puede aplicarse al conjunto y el ángulo máximo en el que éste puede retorcerse.

2. **Coaxial de dos materiales.** Un tubo de aluminio, de radio exterior R_e, interior R_i y módulo G_{al}, se coloca, bajo presión, sobre una barra de acero, de módulo G_{ac}, para formar un eje compuesto que trabaja como una unidad, tiene longitud l y se somete al momento torsor T. Si $G_{ac} = 3G_{al} = 78$ [GPa], $l = 1$ [m], $R_e = 0{,}15$ [m], $R_i = 0{,}05$ [m] y $T = 20$ [kNm], halle las tensiones cortantes máximas en el acero y el aluminio, y el ángulo total rotado por el eje.

3. **Coaxial de dos materiales.** Un tubo, de radio exterior R_1, interior R_2, módulo G_1 y tensión admisible τ_{w1}, se coloca, bajo presión, sobre una barra maciza, de módulo G_2 y tensión admisible τ_{w2}, para formar un eje compuesto que trabaja como una unidad, tiene longitud l y se somete al momento torsor T. Si $G_1 = 2G_2 = 80$ [GPa], $\tau_{w1} = 3{,}5\tau_{w12} = 50$ [MPa], $l = 1$ [m], $R_1 = 1{,}25R_2$ y $T = 10000$ [Nm], halle las tensiones cortantes máximas en ambos materiales, el valor mínimo de los radios R_1 y R_2, y el ángulo total rotado por el eje.

4. **Eje circular doblemente empotrado.** Un eje cilíndrico circular, de radio R y longitud $3l$, tensión admisible τ_w y módulo G, está empotrado entre dos paredes rígidas y sometido a torsión por efecto de dos fuerzas F y $2F$, aplicadas mediante sendas barras, de longitudes iguales a l, conectadas al eje cilíndrico en puntos que distan l, respectivamente, de cada pared, de sentidos opuestos y cuyas direcciones son paralelas al eje Z. Si $G = 75$ [GPa], $\tau_{w1} = 50$ [MPa], $l = 1$ [m] y $F = 1000$ [N], dibuje el diagrama de torsión y halle el radio mínimo que debe tener el eje y el ángulo máximo rotado por el mismo.

5. **Eje circular doblemente empotrado.** Un eje cilíndrico circular, de radio R y longitud $3l$, tensión admisible τ_w y módulo G, está empotrado entre dos paredes rígidas y sometido a torsión por efecto de dos momentos torsores de igual sentido, T_0 y $2T_0$, aplicados al eje en puntos que distan l, respectivamente, de cada pared. Si $G = 50$ [GPa], $\tau_{w1} = 20$ [MPa], $l = 1$ [m] y $T_0 = 10000$ [Nm], dibuje el diagrama de torsión y halle el radio mínimo que debe tener el eje y el ángulo máximo rotado por el mismo.

6. **Eje circular doblemente empotrado y torsión distribuida.** Un eje cilíndrico circular, de longitud l, radio R y módulo G, está empotrado en sus extremos a sendas paredes rígidas y soporta en su superficie un momento torsor distribuido por unidad de longitud, $t(x)$, cuya intensidad varía linealmente desde cero en una pared hasta t_0 en la otra. Halle las reacciones en las paredes, el radio del eje cuando la tensión cortante admisible del material es τ_w, y el ángulo máximo girado por aquél.

7. **Eje circular escalonado y doblemente empotrado.** Un eje cilíndrico circular está formado por dos segmentos coaxiales contiguos; el primero tiene longitud l_1, radio R_1 y módulo G_1, y el segundo, longitud l_2, radio R_2 y módulo G_2. El eje está empotrado entre dos paredes rígidas y sometido a un momento torsor T_0, aplicado en el punto del eje donde se conectan ambos segmentos. Halle las reacciones en las paredes, la tensión cortante máxima en cada segmento y el ángulo que gira, con respecto a una pared, la sección recta del eje en la que se aplica el momento torsor.

8. **Eje circular escalonado y doblemente empotrado.** Un eje cilíndrico circular está formado por dos segmentos coaxiales contiguos; el primero tiene longitud l_1, radio R_1, módulo G_1 y tensión admisible τ_{w1}, y el segundo, longitud l_2, radio R_2, módulo G_2 y tensión admisible τ_{w2}. El eje está empotrado entre dos paredes rígidas y sometido a un momento torsor T_0, aplicado en el punto del eje donde se conectan ambos segmentos. Si $R_2 = 2R_1$, $2l_1 = 3l_2$, $2G_1 = G_2$ $3\tau_{w1} = \tau_{w2}$, halle el valor mínimo de los radios de los segmentos y el ángulo que gira, con respecto a una pared, la sección recta del eje en la que se aplicó el momento torsor.

9. **Eje circular escalonado y doblemente empotrado.** Un eje cilíndrico circular está formado por dos segmentos coaxiales contiguos; el primero tiene longitud $2l$, radio R_1 y módulo G_1, y el segundo, longitud l, radio R_2 y módulo G_2. El eje está empotrado entre dos paredes rígidas y sometido a un momento torsor T_0, aplicado en el punto del eje donde se conectan ambos segmentos. Si $l = 0{,}80$ [m], $R_2 = 0{,}015$ [m], $T_0 = 680$ [Nm], $G_1 = 39$ [GPa] y $G_2 = 75$ [GPa], halle R_1 para que las reacciones en los extremos empotrados de los ejes sean iguales, las tensiones cortantes máximas en cada eje y el ángulo que gira, con respecto a una pared, la sección recta del eje en la que se aplicó el momento torsor.

10. **Eje circular escalonado y doblemente empotrado.** Un eje cilíndrico circular está formado por dos segmentos coaxiales contiguos; el primero tiene longitud l_1, radio R_1 y módulo G_1, y el segundo, longitud l_2, radio R_2 y módulo G_2. El eje está empotrado entre dos paredes rígidas y sometido a un momento torsor T_0, aplicado en el punto del eje donde se conectan ambos segmentos. Si $R_1 = 0{,}04$ [m], $R_2 = 0{,}025$ [m], $G_1 = 42$ [GPa] y $G_2 = 84$ [GPa], halle la relación l_1/l_2 para que ambos materiales trabajen a la máxima tensión posible, y el T_0 respectivo.

11. **Eje circular escalonado y doblemente empotrado.** Un eje cilíndrico circular está formado por dos segmentos coaxiales contiguos, del mismo material, con módulo G y tensión admisible τ_w; el primero, de longitud $3l$ y radio R_1, y el segundo, de longitud l y radio R_2. El eje está empotrado entre dos paredes rígidas y sometido a un momento torsor T_0, aplicado en el punto donde se conectan ambos segmentos. Si $l = 1{,}50$ [m], $R_2 = 0{,}03$ [m], $T_0 = 750$ [Nm], $G = 85$ [GPa] y $\tau_w = 40$ [MPa], halle el menor valor que puede tomar R_1; tome en cuenta, además, que el ángulo máximo que puede retorcerse el primer eje es de $\theta = 3°$.

12. **Eje circular escalonado y doblemente empotrado.** Un eje cilíndrico circular, ACB, está empotrado entre dos paredes rígidas en los extremos A y B, y formado por dos segmentos coaxiales consecutivos unidos en C. El segmento AC tiene radio $R_1 = 0{,}008$ [m] y longitud $l_1 = 0{,}125$ [m], y el segmento CB tiene radio $R_2 = 0{,}010$ [m] y longitud $l_2 = 0{,}250$ [m]. Si la tensión cortante permisible en el eje escalonado es de $\tau_w = 60$ [MPa], ¿cuál es el torque máximo que se puede aplicar al eje en el punto C, de unión de los dos segmentos?

13. **Eje circular escalonado y doblemente empotrado.** Un eje cilíndrico circular, ACDB, está empotrado entre dos paredes rígidas en los extremos A y B, y formado por tres segmentos coaxiales consecutivos unidos en C y D. El segmento AC tiene radio $2R$, longitud $2l$, módulo G y tensión admisible τ_w; el segmento CD tiene radio R, longitud l, módulo $2G$ y tensión admisible $2\tau_w$; el segmento DB tiene radio $3R$, longitud $3l$, módulo $3G$ y tensión admisible $0{,}5\tau_w$. El eje está sometido a un momento torsor T_0, aplicado en el punto donde se conectan los segmentos AC y CD, y a un momento torsor $2T_0$, aplicado en el punto donde se conectan los segmentos CD y DB, que tienen iguales sentidos. Halle las reacciones en los extremos empotrados de los ejes, el valor mínimo que puede tomar R y el ángulo máximo girado.

14. **Eje circular escalonado y doblemente empotrado.** Un eje cilíndrico circular, ACDB, está empotrado entre dos paredes rígidas en los extremos A y B, y formado por tres segmentos coaxiales consecutivos del mismo material, cuyo módulo es G y tiene una tensión admisible τ_w, unidos en C y D. El segmento AC tiene inercia I_0 y longitud l, el segmento CD tiene inercia $2I_0$ y longitud l, y el segmento DB tiene inercia I_0 y longitud l. El eje compuesto está sometido a un momento torsor T_0, aplicado en el punto donde se conectan los segmentos AC y CD, y a un momento torsor $2T_0$, aplicado en el punto donde se conectan los segmentos CD y DB, que tienen iguales sentidos. Halle las reacciones en los extremos empotrados de los ejes, el valor mínimo que puede tomar I_0 y el ángulo máximo girado.

15. **Eje circular escalonado y doblemente empotrado, con torsión distribuida.** Un eje cilíndrico circular está formado por dos segmentos coaxiales contiguos del mismo material; el primero tiene longitud l y momento polar de inercia I_0, y el segundo longitud l e inercia $2I_0$. El eje está empotrado entre dos paredes rígidas y sometido a un momento torsor distribuido por unidad de longitud, $t(x)$, cuya intensidad varía linealmente desde $2t_0$ en una pared hasta t_0 en la otra. Halle las reacciones en las paredes, el radio de la barra cuando la tensión cortante admisible del material es τ_w, y el ángulo máximo girado por la barra.

16. **Eje circular escalonado, doblemente empotrado y elastoplástico ideal.** Un eje cilíndrico circular está formado por dos segmentos coaxiales contiguos, de diámetros d y $2d$, e iguales material y longitud l. El eje está empotrado entre dos paredes rígidas, su material es elastoplástico ideal, con tensión cortante de cedencia τ_y, y está sometido a un momento torsor T_0, aplicado en el punto del eje donde se conectan ambos segmentos. Halle las reacciones en las paredes en función de T_0 y, si $l = 0{,}10$ [m] y $\tau_y = 140$ [MPa], y se usa un factor de seguridad $n = 2$, el valor admisible máximo de T_0 para que el eje escalonado se mantenga en la zona elástica; halle, también, el valor admisible máximo de T_0 cuando el cálculo se basa en la carga de colapso.

6.4 Ejes delgados y cerrados

1. **Ejes circular y rectangular delgado.** Un eje circular macizo, de diámetro d, se va a sustituir por un tubo rectangular delgado, de dimensiones d y $2d$ en la línea media de la sección recta, y espesor t. Halle el espesor mínimo requerido en el tubo, de manera que la tensión cortante en éste no exceda la tensión cortante máxima de la barra sólida.

2. **Ejes delgados, cuadrado y circular.** Compare la resistencia y la rigidez a la torsión de dos tubos de pared delgada, del mismo material, longitud, espesor y peso, cuando uno es circular y cuadrado el otro.

3. **Eje triangular delgado.** Un tubo prismático se elabora al doblar apropiadamente una lámina metálica delgada, de espesor t, módulo G y tensión admisible τ_w, y se somete a un momento torsor T_0. La sección recta resultante es un triángulo equilátero, de lado b en la línea media. Si $b = 0{,}0254$ [m], $t = 0{,}0019$ [m], $G = 80$ [GPa] y $\tau_u = 55$ [MPa], halle el máximo valor que puede tomar T_0 y, en ese caso, el ángulo que el eje gira por unidad de longitud.

4. **Eje delgado y de sección compuesta.** Un tubo prismático se elabora al doblar apropiadamente una lámina metálica delgada, de longitud l, espesor t y tensión admisible τ_w, y se somete a un momento torsor T_0. La sección recta resultante del tubo es de una sola celda, la cual está formada por dos rectángulos adosados; el primero, de lados a y b en la línea media, y el segundo, de lados c y d en la línea media. Si $l = 2{,}5$ [m], $b = 0{,}15$ [m], $c = 0{,}075$ [m], $d = 0{,}05$ [m], $t = 0{,}0015$ [m], $\tau_u = 40$ [MPa] y $T_0 = 500$ [Nm], halle el menor valor que puede tomar la dimensión a y, con ese valor, el ángulo total girado por el eje.

5. **Eje delgado y de sección compuesta.** Un tubo se elabora al doblar apropiadamente una lámina metálica delgada, de espesor t y tensión admisible τ_w, y se somete a un momento torsor T_0. La sección recta resultante es una sola celda, formada por un rectángulo y un semicírculo; el primero, de lados d y b en la línea media, y el segundo, de diámetro d en la línea media. Si $d = 0{,}25$ [m], $b = 0{,}075$ [m], $\tau_u = 40$ [MPa] y $T_0 = 500$ [Nm], halle el menor valor que puede tomar el espesor.

6. **Eje delgado y de sección compuesta.** Un tubo se elabora al doblar apropiadamente una lámina metálica delgada, de espesor t y tensión admisible τ_w, y se somete a un momento torsor T_0. La sección recta resultante es una sola celda, formada por un rectángulo y dos semicírculos a los lados de éste; el primero, de lados a y d en la línea media, y los segundos, de diámetros iguales a d en la línea media. Si $d = 0{,}04$ [m], $t = 0{,}002$ [m], $\tau_u = 70$ [MPa] y $T_0 = 500$ [Nm], halle el menor valor que puede tomar a.

7. **Eje rectangular delgado y con torsión distribuida.** Un tubo prismático, de módulo G, tiene empotrado un extremo y libre el otro, y soporta un momento torsor distribuido por unidad de longitud, $t(x)$, cuya intensidad varía linealmente desde t_0 en el extremo empotrado hasta cero en el otro. La sección recta del tubo es un rectángulo, de base $50t$ y altura $30t$ en la línea media, y de espesores $2t$, en los lados verticales, y $4t$ en los horizontales. Halle el ángulo total que el eje gira.

8. **Eje elíptico delgado y con torsión distribuida.** Un eje cilíndrico elíptico, delgado, de longitud $l = 50a$, semiejes a y $2a$ en la línea media, espesor $t = a/20$ y módulo de Young en cortante G, tiene uno de sus extremos empotrado en una pared rígida y libre el otro; además, está sometido en su superficie a un momento torsor distribuido por unidad de longitud, $t(x)$, cuya intensidad varía linealmente desde cero en el extremo empotrado hasta t_0 en el otro. Halle la tensión cortante máxima en el eje, el ángulo total que gira el extremo libre de éste y la energía potencial de torsión que acumula.

9. **Eje troncónico delgado.** Un eje delgado, de espesor t, sometido al momento torsor T_0, tiene la forma de un tronco de cono, de longitud l y radios R_1 y R_2 en las bases. Si el módulo del material del eje es G, halle el ángulo girado entre las bases del mismo.

10. **Eje troncopiramidal delgado.** Un eje delgado, de espesor t, sometido al momento torsor T_0, tiene la forma de un tronco de pirámide de sección cuadrada, de longitud l y lados a y b en las bases. Si el módulo del material del eje es G, halle el ángulo girado entre las bases del mismo.

11. **Eje troncopiramidal delgado.** Un eje delgado, de espesor t, sometido al momento torsor T_0, tiene la forma de un tronco de pirámide de sección cuadrada, de longitud $50a$ y lados a y $2a$ en las bases. Si el módulo del material

del eje es G y su tensión admisible es τ_w, halle el valor mínimo que puede tomar a y, en tal caso, el ángulo girado entre las bases del eje.

12. **Eje rectangular delgado y de dos espesores.** Un tubo prismático, de módulo G y tensión admisible τ_w, está sometido a un momento torsor T_0. La sección recta del tubo es un rectángulo, de base a y altura b en la línea media, y de espesores t, en los lados verticales, y $2t$ en los horizontales. Si $a = 0{,}150$ [m], $b = 0{,}200$ [m], $t = 0{,}010$ [m], $G = 80$ [GPa] y $\tau_w = 90$ [MPa], halle el máximo valor que puede tomar T_0 y, en ese caso, el ángulo que el eje gira por unidad de longitud.

13. **Eje circular delgado y de dos espesores.** Un tubo cilíndrico, de radio medio R, está sometido a un momento torsor T_0; los espesores de las mitades superior e inferior del tubo son t_1 y t_2, y el módulo de Young en cortante es G. Si $R = 0{,}25$ [m], $t_1 = 0{,}005$ [m], $t_2 = 0{,}0075$ [m], $T = 13{,}6$ [kNm] y $G = 75$ [GPa], halle la tensión cortante máxima y el ángulo girado por unidad de longitud.

14. **Eje circular delgado, de tres materiales y tres espesores.** La superficie de un tubo cilíndrico, de radio medio R y sometido a un momento torsor T, está formada, en arcos iguales de 120°, por tres materiales, de espesores t_1, t_2 y t_3, y cuyos módulos de Young en cortante son G_1, G_2 y G_3. Halle la tensión cortante en cada porción y el ángulo girado por unidad de longitud.

15. **Eje delgado con sección recta de dos celdas.** La sección recta de un eje prismático, de longitud l, sometido a un momento torsor T_0, es delgada y está formada por dos celdas cuadradas, de lado a en la línea media: la primera tiene espesores t_1, t_3 y t_4 en los lados no compartidos, y t_2 en el tímpano común, y la segunda tiene espesores t_3, t y t_5 en los lados no compartidos. Si G es el módulo de Young en cortante y τ_w la tensión admisible del material, halle el máximo T_0 que puede aplicarse y al máximo ángulo que puede girar el eje.

16. **Eje delgado con sección recta de tres celdas.** La sección recta de un eje prismático sometido a un momento torsor T_0, es delgada, de espesor uniforme t, y multicelular, ya que está formada por tres celdas consecutivas: la primera es un triángulo isósceles, de base $2b$ y altura$2b$, la central es un rectángulo, de base $2b$ y altura b, y la tercera es una semicircunferencia de radio $2b$; las celdas contiguas comparten un tímpano de longitud $2b$. Si la tensión cortante admisible del material es τ_w, halle los flujos de cizalladura en los tímpanos y bordes exteriores de la sección, y el espesor mínimo de la misma.

17. **Eje circular escalonado, delgado y doblemente empotrado.** Un eje cilíndrico circular está formado por dos segmentos coaxiales contiguos, de pared delgada, cerrados y de espesor t; el primero, tiene longitud l_1, radio en la línea media R_1, módulo G_1 y tensiones admisibles σ_{w1} y τ_{w1}; el segundo, es de longitud l_2, radio R_2, módulo G_2 y tensiones admisibles σ_{w2} y τ_{w2}. El eje está empotrado entre dos paredes rígidas y sometido a un momento torsor T_0, aplicado en el punto del eje donde se conectan ambos segmentos. Si $l_1 = 2l_2$ $R_1 = 2R_2$, $4G_1 = G_2$, $\sigma_{w1} = 2\sigma_{w2}$ y $4\tau_{w1} = \tau_{w2}$, halle las reacciones en las paredes, el ángulo girado por el primer eje y el espesor mínimo que puede tener el eje escalonado.

18. **Eje cuadrado, delgado y doblemente empotrado.** Un eje prismático hueco, de pared delgada, cerrado y con espesor t, de sección cuadrada cuyo lado es a en la línea media, tiene longitud $3l$, módulo G y tensión admisible τ_w. El eje está empotrado entre dos paredes rígidas y sometido a un momento torsor T_0, aplicado en un punto que dista l de una pared. Si $t = a/20$. halle, ignorando las tensiones normales introducidas por las paredes, las reacciones en éstas, el ángulo máximo girado por el eje y el valor mínimo que puede tomar a.

19. **Eje cuadrado, delgado y doblemente empotrado.** Un eje prismático hueco, de pared delgada, cerrado y de sección cuadrada, cuyo lado es a en la línea media, de espesor $a/40$ en los lados verticales y $a/20$ en los lados horizontales, tiene longitud $3l$, módulo G y tensión admisible τ_w. El eje está empotrado entre dos paredes rígidas y sometido a momentos torsores $3T_0$ y T_0, opuestos entre sí y aplicados en sendos puntos que distan l de una de las paredes. Halle, ignorando las tensiones normales introducidas por las paredes, las reacciones en éstas, el ángulo máximo girado por el eje y el valor mínimo que puede tomar a.

20. **Eje triangular, delgado y doblemente empotrado.** Un eje prismático hueco, de pared delgada, cerrado y con espesor t, de sección en forma de triángulo equilátero, cuyo lado es a en la línea media, tiene longitud $3l$, módulo G y tensiones admisibles σ_w y τ_w. El eje está empotrado entre dos paredes rígidas y sometido a un momento torsor T_0, aplicado en un punto que dista l de una pared. Si $\sigma_w = 3\tau_w = \sigma_0$ y $t = a/20$, halle, ignorando las tensiones normales introducidas por las paredes, las reacciones en éstas, el ángulo máximo girado por el eje y el valor mínimo que puede tomar t.

6.5 Ejes delgados y abiertos

1. **Ejes circulares delgados, abierto y cerrado.** Compare la resistencia y la rigidez a la torsión de dos tubos circulares de pared delgada, del mismo material, longitud, espesor y peso, cuando uno es abierto y cerrado el otro.

2. **Eje de sección en I asimétrica.** La sección recta de un eje prismático, sometido a un momento torsor T_0, es delgada y tiene forma de I; en ésta, el alma es un rectángulo, de espesor t y altura $4a$, y las aletas son rectángulos iguales, de espesor t y base $3a$, que se extienden $2a$ y a a los lados de la línea media de la aleta. Halle la tensión cortante máxima que se presenta en esa sección, el ángulo que ésta gira por unidad de longitud y el centro de cizalladura de la misma.

3. **Eje delgado de sección en C.** La sección recta de un eje prismático, de longitud l, sometido a un momento torsor T_0, es delgada y tiene forma de C; en ésta, el alma es un rectángulo, de lados $22t$ y t, y las aletas son rectángulos iguales, de lados $20t$ y t. Halle la tensión cortante máxima y, si el módulo de Young en cortante del material es G, el ángulo que rota el eje.

4. **Eje delgado de sección en U.** La sección recta de un eje prismático, sometido a un momento torsor T_0, es delgada y tiene forma de U; en ésta, el alma es un rectángulo, de lados $25t$ y $2t$, y las aletas son rectángulos iguales, de lados $15t$ y t. Si la tensión admisible del material es τ_w, halle el valor mínimo que puede tomar t.

5. **Eje de sección en U, delgado y doblemente empotrado.** La sección recta de un eje prismático de pared delgada, de longitud $3l$, tiene forma de U y está empotrado a dos paredes rígidas; en aquélla, el alma es un rectángulo, de lados $20t$ y t, y las aletas son rectángulos iguales, de lados $10t$ y t. Si el material tiene módulo de cizalladura G y sobre el eje obra un momento torsor externo T_0, aplicado a una distancia l de una pared, halle, ignorando las tensiones normales introducidas por las paredes, las reacciones en éstas y el ángulo máximo rotado por la sección recta del eje con respecto a una pared.

6.6 Torsión y otras solicitaciones

1. **Rueda zunchada sometida a torsión.** Una rueda, de radio R_r, se zuncha con una llanta, de espesor t, ancho l, radio interior R_l y módulo de Young E, que se coloca en caliente y la comprime, al contraerse, durante el enfriamiento. Si se supone que la rueda es indeformable. que $R_r = 0{,}07505$ [m], $t = 0{,}01$ [m], $l = 0{,}08$ [m], $R_l = 0{,}075$ [m] y $E = 200$ [GPa], y que el coeficiente de rozamiento entre la llanta y la rueda es $\nu = 0{,}3$, calcule el momento torsor necesario para hacer girar, resbalando, la llanta sobre la rueda.

2. **Tracción y torsión sobre un eje cilíndrico.** Un eje cilíndrico de sección circular, de radio R, transmite, simultáneamente, una carga de tracción P y un momento torsor T. Si $R = 0{,}05$ [m], $T = 100.000$ [Nm] y $P = 600.000$ [N], halle los valores máximos de las tensiones normal y cortante en el eje.

3. **Tracción y torsión sobre un eje cilíndrico.** Un eje cilíndrico de sección circular, de radio R y tensión de cedencia σ_Y, transmite, simultáneamente, una carga de tracción P y un momento torsor T. Si $\sigma_Y = 250$ [MPa], $T = 100.000$ [Nm] y $P = 200.000$ [N], y se usa un factor de seguridad $n = 2$, calcule el menor valor que puede tomar R usando la teoría de Tresca y la teoría de la máxima energía de distorsión por unidad de volumen.

4. **Torsión sobre un tanque de agua.** Un tanque cilíndrico circular, de eje vertical, altura h y radio en la línea media, R, está lleno de agua, de peso específico ω, sometido a un momento torsor T y la tensión última del material es σ_w. Si $h = 15$ [m], $R = 4{,}5$ [m], $\omega = 10.000$ [Nm^{-3}], $T = 5.000$ [Nm] y $\sigma_u = 400$ [MPa], y se usa un factor de seguridad $n = 5$, halle, usando la teoría de Tresca, el espesor mínimo que debe tener la pared del tanque.

5. **Torsión sobre una caldera.** Una caldera con la forma de una membrana cilíndrica circular, de radio R en la línea media y longitud l, soporta una presión manométrica interior p_0 y un momento torsor T en la dirección del eje de simetría de la misma; la tensión admisible del material es σ_w Si $R = 1$ [m], $l = 3$ [m], $p_0 = 100.000$ [Pa], $T = 5.000$ [Nm] y $\sigma_w = 150$ [MPa], halle, usando la teoría de Tresca, el espesor mínimo que debe tener la pared cilíndrica del tanque.

6. **Torsión sobre una caldera.** Una caldera con la forma de una membrana cilíndrica circular, de radio R en la línea media y longitud l, soporta una presión manométrica interior p_0 y un momento torsor T en la dirección del eje de simetría de la misma; la tensión admisible del material es σ_w Si $R = 1$ [m], $l = 3$ [m], $p_0 = 650.000$ [Pa], $T = 120.000$ [Nm], $\mu = 1/3$ y $\sigma_w = 150$ [MPa], halle, usando la teoría de la máxima energía de distorsión por unidad de volumen y un factor de seguridad $n = 2$, el espesor mínimo que debe tener la pared cilíndrica del tanque.

7. **Torsión y carga axial en caldera.** Una caldera cilíndrica a presión, de longitud $l = 1$ [m], radio medio $R = 0{,}5$ [m] y espesor $t = 0{,}003$ [m], está sometida a una presión manométrica $p_0 = 3{,}5$ [MPa], a un momento torsor $T = 500$ [Nm], que obra a lo largo del eje de aquél, y a una fuerza axial de tracción P. Halle el valor máximo que puede tomar la fuerza P si la tensión normal admisible en la pared de la caldera es $\sigma_w = 70$ [MPa].

CAPÍTULO 7

DIAGRAMAS DE CIZALLADURA Y MOMENTO FLECTOR

7.1 Vigas en voladizo

1. **Viga en voladizo, con carga uniforme.** Una viga, ABC, tiene empotrado el extremo A y libre el C; entre ambos se aplica una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, y en B, donde $x = l$, obra una fuerza $F_0 = p_0 l$, todas dirigidas hacia abajo. Dibuje los diagramas de V y M.

2. **Viga con voladizo, con carga uniforme.** Una viga, ABCD, se apoya en una articulación en A, donde $x = 0$, y en un patín en C, donde $x = 2l$; el extremo D, donde $x = 3l$, está en voladizo. En el punto B, donde $x = l$, se aplica una fuerza F_0, y desde A hasta D una fuerza uniformemente repartida, de intensidad $p_0 = F_0 / l$, ambas dirigidas hacia abajo. Dibuje los diagramas de V y M.

3. **Viga en voladizo, con carga uniforme.** Una viga, ABCD, tiene el extremo A en voladizo, donde $x = 0$, y se empotra a una pared en D, donde $x = 9l$. Desde A hasta B, donde $x = 4l$, se aplica una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, y en C, donde $x = 6l$, obra una fuerza $F_0 = 2p_0 l$, todas dirigidas hacia abajo; además, en C se aplica un momento flector negativo, de valor $M_0 = 2p\,l^2$. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

4. **Viga en voladizo sostenida por cable.** Una viga, ABCD, tiene libre el extremo A, donde $x = 0$, articulado a una pared el extremo D, donde $x = 3l$, y en el punto B, donde $x = l$, hay una varilla vertical soldada a la viga, de longitud $l/4$, en cuyo extremo se ata un cable horizontal amarrado a la pared. Desde B hasta C, donde $x = 2l$, se aplica una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, y en los puntos A y C obran sendas fuerzas, $F_0 = p_0 l$, todas dirigidas hacia abajo. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

5. **Viga en voladizo, con carga triangular.** Una viga, ABC, tiene libre el extremo A, donde $x = 0$, y empotrado el extremo C, donde $x = 2l$. Desde A hasta B, donde $x = l$, se aplica una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, en B una fuerza $F_0 = p_0 l$ y desde B hasta C una fuerza uniformemente variada, cuya intensidad varía desde p_0 en B hasta $2p_0$ en C, todas dirigidas hacia abajo. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

6. **Mínimo del momento en viga en voladizo.** Una viga, ABC, está empotrada en el extremo A, donde $x = 0$, y tiene en voladizo su extremo C, donde $x = l$. Desde A hasta C se aplica una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, en el punto B, donde $x = l/2$, hay una fuerza, $F_0 = 10p_0 l$, ambas dirigidas hacia abajo y en el punto C hay una fuerza W dirigida hacia arriba. Halle el valor de W para que el momento flector máximo de la viga, en valor absoluto, sea el mínimo posible y dibuje los diagramas de V y M, con todos los detalle.

7.2 Vigas con voladizos

1. **Viga con voladizo y carga uniforme.** Una viga, ABCD, se apoya en una articulación en el extremo A, donde $x = 0$, y en un patín en C, donde $x = 2l$; el extremo D, donde $x = 3l$, está en voladizo. En el punto B, donde $x = l$, se aplica una fuerza F_0, y desde B hasta D una fuerza uniformemente repartida, de intensidad $p_0 = F_0 / l$, ambas dirigidas hacia abajo. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

2. **Viga con voladizo y carga uniforme.** Una viga, ABCD, se apoya en una articulación en el extremo A, donde $x = 0$, y en un patín en C, donde $x = 2l$; el extremo D, donde $x = 3l$, está en voladizo. En el punto B, donde $x = l$, se aplica una fuerza $3F_0$, y desde C hasta D una fuerza uniformemente repartida, de intensidad $p_0 = F_0 / l$, ambas dirigidas hacia abajo. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

3. **Viga con voladizo y carga uniforme.** Una viga, ABC, tiene el extremo A en voladizo, donde $x = 0$, se apoya en una articulación en B, donde $x = l$, y en un patín en C, donde $x = 3l$. Desde B hasta C se aplica una fuerza uniformemente repartida, de intensidad $p_0 = F_0 / l$, y en el punto A obra, además, la fuerza F_0, ambas dirigidas hacia abajo. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

4. **Viga con voladizo y cargas diversas.** Una viga, ABCDEF, tiene el extremo A en voladizo, donde $x = 0$ y se aplica la fuerza $F = p_0 l$ dirigida hacia arriba, se apoya en una articulación en B, donde $x = l$, y en un patín en F, donde $x = 5l$. En el punto C, donde $x = 1{,}5l$, se aplica la fuerza $F = p_0 l$, y desde el punto D, donde $x = 2l$, hasta el E, donde $x = 4l$, se aplica una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, ambas dirigidas hacia abajo; en E, además, obra un momento flector negativo, $M_0 = p\, l^2$. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

5. **Viga con voladizo y carga triangular.** Una viga, ABC, tiene el extremo A en voladizo, donde $x = 0$, se apoya en una articulación en B, donde $x = l$, y en un patín en C, donde $x = 3l$. Desde A hasta B se aplica una fuerza uniformemente variada, cuya intensidad cambia desde $2p_0$ en A hasta 0 en B, y desde B hasta C hay una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

6. **Viga con voladizo y carga triangular.** Una viga, ABC, tiene el extremo A en voladizo, donde $x = 0$, se apoya en una articulación en B, donde $x = l$, y en un patín en C, donde $x = 3l$. Desde A hasta C se aplica una fuerza uniformemente variada, cuya intensidad p varía desde 0, en A, hasta $p_0 = F_0 / l$, en C, y en el punto A obra, además, la fuerza F_0, ambas dirigidas hacia abajo. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

7. **Viga con voladizo y carga triangular.** Una viga, ABCD, tiene el extremo A en voladizo, donde $x = 0$, se apoya en una articulación en B, donde $x = l$, y en un patín en D, donde $x = 3l$. Desde A hasta B se aplica una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, desde C, donde $x = 2l$, hasta D se aplica una fuerza uniformemente variada, cuya intensidad varía desde 0, en C, hasta p_0, en D, y en C obra una fuerza $F_0 = 2p_0 l$, todas dirigidas hacia abajo; además, en B se aplica un momento flector positivo, de valor $M_0 = p\, l^2$. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

8. **Viga con voladizo y carga triangular.** Una viga, ABCDE, tiene el extremo A en voladizo, donde $x = 0$, se apoya en una articulación en B, donde $x = l$, y en un patín en E, donde $x = 4l$. Desde A hasta C, donde $x = 2l$, se aplica una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, desde D, donde $x = 3l$, hasta E se aplica una fuerza uniformemente variada, cuya intensidad varía desde 0, en D, hasta p_0, en E, y en D obra una fuerza $F_0 = 2p_0 l$, todas dirigidas hacia abajo; además, en D se aplica un momento flector positivo, de valor $M_0 = p\, l^2$. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

9. **Viga con voladizo y carga triangular.** Una viga, ABCDE, se apoya en una articulación en el extremo A, donde $x = 0$, y en un apoyo de bolita en D, donde $x = 3l$; el extremo E, donde $x = 4l$, está en voladizo. Desde A hasta B, donde $x = l$, y desde D hasta E se aplican sendas fuerzas uniformemente repartidas, de intensidades iguales a p_0, desde C, donde $x = 2l$, hasta D se aplica una fuerza unifor-

memente variada, cuya intensidad varía desde 0, en C, hasta p_0, en D, y en C obra una fuerza $F_0 = p_0 l$, todas dirigidas hacia abajo; además, en B se aplica un momento flector positivo, $M_0 = p\,l^2$. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

10. **Viga con voladizo y carga triangular.** Una viga, ABCD, se apoya en una articulación en el extremo A, donde $x = 0$, y en un patín en C, donde $x = 2l$; el extremo C, donde $x = 3l$, está en voladizo. Desde A hasta C se aplica una fuerza uniformemente variada, cuya intensidad varía desde p_0, en A, hasta 0, en C, desde C hasta D se aplica una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, y en B, donde $x = l$, obra una fuerza $F_0 = p_0 l$, todas dirigidas hacia abajo; además, en B se aplica un momento flector positivo, de valor $M_0 = p\,l^2$. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

11. **Viga con voladizo y cargas triangulares.** Una viga, ABCDE, se apoya en una articulación en el extremo A, donde $x = 0$, y en un patín en D, donde $x = 3l$; el extremo E, donde $x = 4l$, está en voladizo. Desde A hasta B, donde $x = l$, se aplica una fuerza uniformemente variada, cuya intensidad varía desde $2p_0$ en A hasta 0 en B, desde D hasta E se aplica otra fuerza uniformemente variada, cuya intensidad cambia desde 0 en D, hasta $2p_0$ en E, y en C, donde $x = 2l$, obra una fuerza $F_0 = p_0 l$, todas dirigidas hacia abajo; en C, además, se aplica un momento flector positivo, de valor $M_0 = p\,l^2$. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

12. **Viga con voladizo y cargas triangulares.** Una viga, ABCD, se apoya en una articulación en el extremo A, donde $x = 0$, y en un patín en C, donde $x = 2l$; el extremo D, donde $x = 3l$, está en voladizo. Desde A hasta C se aplica una fuerza uniformemente variada, cuya intensidad varía desde p_0, en A, hasta 0 en C, y desde C hasta D se aplica otra fuerza uniformemente variada, cuya intensidad varía desde 0, en C, hasta p_0 en D, y en B, donde $x = l$, obra una fuerza $F_0 = p_0 l$, todas dirigidas hacia abajo; en B, además, se aplica un momento flector positivo, de valor $M_0 = p\,l^2$. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

13. **Viga con voladizo y carga trapezoidal.** Una viga horizontal, ABCD, tiene el extremo A en voladizo, donde $x = 0$, se apoya en una articulación en B, donde $x = 3l$, y en un patín en D, donde $x = 9l$. Desde A hasta D se aplica una fuerza uniformemente variada, cuya intensidad varía desde $2p_0$ en A hasta $4p_0$ en D, y en C obra, además, una fuerza $F_0 = 10p_0 l$, todas dirigidas hacia abajo. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

14. **Viga con voladizo y cargas trapezoidales.** Una viga, ABCDE, tiene el extremo A en voladizo, donde se ubica el origen de coordenadas, se apoya en una articulación en B, donde $x = 2l$, y en un patín en E, donde $x = 10l$. Desde A hasta C, donde $x = 4l$, se aplica una fuerza uniformemente variada, cuya intensidad varía desde $2p_0$ en A hasta $5p_0$ en C, desde C hasta D, donde $x = 7l$, se aplica una fuerza uniformemente variada, cuya intensidad varía desde $5p_0$ en C hasta p_0 en E, desde D hasta E se aplica otra fuerza uniformemente variada, cuya intensidad varía desde p_0 en D hasta $2p_0$ en E, y en D obra, además una fuerza $F_0 = p_0 l$, todas dirigidas hacia abajo. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

15. **Viga con voladizos y carga uniforme.** Una viga, ABCD tiene en voladizos los extremos A, donde $x = 0$, y el D, donde $x = 9l$, se apoya en una articulación en B, donde $x = l$, y en un patín en C, donde $x = 7l$. Desde B hasta D se aplica una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, y en el punto A obra, además, la fuerza $F_0 = 2p_0 l$, ambas dirigidas hacia abajo. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

16. **Viga con voladizos y cargas triangulares.** Una viga, ABCD, tiene voladizos en el extremo A, donde $x = 0$, y el extremo D, donde $x = 3l$, se apoya en una articulación en B, donde $x = l$, y en un patín en C, donde $x = 2l$. Desde A hasta B se aplica una fuerza uniformemente variada, cuya intensidad cambia desde $2p_0$, en A, hasta p_0 en B, desde B hasta C obra una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, desde C hasta D se aplica otra fuerza uniformemente variada, cuya intensidad cambia desde p_0, en C, hasta $2p_0$ en D, y en D también obra una fuerza $F_0 = p_0 l$, todas dirigidas hacia abajo; en B, además, se aplica un momento flector positivo, de valor $M_0 = p\,l^2$. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

17. **Viga con voladizos y cargas triangulares.** Una viga, ABCDE, tiene voladizos en el extremo A, donde $x = 0$, y en el extremo E, donde $x = 4l$, y se apoya en una articulación en B, donde $x = l$, y en un patín en D, donde $x = 3l$. Desde A hasta C, donde $x = 2l$, se aplica una fuerza uniformemente variada, cuya intensidad cambia desde $2p_0$ en A hasta 0 en C, desde C hasta D se aplica una fuerza uniformemente distribuida, de intensidad p_0, desde D hasta E obra una fuerza uniformemente variada cuya intensidad varía desde p_0 en D hasta $2p_0$ en E, y en C se aplica una fuerza $F_0 = p_0 l$, todas dirigidas hacia abajo; en C, además, hay un momento flector positivo, de valor $M_0 = p\,l^2$. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

18. **Viga con voladizos y cargas triangulares.** Una viga, ABCD, tiene voladizos en el extremo A, donde $x = 0$, y en el extremo D, donde $x = 15l$, se apoya en una articulación en B, donde $x = 6l$, y en un patín en C, donde $x = 12l$. Desde A hasta B se aplica una fuerza distribuida, de valor total W, uniformemente variada y cuya intensidad, p, vale 0, en A, y desde C hasta D se aplica otra fuerza distribuida, de valor total W, uniformemente variada y cuya intensidad, p, vale 0, en C, ambas dirigidas hacia abajo. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

19. **Máximos iguales.** Una viga, ABCD, tiene en voladizos los extremos A, donde $x = 0$, y el D, donde $x = l + 2a$, se apoya en una articulación en B, donde $x = a$, y en un patín en C, donde $x = l + a$. Si desde A hasta D se aplica una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, halle la razón a/l para que sean iguales en magnitud el máximo momento negativo y el máximo momento que se presenta entre B y C.

7.3 Vigas simplemente apoyadas

1. **Viga simplemente apoyada, con carga uniforme.** Una viga, ABCD, tiene una articulación en el extremo A, donde $x = 0$, y un apoyo de patín en D, donde $x = 8l$. Desde C, donde $x = 2l$, hasta D se aplica una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, y en el punto B, donde $x = l$, obra, además, una fuerza igual a $F_0 = 15p_0 l$, ambas dirigidas hacia abajo. Dibuje los diagramas de V y M, con todos los detalles.

2. **Viga simplemente apoyada, con carga uniforme.** Una viga, ABCD, tiene una articulación en el extremo A, donde $x = 0$, y un apoyo de patín en D, donde $x = 3l$. Desde A hasta D se aplica una fuerza uniformemente repartida, de intensidad $p_0 = F_0/l$, y en los puntos B, donde $x = l$, y C, donde $x = 2l$, obran, además, sendas fuerzas iguales a F_0, todas dirigidas hacia abajo. Dibuje los diagramas de V y M, con todos los detalles.

3. **Viga simplemente apoyada, con carga uniforme.** Una viga, ABCD, tiene una articulación en el extremo A, donde $x = 0$, y un apoyo de patín en D, donde $x = l$. Desde B, donde $x = a$, hasta C, donde $x = l - a$, se aplica una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0. Dibuje los diagramas de V y M, con todos los detalles.

4. **Viga simplemente apoyada, con carga triangular.** Una viga, ABCD, se apoya en una articulación en el extremo A, donde $x = 0$, y en un patín en el extremo D, donde $x = 3l$. Desde A hasta B, donde $x = l$, se aplica una fuerza uniformemente variada, cuya intensidad varía desde p_0, en A, hasta 0, en B, y en C, donde $x = 2l$, se aplica una $F_0 = 2p_0 l$, todas dirigidas hacia abajo. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

5. **Viga simplemente apoyada, con carga triangular.** Una viga, ABC, se apoya en una articulación en el extremo A, donde $x = 0$, y en un patín en el extremo C, donde $x = 3l$. Desde A hasta B, donde $x = l$, se aplica una fuerza uniformemente variada, cuya intensidad cambia desde $2p_0$, en A, hasta 0, en B, desde B hasta C se aplica una fuerza uniformemente repartida de intensidad p_0, y en B obra, además, la fuerza $F_0 = p_0 l$, todas dirigidas hacia abajo. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

6. **Viga simplemente apoyada, con carga triangular.** Una viga, ABCD, se apoya en una articulación en el extremo A, donde $x = 0$, y en un patín en el extremo D, donde $x = 3l$. Desde A hasta B, donde $x = l$, se aplica una fuerza uniformemente repartida de intensidad p_0, desde C, donde $x = 2l$, hasta D se aplica una fuerza uniformemente variada, cuya intensidad varía desde 0, en C, hasta p_0, en D, y en C obra, además, la fuerza $F_0 = p_0 l$, todas dirigidas hacia abajo. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

7. **Viga simplemente apoyada, con cargas triangulares.** Una viga, ABCD, se apoya en una articulación en el extremo A, donde $x = 0$, y en un patín en el extremo D, donde $x = 3l$. Desde A hasta B, donde $x = l$, se aplica una fuerza uniformemente variada, cuya intensidad varía desde 0, en A, hasta p_0, en B, y desde B hasta C, donde $x = 2l$, se aplica otra fuerza uniformemente variada, cuya intensidad varía desde p_0, en B, hasta 0, en C, y en C obra, además, una fuerza $F_0 = 2p_0 l$, todas dirigidas hacia abajo. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

8. **Viga simplemente apoyada, con carga senoidal.** Una viga horizontal ABC, de longitud l, está apoyada simplemente en los extremos A, donde $x = 0$, y C, donde $x = l$. Desde A hasta C se aplica una fuerza distribuida, cuya intensidad varía según $p = p_0 \operatorname{sen}(\pi x/l)$, y en el punto B, donde $x = l/3$, obra, además, la fuerza $F_0 = p_0 l$, ambas dirigidas hacia abajo. Calcule las reacciones, halle las ecuaciones de V y M en toda la viga, y dibuje, con todos los detalles, los diagramas respectivos.

9. **Máximo del momento en viga simplemente apoyada.** Una viga horizontal, ABC, tiene una articulación en el extremo A, donde $x = 0$, y un apoyo de patín en C, donde $x = l$. Desde A hasta B, donde $x = u < l$, se aplica una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, desde B hasta C se aplica una fuerza uniformemente repartida, de intensidad $2p_0$, y en el punto B obra, además, la fuerza $F_0 = p_0 l$, todas dirigidas hacia abajo. Halle el valor de u para que el momento flector en B sea máximo y dibuje los diagramas de V y M, con todos los detalles.

10. **Viga con cargas móviles.** Una viga simplemente apoyada, AB, de longitud $10l$, soporta una vagoneta de dos ejes separados entre sí la distancia l, cada uno de los cuales transmite a la viga una fuerza F_0; el eje de la izquierda está colocada a una distancia arbitraria, u, del soporte izquierdo de la viga, A. Halle el valor de u para que el momento flector en la viga bajo el eje de la izquierda sea máximo, y el valor de ese máximo.

11. **Viga con cargas móviles.** Una viga simplemente apoyada, AB, longitud $l = 8$ [m], soporta dos fuerzas móviles, dirigidas hacia abajo, $F_0 = 7.500$ [N] y $2F_0$, separadas entre sí la distancia $d = 1{,}6$ [m]; la primera de ellas está colocada a una distancia arbitraria, u, del soporte izquierdo de la viga, A. Halle los valores de u para que la fuerza cortante o el momento flector en la viga sean máximos, y el valor de esos máximos.

12. **Diagrama conocido de cizalladura.** El diagrama de cizalladura de una viga simplemente apoyada, ABCD, de longitud $4l$, es así: desde A, donde $x = 0$ y la cizalladura vale F_0, hasta B, donde $x = 2l$ y la cizalladura es nula, la cizalladura varía linealmente; desde B hasta C, donde $x = 3l$, la cizalladura es cero; desde C hasta D, donde $x = 4l$, la cizalladura es uniforme y vale $-F_0$. Dibuje el diagrama de momento flector de la viga y halle el sistema de cargas que actúa sobre ella.

7.4 Otras vigas

1. **Viga empotrada y con articulación interna.** Una viga, ABC, tiene empotrado el extremo A, donde $x = 0$, una articulación interior en B, donde $x = 3l$, y se apoya en un patín en C, donde $x = 6l$. Desde B hasta C se aplica

una fuerza uniformemente repartida, de intensidad $p_0 = 2F_0/l$, y en el punto D, donde $x = l$, obra, además, la fuerza F_0, ambas dirigidas hacia abajo. Dibuje los diagramas de V y M, con todos los detalle.

2. **Barcaza cargada.** Una barcaza ABCDE, de fondo plano, flota en el agua y su longitud, desde A, donde $x = 0$, hasta E es de $3l$; la barcaza soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, que se extiende desde el punto B, donde $x = 0{,}5l$, hasta el punto C, donde $x = 4{,}5l$,y una fuerza concentrada, $F_0 = p_0 l$, aplicada en el punto D, donde $x = 2l$. Dibuje los diagramas de V y M, con todos los detalles.

3. **Represa pequeña.** El muro de cierre de una represa pequeña es una viga vertical, de ancho $l/2$ y altura $3l$, que se sostiene mediante una articulación en la base y un rodillo ubicado a una altura $2l$ de ésta. Si el peso específico el líquido es w y éste llega hasta el borde del muro, dibuje los diagramas de V y M en la viga, con todos los detalles.

CAPÍTULO 8

FLEXIÓN

8.1 Flexión uniaxial en secciones simétricas e isotrópicas

1. **Viga rectangular más eficiente.** De un cilindro de madera, de radio R, se cortará una viga rectangular, de base b y altura h. Halle la relación h/b para que la viga resultante sea la más resistente posible, o la más rígida.

2. **Sección recta para la viga más económica.** Se tienen tres vigas simplemente apoyadas, de longitud l, y el mismo material, de peso específico w y tensión admisible σ_w, diseñadas para soportar su propio peso; una es circular, de radio R, otra es cuadrada, de lado a, y la tercera es rectangular, de base b y altura $2b$. Halle la más económica.

3. **Sección recta para la viga más económica.** Para soportar un momento M_0, y del mismo material, se tienen cuatro vigas; una es de sección circular, de radio R, otra es cuadrada, de lado a, otra es rectangular, de base b y altura $2b$, y la última es una I, compuesta de tres rectángulos de lados t y$10t$. Halle la más económica.

4. **Máximo del momento en viga de sección cuadrada, con carga uniforme.** Una viga, ABC, se apoya en una articulación en A, donde $x = 0$, y en un patín en B, donde $x = l$; la sección recta de la viga es cuadrada, de lado b, y la tensión admisible del material es σ_w.. Desde A hasta el punto C, donde $x = u$, se aplica una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, entre los puntos C y B se aplica otra fuerza uniformemente repartida, de intensidad $2p_0$, y en el punto C obra, además, la fuerza $F_0 = p_0 l$, todas ellas dirigidas hacia abajo. Halle el valor de u para que el momento flector en C sea máximo; dibuje, luego, los diagramas de V y M y calcule el valor mínimo que puede tomar b.

5. **Viga de sección rectangular, con carga uniforme.** Una viga, ABCD, se apoya en una articulación en A, donde $x = 0$, y en un patín en D, donde $x = l$; la sección recta de la viga es rectangular, de lados b y $3b$, y la tensión admisible del material es σ_w. Desde A hasta el punto B, donde $x = a$, y desde el punto C, donde $x = l - a$, hasta D, se aplican sendas fuerzas uniformemente repartidas, de intensidades iguales a p_0, ellas dirigidas hacia abajo. Si $p_0 = 5.000$ [N/m], $l = 5$ [m], $a = 1,5$ [m] y $\sigma_w = 100$ [MPa], dibuje los diagramas de V y M, y halle el valor mínimo de b.

6. **Viga de sección rectangular, con carga uniforme y peso propio.** Una viga, ABC, de longitud $3l$, está apoyada en una articulación en A, donde $x = 0$, y en un apoyo de bolita en B, donde $x = 2l$, y el extremo C se encuentra en voladizo. La viga soporta una carga uniformemente distribuida en toda su longitud, de intensidad p_0 y dirigida hacia abajo, la sección recta de aquélla es rectangular, de ancho b y altura $2b$, la tensión admisible del acero es σ_w y el peso específico de éste es w. Si $l = 0,150$ [m], $p_0 = 3500$ [N / m], $\sigma_w = 60$ [MPa] y $w = 77.000$ [N / m^3], halle el valor mínimo de b despreciando el peso propio de la viga y sin despreciarlo.

7. **Viga de sección cuadrada, con carga triangular.** Una viga, ABCD, se apoya en una articulación en B, donde $x = l$, y en un patín en D, donde $x = 3l$, mientras que A, donde $x = 0$, está en voladizo; la sección recta de la viga es cuadrada, de lado b, y la tensión admisible del material es σ_w.. Desde A hasta D se aplica una fuerza uniformemente variada, que cambia desde $2p_0$ en A, hasta 0 en D, y en

C, donde $x = 2l$, obra la fuerza $F_0 = p_0 l$, ambas dirigidas hacia abajo. Dibuje los diagramas de V y M, y calcule el valor mínimo que puede tomar el área de la sección recta.

8. **Viga de sección rectangular, con carga triangular.** Una viga, ABC, de longitud $2l$, está apoyada en una articulación en A, donde $x = 0$, y en un apoyo de bolita en C, donde $x = 2l$, La viga soporta una carga uniformemente variada desde A, donde la intensidad es $2p_0$, hasta B, donde $x = l$, y la intensidad es 0; además, desde B hasta C soporta otra carga uniformemente repartida, de intensidad p_0, ambas dirigidas hacia abajo. La sección recta de la viga es rectangular, de ancho b y altura $2b$, y la tensión admisible del material es σ_w. Dibuje los diagramas de V y de M, y calcule el valor mínimo de b.

9. **Viga de sección rectangular hueca.** Una viga horizontal, ABCD, se apoya en una articulación en A, donde $x = 0$, y en un patín en D, donde $x = 3l$; la sección recta de la viga es rectangular y hueca, de base b y altura h en la línea media y espesor uniforme t, y la tensión admisible del material es σ_w. En el punto B, donde $x = l$, se aplica la fuerza $2F_0$, y en el punto C, donde $x = 2l$, se aplica la fuerza F_0, ambas dirigidas hacia abajo. Si $F_0 = 25$ [kN], $l = 1$ [m], $t = 0{,}008$ [m], $h = 0{,}15$ [m] y $\sigma_w = 150$ [MPa], halle el valor mínimo de b.

10. **Mínimo de los máximos.** Una viga, ABCD, de longitud $l = 18 + a$ [m], se apoya en una articulación en A, donde $x = 0$, y en un apoyo de bolita en C, donde $x = 18$ [m], mientras que el extremo D, donde $x = 18 + a$ [m], está en voladizo; en B, donde $x = 9$ [m], obra una fuerza $F_1 = 50.000$ [N], y en D actúa la fuerza $F_2 = 30.000$ [N], ambas dirigidas hacia abajo. Halle el valor de a para que el máximo momento flector en valor absoluto de la viga sea mínimo.

11. **Mínimo de los máximos.** Una viga, ABC, de longitud $l + a$, sección rectangular, de base b y altura $2b$, forjada en acero, cuyo peso específico es w, se apoya en una articulación en A, donde $x = 0$, y en un apoyo de bolita en B, donde $x = l$, mientras que el extremo C, donde $x = l + a$, está en voladizo. Halle el valor de a para que el máximo momento flector en valor absoluto de la viga sea mínimo y la tensión normal máxima correspondiente.

8.2 Flexión uniaxial en secciones simétricas y anisotrópicas

1. **Viga de sección rectangular y carga uniforme.** Una viga, ABC, tiene el extremo A en voladizo, donde $x = 0$, se apoya en una articulación en B, donde $x = l$, y en un patín en C, donde $x = 4l$; la sección recta de la viga es rectangular, de lados b y $2b$, y las tensiones admisibles del material en tracción y compresión son σ_{wt} y σ_{wc}. Desde B hasta C se aplica una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, y en el punto D, donde $x = 3l$, obra, además, la fuerza F_0, ambas dirigidas hacia abajo. Si $l = 2$ [m], $F_0 = 20.000$ [N], $p_0 = 50.000$ [N/m], $\sigma_{wt} = 30$ [MPa] y $\sigma_{wc} = 100$ [MPa], dibuje los diagramas de V y M, y halle el valor mínimo de b.

2. **Viga de sección rectangular hueca.** La sección recta de una viga es rectangular, de base a y altura $2a$, y tiene un agujero prismático y cuadrado, de lado b, con lados paralelos a los externos y cuyo borde superior se encuentra a la distancia a del borde superior de la viga. Si $a = 0{,}04$ [m] y $b = 0{,}03$ [m], y las tensiones admisibles del material en tracción y compresión son $\sigma_{wt} = 120$ [MPa] y $\sigma_{wc} = 150$ [MPa], halle el valor máximo, en valor absoluto, del momento flector que puede aplicarse a la sección.

3. **Viga de sección rectangular hueca.** Una viga, ABC, se apoya en una articulación en A, donde $x = 0$, y en un patín en C, donde $x = 3l$; la sección recta de la viga es rectangular, de base a y altura $2a$, y tiene un agujero prismático y cuadrado, de lado b, de lados paralelos a los externos y cuyo borde superior se encuentra a la distancia a del borde superior de la viga. En el punto B, donde $x = l$, se

aplica la fuerza F_0, dirigida hacia abajo, y las tensiones admisibles del material en tracción y compresión son σ_{wt} y σ_{wc}. Si $l = 1$ [m], $a = 0{,}04$ [m], $b = 0{,}03$ [m], $\sigma_{wt} = 120$ [MPa] y $\sigma_{wc} = 150$ [MPa], halle el valor máximo de F_0.

4. **Viga de sección circular y carga uniforme.** Una viga, ABC, tiene el extremo A en voladizo, donde $x = 0$, se apoya en una articulación en B, donde $x = l$, y en un patín en C, donde $x = 4l$; la sección recta de la viga es circular, de radio R, y las tensiones admisibles del material en tracción y compresión son σ_{wt} y σ_{wc}. Desde A hasta el punto D, donde $x = 2l$, se aplica una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, y en el punto E, donde $x = 4l$, obra, además, la fuerza F_0, ambas dirigidas hacia abajo. Si $l = 1$ [m], $F_0 = 20.000$ [N], $p_0 = 15.000$ [N / m], $\sigma_{wt} = 100$ [MPa] y $\sigma_{wc} = 50$ [MPa], dibuje los diagramas de V y M, y halle el valor mínimo de R.

5. **Viga de sección circular y carga uniforme.** Una viga, ABC, se apoya en una articulación en A, donde $x = 0$, y en un patín en B, donde $x = 4l$; la sección recta de la viga es circular, de radio R, y las tensiones admisibles del material en tracción y compresión son σ_{wt} y σ_{wc}. Desde A hasta el punto D, donde $x = 3l$, se aplica una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, y en el punto C, donde $x = 2l$, obra, además, la fuerza F_0, ambas dirigidas hacia abajo. Si $l = 1$ [m], $F_0 = 20.000$ [N], $p_0 = 15.000$ [N / m], $\sigma_{wt} = 100$ [MPa] y $\sigma_{wc} = 50$ [MPa], dibuje los diagramas de V y M, y halle el valor mínimo de R.

6. **Viga de sección en T.** Una viga, ABCD, tiene el extremo A en voladizo, donde $x = 0$, se apoya en una articulación en B, donde $x = 0{,}5l$, y en un patín en D, donde $x = 2{,}5l$; la sección recta de la viga es una T, cuyas aleta y alma son rectángulos iguales, de lados b y t. En los puntos A y C, donde $x = 1{,}5l$, se aplican sendas fuerzas iguales a F_0, ambas dirigidas hacia abajo. Si $l = 2$ [m], $b = 20 \times 10^{-2}$ [m] y $t = 5 \times 10^{-2}$ [m], y las tensiones admisibles del material en compresión y tracción son $\sigma_{wc} = 2\sigma_{wt} = 200$ [MPa], halle el máximo valor que puede tomar la fuerza F_0.

7. **Viga de sección en T.** Una viga, ABC, de longitud l, está simplemente apoyada en los extremos A y C, y en el punto B, que dista $l/3$ del apoyo A, se aplica una fuerza vertical F_0, dirigida hacia abajo. La sección recta de la viga es una T, cuyas aleta y alma son rectángulos, de lados a_1 y t en la aleta, y a_2 y t en el alma, y las tensiones admisibles a tracción y compresión en el material son σ_{wt} y σ_{wc}. Si $l = 1$ [m], $t = 0{,}0125$ [m], $a_1 = 0{,}10$ [m], $a_2 = 0{,}05$ [m], $\sigma_{wt} = 40$ [MPa] y $\sigma_{wc} = 120$ [MPa], halle el valor máximo que puede tomar F_0.

8. **Viga de sección en T.** Una viga, ABC, de longitud l, está simplemente apoyada en los extremos A y C, y en el punto B, que dista $2l/3$ del apoyo A, se aplica una fuerza vertical F_0. La sección recta de la viga es una T, cuyas aleta y alma son rectángulos, de lados a_1 y t en la aleta, y a_2 y t en el alma, y las tensiones admisibles a tracción y compresión en el material son σ_{wt} y σ_{wc}. Si $l = 3$ [m], $t = 0{,}025$ [m], $a_1 = 0{,}10$ [m], $a_2 = 0{,}20$ [m], $\sigma_{wt} = 20$ [MPa] y $\sigma_{wc} = 40$ [MPa], halle, tomando en cuenta un factor de seguridad de $n = 2$ el máximo valor, sea hacia arriba o hacia abajo, que puede tomar F_0.

9. **Viga de sección en T, con carga uniforme.** Una viga, ABCD, tiene el extremo A en voladizo, donde $x = 0$, se apoya en una articulación en B, donde $x = l$, y en un patín en D, donde $x = 5l$; la sección recta de la viga es una T, cuyo eje neutro se encuentra a las distancias y_1 y y_2, respectivamente, de los bordes superior e inferior y su momento de inercia con respecto a ese eje es I. Desde A hasta B se aplica una fuerza uniformemente repartida de intensidad p_0, y en el punto C, donde $x = 3l$, obra, además, la fuerza $F_0 = p_0 l$, ambas dirigidas hacia abajo. Si $l = 2$ [m], $y_1 = 0{,}08$ [m], $y_2 = 0{,}120$ [m] e $I = 30 \times 10^{-6}$ [m^4], y las tensiones admisibles del material en compresión y tracción son $\sigma_{wc} = 1{,}5\sigma_{wt} = 100$ [MPa], halle el máximo valor que puede tomar p_0.

10. **Viga de sección en T, con carga uniforme.** Una viga, ABCD, tiene el extremo A en voladizo, donde $x = 0$, se apoya en una articulación en B, donde $x = l_1$, y en un patín en D, donde $x = l_1 + 3l$; la sección recta de la viga es una T, cuyas aleta y alma son rectángulos delgados, de lados $10t_1$ y t_1 en la aleta, y 9 t_1 y t_2 en el alma. Desde A hasta B se aplica una fuerza uniformemente repartida de intensidad p_0, y en el punto C, donde $x = l_1 + 2l$, obra, además, la fuerza $F_0 = p_0 l$, ambas dirigidas hacia abajo. Si $l = 1$ [m], $p_0 = 5000$ [N / m] y $t_1 = 6 \times 10^{-3}$ [m], y las tensiones admisibles del material en compresión y tracción son $\sigma_{wc} = 1{,}5\sigma_{wt} = 150$ [MPa], halle la longitud del tramo AB, l_1, para que los momentos flectores en los puntos B y C tengan igual valor absoluto y encuentre el valor común de ese momento; dibuje los diagramas de cizalladura y momento flector de la viga y halle el valor mínimo de t_2.

11. **Viga de sección en T invertida.** La sección recta de una viga horizontal es una T invertida, cuyas aleta y alma son rectángulos, de lados a_1 y t en la aleta, y a_2 y t en el alma; las tensiones admisibles en la aleta y en el alma son σ_{w1} y σ_{w2}. Si $t = 2{,}5 \times 10^{-2}$ [m], $a_2 = 12{,}5 \times 10^{-2}$ [m], $\sigma_{w1} = 400$ [MPa] y $\sigma_{w2} = 100$ [MPa], halle el ancho de la aleta, a_1, para que en ésta y en el alma se desarrollen simultáneamente las tensiones admisibles en los bordes más alejados, y el momento flector máximo que puede soportar la sección.

12. **Viga de sección en T invertida.** Una viga, AB, se apoya en una articulación en el extremo A, donde $x = 0$, y en un patín en B, donde $x = l$; la sección recta de la viga es una T invertida, cuyas aleta y alma son rectángulos, de lados a y t en la aleta, y $4t$ y t en el alma. En los extremos de la viga se aplican sendos momentos positivos, iguales a M_0. Si $l = 4$ [m], $t = 2{,}5 \times 10^{-2}$ [m] y las tensiones admisibles del material en compresión y tracción son $\sigma_{wc} = 100$ [MPa] y $\sigma_{wt} = 35$ [MPa], y se quiere lograr un diseño equilibrado de manera que se alcancen simultáneamente las máximas tensiones posibles en la sección recta de la viga, halle los valores de a y de M_0.

13. **Viga de sección en T invertida, con carga uniforme.** Una viga, ABCD, se apoya en una articulación en B, donde $x = 2$ [m], y en un apoyo de bolita en C, donde $x = 10$ [m], mientras que los extremos A, donde $x = 0$, y D, donde $x = 12$ [m], están en voladizo; la sección recta de la viga es una T invertida, de momento de inercia $I_z = 60 \times 10^{-6}$ [m^4], y cuyo centroide dista $y_1 = 0{,}20$ [m] del borde superior y $y_2 = 0{,}08$ [m] del borde inferior. En los extremos de la viga obran sendas fuerzas concentradas, iguales a W, mientras que desde B hasta C se aplica una fuerza uniformemente repartida cuyo valor total es $6W$, todas dirigidas hacia abajo. Si las tensiones admisibles del material en compresión y tracción son $\sigma_{wc} = 60$ [MPa] y $\sigma_{wt} = 20$ [MPa], halle el valor máximo que puede tomar W.

14. **Viga en voladizo de sección en Π.** Una viga, AB, se apoya en un empotramiento en el extremo A, donde $x = 0$, y el extremo B, donde $x = l$, está en voladizo. La sección recta de la viga es una Π simétrica, de altura $4t$, ancho $6t$ y espesor t. En el extremo B se aplica un momento, M_0, positivo. Si $t = 0{,}03$ [m] y las tensiones admisibles del material en tracción y compresión son $\sigma_{wt} = 120$ [MPa] y $\sigma_{wc} = 150$ [MPa], halle el máximo valor que puede tomar M_0.

15. **Viga con dos voladizos de sección en Π y carga uniforme.** Una viga, ABCD, tiene el extremo A en voladizo, donde $x = 0$, se apoya en una articulación en B, donde $x = a$, y en un patín en C, donde $x = a + l$, y el extremo D, donde $x = 2a + l$, está en voladizo. La sección recta de la viga es una Π simétrica, de momento de inercia I_z con respecto al eje centroidal paralelo a la base, de altura h y cuyo centroide se encuentra a la distancia $0{,}3h$ del borde superior. En los puntos A y D de la viga se aplican sendas fuerzas iguales a F_0, y entre los puntos B y C una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, todas ellas dirigidas hacia abajo. Si $l = 6$ [m], $h = 0{,}28$ [m], $F_0 = 4000$ [N], $p_0 = 3000$ [N/m] y las tensiones admisibles del material en tracción y compresión son $\sigma_{wt} = 20$ [MPa] y $\sigma_{wc} = 80$ [MPa], respectivamente, halle los valores límites entre los que puede variar la longitud a de los voladizos.

16. **Viga triangular.** Una viga de sección triangular, de base horizontal b y altura h, soporta un momento flector negativo, M_0, y las tensiones admisibles del material en tracción y compresión son σ_{wt} y σ_{wc}. Si $b = 0{,}08$ [m], $h = 0{,}160$ [m], $\sigma_{wt} = 40$ [MPa] y $\sigma_{wc} = 70$ [MPa], halle el valor máximo de M_0.

8.3 Flexión biaxial y secciones asimétricas

1. **Viga de sección en Z, con carga uniforme.** Una viga, simplemente apoyada y de longitud l, soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0; la sección recta de la viga es una Z, de aletas horizontales e iguales y alma vertical, cuyas base y altura son iguales a $(t+b)$ y el espesor es t. Si $b = 10t$ halle la tensión normal máxima que se desarrolla en la viga.

2. **Viga rectangular girada.** Una viga de sección rectangular, de base b y altura $5b$, cuyo eje de simetría vertical está rotado un ángulo θ, soporta un momento flector horizontal, M_0. Si σ_0 es la tensión normal máxima en la viga cuando $\theta = 0°$, halle el ángulo para el cual la tensión máxima es $2\sigma_0$.

3. **Viga rectangular, con momento biaxial.** Una viga de madera de sección rectangular, de lados a y $2a$, soporta en su sección recta un momento flector interno, M_0, dirigido a lo largo de una de las diagonales de aquélla. Si $M_0 = 5.000$ [m] y $\sigma_w = 2$ [MPa] es la tensión admisible de la madera, halle el menor valor que puede tomar a.

4. **Viga en voladizo, con fuerza oblicua.** Una viga, AB, de longitud l, sección rectangular, de base b y altura h, está empotrada en el extremo A, donde $x = 0$, y en su extremo B, donde $x = l$, soporta una fuerza inclinada $F = F_0(i_y \operatorname{sen}\alpha + i_z \cos\alpha)$. Si $b = 0{,}075$ [m], $h = 0{,}150$ [m], $l = 1{,}500$ [m], $F_0 = 750$ [N] y $\alpha = 30°$, halle el vector momento que se desarrolla en el empotramiento. la orientación del eje neutro en la sección recta del empotramiento y la tensión normal máxima en esa misma sección.

5. **Viga de sección parabólica.** La sección recta de una viga es una parábola simétrica con respecto a la vertical, de base horizontal a, altura $2a$ y vértice hacia abajo. Si la sección está sometida a un momento flector, M_0, cuya dirección hace un ángulo de 30° con la horizontal, halle la tensión normal máxima que produce ese momento.

6. **Viga de sección en T oblicua, con carga uniforme.** Una viga horizontal, ABC, tiene el extremo A en voladizo, donde $x = 0$, se apoya en una articulación en B, donde $x = l$, y en un patín en C, donde $x = 3l$; la sección recta de la viga es una T, cuyas aleta y alma son rectángulos iguales de lados $20t$ y $2t$, y en la que el alma hace un ángulo θ con la vertical. Desde A hasta el punto D, donde $x = 1{,}5l$, se aplica una fuerza uniformemente repartida de intensidad p_0, y en D obra, además, la fuerza $F_0 = 10p_0l$, ambas dirigidas hacia abajo. Si $l = 2$ [m], $p_0 = 10000$ [N / m] y $\theta = 30°$, y la tensión admisible del material es de $\sigma_w = 200$ [MPa], halle el mínimo valor que puede tomar t.

8.4 Flexión y carga axial

1. **Núcleo de una sección rectangular.** Halle el núcleo de la sección recta de una viga columna, cuando aquélla es un rectángulo cuyos lados miden a y b.

2. **Núcleo de una sección rómbica.** Halle el núcleo de la sección recta de una viga columna, cuando aquélla es un rombo cuyas diagonales miden a y b.

3. **Núcleo de una sección triangular.** Halle el núcleo de la sección recta de una viga columna, cuando aquélla es un triángulo equilátero de lado b.

4. **Núcleo de una sección circular.** Halle el núcleo de la sección recta de una viga columna, cuando aquélla es un círculo de radio R.

5. **Núcleo de una sección elíptica.** Halle el núcleo de la sección elíptica de una viga columna, cuando aquélla es una elipse de semiejes a y b.

6. **Viga columna rectangular, con fuerza excéntrica.** La sección recta de una viga columna prismática es un rectángulo, de lados a y b, y en su extremo libre se coloca una placa horizontal, rígida y circular, de radio R, cuyo centro está en el eje de la columna; en un punto arbitrario del borde de esa placa, definido por el ángulo θ que su radio hace con el lado b de la sección de la columna, se aplica una fuerza de compresión F_0. Si $R = 0{,}125$ [m], $a = 0{,}20$ [m], $b = 0{,}15$ [m] y $F_0 = 5.000$ [N], halle, para la sección recta de la base de la viga columna, el valor de θ con el cual la mayor de las tensiones normales que resultan en las esquinas de esa sección tiene un valor máximo, y las tensiones correspondientes en las cuatro esquinas.

7. **Viga columna triangular, con fuerza excéntrica.** La sección recta de una viga columna prismática es un triángulo equilátero, de lado a, y está sometida a una fuerza de tracción P, que obra a lo largo de una de las aristas del prisma. Si las tensiones admisibles en tracción y compresión del material de la viga columna cumplen $3\sigma_{wt} = \sigma_{wc} = \sigma_0$, halle el valor mínimo de a.

8. **Viga columna pretensada, con peso propio y carga uniforme.** Una viga columna simplemente apoyada, de longitud l, y sección rectangular, de base b y altura h, se somete a una fuerza inicial de compresión, F_0, que se aplica con una excentricidad e por debajo del centroide, sobre el eje de simetría de la sección paralelo al lado b; el peso específico de la viga columna es w y soportará una carga uniformemente repartida, de intensidad p_0. Si $l = 10$ [m], $b = 0{,}30$ [m], $h = 0{,}45$ [m], $F_0 = 1$ [MN], $w = 23{,}5$ [kN/m^3] y $p_0 = 12$ [kN/m], halle, antes y después de aplicar la carga p_0, las tensiones en los bordes superior e inferior de las secciones de los apoyos y el punto medio de la viga columna.

9. **Muro en presa de hormigón.** El perfil del muro de contención de una presa de hormigón, de peso específico w_h, es un trapecio, de altura h, base menor a y base mayor $3a$, sobre el suelo; el agua embalsada, de peso específico w_a, alcanza una altura b sobre el piso. Si $a = 3$ [m], $h = 25$ [m], $w_h = 24.000$ [Nm^{-3}], $w_a = 10.000$ [Nm^{-3}] y $b = 15$ [m], halle la tensión de compresión máxima en la sección del muro que se apoya en el suelo.

8.5 Vigas de varios materiales

1. **Viga en voladizo.** Una viga, AB, de longitud $l = 3$ [m], está empotrada en el extremo A y tiene en voladizo el extremo B, donde se aplica una fuerza vertical F_0 dirigida hacia abajo. La viga se forma con dos materiales, de secciones rectangulares iguales y lados $b = 0{,}05$ [m] y $h = 0{,}025$ [m], que se adhieren entre sí al pegar los lados mayores de las secciones rectas, de modo que ese lado quede horizontal, para formar una viga compuesta. Si los módulos de elasticidad del material que queda arriba y del otro son, respectivamente, $E_1 = 50$ [GPa] y $E_2 = 100$ [GPa], halle el máximo valor que puede tomar F_0 si la tensión normal máxima debida a la flexión no puede superar 200 [MPa].

2. **Viga simplemente apoyada, con carga uniforme.** Una viga simplemente apoyada, de longitud l, soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0; la viga se forma con dos platinas longitudinales iguales, de base b y altura $2b$, adheridas entre si a lo largo de la base. Si los materiales de las platinas tienen módulos de Young E y $4E_0$, halle las tensiones máximas de la viga en tracción y compresión.

3. **Viga de acero y aluminio.** Una platina de acero y otra de aluminio, de secciones rectangulares iguales y lados a y b, se adhieren entre sí al pegar los lados mayores de las secciones rectas, de modo que ese lado quede horizontal, para formar una viga compuesta. Si los módulos de elasticidad del acero y el aluminio son $E_{ac} = 210$ [GPa] y $E_{al} = 70$ [GPa], y $a = 24 \times 10^{-3}$ [m] y $b = 8 \times 10^{-3}$ [m, halle las tensiones máximas que se presentan en ambos materiales cuando la viga se flexiona por medio de un momento horizontal, de valor $M = 60000$ [Nm].

4. **Viga de bronce y aluminio.** Dos platinas de bronce, de base b y espesor t, se adhieren por encima y por debajo a una barra de aluminio, de sección cuadrada y lado b, para formar una sección compuesta rectangular. Si $b = 0{,}03$ [m], $t = 0{,}006$ [m], los módulos de elasticidad del bronce y el aluminio son $E_{br} = 140$ [GPa] y $E_{al} = 70$ [GPa], y las tensiones admisibles de los materiales son $\sigma_{wbr} = 160$ [MPa] y $\sigma_{wal} = 100$ [MPa], halle el máximo momento flector que puede soportar la sección compuesta cuando se flexiona con respecto a un eje horizontal o a un eje vertical.

5. **Viga de madera reforzada con dos platinas.** Una viga de madera de sección rectangular, de lados a y b, con el lado mayor vertical, está enchapada en sus bordes superior e inferior con sendas platinas de acero, de lados a y t. Si $a = 0{,}07$ [m], $b = 0{,}15$ [m], $t = 0{,}01$ [m] y los módulos de elasticidad y las tensiones admisibles de la madera y el acero son, $E_m = 10$ [GPa], $E_a = 200$ [GPa], $\sigma_{wm} = 5$ [MPa] y $\sigma_{wa} = 120$ [MPa], halle el momento flector máximo que puede soportar la viga.

6. **Viga de madera reforzada con dos platinas.** Una viga simplemente apoyada, AB, cuya longitud es de $l = 5$ [m], y que soporta una carga uniformemente repartida, de intensidad $p_0 = 40.000$ [N / m], está construida con un núcleo de madera rectangular, de lados $b = 0{,}15$ [m] y $h = 0{,}25$ [m], y reforzada en sus bordes superior e inferior con sendas platinas de acero, de $b = 0{,}15$ [m] y $t = 0{,}05$ [m]; si los módulos de elasticidad de los materiales son $E_m = 11$ [GPa] y $E_a = 209$ [GPa], halle las tensiones máximas que se presentan en el acero y en la madera.

7. **Viga de madera reforzada con dos platinas que soporta carga uniforme.** Una viga simplemente apoyada tiene una longitud $l = 4$ [m] y soporta una fuerza uniformemente repartida y dirigida hacia abajo, de intensidad $p_0 = 9000$ [N / m]. La sección recta de la viga es rectangular y está compuesta por madera, de base $b = 16t$, altura $h = 48t$ y tensión admisible $\sigma_{mw} = 20$ [MPa], reforzada en sus bordes superior e inferior por sendas platina de acero, de espesor t, base $b = 16t$ y tensión admisible $\sigma_{aw} = 210$ [MPa]. Si la relación entre los módulos de Young del acero y de la madera es de 20, calcule el valor mínimo de t.

8. **Viga de madera reforzada con dos platinas que soporta carga uniforme.** Una viga, ABCD, tiene en voladizo los extremos A, donde $x = 0$, y D, donde $x = 8l$, se apoya en una articulación en B, donde $x = l$, y en un patín en C, donde $x = 7l$; la sección recta de la viga es rectangular, de lados b y $2b$, con el lado mayor vertical, de madera, y está enchapada en sus bordes superior e inferior con sendas platinas de acero, de lados b y t. Desde B hasta D se aplica una fuerza uniformemente repartida de intensidad p_0, y en el punto A obra, además, la fuerza $F_0 = 2p_0 l$, ambas dirigidas hacia abajo. Si $l = 1$ [m], $p_0 = 20000$ [N / m], $t = 0{,}004$ [m] y los módulos de elasticidad y las tensiones admisibles de la madera y el acero son, $E_m = 12$ [GPa], $E_a = 200$ [GPa], $\sigma_{wh} = 10$ [MPa] y $\sigma_{wa} = 140$ [MPa], dibuje, con detalles, los diagramas de V y M, y halle el valor mínimo que puede tomar b.

9. **Viga de madera reforzada con platinas diferentes.** Una viga de madera, de base b y altura h, está reforzada en la parte inferior por una platina de acero, de base b y espesor t, y en la parte superior por una platina de acero de espesor t y base b_1; las tensiones admisibles en la madera y el acero son σ_{wm} y σ_{wa}, y sus módulos de Young están en la razón de 1 a 20. Si $h = 0{,}20$ [m], $t = 0{,}01$ [m], $b = 0{,}15$ [m],

$b_1 = 0{,}05$ [m], $\sigma_{wm} = 15$ [MPa] y $\sigma_{wa} = 120$ [MPa], halle el momento flector máximo que puede soportar la viga.

10. **Viga reforzada con una platina.** Una viga, ABC, tiene una articulación en el extremo A, donde $x = 0$, un apoyo de patín en B, donde $x = 4l$, y el extremo C, donde $x = 5l$, está en voladizo; sobre toda la viga actúa una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0. La sección recta de la viga es rectangular, de base b y altura $2b$, y el material tiene módulo de Young E_1 y tensión admisible σ_{w1}. Si $l = 1$ [m], $p_0 = 20000$ [N/m], $E_1 = 10$ [GPa] y $\sigma_{w1} = 25$ [MPa], dibuje, con todos los detalles, diagramas de momento flector y fuerza cortante y halle el valor mínimo de b. Calcule nuevamente ese mínimo, si a la viga se le coloca una platina en su borde superior, de ancho b y espesor $0{,}05b$, de un material con $E_2 = 200$ [GPa] y $\sigma_{w2} = 200$ [MPa].

11. **Viga compuesta de tres tablas y dos platinas.** Una viga compuesta se forma con tres tablas, de base b y espesor $8t$, separadas entre si por medio de dos platinas de acero, intercaladas, de base b y espesor t. Si $b = 0{,}30$ [m], $t = 0{,}006$ [m], los módulos de elasticidad del acero y la madera son $E_{ac} = 200$ [GPa] y $E_{ma} = 12$ [GPa], y las tensiones admisibles de los materiales son $\sigma_{wac} = 140$ [MPa] y $\sigma_{wma} = 12$ [MPa], halle el máximo momento flector que puede soportar la sección compuesta cuando se flexiona con respecto a un eje horizontal o a un eje vertical.

12. **Viga con núcleo y camisa.** La sección recta de una viga se forma con un núcleo cuadrado del material 1, de lado $a = 0{,}05$ [m], y un tubo cuadrado del material 2, de lado interior a y exterior $b = 0{,}08$ [m], y soporta un momento flector $M_z = 10.000$ [Nm]. Si los módulos de Young de los materiales son E_1 y $E_2 = 2E_1$, halle la tensión normal máxima de la viga.

13. **Viga de hormigón reforzado.** La sección recta de una viga de hormigón es rectangular, de lados b y h, y está reforzada con tres varillas iguales de acero, de radio R, colocadas horizontalmente en una capa que dista d del borde superior de aquélla. Si $b = 0{,}2$ [m], $h = 0{,}4$ [m], $d = 0{,}35$ [m], $R = 0{,}0125$ [m] y los módulos de elasticidad y las tensiones admisibles del hormigón y el acero son, $E_h = 20$ [GPa], $E_a = 200$ [GPa], $\sigma_{wh} = 10$ [MPa] y $\sigma_{wa} = 140$ [MPa], halle el máximo momento flector positivo que soporta la viga.

8.6 Vigas de sección variable

1. **Viga de igual resistencia, con carga uniforme.** Una viga, de longitud l, está empotrada en un extremo, tiene libre el otro y soporta una carga uniformemente repartida, de intensidad p_0, dirigida hacia abajo. Si la sección recta de la viga es un rectángulo, de ancho uniforme b y altura variable $h(x)$, halle la forma cómo debe variar esa altura para que la viga sea de igual resistencia. Una viga es de igual resistencia cuando en todas las secciones rectas la máxima tensión normal es la misma.

2. **Viga de igual resistencia, con carga triangular.** Una viga, de longitud l, simplemente apoyada, soporta una carga uniformemente variada y dirigida hacia abajo, cuya intensidad cambia desde 0 en un apoyo hasta p_0 en el otro. Si la sección recta de la viga es un cuadrado de lado variable, $a(x)$, halle la forma cómo debe variar ese lado para que la viga sea de igual resistencia a la flexión; se informa que a_0 es el lado del mayor de los cuadrados.

8.7 Vigas de eje curvo

1. **Viga de sección rectangular.** El radio de curvatura del eje centroidal de una viga de eje circular es r_c y la sección recta de la misma es un rectángulo de base b y altura h. Deducir la expresión que permite calcular el radio de curvatura del eje neutro de la sección.

2. **Viga de sección rectangular.** El radio de curvatura del eje centroidal de una viga de eje circular es r_c, la sección recta de la misma es un rectángulo de base b y altura h, y la viga está sometida a un momento M_z .Si $b = 0,15$ [m] y $h = 0,10$ [m], calcule el error relativo introducido en el cálculo de la tensión normal máxima al suponer que la viga es recta, para los casos en los que r_c vale 0, 05 [m], 0,10 [m] y 0,30 [m].

3. **Viga de sección circular.** El radio de curvatura del eje centroidal de una viga de eje circular es r_c y la sección recta de la misma es un círculo de radio a. Deducir la expresión que permite calcular el radio de curvatura del eje neutro de la sección.

4. **Viga de sección elíptica.** El radio de curvatura del eje centroidal de una viga de eje circular es r_c y la sección recta de la misma es una elipse de semiejes a y b, con a paralelo a r_c. Deducir la expresión que permite calcular el radio de curvatura del eje neutro de la sección.

5. **Viga curva empotrada.** El eje centroidal de una viga de sección cuadrada, de lado l y tensión admisible σ_w, es una semicircunferencia, de radio a; la viga está empotrada en un extremo y sometida a una fuerza de compresión, P, aplicada en el centroide del extremo libre. Si $l = 0,1$ [m], $a = 0,5$ [m] y $\sigma_{wu} = 200$ [MPa], halle el valor máximo que puede tomar P.

6. **Viga de sección trapezoidal.** La sección recta de una viga de eje curvo, de centro de curvatura en C, es un trapecio, de altura h, que tiene un eje vertical de simetría y está sometida al momento flector M; la base del trapecio más cercana a C dista r_1 de ese punto y tiene ancho b_1, y la otra base tiene ancho b_2 y dista r_2 de C. Deducir la distancia a C del eje neutro de la sección, R; además, si $h_1 = 0,04$ [m] y $r_1 = 0,04$ [m], halle la relación b_1/b_2 tal que las tensiones en las fibras extremas de la sección, en tracción y compresión, sean iguales en valor absoluto.

7. **Viga de sección en I asimétrica.** La sección recta de una viga de eje curvo, de centro de curvatura en C, es una I de aletas diferentes, pero con un eje vertical de simetría, y está sometida al momento flector M; la aleta superior tiene ancho b_1 y sus bordes superior e inferior distan r_1 y r_2 de C; el alma tiene ancho b_2 y sus bordes superior e inferior distan r_2 y r_3 de C; y la aleta inferior tiene ancho b_3 y sus bordes superior e inferior distan r_3 y r_4 de C. Demostrar que, si A es el área de la sección y R la distancia entre C y el eje neutro, entonces:

8. $$R = \frac{A}{\ln\left[\left(r_2/r_1\right)^{b_1}\left(r_3/r_2\right)^{b_2}\left(r_4/r_3\right)^{b_3}\right]}$$

9. y calcular las tensiones máxima y mínima en la sección cuando $b_1 = b_3 = 0,05$ [m], $b_2 = 0,015$ [m], $r_1 = 0,04$ [m], $r_2 - r_1 = r_4 - r_3 = 0,012$ [m], $r_3 - r_2 = 0,036$ [m] y $M = 2$ [kNm].

10. **Viga curva y recta.** Una varilla recta y de sección cuadrada, de lado l, y tensión admisible a la compresión σ_{wc}, se dobla en su punto medio en forma semicircular, de manera que el radio de curvatura del borde interior sea b y el del exterior sea $b + l$ y que los extremos rectos de aquélla sean paralelos; en éstos, a una distancia a del punto en donde se inicia la porción semicircunferencial, se aplican sendas fuerzas colineales, convergentes e iguales a F_0, perpendiculares a los segmentos rectos. Si $l = 0,03$ [m], $b = 0,02$ [m], $F_0 = 5$ [kN] y $\sigma_{wc} = 175$ [MPa], halle el máximo valor para la distancia a.

8.8 Vigas sometidas a varias solicitaciones

1. **Flexión y torsión sobre un eje.** Un eje circular, con radio R, y cuyas tensiones admisibles son σ_w y τ_w, transmite, simultáneamente, momentos flector y torsor, M y T. Si M = 2.000 [Nm], T = 3.000 [Nm], $\sigma_w = 80$ [MPa] y $\tau_w = 60$ [MPa], halle el radio del eje.

2. **Flexión y torsión sobre un eje.** Un eje cilíndrico de sección circular, con radio R, cuyas tensiones admisibles son σ_w y τ_w, gira a una frecuencia f y está sometido a un momento flector M. Si $R = 0,05$ [m], $f = 30$ [Hz],

$M = 2.500\pi$ [Nm], $\sigma_w = 100$ [MPa] y $\tau_w = 60$ [MPa], halle el momento torsor máximo que puede actuar al mismo tiempo sobre el eje y, en ese caso, la potencia máxima que éste puede transmitir.

3. **Flexión, torsión y carga axial sobre un eje.** Un eje de sección circular, de radio R = 0,10 [m], soporta, simultáneamente, una carga axial de tracción $P = 50.000\pi$ [N], un momento flector $M = 2.000\pi$ [Nm] y un momento torsor $T = 3.000\pi$ [Nm]. Halle las tensiones máximas en tracción, compresión y cizalladura.

4. **Flexión, torsión y carga axial sobre un eje.** Un eje circular, de radio R = 0,04 [m], y cuyas tensiones admisibles son $\sigma_w = 100$ [MPa] y $\tau_w = 80$ [MPa], soporta, simultáneamente, un momento flector de $M = 80.000\pi$ [Nm] y una carga axial de tracción de $P = 40.000\pi$ [N]. Halle el máximo momento torsor que puede aplicarse al eje.

5. **Flexión, torsión y carga axial sobre un eje.** Un eje de sección circular, de radio R, soporta, simultáneamente, una carga axial de tracción $P = 50.000\pi$ [N], un momento flector $M = 2.000\pi$ [Nm] y un momento torsor $T = 3.000\pi$ [Nm]. Con el uso de la teoría de Tresca halle el R mínimo si la tensión admisible del material es $\sigma_w = 250$ [MPa]..

8.9 Vigas de material elastoplástico

1. **Viga rectangular.** Una viga simplemente apoyada, de longitud $2l$, tiene sección recta rectangular, de base b y altura h, fue construida con una material elastoplástico ideal, cuya tensión de cedencia es σ_Y, y en el punto medio soporta una fuerza concentrada F. Si l = 3 [m], b = 0,08 [m], h = 0,16 [m] y σ_Y = 250 [MPa], halle el valor de F para que se desarrolle en la viga el momento plástico.

2. **Tensiones residuales en viga rectangular.** La sección recta de una viga es rectangular, de base b y altura h, el material de la misma es elastoplástico ideal, de módulo de Young E y tensión de cedencia σ_Y, y está sometida a un momento flector M_Z. Si E = 200 [GPa], σ_Y = 240 [MPa], b = 0,06 [m], h = 0,09 [m] y M_z = 24.000 [kNm], halle el valor del momento de cedencia, el momento plástico, el grueso del núcleo elástico y el radio de curvatura correspondiente, y, si se retira el momento flector aplicado, la distribución de las tensiones residuales y el radio de curvatura residual.

3. **Tensiones residuales en viga rectangular hueca.** La sección recta de una viga es rectangular y hueca, de base b, altura h, espesor t en los lados verticales y $2t$ en los horizontales, el material de la misma es elastoplástico ideal, de módulo de Young E y tensión de cedencia σ_Y, y estuvo sometida a un momento flector que produjo zonas plásticas de altura c por encima y por debajo del eje neutro. Si E = 200 [GPa], σ_Y = 240 [MPa], b = 0,06 [m], h = 0,11 [m] y c = 0,04 [m], halle la tensión residual en los bordes inferior y superior de la sección, la distancia al eje neutro de los puntos donde la tensión residual es cero y el radio de curvatura remanente.

4. **Viga triangular.** Una viga simplemente apoyada, de longitud $2l$, tiene la sección recta en forma de triángulo equilátero, de lado b, fue construida con una material elastoplástico ideal, cuya tensión de cedencia es σ_Y, y en el punto medio soporta una fuerza concentrada F. Si l = 3 [m], b = 0,10 [m] y σ_Y = 250 [MPa], halle el valor de F para que se desarrolle en la viga el momento plástico.

5. **Viga triangular y carga uniforme.** Una viga prismática, cuya sección recta es la de un triángulo equilátero, de base horizontal y lado desconocido b, tiene un apoyo de rótula en $x = 0$ [m], otro de articulación en $x = 4$ [m] y un extremo en voladizo en $x = 6$ [m]; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad $p_0 = 20$ [kN/m], en los intervalos $0 < x < 2$ [m] y $4 < x < 6$ [m], y una fuerza concentrada, $F_0 = 80$ [kN], en el punto $x = 2$ [m], todas dirigidas hacia abajo. Si la viga está forjada con un material elastoplástico ideal, cuya tensión de cedencia es de $\sigma_Y = 400$ [MPa], halle los diagramas de fuerza cortante y momento flector, incluyen-

do máximos y ceros, el momento de cedencia M_Y, el momento plástico M_P y el valor mínimo de b, con un factor de seguridad $n = 2$, en un diseño elástico y en un diseño al límite.

6. **Viga circular.** Una viga simplemente apoyada, de longitud l, tiene sección recta circular, de radio R, fue construida con una material elastoplástico ideal, cuya tensión de cedencia es σ_y, y en un punto ubicado a la distancia $l/3$ de un apoyo soporta una fuerza concentrada F. Si $l = 3$ [m], $R = 0{,}10$ [m] y $\sigma_Y = 250$ [MPa], halle el valor de F para que se desarrolle en la viga el momento plástico.

7. **Viga elíptica.** Una viga simplemente apoyada, de longitud l, tiene sección recta elíptica, de radio mayor y horizontal a y menor b, fue construida con una material elastoplástico ideal, cuya tensión de cedencia es σ_y, y en el punto medio soporta una fuerza concentrada F. Si $l = 3$ [m], $a = 0{,}10$ [m], $b = 0{,}05$ [m] y $\sigma_Y = 250$ [MPa], halle el valor de F para que se desarrolle en la viga el momento plástico.

CAPÍTULO 9

FUERZA CORTANTE

9.1 Vigas ensambladas con tablas de madera

1. **Viga de dos tablas.** Dos tablas de madera de sección rectangular, de lados b y $3b$, se unen entre sí con clavos para formar una viga, ABC, de longitud $l = 4{,}0$ [m], cuya sección recta es una T invertida y simétrica con respecto al eje vertical. Las cargas a las que está sometida la viga producen un momento flector interno que varía linealmente desde A, donde $x = 0$, hasta B, donde $x = 1{,}5$ [m], y también linealmente desde B hasta C, donde $x = 4{,}0$ [m]; en A el momento flector es nulo, en B vale $M_1 = 2.000$ [Nm] y en C es $M_2 = 7.000$ [Nm]. Si $b = 0{,}025$ [m] y la fuerza cortante admisible en cada clavo es $V_w = 1.000$ [N], halle el espaciamiento máximo que se puede usar entre los clavos.

2. **Viga de tres tablas.** Tres tablas de madera de sección rectangular, de lados b y $2b$, se unen entre sí con clavos para formar una viga cuadrada sometida a una fuerza cortante vertical, V_y; la fuerza cortante admisible en cada clavo es V_{wc}. Si $b = 0{,}05$ [m], $V_y = 1.500$ [N] y $V_{wc} = 375$ [N], halle el espaciamiento máximo que se puede usar entre los clavos.

3. **Viga de tres tablas.** Tres tablas de madera de sección rectangular, de lados a y b, se unen entre sí con clavos para formar una viga simplemente apoyada de sección rectangular, de base a, altura $3b$ y longitud l; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida en toda su longitud, de intensidad p_0, y la fuerza cortante admisible en cada clavo es V_w. Si $p_0 = 10.000$ [N / m], $a = 0{,}15$ [m], $b = 0{,}06$ [m], $l = 1$ [m] y $V_w = 7.500$ [N], halle el espaciamiento máximo que se puede usar entre los clavos.

4. **Viga de tres tablas.** Tres tablas de madera de sección rectangular, de lados a y b, se encolan entre sí para formar una viga simplemente apoyada de sección rectangular, de base a, altura $3b$ y longitud l; las tensiones admisibles normal y cortante de la madera son σ_w y τ_w, y cortante de la cola es τ_{cw}. Si $a = 0{,}10$ [m], $b = 0{,}05$ [m], $l = 2$ [m], $\sigma_w = 20$ [MPa], $\tau_w = 4$ [MPa] y $\tau_{cw} = 0{,}4$ [MPa], halle la máxima fuerza concentrada que puede soportar la viga en su punto medio.

5. **Viga de tres tablas.** Tres tablas de madera de sección rectangular, de lados a y b, se encolan entre sí para formar una viga simplemente apoyada de sección rectangular, de base a, altura $3b$ y longitud l; las tensiones admisibles normal y cortante de la madera son σ_w y τ_w, y cortante de la cola es τ_{cw}. Si $a = 0{,}15$ [m], $b = 0{,}06$ [m], $l = 2$ [m], $\sigma_w = 8$ [MPa], $\tau_w = 0{,}9$ [MPa] y $\tau_{cw} = 0{,}6$ [MPa], halle la máxima carga uniformemente repartida que puede soportar la viga.

9.2 Tensión cortante en vigas de sección robusta

1. **Peso propio en viga de sección rectangular.** Una viga de madera, ABCD, de longitud $3l$ y sección recta rectangular, de base b y altura h, está apoyada en una articulación en el punto A, donde $x = 0$, y en un apoyo de bolita en C, donde $x = 2l$; en el punto B, donde $x = l$, se aplica una fuerza concentrada $3F_0$ y en el extremo en voladizo D, donde $x = 3l$, se aplica una fuerza F_0, ambas dirigidas hacia abajo. El peso específico de la madera es ω y su tensión cortante admisible es τ_w. Si $l = 1{,}8$ [m], $h = 0{,}28$ [m], $F_0 = 5.000$ [N], $\omega = 5.500$ [N / m^3] y $\tau_w = 0{,}7$ [MPa^3], halle el valor mínimo de b.

2. **Viga de sección triangular equilátera.** Una viga simplemente apoyada, de longitud l, soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, dirigida hacia abajo; la sección recta de la viga es un triángulo equilátero, de lado a y base horizontal. Halle en la sección recta la distribución de tensiones cortantes verticales, el máximo de ésta y su posición con respecto al eje neutro; además, si $l = 3$ [m], $p_0 = 40.000$ [N/m] y $\tau_w = 100$ [MPa], calcule el valor mínimo de a.

3. **Viga de sección triangular isósceles.** Una viga simplemente apoyada, de longitud l, soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, dirigida hacia abajo; la sección recta de la viga es un triángulo isósceles, de base horizontal b y altura $2b$. Halle en la sección recta la distribución de tensiones cortantes verticales, el máximo de ésta y su posición con respecto al eje neutro; además, si $l = 3$ [m], $p_0 = 40.000$ [N/m] y $\tau_w = 100$ [MPa], calcule el valor mínimo de b.

4. **Secciones cuadrada y triangular.** Las secciones rectas de dos vigas tienen la misma área y están sometidas a la misma fuerza cortante vertical: una es cuadrada y triangular equilátera la otra. Halle en cuál de las dos la tensión cortante vertical máxima es mayor y calcule ese máximo.

5. **Viga de sección rómbica.** La sección recta de una viga, sometida a una fuerza cortante vertical, es rómbica, sus diagonales miden b y h, y esta última es vertical. Halle en la sección recta la distribución de tensiones cortantes verticales.

6. **Sección cuadrada, vertical y rotada.** La sección recta de una viga es cuadrada, de lado a, y puede trabajar con su base colocada horizontalmente o rotada un ángulo de 45°. Determine las razones entre los momentos flectores horizontales y entre las fuerzas cortantes verticales, correspondientes en ambas posiciones, respectivamente, al mismo σ_w y al mismo τ_w.

7. **Viga de sección circular.** La sección recta de una viga es un círculo, de radio R, y soporta una fuerza cortante vertical. Halle en la sección recta la distribución de tensiones cortantes, τ_{xy}, y el máximo de ésta, y, mediante hipótesis razonables, la distribución de las tensiones cortantes τ_{xz}.

9.3 Flexión y fuerza cortante en vigas rectangulares macizas

1. **Viga en voladizo.** Una viga en voladizo, ABCD, empotrada en A, donde $x = 0$, de longitud $2l + u$, sección recta rectangular, de base b y altura h, soporta tres fuerzas concentradas iguales y dirigidas hacia abajo, F_0, aplicadas en B, donde $x = u$, en C, donde $x = u + l$, y en el extremo libre D, donde $x = 2l + u$. Si $h = 0{,}120$ [m], $l = 1{,}5$ [m] y $F_0 = 2.000$ [N], halle los valores de u y b para que las tensiones normal y cortante sean respectivamente iguales, en el plano de la sección recta en B, a $\sigma_u = 12$ [MPa] y $\tau_u = 0{,}8$ [MPa].

2. **Viga en voladizo.** La sección recta de una viga en voladizo, de longitud $l = 3{,}00$ [m], es rectangular, de base $b = 0{,}05$ [m] y altura $h = 0{,}10$ [m]; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad $p_0 = 10.000$ [N / m]. Halle las tensiones y direcciones principales en un punto que está en la sección recta de la mitad de la viga y a la distancia, $c = 0{,}025$ [m], del borde superior.

3. **Viga en voladizo.** Una viga en voladizo, de longitud l, sección recta rectangular, de base b y altura $2b$, soporta una fuerza concentrada y dirigida hacia abajo, F_0, aplicada en su extremo libre. Si $l = 2$ [m], $F_0 = 10.000$ [N] y $\sigma_w = 200$ [MPa], halle el valor mínimo que puede tomar b de acuerdo con la teoría de Tresca o según la teoría de la máxima energía de distorsión por unidad de volumen.

4. **Viga en voladizo.** Una viga en voladizo, ABCD, de longitud 0,325 [m], tiene empotrado su extremo A, donde $x = 0$; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad 2.000 [N/m], que se extiende desde A hasta C, donde $x = 0{,}2$ [m], y sendas fuerzas concentradas, P y Q, aplicadas res-

pectivamente en C y en D, donde $x = 3{,}25$ [m], todas dirigidas hacia abajo. Si las tensiones normales en el borde inferior de la viga, debidas a la flexión, son de -56,9 [MPa] en A y de -29,9 [MPa] en C, donde $x = 0{,}1$ [m], halle los valores de P y Q, y la tensión cortante máxima en A.

5. **Viga en voladizo, con carga biaxial.** La sección recta de una viga en voladizo, de longitud $l = 4{,}50$ [m], es rectangular, de base $b = 0{,}10$ [m] y altura $h = 0{,}15$ [m]; en el extremo libre la viga soporta una fuerza concentrada, $F = 5.000$ [N], que hace un ángulo, $\theta = 30°$, con la vertical. En el borde exterior, del eje horizontal de simetría de la sección recta del empotramiento, calcule las tensiones y las direcciones principales, y la tensión cortante máxima.

6. **Viga simplemente apoyada.** Una viga, ABC se apoya en una articulación en A, donde $x = 0$, y en un patín en C, donde $x = 3l$; la sección recta de la viga es rectangular, de lados b y $2b$, y las tensiones admisibles del material, normal y cortante, son σ_w y τ_w. En B, donde $x = 2l$, se aplica la fuerza $F_0 = p_0 l$, y desde A hasta C obra una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, ambas dirigidas hacia abajo. Si $l = 2$ [m], $F_0 = 10.000$ [N], $\sigma_w = 100$ [MPa] y $\tau_w = 40$ [MPa], dibuje los diagramas de V y M, y halle el valor mínimo de b.

7. **Viga simplemente apoyada, con carga triangular.** Una viga simplemente apoyada, de longitud l, soporta una carga distribuida que varía linealmente desde un extremo, donde la intensidad es nula, hasta el otro, donde vale p_0, dirigida hacia abajo; la sección recta de la viga es cuadrada, de lado b, y las tensiones admisibles del material, normal y cortante, son σ_w y τ_w. Si $l = 2$ [m], $p_0 = 20.000$ [N/m], $\sigma_w = 15$ [MPa] y $\tau_w = 1$ [MPa], dibuje los diagramas de V y M, y halle el valor mínimo de b.

8. **Viga simplemente apoyada, con carga triangular.** Una viga, ABCD, de longitud $3l$ y sección rectangular, de base b y altura $2b$, se apoya simplemente en sus extremos A y D, y las tensiones admisibles del material, normal y cortante, son σ_w y τ_w. Desde A, donde $x = 0$, hasta B, donde $x = l$, obra una fuerza uniformemente variada cuya intensidad cambia desde p_0, en A, hasta 0 en B; además, en B se aplica el momento flector positivo $M_0 = p_0 l^2$, y en C, donde $x = 2l$, la fuerza concentrada $F_0 = p_0 l$. Si $\sigma_w = 3\tau_w = \sigma_0$ halle el valor admisible para b.

9. **Viga con dos apoyos y un voladizo.** Una viga de madera, ABCD, está apoyada en una articulación en A, donde $x = 0$, y en un apoyo de bolita en C, donde $x = 4$ [m]; el extremo D, donde $x = 5$ [m], está en voladizo. La sección recta es rectangular, de base b y altura $h = 0{,}30$ [m], y la viga soporta una fuerza $3F_0$ aplicada en el punto B, donde $x = 2$ [m], y una fuerza $F_0 = 5.000$ [N] aplicada en D. Si las tensiones admisibles de la madera en tensión normal y cortante son $\sigma_w = 8{,}2$ [MPa] y $\tau_w = 0{,}7$ [MPa], halle el valor mínimo de b.

10. **Viga con dos apoyos y un voladizo.** Una viga horizontal, ABC, se apoya en una articulación en A, donde $x = 0$, y en un patín en B, donde $x = 2l$, y tiene en voladizo el extremo C, donde $x = 3l$; la sección recta de la viga es rectangular, de lados b y $2b$, y las tensiones admisibles del material, normal y cortante, son σ_w y τ_w. En C se aplica la fuerza $F_0 = 3p_0 l$, y desde A hasta B obra una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, ambas dirigidas hacia abajo. Si $l = 1$ [m], $p_0 = 1000$ [N/m], $\sigma_w = 60$ [MPa] y $\tau_w = 15$ [MPa], dibuje los diagramas de V y M, y halle el valor mínimo de b.

11. **Viga con dos apoyos y un voladizo.** Una viga, ABCDE, de longitud $12l$, tiene en voladizo su extremo A, donde $x = 0$, y se apoya en una articulación en B, donde $x = 4l$, y en una bolita en E, donde $x = 12l$; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, que se extiende desde A hasta C, donde $x = 6l$, y una fuerza concentrada, $F_0 = 2p_0 l$, aplicada en D, donde $x = 9l$, ambas dirigidas hacia abajo. La sección recta de la viga es un rectángulo, de base b y altura $2b$, y las tensiones normal y cortante admisibles del material son $\sigma_w = \sigma_0$ y $\tau_w = \sigma_0 / 3$. Dibuje los diagramas completos de fuerza cortante y momento flector, que incluyan máximos, mínimos y ceros de V y M en los mismos, halle el valor mínimo que puede tomar b.

12. **Viga con dos apoyos y dos voladizos.** Una viga, ABCD, de longitud $l = 4{,}2$ [m] y sección rectangular, de base b y altura $2b$, tiene en voladizo sus extremos A, donde $x = 0$, y D, donde $x = 4{,}2$ [m], y se apoya en una articulación en B, donde $x = 0{,}6$ [m], y en una bolita en C, donde $x = 3{,}6$ [m]; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0 y dirigida hacia abajo, que se extiende desde B hasta C, y sendas fuerzas concentradas dirigidas hacia arriba, $F_0 = 2.000$ [N], aplicadas en A y en D. Si las tensiones normal y cortante admisibles del material son $\sigma_w = 12$ [MPa] y $\tau_w = 0{,}85$ [MPa], halle el valor mínimo que puede tomar b.

9.4 Flexión y fuerza cortante en vigas circulares macizas

1. **Viga con sólo un apoyo.** Una viga circular, ABC, de radio R y longitud $2l$, se apoya en una articulación en su punto medio, B, y los extremos A y C, simétricos, están en voladizo; las tensiones admisibles del material, en tensión normal y cortante, son σ_w y τ_w. Desde A hasta C se aplica una fuerza repartida, que varía linealmente desde $-p_0$, en A, hasta p_0, en C; en B obra, además, un momento externo, M_0, que mantiene la viga en equilibrio. Si $l = 0{,}5$ [m], $p_0 = 750$ [N / m], $\sigma_w = 100$ [MPa] y $\tau_w = 50$ [MPa], halle el valor mínimo de R.

2. **Viga simplemente apoyada.** Una viga circular y simplemente apoyada, de radio R y longitud $l = 7$ [m], está sometida a una fuerza uniformemente repartida en toda su longitud, de intensidad p_0. Halle el valor admisible de R para no superar las tensiones admisibles $\sigma_w = 160$ [MPa] y $\tau_w = 100$ [MPa].

3. **Viga simplemente apoyada sometida a su propio peso.** Una viga circular y simplemente apoyada, de radio R, longitud $l = 3$ [m] y densidad $\rho = 77.000$ [N / m^3], está sometida a su propio peso. Halle el valor admisible de R para no superar las tensiones admisibles $\sigma_w = 100$ [MPa] y $\tau_w = 70$ [MPa].

4. **Viga simplemente apoyada.** Una viga circular, ABC, de radio R, se apoya en una articulación en A, donde $x = 0$, y en un patín en C, donde $x = 3l$; las tensiones admisibles del material, normal y cortante, son σ_w y t_w. Desde A hasta C se aplica una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, y en el punto B, donde $x = 2l$, obra, además, la fuerza F_0, ambas dirigidas hacia abajo. Si $l = 1$ [m], $F_0 = 20.000$ [N], $\sigma_w = 100$ [MPa] y $\tau_w = 50$ [MPa], dibuje los diagramas de V y M, y halle el valor mínimo de R.

5. **Viga con dos apoyos y un voladizo.** Una viga circular, ABCD, de longitud $3l$ y radio R, tiene en voladizo su extremo A, donde $x = 0$, se apoya en una articulación en B, donde $x = l$, y en una bolita en D, donde $x = 3l$; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, que se extiende desde A hasta B, y una fuerza concentrada, $F_0 = 2p_0 l$, aplicada en C, donde $x = 2l$, ambas dirigidas hacia abajo. Si $l = 1$ [m], $p_0 = 30.000$ [N / m] y las tensiones admisibles del material son $\sigma_w = 280$ [MPa] $\tau_w = 60$ [MPa], halle el valor admisible de R.

9.5 Área reducida

1. **Área reducida de sección rectangular.** Halle la distribución de tensiones verticales y el área reducida de una sección rectangular, de base b y altura h, sometida a una fuerza cortante vertical.

2. **Área reducida de sección circular.** Halle la distribución de tensiones τ_{xy} y τ_{xz}, y el área reducida de una sección circular, de radio a, sometida a una fuerza cortante vertical; para el cálculo de área reducida debe tomar en cuenta ambas tensiones.

3. **Área reducida de sección elíptica.** Halle la distribución de tensiones τ_{xy} y τ_{xz}, y el área reducida de una sección elíptica, de semiejes a y b, y en la que b es vertical, sometida a una fuerza cortante vertical; para el cálculo del área reducida debe tomar en cuenta ambas tensiones.

9.6 Flexión y fuerza cortante en vigas de sección delgada y cerrada

1. **Viga simplemente apoyada de sección cuadrada.** Un tubo horizontal, ABCDE, se apoya en una articulación en A, donde $x = 0$, y en un patín en E, donde $x = 11l$; la sección recta de la viga es cuadrada, de lado a, y delgada, de espesor t. En los puntos C, donde $x = 4l$, y D, donde $x = 7l$, se aplican sendas fuerzas iguales a F_0, dirigidas hacia abajo. Si $l = a = 10t = 0{,}1$ [m] y $F_0 = 40000$ [N], halle en la sección del punto B, donde $x = 2l$, los valores máximos de las tensiones normal y cortante, y la tensión cortante en uno de los vértices del cuadrado.

2. **Viga simplemente apoyada de sección cuadrada.** Un tubo horizontal, de longitud l, está simplemente apoyado en sus extremos y soporta, en toda su longitud, una fuerza uniformemente distribuida, de intensidad p_0, dirigida hacia abajo, y las tensiones admisibles del material, normal y cortante, son σ_w y τ_w; la sección recta de la viga es cuadrada, de lado a y espesor t. Si $l = 8$ [m], $a = 10t$, $p_0 = 80000$ [N], $\sigma_w = 160$ [MPa] y $\tau_w = 100$ [MPa], halle el menor valor de t.

3. **Viga simplemente apoyada de sección rectangular.** Un tubo horizontal, ABCDE, se apoya en una articulación en A, donde $x = 0$, y en un patín en E, donde $x = 4l$; la sección recta de la viga es rectangular, de lados a y b, y delgada, de espesor t, y las tensiones admisibles del material, normal y cortante, son σ_w y τ_w. En los puntos B, donde $x = l$, C, donde $x = 2l$, y D, donde $x = 3l$, se aplican sendas fuerzas iguales a F_0, todas dirigidas hacia abajo. Si $l = 0{,}4$ [m], $t = 0{,}008$ [m], $F_0 = 25.000$ [N], $\sigma_w = 150$ [MPa] y $\tau_w = 80$ [MPa], halle el valor mínimo de b.

4. **Viga de sección rectangular aligerada.** La sección recta de una viga es rectangular, de base a y altura h, y tiene dos agujeros prismáticos y cuadrados, de lados iguales a b, cuyas caras son paralelas a las externas y están simétricamente colocados con respecto a los ejes centroidales, vertical y horizontal, de la sección; cada agujero determina, con respecto a los bordes de la sección, un espesor t. Si $a = 0{,}05$ [m], $h = 0{,}12$ [m], $b = 0{,}03$ [m] y $t = 0{,}01$ [m], y la tensión cortante admisible es $\tau_w = 60$ [MPa], halle el valor máximo de la fuerza cortante vertical que puede soportar la sección.

5. **Viga de sección rectangular aligerada.** La sección recta de una viga es rectangular, de base a y altura h, y tiene dos agujeros prismáticos y cuadrados, de lados iguales a b, cuyas caras son paralelas a las externas y están simétricamente colocados con respecto a los ejes centroidales, vertical y horizontal, de la sección; cada agujero determina, con respecto a los bordes de la sección, un espesor t. Si $a = 0{,}05$ [m], $h = 0{,}09$ [m], $b = 0{,}03$ [m] y $t = 0{,}01$ [m], y la tensión cortante admisible es $\tau_w = 60$ [MPa], halle la razón entre los valores máximos de las fuerzas cortantes vertical y horizontal, aplicadas independientemente, que puede soportar la sección.

6. **Tubo de sección circular.** Un tubo circular delgado, de radio R en la línea media y espesor t, soporta una fuerza cortante, V_y, y la tensión admisible del material en cortante es τ_w. Si $R = 0{,}05$ [m], $V_y = 10.000$ [N] y $\tau_w = 80$ [MPa], halle la distribución de tensiones cortantes en la sección recta y el valor mínimo de t.

7. **Viga simplemente apoyada de sección circular.** Un tubo circular delgado, ABC, de radio R en la línea media, longitud $3l$ y espesor t, está simplemente apoyado en A y C, soporta una fuerza concentrada, F_0, en el punto B, donde $x = l$, dirigida hacia abajo y las tensiones admisibles del material en normal y cortante son σ_w y τ_w. Si $l = 3$ [m], $R = 10t$, $F_0 = 70000$ [N], $\sigma_w = 160$ [MPa] y $\tau_w = 100$ [MPa], halle el valor mínimo de t.

9.7 Flexión y fuerza cortante en vigas de sección delgada y abierta

1. **Viga simplemente apoyada de sección en I.** Una viga horizontal, ABCD, se apoya en una articulación en A, donde $x = 0$, y en un patín en D, donde $x = 3l$; la sección recta de la viga es una I simétrica, de altura $6t$, ancho $4t$ y espesor t. En B, donde $x = l$, y en C, donde $x = 2l$, se aplican sendas fuerzas, iguales a F_0, dirigidas hacia abajo. Si $l = 250t$ y la tensiones admisibles en tensión normal y cortante del material son σ_w y τ_w, halle el mínimo valor que puede tomar t.

2. **Viga de sección en I.** La sección recta de una viga es una I simétrica, de altura $8t$, ancho $6t$ y espesor t; la tensión cortante admisible es τ_w. Halle la razón entre los valores máximos de las fuerzas cortantes vertical y horizontal, aplicadas independientemente, que puede soportar la sección.

3. **Viga simplemente apoyada de sección en T.** Una viga horizontal, ABC, se apoya en una articulación en el extremo A, donde $x = 0$, y en un patín en C, donde $x = 3l$; la sección recta de la viga es una T, cuyas aleta y alma son rectángulos delgados, de lados $10t$ y t en la aleta, y $9\ t$ y t en el alma. En el punto B, donde $x = l$, se aplica una fuerza F_0 dirigida hacia abajo. Si $l = 200t$, $F_0 = 10.000$ [N] y $t = 5 \times 10^{-3}$ [m], dibuje los diagramas de cizalladura y momento flector de la viga, y calcule, para la sección de la viga donde $x = l^-$, las tensiones principales y la tensión cortante máxima en el borde inferior de la T, en el eje neutro de la misma y en la unión de la aleta y el alma.

4. **Viga simplemente apoyada de sección en T invertida.** Una viga horizontal, ABCD, se apoya en una articulación en el extremo A, donde $x = 0$, y en un patín en D, donde $x = 4l$; la sección recta de la viga es una T invertida, cuyas aleta y alma son rectángulos iguales, de lados a y b. En los puntos B, donde $x = l$, y C, donde $x = 3l$, se aplican sendas fuerza iguales a F_0 dirigidas hacia abajo. Si $l = 1$ [m], $a = 21 \times 10^{-2}$ [m], $b = 7 \times 10^{-2}$ [m] y $F_0 = 50.000$ [N], halle la tensión cortante en cualquier sección recta de la viga ubicada entre los puntos A y B, a distancias de 5×10^{-2} [m] y 10×10^{-2} [m] del borde superior de la T invertida.

5. **Viga simplemente apoyada de sección en T invertida, con carga lineal.** Una viga horizontal simplemente apoyada, de longitud l, soporta una fuerza distribuida, de intensidad $p(x)$, que varía linealmente desde cero, en un apoyo, hasta p_0, en el otro; la sección recta de la viga es una T invertida, cuyas aleta y alma son rectángulos iguales, de lados $6t$ y t. Si $l = 3$ [m], $t = 0{,}025$ [m] y $\tau_w = 50$ [MPa], halle la distribución de tensiones cortantes de la sección, verticales en el alma y horizontales en la aleta, la tensión cortante máxima y el valor máximo que puede tomar p_0.

6. **Viga de sección en T y de alma horizontal.** La sección recta de una viga es un perfil en T, simétrico con respecto al alma, de aleta vertical y dimensiones $30t$ y $2t$, y alma horizontal de dimensiones $20t$ y t. Si la sección de la viga está sometida una fuerza cortante vertical, $V = 30.000$ [N], que pasa por el centroide de la sección, y la tensión admisible del material es $\tau_w = 100$ [MPa], halle el valor mínimo que debe tener la dimensión t.

7. **Viga en voladizo de sección en Π.** Una viga horizontal, AB, se apoya en un empotramiento en el extremo A, donde $x = 0$, y el extremo B, donde $x = l$, está en voladizo. La sección recta de la viga es una Π simétrica, de altura $4t$, ancho $6t$ y espesor t. Desde A hasta B se aplica sobre la viga una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, dirigida hacia abajo. Si $t = 0,001$ [m] y la tensión cortante admisible del material es $\tau_w = 60$ [MPa], halle el máximo valor que puede tomar p_0.

8. **Viga simplemente apoyada de sección en U.** Una viga, ABC, de longitud $5l$, se apoya simplemente en los extremos A y C, y soporta un momento flector positivo, M_0, en B, donde $x = 3l$; la sección recta de la viga es una U simétrica, de altura h, ancho b y espesor t. Si $b = 0,30$ [m], $h = 0,15$ [m], $t = 0,025$ [m] y $M_0 = 15.000$ [Nm], halle los valores máximos en tracción y compresión de la tensión normal, y el máximo valor de la tensión cortante.

9. **Viga simplemente apoyada de sección en U, con un voladizo.** Una viga, ABC, se apoya en una articulación en A, donde $x = 0$, y en un patín en B, donde $x = 4l$; el extremo C, donde $x = 5l$, está en voladizo. La sección recta de la viga es una U simétrica, de altura $5t$, ancho $8t$ y espesor t. En D, donde $x = 2l$, se aplica una fuerza $2F_0$ y en C la fuerza F_0, ambas dirigidas hacia abajo. Si $l = 1$ [m], $F_0 = 15000$ [N], y las tensiones admisibles del material en tracción, compresión y cortante son $\sigma_{wt} = 50$ [MPa], $\sigma_{wc} = 200$ [MPa] y $\tau_{wc} = 60$ [MPa], halle el mínimo valor que puede tomar t.

10. **Viga de sección en V.** La sección recta de una viga es una V formada por rectángulos iguales, de lados $30t$ y t, que se encuentran en un ángulo de 45°. Si la sección está sometida a una fuerza cortante, V, que coincide con el eje de simetría de la V, halle la distribución de tensiones cortantes en la misma.

9.8 Centro de cizalladura en vigas de sección delgada y abierta

1. **Viga de sección en I asimétrica.** La sección recta de una viga es una I de alma vertical y asimétrica, en la cual las aletas y el alma son rectángulos de longitud $20t$ y espesor t; el alma se ubica a la distancia $6t$ de un borde de las aletas y a la distancia $13t$ del otro borde. Halle la distribución de las tensiones cortantes en la sección recta de la viga, producidas por una fuerza cortante vertical, V, que pasa por el centroide de la sección, y la ubicación del centro de cizalladura.

2. **Viga de sección en I asimétrica.** La sección recta de una viga es una I de alma vertical y asimétrica, en la cual las aletas son rectángulos iguales de lados $30t$ y t, y el alma es un rectángulo de lados $40t$ y t, cuyo borde dista $10t$ de uno de los extremos de las aletas. Si la sección recta de la viga soporta una fuerza cortante vertical, V, orientada a lo largo de la línea media del alma, halle la posición del centro de cizalladura de la sección recta, el torque que la fuerza cortante produce en esa sección y la tensión cortante máxima a que queda sometida ésta.

3. **Viga en voladizo de sección en L.** Una viga horizontal, AB, de longitud l, está empotrada en A y tiene libre el extremo B, donde se aplica una fuerza F_0, dirigida hacia abajo y que pasa por el centroide de la sección recta de la viga; esa sección es una L, cuyas aleta y alma, respectivamente horizontal y vertical, son rectángulos iguales, de lados a y t. Si $l = 50a$ y $t = 0,05a$, halle las tensiones cortante y normal en un punto de la sección recta del empotramiento, ubicado en el borde exterior del alma de la L y a la distancia $0,5a$ de su borde superior.

4. **Viga de sección en C.** La sección recta de una viga horizontal es una C formada por tres rectángulos; las aletas, horizontales, tienen base $20t$, en la línea media, y espesor $2t$, y el alma, vertical, es de altura $30t$, en la línea media, y espesor t. Halle la posición del centro de cizalladura de la sección recta y, además, si ésta soporta una fuerza cortante vertical, $V = 20.000$ [N], que pasa por el centroide de la misma, y la tensión cortante admisible del material es $\tau_w = 50$ [MPa], calcule el torque que esa fuerza cortante produce en la sección y el espesor mínimo t.

5. **Viga de sección en C.** La sección recta de una viga horizontal, de pared delgada y espesor t, es un arco de circunferencia que subtiende en el centro un ángulo 2α y cuyo radio en la línea media es a. Si la sección recta de la viga soporta una fuerza cortante vertical, V, que pasa por el centroide de aquélla y es perpendicular al eje de simetría de la misma, halle la posición del centro de cizalladura de la sección, el torque que la fuerza cortante produce en esa sección y la tensión cortante máxima a que queda sometida.

6. **Viga de sección en C.** La sección recta de una viga horizontal, de pared delgada y espesor t es semicircular, tiene forma de C, y su radio en la línea media es a. Si la sección recta de la viga soporta una fuerza cortante vertical, V, que pasa por el centroide de aquélla y es perpendicular al eje de simetría de la misma, halle la posición del centro de cizalladura de la sección recta, el torque que la fuerza cortante produce en esa sección y la tensión cortante máxima a que queda sometida.

7. **Viga de sección curva y recta.** Una lámina metálica plana y delgada, de longitud l y espesor uniforme t, se dobla en su punto medio para formar una viga de longitud l y cuya sección recta está compuesta por una semicircunferencia, de radio a en la línea media, y dos segmentos rectos, paralelos e iguales, de longitud desconocida b. Si el centroide de la sección recta coincide con el centro de la semicircunferencia, halle el valor de b; si, además, en esa sección la viga soporta una fuerza cortante vertical, V, que pasa por su centroide y es perpendicular al eje de simetría de la sección, halle la posición del centro de cizalladura de la misma, el torque que la fuerza cortante produce en esa sección y la tensión cortante máxima a que queda sometida.

8. **Viga de sección cuadrada abierta.** La sección recta de una viga horizontal, de pared delgada y espesor t, es un cuadrado, de lado a en la línea media y abierto en el punto medio de un lado vertical. Si la sección recta de la viga soporta una fuerza cortante vertical, V, que pasa por el centroide de aquélla y es perpendicular al eje de simetría de la misma, halle la posición del centro de cizalladura de la sección recta, el torque que la fuerza cortante produce en esa sección y la tensión cortante máxima a que queda sometida.

9. **Viga de sección triangular abierta.** La sección recta de una viga horizontal, de pared delgada y espesor t, es un triángulo equilátero, de lado l en la línea media y abierto en un vértice. Si la sección recta de la viga soporta una fuerza cortante vertical, V, que pasa por el centroide de aquélla y es perpendicular al eje de simetría de la misma, halle la posición del centro de cizalladura de la sección recta, el torque que la fuerza cortante produce en esa sección y la tensión cortante máxima a que queda sometida.

10. **Viga de sección circular abierta.** La sección recta de una viga horizontal, de pared delgada y espesor t, es circular, de radio a en la línea media y abierta en el extremo de un diámetro horizontal; la tensión admisible del material es τ_w. Si la sección recta de la viga soporta una fuerza cortante vertical, V, que pasa por el centroide de aquélla y es perpendicular al eje de simetría de la misma, halle la posición del centro de cizalladura de la sección recta, el torque que la fuerza cortante produce en esa sección y el valor mínimo del espesor de la lámina.

9.9 Solicitaciones mixtas

1. **Cargas axial y cortante en viga circular.** En una viga de sección circular, de radio R, de módulo de Young E y de Poisson $\mu = 0{,}33$, la cizalladura y la carga axial son uniformes y ambas valen P_0. Halle, si

la tensión admisible en el ensayo de carga axial es σ_{lo}, el mínimo valor que debe tener R al aplicar los criterios de Tresca y de Von Mises.

2. **Cargas axial y cortante en viga rectangular.** En una viga, de longitud l, de sección rectangular, con base a y altura $2a$, de módulo de Young E y de Poisson $\mu = 0{,}33$, la cizalladura es uniforme, vale $V = P_0$, y la fuerza axial interna, suponiendo que el origen de coordenadas se ubica en un extremo, varía con la distancia según $P = P_0 x(l - x)/l^2$. Halle, si la tensión admisible en el ensayo de carga axial el material es σ_{lo}, el mínimo valor que debe tener a al aplicar los criterios de Tresca y de Von Mises.

3. **Cargas axial y cortante en viga rectangular.** Una barra prismática, de longitud l, sección rectangular, de lados a y b, y módulos de Young y de Poisson, E y μ, está empotrada en $x = 0$ y tiene libre el extremo $x = l$, en el cual obran, aplicadas en el centro de la sección recta, las fuerzas axial de tracción $\vec{P} = \vec{i}_x P_0$ y cortante $\vec{V} = \vec{i}_y V_0$; además, en un punto A(l/2, 0, –b/2), de la superficie de la barra, se coloca una roseta de 45° que mide las deformaciones ε_1, ε_2 y ε_3. Halle los valores de P_0 y V_0 si se desprecia el peso propio de la barra y se sabe que $l = 0{,}60$ [m], $a = 0{,}15$ [m], $b = 0{,}06$ [m], $E = 210$ [GPa], $\mu = 0{,}3$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_y = -30 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_2 = 205 \times 10^{-6}$ y $\varepsilon_3 = \varepsilon_x = -30 \times 10^{-6}$.

CAPÍTULO 10

ELÁSTICA

10.1 Vigas en voladizo

1. **Voladizo cerca de un apoyo de bolita.** Una viga, ABC, de longitud $2l$, sección recta rectangular de base b y altura $2b$, y módulo de Young E, está empotrada en A, donde $x=0$, y tiene libre su extremo C, donde $x=2l$, el cual se encuentra por encima de un apoyo de bolita, del que dista la distancia vertical Δ_C; la viga soporta en B, donde $x=l$, una fuerza concentrada F_0, dirigida hacia abajo. Halle la reacción en C después de aplicar la fuerza, si $l=0{,}6$ [m], $b=0{,}05$ [m], $\Delta_C=0{,}005$ [m], $F_0=50.000$ [N] y $E=200$ [GPa], y la deflexión de la elástica en B.

2. **Con carga triangular.** Una viga, AB, de longitud l e inercia EI, está empotrada en A, donde $x=0$, y tiene libre su extremo B, donde $x=l$; la viga soporta una fuerza distribuida, de intensidad $p(x)$ y dirigida hacia abajo, que varía linealmente desde A, donde la intensidad es p_0, hasta 0 en B. Halle las ecuaciones de la elástica y de su pendiente.

3. **Inercia variable.** Un viga, de longitud $2l$, empotrada en un extremo y libre en el otro, en el que soporta una fuerza concentrada dirigida hacia abajo, F_0, desde el empotramiento hasta el punto medio tiene una inercia $2EI$ y vale EI desde el punto medio hasta el extremo libre. Halle la pendiente de la elástica y la deflexión de esa curva en el extremo libre.

4. **Inercia variable.** Un viga ABC, de longitud $2l$, está empotrada en el extremo A y tiene libre el C, en donde obra una fuerza concentrada, de magnitud $F_0=p_0l$; además, desde el empotramiento hasta el punto medio de la viga actúa una fuerza uniformemente repartida, de intensidad $2p_0$, ambas dirigidas hacia abajo. La sección recta de la viga es rectangular, de base b, y cuya altura varía linealmente desde $5b$, en el empotramiento, hasta b, en el extremo C. Halle la pendiente de la elástica y la deflexión de esa curva en el extremo libre.

10.2 Vigas simplemente apoyadas

1. **Con fuerza concentrada.** Una viga, ABC, de longitud l e inercia EI, está apoyada simplemente en A y C; la viga soporta una fuerza concentrada dirigida hacia abajo, F_0, en el punto B, ubicado a la distancia a de A. Halle la ecuación de la elástica y de su pendiente a lo largo de la viga.

2. **Con momento concentrado.** Una viga, ABC, de longitud l e inercia EI, se apoya simplemente en A y C; la viga soporta un momento concentrado negativo, M_0, en el punto B, ubicado a la distancia a de A. Halle a para que la pendiente de la elástica en A sea 0 y la deflexión respectiva de la elástica en B.

3. **Con dos fuerzas concentradas.** Una viga, ABCD, de longitud l e inercia EI, se apoya simplemente en A y D; la viga soporta dos fuerzas concentradas, F_1 y F_2, aplicadas, respectivamente, en B, donde $x=0{,}25l$, y en C, donde $x=0{,}8l$, ambas dirigidas hacia abajo. Halle las deflexiones de la elástica en B y C, la elástica máxima y la razón entre F_1 y F_2 para que ese máximo corresponda al punto medio de la viga.

4. **Con dos fuerzas concentradas opuestas.** Una viga, ABCD, de longitud l e inercia EI, está apoyada simplemente en A y D; la viga soporta dos fuerzas concentradas de igual magnitud, F_0, aplicadas, respectivamente, en B, donde $x=0{,}25l$, y en C, donde $x=0{,}75l$, pero la primera está dirigida hacia abajo y

la segunda hacia arriba. Halle las deflexiones de la elástica en B y en el punto medio de la viga, y el ángulo de esta curva en A.

5. **Con fuerza repartida uniformemente.** Una viga, AB, de longitud $2l$ e inercia EI, está apoyada simplemente en A y B; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida y dirigida hacia abajo, de intensidad p_0, aplicada desde A hasta el punto medio de la viga. Por dos métodos distintos halle la elástica y su pendiente en ese punto medio.

6. **Con fuerza repartida uniformemente.** Una viga, ABC, de longitud $3l$ e inercia EI, está apoyada simplemente en A y C; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, aplicada en toda su longitud, y en el punto B, donde $x = l$, obra una fuerza concentrada, $F_0 = p_0 l$, ambas dirigidas hacia abajo. Halle la elástica en B y la pendiente de esa curva en A y C.

7. **Con fuerza repartida uniformemente.** Una viga, ABCD, de longitud $4l$ e inercia EI, se apoya simplemente en A y D; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, desde C, donde $x = 2l$, hasta D, y una fuerza concentrada, $F_0 = p_0 l$, en el punto B, donde $x = l$, ambas dirigidas hacia abajo. Por dos métodos distintos halle la elástica en C y la pendiente de esa curva en A.

8. **Con fuerza repartida uniformemente.** Una viga, ABCD, de longitud $4l$ e inercia EI, está apoyada simplemente en A y D; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, aplicada en toda su longitud, en el punto B, donde $x = l$, obra una fuerza concentrada, $F_0 = p_0 l$, y en el punto C, donde $x = 2l$, se aplica otra fuerza $F_1 = 2p_0 l$, todas dirigidas hacia abajo. Halle la elástica en B, la pendiente de esa curva en D y los valores máximos del momento flector y de la fuerza cortante.

9. **Con fuerza repartida uniformemente.** Una viga, ABCD, de longitud $3l$ e inercia EI, está apoyada simplemente en A y D; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, que se extiende desde A hasta el punto B, donde $x = 2l$, y una fuerza concentrada, $F_0 = 3p_0 l$, en el punto C, donde $x = 3l$, ambas dirigidas hacia abajo. Halle la elástica en B y la pendiente de esa curva en D.

10. **Con carga triangular.** Una viga, AB, de longitud l e inercia EI, está apoyada simplemente en sus extremos A y C; la viga soporta una fuerza distribuida, de intensidad $p(x)$, que varía linealmente desde A, donde la intensidad es $-p_0$, hasta p_0 en el punto B, y una fuerza concentrada, $F_0 = p_0 l$, dirigida hacia abajo y aplicada en el punto medio de la viga. Halle las ecuaciones del momento flector, de la fuerza cortante, de la elástica y de la pendiente de ésta, y los valores máximos de cada una de ellas.

11. **Con cargas uniforme y triangular.** Una viga, ABC, de longitud $2l$ e inercia EI, está apoyada simplemente en sus extremos A y C; la viga soporta una fuerza distribuida, de intensidad $p(x)$, que varía linealmente desde A, donde la intensidad es p_0, hasta 0 en el punto B, que es el punto medio de la viga, y otra fuerza repartida uniformemente, de intensidad p_0, que se extiende desde B hasta C, ambas dirigidas hacia abajo. Halle los valores máximos del momento flector y de la elástica; además, si la sección recta de la viga es un rectángulo, de base b y altura $2b$, calcule el valor mínimo que debe tener b para que la tensión normal máxima no supere la admisible, σ_w.

12. **Puente de una tabla.** Una tabla, de $E = 12{,}4$ [GPa], sección rectangular, de base $b = 0{,}3$ [m] y altura $h = 0{,}025$ [m], tiene una longitud $l = 2{,}250$ [m] y se usa como puente para cruzar una quebrada, cuya superficie se encuentra a la distancia $c = 0{,}050$ [m] debajo de la tabla. Si un campesino con su carga, que en total pesan $W = 900$ [N], pasa por la tabla, halle la posición del campesino en la tabla para la cual es máxima la deflexión vertical de la misma y diga si aquél se moja los pies.

13. **Inercia variable.** Un viga, AB simplemente apoyada, de longitud l, en A soporta un momento flector negativo, de magnitud M_0; desde A hasta el punto medio de la viga la inercia de ésta es $2EI$ y vale EI

desde el punto medio hasta B. Halle la pendiente de la elástica en los apoyos y en el centro de la viga, y la deflexión de esa curva en el centro.

14.**Inercia variable.** Un viga, ABC, de longitud $2l$, simplemente apoyada en sus extremos A y C, en el punto medio, B, soporta una fuerza concentrada dirigida hacia abajo, F_0, y en C obra un momento flector positivo, $M_0 = F_0 l$; desde A hasta B la viga tiene una inercia $2EI$ y es EI entre B y C. Halle la pendiente de la elástica en A y C, y la deflexión de esa curva en B.

15.**Inercia variable.** Un viga, ABC, de longitud $2l$, simplemente apoyada en sus extremos A y C, en toda su longitud soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0 y dirigida hacia abajo; desde A hasta B, punto medio de la viga, la viga tiene una inercia $2EI$ y es EI entre B y C. Halle la pendiente de la elástica en A y C, y la deflexión de esa curva en B.

16.**Inercia variable.** Un viga, ABC, de longitud $2l$, simplemente apoyada en sus extremos A y C, desde B hasta C soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0 y dirigida hacia abajo; entre A y B, punto medio de la viga, la viga tiene una inercia $2EI$ y es EI entre B y C. Halle la pendiente de la elástica en A y C, y la deflexión de esa curva en B.

17.**Inercia variable.** Un viga, ABCDE, simplemente apoyada en A y E, de longitud $3l$, soporta en el punto C, donde $x = 1{,}5l$, una fuerza concentrada, F_0, dirigida hacia abajo; desde A hasta B, donde $x = l$, y desde D, donde $x = 2l$, hasta E la inercia de la viga es EI y vale $2EI$ entre B y C. Halle la pendiente de la elástica en los apoyos y en el centro de la viga, y la deflexión de esa curva en el centro.

10.3 Vigas en dos apoyos y con un voladizo

1. **Con fuerzas concentradas.** Una viga, ABCD, de longitud $3l$ e inercia EI, tiene su extremo A, donde $x = 0$, en voladizo y está apoyada en una articulación en B, donde $x = l$, y en un patín en D, donde $x = 3l$; la viga soporta en A la fuerza concentrada F_0, y otra en C, donde $x = 2l$, de valor $F_0/2$, ambas dirigidas hacia abajo. Halle la elástica y su pendiente en A y C.

2. **Con carga repartida.** Una viga, ABC, de longitud $4l$ e inercia EI, tiene su extremo C, donde $x = 4l$, en voladizo y está apoyada en una articulación en A, donde $x = 0$, y en un patín en B, donde $x = 3l$; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida en toda su longitud, de intensidad p_0, dirigida hacia abajo. Por dos métodos distintos halle la elástica y su pendiente en C.

3. **Con cargas concentrada y repartida.** Una viga, ABC, de longitud $4l$ e inercia EI, tiene su extremo A, donde $x = 0$, en voladizo y está apoyada en una articulación en B, donde $x = l$, y en un patín en C, donde $x = 4l$; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, que se extiende desde B hasta C, y una fuerza concentrada, $F_0 = 2p_0 l$, aplicada en el punto A, ambas dirigidas hacia abajo. Halle la elástica y su pendiente en A.

4. **Con cargas concentrada y repartida.** Una viga, ABC, de longitud $3l$ e inercia EI, tiene su extremo A, donde $x = 0$, en voladizo y está apoyada en una articulación en B, donde $x = l$, y en un patín en C, donde $x = 3l$; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, que se extiende desde B hasta C, y una fuerza concentrada F_0, aplicada en el punto A, ambas dirigidas hacia abajo. Por dos métodos distintos halle el valor de F_0 para el cual la deflexión de la elástica en A es nula y, con ese valor de la fuerza, la deflexión de la elástica en el punto medio del tramo BC.

5. **Con cargas concentradas y repartida.** Una viga, ABCD, de longitud $5l$ e inercia EI, tiene su extremo D, donde $x = 5l$, en voladizo y está apoyada en una articulación en A, donde $x = 0$, y en un patín en C, donde $x = 4l$; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, que se extiende

desde A hasta C, y sendas fuerzas concentradas, $F_0 = p_0 l$, aplicadas en el punto B, donde $x = 2l$, y D, todas dirigidas hacia abajo. Halle la deflexión de la elástica y su pendiente en D.

6. **Inercia variable.** Un viga, apoyada en una articulación en $x = l$ y en un patín en $x = 2l$, tiene libre su extremo $x = 0$ y soporta una carga uniformemente distribuida en toda su longitud, de intensidad p_0 y dirigida hacia abajo; en el tramo en voladizo la inercia de la viga es $2EI$ y vale EI en el segundo tramo, entre los apoyos. Halle la pendiente y la deflexión máximas de la elástica de la viga.

10.4 Vigas en dos apoyos y con dos voladizos

1. **Con carga repartida.** Una viga circular, ABCD, de radio R y longitud $4l$, tiene libres los extremos A y D, está apoyada en una articulación en B, donde $x = l$, y en un patín en C, donde $x = 3l$; desde A hasta D la viga soporta una fuerza repartida uniformemente, dirigida hacia abajo, de intensidad p_0. Si $l = 0{,}60$ [m], $R = 0{,}015$ [m], $p_0 = 10.000$ [N / m] y $E = 200$ [GPa], halle la deflexión vertical del punto medio de la viga y la tensión normal máxima.

2. **Con cargas concentrada y repartida.** Una viga, ABCD, de longitud $4l$, tiene libres los extremos A y D, está apoyada en una articulación en B, donde $x = l$, y en un patín en C, donde $x = 3l$; desde B hasta D la viga soporta una fuerza repartida uniformemente y dirigida hacia abajo, de intensidad p_0, y en A obra una fuerza concentrada, $3p_0 l$, dirigida hacia arriba. Halle la deflexión de la elástica y su pendiente en D.

3. **Con cargas repartidas.** Una viga, ABCD, de longitud $4l$ e inercia EI, tiene libres los extremos A y D, está apoyada en una articulación en B, donde $x = l$, y en un patín en C, donde $x = 3l$; en los tramos AB y CD la viga soporta sendas fuerzas repartidas uniformemente, de intensidades iguales a p_0. Halle la deflexión vertical del punto medio de la viga y la tensión normal máxima.

4. **Deflexiones iguales.** Una viga, ABCDE, de longitud $2l$ e inercia EI, tiene libres los extremos A y E, está apoyada en una articulación en B, donde $x = 0{,}5l$, y en un patín en D, donde $x = 1{,}5l$; en los extremos A y E la viga soporta sendas fuerzas concentradas e iguales, F_1, y en el punto C, donde $x = l$, otra fuerza concentrada, F_2, todas dirigidas hacia abajo. Halle la razón F_1/F_2 para que las deflexiones de la elástica en A, C y E sean iguales.

5. **Tangentes horizontales.** Una viga, ABCD, de longitud l e inercia EI, tiene libres los extremos A y D, está apoyada en una articulación en B, donde $x = a$, y en un patín en C, donde $x = l - a$; en toda su longitud la viga soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0 y dirigida hacia abajo. Halle la razón a/l para que las tangentes de la elástica en A y C sean horizontales.

10.5 Otras vigas isostáticas

1. **Barra apoyada y colgada.** La barra circular horizontal, ABC, de longitud $3l$ y radio $10R$, está apoyada en una articulación en A y colgada del punto D del techo mediante el cable vertical BD, de longitud $3l$ y radio R, el cual se anuda al punto B de la primera, que se encuentra a la distancia l de A; el extremo C de la barra ABC está libre y soporta una fuerza F_0, dirigida hacia abajo. Si ambos elementos tiene el mismo módulo de Young E, calcule lo que baja el punto C.

2. **Viga empotrada y con articulación interior.** Una viga, ABCDE, de longitud $6l$ e inercia EI, está empotrada en A, donde $x = 0$, se apoya en un patín en E, donde $x = 6l$, y tiene una articulación interior en C, donde $x = 2l$; la viga soporta sendas fuerzas concentradas e iguales, F_0, en el punto B, donde $x = l$, y en el punto D, donde $x = 4l$, ambas dirigidas hacia abajo. Halle la elástica en C y la pendiente de esa curva en D.

10.6 Deflexiones por fuerza cortante o por temperatura

1. **Deflexión por cortante en viga rectangular.** Una viga simplemente apoyada, de longitud l, con sección recta rectangular, de base b y altura $2b$, soporta una fuerza uniformemente repartida en toda su longitud, de intensidad p_0. Halle la deflexión de la viga en su punto medio debida la fuerza cortante y al momento flector, y compárelas.

2. **Deflexión por cortante en viga circular.** Una viga simplemente apoyada, de longitud l, con sección recta circular, de radio a, soporta una fuerza uniformemente repartida en toda su longitud, de intensidad p_0. Halle la distribución de tensiones τ_{xy} en la sección y, tomando en cuenta sólo esa tensión, el área reducida de la misma; halle, también, la deflexión de la viga en su punto medio debida la fuerza cortante y al momento flector, y compárelas.

3. **Viga flectada térmicamente.** Una viga de longitud l y sección rectangular, de base b y altura h, tiene módulo de Young E y de dilatación térmico α. Si la cara superior de la viga se calienta en ΔT grados y la inferior se enfría en ΔT grados, repartiéndose la temperatura linealmente entre esos límites sobre la altura h de la sección, halle la curvatura de la viga cuando ésta se encuentra simplemente apoyada. Halle, además, el momento flector y la tensión normal máximos en la viga cuando los extremos de ésta están empotrados.

10.7 Vigas hiperestáticas con una redundancia

1. **Viga empotrada y colgada.** Una viga circular, ABC, de longitud $2l$ y radio $4R$, está empotrada en A, donde $x = 0$, y sostenida verticalmente del techo en B, donde $x = l$, mediante una varilla circular, de radio R y longitud l; en C, donde $x = 2l$, la viga soporta una fuerza concentrada, F_0, dirigida hacia abajo. El módulo de Young y la tensión admisible de la viga y la varilla son E yσ_w. Si $l = 1{,}5$ [m], $F_0 = 45.000$ [N], $E = 200$ [GPa] y $\sigma_w = 200$ [MPa], halle las reacciones en el empotramiento, la fuerza que obra sobre la varilla y el valor mínimo de R.

2. **Viga empotrada y apoyada, con carga concentrada.** Una viga, ABC, está apoyada en un patín en el punto A, donde $x = l$, empotrada en el punto C, donde $x = l$, y soporta una fuerza concentrada, F_0, en B, donde $x = l/3$, dirigida hacia abajo. Halle las reacciones y dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

3. **Viga empotrada y apoyada, con cargas concentradas.** Una viga rectangular, ABCD, de base b, altura $2b$, longitud $3l$ y módulo de Young E, está empotrada en A, donde $x = 0$, y apoyada en un patín en D, donde $x = 3l$; la viga soporta sendas fuerzas concentradas, F_0, aplicadas en el punto B, donde $x = l$, y en el punto C, donde $x = 2l$, ambas dirigidas hacia abajo. Si $l = 4$ [m], $F_0 = 100$ [kN], $\sigma_w = 160$ [MPa], $\tau_w = 100$ [MPa] y $E = 200$ [MPa], halle el menor valor de b.

4. **Viga empotrada y apoyada, con carga repartida.** Una viga, AB, de longitud l e inercia EI, está empotrada en A y apoyada en un patín en B; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida desde A hasta B, de intensidad p_0, dirigida hacia abajo. Por dos métodos distintos halle la deflexión máxima de la elástica de la viga.

5. **Viga empotrada y apoyada, con cargas concentrada y repartida.** Una viga, ABC está empotrada en A, donde $x = 0$, y apoyada en un patín en C, donde $x = 2l$; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida desde A hasta B, donde $x = l$, de intensidad p_0, y una fuerza concentrada, $F_0 = 2p_0 l$, aplicada en B, ambas dirigidas hacia abajo. Halle las reacciones y dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

6. **Viga empotrada y apoyada, con cargas concentrada y repartida.** Una viga circular, ABC, de radio R, longitud $3l$ y módulo de Young E, está apoyada en un patín en A, donde $x=0$, y empotrada en C, donde $x=3l$; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida en toda su longitud, de intensidad p_0, y una fuerza concentrada, $F_0=3p_0l$, aplicada en B, donde $x=l$, ambas dirigidas hacia abajo. Si $l=4$ [m], $p_0=10$ [kN/m], $\sigma_w=160$ [MPa], $\tau_w=100$ [MPa] y $E=200$ [MPa], halle el menor valor de R.

7. **Viga empotrada y apoyada, con cargas concentrada y repartida.** Una viga, ABCD, de longitud $4l$ e inercia EI, está empotrada en A, donde $x=0$, y apoyada en un patín en D, donde $x=4l$; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0 y dirigida hacia abajo, que se extiende desde A hasta B, donde $x=2l$, y una fuerza concentrada, $F_0=3p_0l$, en C, donde $x=3l$, ambas dirigidas hacia abajo. Halle las reacciones y el valor máximo, en valor absoluto, de la elástica.

8. **Viga empotrada y apoyada, con carga triangular.** Una viga, AB, de longitud l, está empotrada en A y en B se apoya en un patín; la sección recta de la viga es rectangular, de base b y altura $2b$, y el material de la misma tiene las tensiones admisibles $\sigma_w=200$ [MPa] y $\tau_w=70$ [MPa]. Si sobre la viga actúa una fuerza distribuida, que varía linealmente desde $p_0=20.000$ [N / m] en A, hasta 0 en B, halle las reacciones en los apoyos de la viga, los diagramas de V y M, con todos sus detalles y el valor mínimo que puede tener b.

9. **Viga empotrada y apoyada, con carga parabólica.** Una viga, AB, de longitud l e inercia EI, está empotrada en A, donde $x=0$, y apoyada en un patín en B, donde $x=l$; la viga soporta una fuerza distribuida dirigida hacia abajo, cuya intensidad es $p=p_0(l-x)x/l^2$. Halle la elástica de la viga por superposición; es decir, calcule la elástica originada por una carga concentrada ubicada en un punto arbitrario de la viga y use el resultado como elemento de integración.

10. **Viga empotrada y apoyada, con carga parabólica.** Una viga, AB, de longitud l e inercia EI, está empotrada en A, donde $x=0$, y apoyada en un patín en B, donde $x=l$; la viga soporta una fuerza distribuida dirigida hacia abajo, cuya intensidad es $p=4p_0(l-x)x/l^2$. Halle las reacciones y los momentos positivo y negativo máximos de la viga, y en el punto medio de la misma la deflexión de la elástica.

11. **Viga empotrada y apoyada, de inercia variable y soporta fuerza repartida.** Una viga, ABC, de longitud $2l$, está empotrada en A, donde $x=0$, y apoyada en un patín en C, donde $x=2l$; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0 y dirigida hacia abajo, que se extiende desde A hasta C; entre A y B, donde $x=l$, la inercia de la viga es EI y vale $2EI$ desde B hasta C. Halle las reacciones, dibuje los diagramas de cizalladura y momento flector y calcule la pendiente de la elástica en B.

12. **Viga empotrada, apoyada y con un voladizo, soporta fuerza repartida.** Una viga, ABC, de longitud $3l$ y sección rectangular, de base b y altura $2b$, está empotrada en A, donde $x=0$, apoyada en un patín en B, donde $x=2l$, y tiene libre su extremo libre C, donde $x=3l$; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0 y dirigida hacia abajo, que se extiende en toda su longitud. Si $l=4$ [m], $p_0=50.000$ [N], $E=200$ [GPa] y las tensiones admisibles del material en tensión normal y cortante son $\sigma_w=250$ [MPa] y $\tau_w=150$ [MPa], halle el valor mínimo de b.

13. **Viga empotrada, apoyada y con un voladizo, soporta fuerza repartida.** Una viga, ABCD, de longitud $3l$ e inercia EI, está empotrada en A, donde $x=0$, apoyada en un patín en C, donde $x=2l$, y tiene libre su extremo libre D, donde $x=3l$; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0 y dirigida hacia abajo, que se extiende desde B, donde $x=l$, hasta D. Halle los diagramas completos de V y M, con sus puntos de valores críticos, la elástica en el punto B y la pendiente de la elástica en el punto D.

14. **Viga empotrada y apoyada, con carga triangular.** Una viga, AB, de longitud l e inercia EI, está empotrada a una pared rígida en el punto A, donde $x=0$, y apoyada en un patín en el punto B, donde $x=l$; la viga soporta una fuerza distribuida, de intensidad $p(x)$ y dirigida hacia abajo, que varía linealmente desde A, donde la intensidad es p_0, hasta 0 en el punto B. Halle las reacciones, los momentos positivo y negativo máximos, y, en el punto medio de la viga, la deflexión y pendiente de la elástica.

15. **Viga con tres apoyos, soporta fuerza repartida.** Una viga, ABC, de longitud $3l$, está apoyada en una articulación en A, donde $x=0$, y en sendos apoyos de bolita en B, donde $x=l$, y en C, donde $x=3l$; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida en toda su longitud, de intensidad p_0, dirigida hacia abajo. Halle las reacciones en los tres apoyos, dibuje, con todos los detalles, los diagramas de fuerza cortante y momento flector, y calcule la pendiente de la elástica en el apoyo B.

16. **Viga con tres apoyos, soporta fuerza repartida.** Una viga, ABC, de longitud $2l$, tensiones admisibles, normal y cortante, σ_w y τ_w, y sección recta rectangular, de base b y altura $2b$, está apoyada en una articulación en A, donde $x=0$, y en apoyos de patín en B, donde $x=l$, y en C, donde $x=2l$; sobre la viga obra una carga uniformemente repartida, de intensidad p_0 y dirigida hacia abajo, que se extiende desde A hasta B. Si $l=2$ [m], $p_0=20.000$ [N/m] y $\sigma_w=3\tau_w=30$ [MPa], halle las reacciones en los apoyos, los valores máximos, en valor absoluto, de la fuerza cortante y el momento flector, y el valor mínimo que puede tomar b.

17. **Viga con tres apoyos, soporta fuerza repartida.** Una viga, ABC, de longitud $3l$ y cuya sección recta es un rectángulo, de base b y altura $2b$, está apoyada en una articulación en A, donde $x=0$, y en sendos apoyos de bolita, en $x=l$ y en $x=3l$. Si la viga soporta una carga uniformemente repartida en toda su longitud, de intensidad p_0 y dirigida hacia abajo, halle las reacciones, dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector, con todos sus detalles, y calcule el mínimo valor de b cuando las tensiones admisibles normal y cortante del material son $\sigma_w=3\tau_w=\sigma_0$.

18. **Viga con tres apoyos, soporta fuerzas repartidas.** Una viga, ABC, de longitud $3l$, tensiones admisibles, normal y cortante, σ_w y τ_w, y sección recta rectangular, de base b y altura $2b$, está apoyada en una articulación en A, donde $x=0$, y en apoyos de patín en B, donde $x=l$, y en C, donde $x=2l$; sobre la viga obran dos cargas uniformemente repartidas, de intensidades p_0 y $2p_0$, dirigidas hacia abajo, que se extienden, respectivamente, desde A hasta B y desde B hasta C. Si $l=2$ [m], $p_0=10.000$ [N/m], $\sigma_w=200$ [MPa] y $\tau_w=70$ [MPa], halle los valores máximos, en valor absoluto, de la fuerza cortante y el momento flector, y el valor mínimo que puede tomar b.

19. **Viga con tres apoyos, soporta fuerzas concentrada y repartida.** Una viga, ABCD, de longitud $3l$, está apoyada en una articulación en A, donde $x=0$, y en sendos apoyos de bolita en B, donde $x=l$, y en D, donde $x=3l$; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida en toda su longitud, de intensidad p_0, y una fuerza concentrada, $F_0=2p_0l$, aplicada en el punto C, donde $x=2l$, ambas dirigidas hacia abajo. Halle las reacciones en los tres apoyos y la elástica en el punto C, y dibuje, con todos los detalles, los diagramas de fuerza cortante y momento flector.

20. **Viga con tres apoyos, soporta fuerzas concentrada y repartidas.** Una viga, ABCD, de longitud $6l$, está apoyada en una articulación en A, donde $x=0$, y en sendos apoyos de bolita en B, donde $x=4l$, y en D, donde $x=6l$; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida desde A hasta B, de intensidad $2p_0$, otra fuerza uniformemente repartida desde B hasta C, de intensidad p_0, y una fuerza concentrada, $F_0=3p_0l$, aplicada en C, donde $x=5l$, todas dirigidas hacia abajo. Halle las reacciones en los tres apoyos y dibuje, con todos los detalles, los diagramas de fuerza cortante y momento flector.

21. **Viga con tres apoyos, soporta carga triangular.** Una viga, ABC, de longitud $3l$, está apoyada en una articulación en A, donde $x=0$, y en sendos apoyos de bolita en B, donde $x=l$, y en C, donde $x=3l$; la

viga soporta una fuerza uniformemente variada en toda su longitud, de intensidad p_0 en A y $-p_0$ en C. Halle las reacciones en los tres apoyos y la pendiente de la elástica en C; dibuje, con todos los detalles, los diagramas de fuerza cortante y momento flector y, si la sección es circular y de radio R, calcule el radio mínimo cuando la tensión normal admisible es σ_w.

22. **Viga con tres apoyos, de inercia variable, soporta fuerzas repartidas.** Un viga, ABC, está apoyada en una articulación en A, donde $x = 0$, y en patines en B, donde $x = l$, y C, donde $x = 2{,}5l$; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, que se extiende desde A hasta B, tramo en el cual la inercia de la viga es EI, y otra fuerza uniformemente repartida, de intensidad $2p_0$, que se extiende desde B hasta C, tramo en el cual la inercia de la viga es $2EI$. Halle las reacciones en los apoyos y el momento flector interno en el apoyo intermedio.

23. **Viga con tres apoyos y dos voladizos, soporta fuerza repartida.** Una viga, ABCDE, de longitud $L = 2l + 2a$ e inercia EI, está apoyada en una articulación en B, donde $x = a$, y en sendos apoyos de bolita en C, donde $x = l + a$, y en D, donde $x = 2l + a$; los extremos A y D están en voladizo. Si la viga soporta una carga uniformemente repartida en toda su longitud, de intensidad p_0 y dirigida hacia abajo, halle la razón entre a/l para que sean iguales las reacciones en los tres apoyos y la deflexión de la elástica en los extremos A y E.

24. **Vigas apoyadas entre si, soportan fuerza concentrada.** Una viga, ABC, de longitud $2l$ e inercia EI, está simplemente apoyadas en sus extremos A y C, y soporta en su punto medio B, recostada perpendicularmente sobre aquélla, a la viga DBE, de longitud $2b$ e inercia EI, que se apoya, además, en una articulación en D y en un apoyo de bolita en su extremo E; en B y sobre la viga DBE obra una fuerza F_0, dirigida hacia abajo. Si $l = 3$ [m], $b = 4$ [m] y $F_0 = 2.000$ [N], halle las reacciones en los cuatro apoyos.

25. **Vigas apoyadas entre si, soportan fuerza concentrada.** Dos vigas del mismo material se cruzan en ángulo recto y están en contacto en su punto medio. La viga superior, la 1, simplemente apoyada en sus extremos, tiene sección recta rectangular, de base $b_1 = 0{,}050$ [m] y altura $h_1 = 0{,}200$ [m], y una luz de $l_1 = 3$ [m]; la viga inferior, la 2, también apoyada simplemente en sus extremos, tiene sección recta rectangular, de base $b_2 = 0{,}080$ [m] y altura $h_2 = 0{,}200$ [m], y una luz de $l_2 = 4$ [m]. Si en el punto de contacto de las vigas obra una fuerza $F = 10.000$ [N], halle la tensión normal máxima en cada viga.

26. **Vigas apoyadas entre si, soportan fuerza concentrada.** Una viga, EBF, de longitud $2b$ e inercia EI, está simplemente apoyada en sus extremos E y F, y soporta en su punto medio B, recostada perpendicularmente sobre aquélla, a la viga ABCD, de longitud $3l$ e inercia EI, que se apoya, además, en una articulación en D y tiene libre su extremo A; la longitud AB es l, la de BD es $2l$ y en A obra una fuerza, F_0, dirigida hacia abajo. Halle el valor de b para el cual la deflexión del punto C, equidistante de B y D, sea 0 y lo que baja el punto A.

27. **Vigas empotradas y apoyadas entre si, soportan fuerza concentrada.** Una viga, AB, de longitud l e inercia EI, está empotrada en A a una pared rígida y apoyada en B, mediante una bolita, en la viga BC, de longitud l e inercia EI, que está empotrada en C a otra pared rígida, paralela a la primera; una fuerza concentrada, F_0, dirigida hacia abajo, se aplica sobre la viga AB en el punto B, donde se encuentran las vigas. Halle las reacciones en los apoyos y lo que baja el punto B.

28. **Vigas empotradas y apoyadas entre si, soportan fuerza concentrada.** Una viga, AB, de longitud $3l$ e inercia EI, está empotrada en A a una pared rígida y sirve de apoyo en B, mediante una bolita, a la viga BCD, de longitud $2l$ e inercia EI, que está empotrada en D a otra pared rígida, paralela a la primera; una fuerza concentrada, F_0, dirigida hacia abajo, se aplica sobre la viga BCD en el punto C, ubicado en el punto medio de la misma. Halle las reacciones en los apoyos y lo que baja el punto B.

29. **Vigas empotradas y apoyadas entre si, soportan fuerza repartida.** Una viga horizontal, AB, de longitud l_1 = 0,40 [m], se empotra en A a una pared rígida y su extremo B se encuentra por encima del punto C, a la distancia vertical Δ_0= 0,0012 [m], de la viga horizontal CD, de longitud l_2 = 0,25 [m], que está empotrada en D a otra pared rígida, paralela a la primera. Si las vigas son del mismo material, de módulo E = 105 [GPa], y las secciones rectas son cuadradas e iguales, de lado b = 0,050 [m], y una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0 y dirigida hacia abajo, se aplica desde A hasta B, halle el valor de p_0 para el cual la deflexión vertical del punto C es v_C = 0,0015 [m].

30. **Vigas empotradas y articuladas entre si, soportan fuerza concentrada.** Una viga, AB, de longitud l e inercia EI, está empotrada en A a una pared rígida y en B se articula a la viga BCD, de longitud $2l$ e inercia EI, que está empotrada en D a otra pared rígida, paralela a la primera; una fuerza concentrada, F_0, dirigida hacia abajo, se aplica sobre la viga BCD en el punto C, ubicado en el punto medio de la misma. Halle las reacciones en los apoyos y lo que baja el punto B.

10.8 Vigas hiperestáticas con dos redundancias

1. **Viga empotrada y con dos apoyos, soporta fuerza repartida.** Una viga, ABC, de longitud $2l$ e inercia EI, está empotrada en A, donde $x = 0$, y apoyada en patines en B, donde $x = l$, y en C, donde $x = 2l$; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida en toda su longitud, de intensidad p_0, dirigida hacia abajo. Halle las reacciones y dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

2. **Viga empotrada y con dos apoyos, soporta fuerzas repartidas.** Una viga, ABC, de longitud $2l$, se empotra en A, donde $x = 0$, y se apoya en patines en B, donde $x = l$, y en C, donde $x = 2l$; sobre la viga obra una fuerza uniformemente repartida, de intensidad $2p_0$, que se extiende desde A hasta B, y otra fuerza semejante, de intensidad p_0, que va desde B hasta C, ambas dirigidas hacia abajo. Halle los diagramas completos de V y M, con sus puntos de valores críticos, y la elástica en el punto B.

3. **Viga empotrada y con dos apoyos, soporta fuerzas concentrada y repartida.** Una viga, ABCDE, de longitud $5l$ e inercia EI, se apoya en patines en A, donde $x = 0$, y en C, donde $x = 3l$, y se empotra a una pared en E, donde $x = 5l$; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, que se extiende desde A hasta D, y una fuerza concentrada, $2p_0l$, aplicada en B, donde $x = l$, ambas dirigidas hacia abajo. Halle las reacciones y dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

4. **Viga empotrada y con dos apoyos, soporta fuerzas concentradas y repartidas.** Una viga, ABCDE, de longitud $5l$ e inercia EI, está empotrada en A, donde $x = 0$, y apoyada en patines en C, donde $x = 3l$, y en E, donde $x = 4l$; la viga soporta dos fuerzas uniformemente repartidas, de intensidades p_0 y $2p_0$, que se extienden, respectivamente, desde A hasta C y desde C hasta E, y dos fuerzas concentradas, $F_1 = 3p_0$ y $F_2 = 2p_0l$, aplicadas, respectivamente, en B, donde $x = l$, y en D, donde $x = 4l$, todas dirigidas hacia abajo. Halle las reacciones y dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

5. **Viga empotrada, con dos apoyos y un voladizo, soporta fuerzas repartidas.** Una viga, ABCD, de longitud $6l$, está empotrada en A, donde $x = 0$, apoyada en patines en el punto B, donde $x = 3l$, y en C, donde $x = 5l$, y el extremo D, donde $x = 6l$, está en voladizo; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, que se extiende desde A hasta B, y otra fuerza semejante, de intensidad $2p_0$, que se extiende desde B hasta D, ambas dirigidas hacia abajo. Halle los diagramas completos de V y M, con sus puntos de valores críticos.

6. **Viga en cuatro apoyos, soporta fuerzas concentrada y repartida.** Una viga, ABCDE, de longitud $3l$, está apoyada en una articulación en A, donde $x = 0$, y en sendos apoyos de bolita en B, donde $x = l$, en C, donde $x = 2l$, y en E, donde $x = 3l$; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida desde A hasta B, de intensidad p_0, y una fuerza concentradas $F_0 = p_0l$, aplicada en D, donde $x = 2{,}75l$, todas dirigidas hacia abajo. Halle las re-

acciones en los cuatro apoyos y dibuje, con todos los detalles, los diagramas de cizalladura y momento flector.

7. **Viga con cuatro apoyos, soporta fuerzas concentradas y repartida.** Una viga, ABCDEF, de longitud $10l$, se apoya en una articulación en A, donde $x = 0$, y en apoyos de bolita en C, donde $x = 2l$, en D, donde $x = 6l$, y en F, donde $x = 10l$; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida desde C hasta D, de intensidad p_0, y sendas fuerzas concentradas, $F_0 = 2p_0l$, aplicadas en B, donde $x = l$, y en E, donde $x = 8l$, todas dirigidas hacia abajo. Halle las reacciones y el momento flector máximo.

8. **Viga en cuatro apoyos, soporta fuerzas concentradas y repartida.** Una viga, ABCDEFG, de longitud $3l$, está apoyada en una articulación en A, donde $x = 0$, y en sendos apoyos de bolita en C, donde $x = l$, en F, donde $x = 2l$, y en G, donde $x = 3l$; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida desde F hasta G, de intensidad p_0, y sendas fuerzas concentradas, $F_0 = p_0l$, aplicadas en B, donde $x = 0{,}5l$, en D, donde $x = 4l/3$, y en E, donde $x = 5l/3$, todas dirigidas hacia abajo. Halle las reacciones en los cuatro apoyos y el momento flector máximo.

9. **Viga en cuatro apoyos, soporta fuerzas concentradas y repartidas.** Una viga, ABCDEF, de longitud $3l$, está apoyada en una articulación en A, donde se $x = 0$, y en sendos apoyos de bolita en C, donde $x = l$, en D, donde $x = 2l$, y en F, donde $x = 3l$; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida desde C hasta D, de intensidad p_0, otra, de intensidad $2p_0$, desde D hasta E, y sendas fuerzas concentradas, $F_0 = 2p_0l$, aplicadas en B, donde $x = 0{,}25l$, y en E, donde $x = 8l/3$, todas dirigidas hacia abajo. Halle las reacciones en los cuatro apoyos y el momento flector máximo.

10. **Viga doblemente empotrada, soporta fuerza concentrada.** Una viga, ABC, de longitud l e inercia EI, está empotrada a paredes rígidas en los extremos A y C; en el punto B, donde $x = l/3$, obra una fuerza concentrada, F_0, dirigida hacia abajo. Halle reacciones y dibuje los diagramas de V y M.

11. **Viga doblemente empotrada, soporta fuerza concentrada.** Una viga, de longitud $3l$ y módulo de Young E, tensiones admisibles, normal y cortante, σ_w y τ_w, y sección recta circular, de radio R, está empotrada entre dos paredes rígidas y sometida a una fuerza, F_0, dirigida hacia abajo y aplicada en un punto que dista l de una de las paredes. Si $l = 1$ [m], $F_0 = 20.000$ [N/m] y $\sigma_w = 3\tau_w = 100$ [MPa], halle las reacciones, dibuje los diagramas de cizalladura y momento flector, calcule la elástica y su pendiente en el punto donde se aplica la fuerza concentrada y, usando la teoría de Tresca, el valor mínimo que puede tomar R.

12. **Viga doblemente empotrada, soporta fuerzas concentradas.** Una viga, ABCD, de longitud $3l$ e inercia EI, se empotra a paredes rígidas en los extremos A y D; en B, donde $x = l$, obra una fuerza concentrada F_0, y en el punto C, donde $x = 2l$, actúa otra fuerza concentrada $2F_0$, ambas dirigidas hacia abajo. Halle las reacciones en los apoyos y dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

13. **Viga doblemente empotrada, soporta fuerzas concentradas.** Una viga, ABCD, de longitud l e inercia EI, se empotra a paredes rígidas en los extremos A y D; en el punto B, donde $x = a$, obra una fuerza concentrada, F_1, y en el punto C, donde $x = l - a$, otra fuerza concentrada, F_2, ambas dirigidas hacia abajo. Halle la razón F_1/F_2 si se sabe que en el punto B el momento flector interno de la viga es cero.

14. **Viga doblemente empotrada soporta momento concentrado.** Una viga, AB, de longitud l e inercia EI, está empotrada a paredes rígidas en los extremos A y B; en el punto medio de la viga obra un momento flector positivo M_0. Halle las reacciones en los empotramientos.

15. **Viga doblemente empotrada, soporta fuerza repartida.** Una viga AB, de longitud l e inercia EI, se empotra a paredes rígidas en A y B; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida desde A hasta B, de intensidad p_0, dirigida hacia abajo. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

16. **Viga doblemente empotrada, soporta fuerza repartida.** Una viga, de longitud l y módulo de Young E, tensio-

nes admisibles, normal y cortante, σ_w y τ_w, y sección recta rectangular, de base b y altura $2b$, está empotrada entre dos paredes rígidas y sometida a una carga uniformemente repartida, de intensidad p_0. Si $l = 3$ [m], $p_0 = 30000$ [N/m] y $\sigma_w = 4\tau_w = 200$ [MPa], halle el valor para b.

17. **Viga doblemente empotrada, soporta fuerzas concentrada y repartida.** Una viga, ABC, de longitud $2l$ e inercia EI, está empotrada a paredes rígidas en los extremos A y C; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida en toda su longitud, de intensidad p_0, y en el punto B, donde $x = l$, obra una fuerza concentrada, $F_0 = 2p_0l$, ambas dirigidas hacia abajo. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

18. **Viga doblemente empotrada, soporta fuerzas concentrada y repartida.** Una viga, ABC, de longitud $5l$ e inercia EI, está empotrada a paredes rígidas en los extremos A y C; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, desde A hasta B, donde $x = 2l$, y en el punto B, obra, además, una fuerza concentrada, $F_0 = 3p_0l$, ambas dirigidas hacia abajo. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M, y calcule la deflexión de la elástica y su pendiente en el punto C.

19. **Viga doblemente empotrada, soporta carga triangular** Una viga, AB, de longitud l e inercia EI, está empotrada a paredes rígidas en los extremos A y B; la viga soporta una fuerza distribuida, uniformemente variada y dirigida hacia abajo, que varía linealmente desde A, donde la intensidad es 0, hasta B, donde la intensidad es p_0. Halle las reacciones, los momentos positivo y negativo máximos, y, en el punto medio de la viga, la deflexión y pendiente de la elástica.

20. **Viga doblemente empotrada, soporta carga senoidal** Una viga, AB, de longitud l e inercia EI, está empotrada a paredes rígidas en los extremos A y B; la viga soporta la fuerza distribuida $p = p_0 \operatorname{sen}(\pi x/l)$, dirigida hacia abajo. Halle las reacciones, el momento máximo y los máximos valores de la elástica y de su pendiente.

10.9 Vigas hiperestáticas con más de dos redundancias

1. **Viga doblemente empotrada y con un apoyo, soporta fuerza repartida.** Una viga, ABC, de longitud $3l$ e inercia EI, está empotrada a paredes rígidas en los extremos A y C, y apoyada en un patín en el punto B, el cual dista l de una pared; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida en toda su longitud, de intensidad p_0, dirigida hacia abajo. Dibuje, con todos los detalles, los diagramas de V y M.

2. **Viga doblemente empotrada y con dos apoyos, soporta fuerzas concentrada y repartida.** Una viga, ABCD, de longitud $3l$ e inercia EI, está empotrada en A, donde $x = 0$, y D, donde $x = 3l$, y apoyada en patines en B, donde $x = l$, y C, donde $x = 2l$; la viga soporta una fuerza uniformemente repartida, de intensidad p_0, desde A hasta D, y una fuerza concentrada en su punto medio, $F = p_0l$, ambas dirigidas hacia abajo. Halle los diagramas completos de V y M, con sus puntos de valores críticos.

10.10 Diseño al límite de vigas.

1. **Viga elastoplástica empotrada, apoyada y con un voladizo, soporta fuerzas concentradas.** Una viga elastoplástica ideal, ABCD, de longitud $3l$ y momento plástico de la sección M_P, está empotrada en A, donde $x = 0$, y apoyada en un patín en C, donde $x = 2l$, mientras que su extremo D, donde $x = 3l$, está en voladizo; en B, donde $x = l$, obra la fuerza F_0 y en D la fuerza $F_0/3$, ambas dirigidas hacia abajo. Halle el valor de F_0 que produce la falla.

2. **Viga elastoplástica empotrada, apoyada y con un voladizo, soporta fuerzas concentradas.** Una viga elastoplástica ideal, ABCD, de longitud $3l$ y momento plástico de la sección M_P, está empotrada en A, donde $x = 0$, y apoyada en un patín en C, donde $x = 2l$, mientras que su extremo D, donde $x = 3l$, está en voladizo; en B, donde $x = l$, obra la fuerza F_0 y en el D la fuerza αF_0, ambas dirigidas hacia abajo. Halle el α para el cual el valor de

la carga límite, F_0, es un máximo y calcule ese máximo.

3. **Viga rectangular elastoplástica con en tres apoyos, soporta fuerza repartida.** Una viga elastoplástica ideal, ABC, de longitud $2l$, sección recta rectangular, de base b y altura $2b$, módulo de Young E y tensión de cedencia σ_Y, está apoyada en una articulación en A, donde $x = 0$, y en apoyos de patín en B, donde $x = l$, y en C, donde $x = 2l$; sobre la viga obra una carga uniformemente repartida, de intensidad p_0 y dirigida hacia abajo, que se extiende desde A hasta C. Halle el valor de p_0 que produce la falla.

4. **Viga elastoplástica doblemente empotrada, soporta fuerza repartida.** Una viga elastoplástica ideal, AB, de longitud l y momento plástico de la sección M_P, está empotrada en sus extremos y soporta una fuerza uniformemente repartida en toda su longitud, de intensidad p_0. Halle el valor de p_0 que produce la falla.

5. **Viga elastoplástica en I doblemente empotrada, soporta fuerza repartida.** Una viga elastoplástica ideal, AB, de longitud l y tensión de cedencia σ_Y, está empotrada en sus extremos y soporta una fuerza uniformemente repartida en toda su longitud, de intensidad p_0; la sección recta de la viga es una I, cuyas alma y aletas son rectángulos iguales, de base b y grueso t. Si $l = 1{,}50$ [m], $b = 0{,}075$ [m], $t = 0{,}010$ [m] y $\sigma_Y = 270$ [MPa], halle el momento plástico que puede desarrollar la sección y el valor de p_0 que produce la falla.

CAPÍTULO 11

TEORÍA ELEMENTAL DE LA ESTABILIDAD

11.1 Columnas en voladizo

1. **Deducción de la carga crítica.** Deducir, mediante la solución de la ecuación diferencial, la carga crítica de pandeo de una columna, de longitud l e inercia EI, empotrada en un extremo y que tiene libre el otro, cuando soporta una fuerza de compresión P.

2. **Longitud de una columna en voladizo.** Halle la longitud máxima permisible de una columna tubular de acero, empotrada en la base y libre en el extremo superior, donde soporta la fuerza de compresión $P = 400$ [kN]. El radio medio de la columna es $R = 0{,}08$ [m], el espesor de la pared $t = 0{,}008$ [m], el módulo de Young $E = 210$ [GPa] y la tensión de cedencia $\sigma_Y = 290$ [MPa].

3. **Altura máxima de un tanque elevado.** Un tanque elevado está soportado por una columna tubular de acero, de longitud l, radio interior $R_i = 0{,}0641$ [m] y radio exterior $R_e = 0{,}0706$ [m], que se encuentra empotrada en un piso rígido. Si el tanque pesa $W = 250.000$ [N] y en el acero de la columna, $E = 200$ [GPa] y $\sigma_Y = 250$ [MPa], halle la altura máxima que puede tener la columna.

4. **Radio de la columna que soporta un tanque elevado.** Un tanque elevado está soportado por una columna tubular de acero, de longitud $l = 9$ [m], radio en la línea media $R = 0{,}15$ [m] y espesor $t = 0{,}0085$ [m], que se encuentra empotrada en un piso rígido. Halle el máximo peso que el tanque puede tener si, en el acero de la columna, $E = 200$ [GPa] y $\sigma_Y = 350$ [MPa].

11.2 Columnas biarticuladas isostáticas

1. **Deducción de la carga crítica.** Deducir, al resolver la ecuación diferencial, la carga crítica de pandeo de una columna biarticulada, de longitud l e inercia EI, que soporta una fuerza de compresión P.

2. **Columna rectangular de acero.** Una columna biarticulada de acero, de sección rectangular y lados a y $b = 0{,}025$ [m], soporta una fuerza de compresión P. Si $l = 1{,}1$ [m] y en el acero $\sigma_y = 250$ [MPa] y $E = 200$ [GPa], halle el menor valor para a, cuando $P = 50.000$ [N] y cuando $P = 25.000$ [N].

3. **Columna tubular rectangular de acero.** Una columna tubular rectangular de acero, de lados $b = 0{,}060$ [m] y $h = 0{,}080$ [m], espesor $t = 0{,}008$ [m] y longitud efectiva $l_e = 3{,}0$ [m], soporta una fuerza de compresión P. Si $E = 200$ [GPa] y $\sigma_Y = 350$ [MPa], halle el máximo valor admisible de P.

4. **Tubo circular.** El tubo AB es de longitud l, tiene un radio interior R, exterior $1{,}5R$ y su módulo de Young es E; el tubo es vertical, está articulado en su base B, y su extremo A, que soporta una fuerza horizontal F_0, se sostiene en equilibrio, mediante el cable AC, del punto C en el piso, el cual está separado de B por la distancia horizontal $l/3$. Si se supone que el tubo está biarticulado, halle el valor mínimo de R para que no falle por pandeo, en función de F_0, l y E.

5. **Tubo circular de acero.** Encuentre el diámetro exterior requerido, d, para una columna tubular de acero, de espesor $t = 0{,}009$ [m], articulada en ambos extremos, para soportar una fuerza axial de compresión $P = 800.000$ [N]; el material tiene $E = 200$ [GPa] y $\sigma_y = 300$ [MPa].

6. **Tubo circular de acero.** Una columna tubular de acero, de longitud $l = 3{,}5$ [m], diámetro medio d, espesor $t = d/20$ y articulada en sus extremos, soporta una fuerza de compresión, $P = 130.000$ [N]. Si en el material $\sigma_y = 275$ [MPa] y $E = 200$ [GPa], halle el valor mínimo que puede tener d.

7. **Tubo circular de acero.** Una columna tubular de acero, de longitud l, diámetro en la línea media, $D = 0{,}09$ [m], espesor $t = 0{,}005$ [m] y articulada en ambos extremos, soporta una fuerza axial de compresión, P. Si en el material $\sigma_y = 275$ [MPa] y $E = 200$ [GPa], halle el valor máximo que puede tomar P cuando $l = 2{,}6$ [m] y cuando $l = 4{,}7$ [m].

8. **Columna cuadrada de aluminio.** Una columna biarticulada de aluminio 6061-T6, de longitud $l = 0{,}5$ [m] y sección cuadrada de lado a, soporta una fuerza axial de compresión $P = 200.000$ [N]. Halle el valor mínimo que puede tomar a.

9. **Columna tubular rectangular de aluminio.** Una columna tubular rectangular de aluminio, de lados $b = 0{,}075$ [m] y $h = 0{,}150$ [m], espesor $t = 0{,}006$ [m] y longitud efectiva $l_e = 1{,}5$ [m], soporta la fuerza de compresión P. Halle el mayor valor de P si la aleación es la 6061-T6 y cuando es la 2014-T6.

10. **Columna rectangular de madera.** Una columna biarticulada de madera, de sección rectangular y lados $a = 0{,}15$ [m] y $b = 0{,}20$ [m], soporta una fuerza de compresión P. Si en el material $E = 10$ [GPa] y en dirección de la fibra $\sigma_w = 10$ [MPa] halle el valor máximo que puede tomar P cuando $l = 2$ [m] y cuando $l = 4$ [m].

11. **Múltiples tablas.** Una columna rectangular de madera, de longitud efectiva $l_e = 4$ [m], se fabrica clavando entre sí, a lo largo de la longitud, varias tablas de sección rectangular, de base $b = 0{,}15$ [m] y espesor $t = 0{,}025$ [m]; en el material, $E = 12$ [GPa] y la tensión admisible paralela a la fibra es $\sigma' = 10$ [MPa]. Halle el número mínimo de tablas que deben emplearse para soportar una carga de compresión de 80.000 [N] o de 160.000 [N].

12. **Tres columnas.** Se tienen tres columnas del mismo material y articuladas en sus extremos, de iguales longitud l y área transversal A; la primera es circular, cuadrada la segunda y en forma de triángulo equilátero la tercera. Si las columnas pueden pandearse en cualquier dirección, determine las razones P_1: P_2: P_3 de las cargas críticas para estas columnas.

13. **Columna en I de madera.** Una columna de madera y de sección en I, la que se forma al clavar, a lo largo de la longitud, tres tablas rectangulares, de base $b = 0{,}140$ [m] y espesor $t = 0{,}038$ [m], tiene una longitud efectiva $l_e = 3{,}0$ [m] y debe soportar una carga de compresión P. Si, en el material, $E = 12$ [GPa] y en dirección de la fibra $\sigma_w = 10$ [MPa], halle el valor máximo que puede tomar P.

14. **Cercha de dos barras.** Las barras, AB y BC, de iguales material y sección recta, articuladas al piso en los nodos A y C, que determinan una recta horizontal con la que la barra AB define el ángulo β, están articuladas en el nodo B, en el cual se aplica una fuerza F, que produce compresión en ambas barras, cuya línea de acción hace un ángulo θ con la prolongación de la línea AB;

el ángulo θ puede variar entre 0° y 90°. Si se supone que ambas barras se comportan como columnas largas biarticuladas, halle, en función de θ, el valor máximo que F puede alcanzar; calcule, además el respectivo valor de θ si $\beta = 60°$.

15. **Cercha de dos barras rectangulares de acero.** Las barras de acero, AB y BC, de iguales material y sección recta, la cual es rectangular de lados a y b, están articuladas al piso en los nodos A(0, 0) [m] y C(3, 0) [m], que determinan una recta horizontal, y entre sí en el nodo B(1,25, 1,50) [m], en el que se aplica una fuerza vertical y dirigida hacia abajo, F, que produce compresión en ambas barras. Si $a = 0{,}05$ [m] y $b = 0{,}10$ [m], y, en el material, $E = 210$ [GPa] y $\sigma_Y = 255$ [MPa], halle el valor máximo que puede tomar F.

16. **Estructura de barra circular de acero y cable.** La barra, AB, es un tubo circular y horizontal de acero, de longitud $l = 1{,}6$ [m], radio R en la línea media, espesor $t = 0{,}005$ [m], modulo de Young $E = 200$ [GPa] y tensión de cedencia $\sigma_Y = 250$ [MPa]; está articulada a la pared en el punto A y sostenida en el punto B mediante un cable BC que se anuda a la misma pared y hace un ángulo $\alpha = 60°$ con ella; en B obra una fuerza vertical dirigida hacia abajo, $W = 20.000$ [m]. Halle el valor mínimo de R.

17. **Cercha de dos barras circulares de acero.** Las barras de acero, AB y BC, de iguales material y sección recta, la cual es circular de radio R, están articuladas al piso en los nodos A(0, 0) y C($3l$, 0), que determinan una recta horizontal, y entre sí en el nodo B(l, l), en el que se aplica una fuerza vertical y dirigida hacia abajo, F, que produce compresión en ambas barras. Si $l = 2$ [m], $F = 50.000$ [N] y, en el material, $E = 210$ [GPa] y $\sigma_Y = 300$ [MPa], halle el valor mínimo que puede tomar R.

18. **Cercha de dos barras cuadradas de aluminio.** Las barras, AB y BC, de aluminio 6061-T6, de iguales material y sección recta, la cual es cuadrada y de lado a, están articuladas al piso en los nodos A(0, 0) y C($3l$, 0), que determinan una recta horizontal, y entre sí en el nodo B($2l$, $1{,}5l$), en el que se aplica una fuerza vertical y dirigida hacia abajo, F, que produce compresión en ambas barras. Si $a = 0{,}05$ [m] y $l = 1$ [m], halle el valor máximo que puede tomar F.

19. **Cercha de dos barras circulares de aluminio.** La barra, AC, es horizontal, de longitud $l = 1{,}5$ [m], y la BC, oblicua, hace un ángulo $\alpha = 60°$ con la pared vertical que pasa por los puntos A y B; en C obra una fuerza vertical dirigida hacia abajo, $W = 100.000$ [m]. Si las barras son circulares y de aluminio, aleación 2014-T6, y la tensión admisible en tracción es $\sigma_w = 193$ [MPa], halle el radio de cada barra.

11.3 Columnas biarticuladas hiperestáticas

1. **Cercha plana de tres barras circulares.** Una armadura plana y vertical, articulada al piso en los puntos A($-0{,}5l$, 0), B(0, 0) y C($0{,}5l$, 0), está formada por tres barras circulares articuladas en el punto D(0, $0{,}867l$), las cuales tienen iguales radio y material; además, en el punto D se aplica la fuerza, $-\vec{i}_y W$. Suponiendo que las barras se comportan como columnas largas biarticuladas, halle el valor máximo que puede tomar W.

2. **Cercha plana de tres barras circulares.** Una armadura plana y vertical, articulada al piso en los puntos A($-a$, 0), B(0, 0) y C(a, 0), está formada por tres barras circulares articuladas en el punto D(0, h), las cuales tienen iguales radio y material; además, en el punto D se aplica la fuerza, $-\vec{i}_y W$. Suponiendo que las barras se comportan como columnas largas biarticuladas, halle el radio mínimo que deben tener las barras.

3. **Cercha plana de tres barras circulares.** Una armadura plana y vertical, articulada al techo en el punto D(0, l) y al piso en los puntos A(−0,707l, −0,707l) y B(0,707l, −0,707l), está formada por tres barras circulares de acero articuladas en el punto C(0, 0), las cuales tienen iguales radio, longitud $l = 1$ [m], $E = 200$ [GPa] y $\sigma_Y = 250$ [MPa]; además, en D se aplica la fuerza, $\vec{W} = -\vec{i}_y 20.000$ [N]. Halle, tomando en cuenta el pandeo y la tracción y usando en este último caso un factor de seguridad $n = 2$, el radio mínimo que deben tener las barras.

4. **Cercha plana de tres barras circulares.** Una armadura plana y vertical, con forma de triángulo y apoyada en el piso en las articulaciones A(−l, 0) y C(2l, 0), está formada por tres barras circulares del mismo material, de módulo $E = 200$ [GPa] y $\sigma_y = 250$ [MPa], articuladas en sus extremos en los puntos A, C y B(0, l); las barras AB y AC tienen radios iguales a $R_1 = 0{,}015$ [m], mientras que el de la BC es $R_2 = 0{,}012$ [m]. Si en B se aplica la fuerza $-\vec{i}_y W$, se supone que las barras comprimidas son largas y a ellas se aplica la relación de Euler y que en las tres el factor de seguridad es $n = 2$, halle el valor máximo que puede tomar W.

5. **Cercha plana de cuatro barras circulares de acero.** Una armadura plana y vertical articulada a una pared vertical en los puntos (0, 0) y (0, 0,75l), está formada por cuatro barras circulares de acero, de diámetro $d = 0{,}04$ [m], articuladas en sus extremos. La primera barra se extiende entre los puntos (0, 0) y (2l, 0); la segunda, entre (0, 0) y (l, 0,375l); la tercera, entre (0, l) y (l, 0,375l); la cuarta, entre (l, 0,375l) y (2l, 0); y, además, la fuerza, $-\vec{i}_y F$, se aplica a la armadura en el punto (2l, 0). Si $l = 1{,}2$ [m], $E = 200$ [GPa], $\sigma_Y = 200$ [MPa] y se toma en cuenta el pandeo y la tracción, usando en este último caso un factor de seguridad $n = 2$, halle el valor máximo que puede tomar F.

6. **Cercha espacial de tres tubos circulares de acero.** Tres tubos circulares e idénticos de acero, de longitud $l = 3{,}5$ [m], radio en la línea media $R = 0{,}07$ [m] y espesor t, se articulan en el vértice D, que se encuentra a la altura $h = 2{,}5$ [m] sobre el suelo, para sostener allí un peso $W = 60.000$ [N], y a los nodos A, B y C del piso, en el que forman un triángulo equilátero. Si en el material de los tubos $\sigma_y = 275$ [MPa] y $E = 200$ [GPa], halle el espesor requerido de los tubos.

7. **Cercha espacial de cuatro tubos circulares de acero.** Cuatro tubos circulares e idénticos de acero, de longitud $l = 3{,}5$ [m], radio en la línea media $R = 0{,}07$ [m] y espesor t, se articulan en el vértice G, que se encuentra a la altura $h = 2{,}5$ [m] sobre el suelo, para sostener allí un peso $W = 60.000$ [N], y a los nodos A, B, C y D del piso, en el que forman un cuadrado. Si en el material de los tubos $\sigma_y = 275$ [MPa] y $E = 200$ [GPa], halle el espesor requerido de los tubos.

11.4 Columnas articulado empotradas

1. **Deducción de la carga crítica.** Deducir, mediante la solución de la ecuación diferencial, la carga crítica de pandeo de una columna, de longitud l e inercia EI, empotrada en un extremo y que tiene articulado el otro, cuando soporta una fuerza de compresión, P.

11.5 Columnas doblemente empotradas

1. **Deducción de la carga crítica.** Deducir, mediante la solución de la ecuación diferencial, la carga crítica de pandeo de una columna empotrada en ambos extremos, de longitud l e inercia EI, cuando soporta una fuerza de compresión, P.

11.6 Vigas columnas

1. **Biarticulada que soporta una fuerza transversal.** Una viga columna doblemente articulada, de longitud l e inercia EI, soporta una fuerza de compresión P y una fuerza transversal perpendicular al eje de la estructura, F_0, aplicada en su punto medio. Halle la ecuación de la elástica, la carga crítica y la tensión normal máxima en el punto medio.

2. **Biarticulada que soporta una fuerza transversal.** Una viga columna doblemente articulada, de longitud l e inercia EI, soporta una fuerza de compresión P y una fuerza transversal perpendicular al eje de la estructura, F_0, aplicada a la distancia $l/3$ de un apoyo. Halle la ecuación de la elástica, la carga crítica y la tensión normal máxima en el punto medio.

3. **Biarticulada que soporta momentos externos.** Una viga columna doblemente articulada, de longitud l e inercia EI, soporta una fuerza de compresión P y, en sus extremos, sendos momentos flectores positivos, M_0. Halle la ecuación de la elástica, la carga crítica y la tensión normal máxima en el punto medio.

4. **Biarticulada con fuerza excéntrica.** Una columna circular, de radio R y longitud $l = 1{,}2$ [m], está empotrada en el piso y tiene libre su extremo superior, en el cual obra una fuerza de compresión $P = 50.000$ [N] que tiene una excentricidad de $e = 0{,}01$ [m] con respecto al centro de la sección recta. Si, en el material, $E = 200$ [GPa] y $\sigma_w = 250$ [MPa], halle el menor valor que puede tomar R.

5. **Biarticulada que soporta una fuerza repartida.** Una viga columna doblemente articulada, de longitud l e inercia EI, soporta una fuerza de compresión P y una fuerza transversal uniformemente repartida, perpendicular al eje de la estructura y de intensidad p_0. Halle la ecuación de la elástica, la carga crítica y la tensión normal máxima en el punto medio.

6. **Biarticulada que soporta una fuerza uniformemente variada.** Una viga columna doblemente articulada, de longitud l e inercia EI, soporta una fuerza de compresión, P, y una fuerza transversal uniformemente variada, perpendicular al eje de la estructura y cuya intensidad cambia linealmente desde 0 en un apoyo hasta p_0 en el otro. Halle la ecuación de la elástica y la carga crítica.

7. **Biarticulada que soporta una fuerza senoidal.** Una viga columna doblemente articulada, de longitud l e inercia EI, soporta una fuerza de compresión, P, y una fuerza transversal senoidalmente variada, perpendicular al eje de la estructura y cuya intensidad es $p = p_0 \operatorname{sen}(\pi x/l)$. Halle la ecuación de la elástica y la carga crítica.

8. **Doblemente empotrada que soporta una fuerza uniformemente repartida.** Una viga columna doblemente empotrada, de longitud l e inercia EI, soporta una fuerza de compresión P y una fuerza transversal uniformemente repartida, perpendicular al eje de la estructura y de intensidad p_0. Halle la ecuación de la elástica y la carga crítica.

Fórmulas para el curso de Resistencia de Materiales

Universidad Nacional de Colombia **Facultad de Minas** **Profesor Álvaro Gaviria Ortiz**

De la Mecánica

En todo punto de un objeto en equilibrio: $\sum_{i=1}^{i=N}\vec{F}_i=\vec{0}$ y $\sum_{i=1}^{i=K}\vec{M}_i=\vec{0}$

Leyes de Newton: Sin fuerza, se mantiene el estado de movimiento. Fuerza de acción es igual a fuerza de reacción

Reducción de un sistema de N fuerzas y K pares a fuerza y par en el punto O: $\vec{F}_O=\sum_{i=1}^{i=N}\vec{F}_i$ y $\vec{M}_O=\sum_{i=1}^{i=K}\vec{M}_i+\sum_{i=1}^{i=N}\vec{r}_{oi}\times\vec{F}_i$

Mayor reducción en un punto C del eje central: $\vec{M}_C=\vec{0}$, si $\vec{F}_O\bullet\vec{M}_O=0$; $\vec{F}_C\times\vec{M}_C=\vec{0}$, si $\vec{F}_O\bullet\vec{M}_O\neq 0$

Si dos fuerzas obran sobre un cuerpo en equilibrio, son colineales

Si tres fuerzas obran sobre un cuerpo en equilibrio, son paralelas o concurrentes

De los vectores

Si $\vec{A}=(a_1,a_2,a_3)$ y $\vec{B}=(b_1,b_2,b_3)$ son vectores en R^3, entonces:

$$\overline{AB}=\sum_{i=1}^{i=3}\vec{i}_i(b_i-a_i),\qquad \left|\overline{AB}\right|=\left[\sum_{i=1}^{i=3}(b_i-a_i)^2\right]^{1/2},\qquad \vec{i}_{AB}=\overline{AB}/\left|\overline{AB}\right|$$

$$\vec{A}\bullet\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{i}_N\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\operatorname{sen}\theta=\vec{i}_1(a_2b_3-a_3b_2)+\vec{i}_2(a_3b_1-a_1b_3)+\vec{i}_3(a_1b_2-a_2b_1)$$

$$\vec{A}\bullet\vec{B}=\vec{B}\bullet\vec{A}\qquad \vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}\qquad \vec{A}\bullet(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\bullet\vec{B}+\vec{A}\bullet\vec{C}\ \text{y}\qquad \vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$$

$$\vec{A}\bullet(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\bullet(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}\bullet(\vec{A}\times\vec{B})=\left[\vec{A}\vec{B}\vec{C}\right]$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\bullet\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\bullet\vec{B})\qquad (\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=\vec{B}(\vec{A}\bullet\vec{C})-\vec{A}(\vec{B}\bullet\vec{C})$$

Del área plana

$$A=\int_y\int_x dxdy\qquad Q_x=\int_y\int_x ydxdy\qquad Q_y=\int_y\int_x xdxdy\qquad x_c=Q_y/A\qquad y_c=Q_x/A$$

$$I_x=\int_y\int_x y^2dxdy\qquad I_y=\int_y\int_x x^2dxdy\qquad I_O=\int_y\int_x r^2dxdy=I_x+I_y\qquad I_{xy}=\int_y\int_x xydxdy\qquad r_x{}^2=I_x/A\qquad r_y{}^2=I_y/A$$

$$I_x=I_{xcen}+Ay_c{}^2\qquad I_y=I_{ycen}+Ax_c{}^2\qquad I_{xy}=I_{xycen}+Ax_cy_c\qquad I_O=I_{Ocen}+Ar_c{}^2\qquad I_{x'}=\frac{I_x+I_y}{2}+\frac{I_x-I_y}{2}\cos 2\theta-I_{xy}\operatorname{sen}2\theta$$

$$I_{y'}=\frac{I_x+I_y}{2}-\frac{I_x-I_y}{2}\cos 2\theta+I_{xy}\operatorname{sen}2\theta\qquad I_{x'y'}=\frac{I_x-I_y}{2}\operatorname{sen}2\theta+I_{xy}\cos 2\theta\qquad I_{\substack{max\\min}}=\frac{I_x+I_y}{2}\pm\left[\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2+I_{xy}{}^2\right]^{1/2}$$

$$\tan 2\theta_{ppales}=-\frac{2I_{xy}}{I_x-I_y}\qquad I_{xy\substack{max\\min}}=\pm\left[\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2+I_{xy}{}^2\right]^{1/2},\ \text{si}\ \tan 2\theta=\frac{I_x-I_y}{2I_{xy}}$$

$$I_{max}+I_{min}=I_x+I_y\qquad I_{max}I_{min}=I_xI_y-I_{xy}{}^2$$

Momento centroidal de inercia: $I_{rectángulo}=bh^3/12$, $I_{círculo}=\pi R^4/4$

De las tensiones normal y cortante

En un punto de un cuerpo: $\vec{t}=\vec{\sigma}+\vec{\tau}=\frac{d\vec{F}}{dA}$

$\tau_{ij}=\tau_{ji}$, $i,j=1,2,3$ e $i\neq j$

$$\sigma_{x'}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta+\tau_{xy}\operatorname{sen}2\theta$$

$$\tau_{x'y'}=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\operatorname{sen}2\theta+\tau_{xy}\cos 2\theta\qquad \sigma_{y'}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta-\tau_{xy}\operatorname{sen}2\theta\qquad \tan 2\theta_{ppales}=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

$$\sigma_{\substack{max\\min}}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\left[\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}{}^2\right]^{1/2}\qquad \tau_{xy\substack{max\\min}}=\pm\left[\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}{}^2\right]^{1/2}$$

$$\sigma=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}\qquad \sigma_{pp}=\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\end{bmatrix}$$

$\sigma^3-I\sigma^2+II\sigma-III=0$

I, II y III, invariantes ecuación de autovalores:

$$I=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\qquad II=\begin{vmatrix}\sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zy} & \sigma_z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\sigma_x & \tau_{xz}\\ \tau_{zx} & \sigma_z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{yz} & \sigma_y\end{vmatrix}\qquad III=\begin{vmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{vmatrix}$$

De las deformaciones lineal y angular

$$\varepsilon=\frac{\Delta l}{l_i}\qquad \gamma=\frac{\pi}{2}-\alpha\qquad \varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}\quad i,j=1,2,3\ \text{e}\ i\neq j$$

$$\varepsilon_{x'}=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos 2\theta+\frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen}2\theta$$

$$\gamma_{x'y'}=-(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\operatorname{sen}2\theta+\gamma_{xy}\cos 2\theta\qquad \varepsilon_{y'}=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}-\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos 2\theta-\frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen}2\theta\qquad \tan 2\theta_{ppales}=\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x-\varepsilon_y}$$

$$\varepsilon_{\substack{max\\min}}=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}\pm\left[\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2\right]^{1/2}\qquad \gamma_{xy\substack{max\\min}}=\pm\left[(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+\gamma_{xy}{}^2\right]^{1/2}$$

$$\varepsilon=\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2\\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2\\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_z\end{bmatrix}\qquad \varepsilon_{pp}=\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3\end{bmatrix}$$

$\varepsilon^3-I\varepsilon^2+II\varepsilon-III=0$

I, II y III, invariantes de la ecuación de autovalores

$$I=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z\qquad II=\begin{vmatrix}\varepsilon_y & \gamma_{yz}/2\\ \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\varepsilon_x & \gamma_{xz}/2\\ \gamma_{zx}/2 & \varepsilon_z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\varepsilon_x & \gamma_{xy}/2\\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y\end{vmatrix}\qquad III=\begin{vmatrix}\varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2\\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2\\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_z\end{vmatrix}$$

Leyes de Hooke	$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$	$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$	$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$	$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$	$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$	$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$

Módulos de cizalladura y de compresibilidad elásticos	$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$	$\varepsilon_V = \frac{\sigma_m}{B}$ $\quad \sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$ $\quad B = \frac{E}{3(1-2\mu)}$

Ro-setas	En direcciones coplanares 0°, θ_1 y θ_2:	$\varepsilon_1 = \varepsilon_x$	$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta_1 + \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta_1$	$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta_2 + \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta_2$

Teorías de falla	Se supone que: $\sigma_{tw} = \sigma_{cw}$	Máxima σ Lamé Rankine	$-\sigma_w \le \sigma_1 \le \sigma_w$ $-\sigma_w \le \sigma_2 \le \sigma_w$ $-\sigma_w \le \sigma_3 \le \sigma_w$	Máxima ε Saint Venant	$-\sigma_w \le \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \le \sigma_w$ $-\sigma_w \le \sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3) \le \sigma_w$ $-\sigma_w \le \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) \le \sigma_w$	Máxima τ Tresca	$-\sigma_w \le \sigma_1 - \sigma_2 \le \sigma_w$ $-\sigma_w \le \sigma_2 - \sigma_3 \le \sigma_w$ $-\sigma_w \le \sigma_3 - \sigma_1 \le \sigma_w$

Máxima energía de deformación por unidad de volumen (dU/dV) Beltrami-Haig $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \le \sigma_w^2$	Máxima energía de distorsión por unidad de volumen $(dU/dV)_D$ Hencky-Von Mises $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \le 2\sigma_w^2$

Carga axial	Centroide es centro de resistencia P aplicada en centro de resistencia	$\varepsilon = \frac{d\delta}{dx}$	$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$	$\sigma = \frac{P}{A}$	$\delta = \int_0^l \frac{dx}{AE}$	$U_P = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{P^2 dx}{AE}$	Térmico $\delta = \alpha(\Delta T)l$

Tor-sión	Secciones planas se alabean, salvo en ejes circulares	$\gamma = r\frac{d\theta}{dx}$	$\gamma = \frac{\tau}{G}$	$\tau = \frac{Tr}{I_0}$	$I_{\substack{polar\\ circulo}} = \frac{\pi R^4}{2}$	$\theta = \int_0^l \frac{Tdx}{I_0 G}$	$U_T = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{T^2 dx}{I_0 G}$

Potencia P = Tω P = 2πT	En ejes delgados τ se halla en línea media. En cerrados es:	Flujo cortante $q = \tau t$ = uniforme	$\tau = \frac{T}{2t\langle A\rangle}$	$\langle A\rangle$ es, en ejes cerrados, el área limitada por la línea media	$\theta = \int_0^l \frac{Tdx}{I_e G}$	$I_e = \frac{4\langle A\rangle^2}{\oint_c \frac{ds}{t}}$	$U_T = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{T^2 dx}{I_e G}$

Eje delgado y abierto tratado como rectangular, lados a y t	$\tau_{max} = \frac{3T}{at^2}$ a, el largo	$0 = \int_0^l \frac{3Tdx}{at^3G}$	$U_T = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{3T^2 dx}{at^3G}$	Sección recta formada con rectángulos	$\tau_{maxi} = \frac{3T_i}{a_i t_i^2}$ $T = \sum T_i$	$0_i = \frac{3T_i l}{k a_i t_i^3 G}$ $0_1 = \ldots = 0_N$	k=1, en I, C, L k=1,1 en U, Z, T k=1,25, en I, +

Elipse Ejes a, largo, y b $A = \frac{\pi ab}{4}$ y $\tau_{max} = \frac{16T}{\pi ab^2}$ $\theta = \frac{16(a^2 + b^2)Tl}{\pi a^3 b^3 G}$	Triángulo Lado b $A = 0{,}433b^2$ $\tau_{max} = \frac{20T}{b^3}$ $0 = \frac{46Tl}{b^4G}$	Cuadrado Lado b $A = b^2$ $\tau_{max} = \frac{4{,}8T}{b^3}$ $\theta = \frac{7{,}1Tl}{b^4G}$	Rectángulo Lado a, largo, y b $A = ab$ $\tau_{max} = \frac{T}{c_1 ab^2}$ $\theta = \frac{Tl}{c_2 ab^3 G}$	Coeficientes para ejes rectangulares a/b 1,0 1,5 2,0 3,0 6,0 10,0 ∞ c_1 0,208 0,231 0,246 0,267 0,299 0,312 0,333 c_2 0,141 0,196 0,229 0,263 0,299 0,312 0,333 τ_{max} es tangente al borde, ocurre en punto medio de a

Diagramas de V y M	$\frac{dV_y}{dx} = -p$	$\frac{dM_z}{dx} = -V_y$	$\frac{d^2M_z}{dx^2} = p$	$V_y^- - V_y^+ = F_0$ $M_z^- - M_z^+ = M_0$	$\frac{dM_y}{dx} = V_z$	Con funciones singulares la viga se trata como de un solo tramo

Flexión M	$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho}$	$\sigma_x = -\frac{Ey}{\rho}$	Eje neutro es centroidal $\int_A y dA = 0$	$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}$	$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z}$	$\theta = \int_0^l \frac{M_z dx}{I_z E}$	$U_M = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_z^2 dx}{I_z E}$

$\sigma_x = -\frac{M_z I_y + M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} y + \frac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} z$	$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$	$\sigma_x = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{e_y}{r_z^2} y + \frac{e_z}{r_y^2} z\right)$	$-\frac{y}{r_z^2/e_y} - \frac{z}{r_y^2/e_z} = 1$

$\sigma_x = -n\frac{M_z y_t}{I_{tt}}$	$n = \frac{E_2}{E_1}$	$M_p = \frac{A\sigma_y}{2}(y_1 + y_2)$	$\varepsilon_x = -\frac{y\Delta\theta}{r\theta}$	$r = R - y$ $r' = R' - y$	Eje neutro no es centroidal en viga curva $\quad R = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}}$, $\bar{r} = \frac{1}{A}\int_A r dA$

$\Delta\theta = \frac{M\theta}{EAe}$ $e = (\bar{r} - R)$	$\sigma_x = -\frac{My}{Ae(R-y)} = \frac{M(r-R)}{Aer}$	Valores para R r_1, de C al borde cercano r_2, de C al borde lejano $\bar{r}$, de C al centroide	Rectángulo $R = \frac{h}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$	Triángulo $R = \frac{h/2}{\frac{r_2}{h}\ln\frac{r_2}{r_1} - 1}$

Trapecio (bases b_1 y b_2) $R = \frac{h^2(b_1 + b_2)/2}{(b_1 r_2 - b_2 r_1)\ln\frac{r_2}{r_1} - h(b_1 - b_2)}$	Círculo (radio c) $R = \frac{1}{2}\left[\bar{r} + \left(\bar{r}^2 - c^2\right)^{1/2}\right]$	Elipse (a paralelo a $\bar{r}$) $R = \frac{1}{2}\left[\bar{r} + \left(\bar{r}^2 - a^2\right)^{1/2}\right]$

Fuerza cortante V

$\tau_m = \frac{V_y I_y - V_z I_{yz}}{b\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)} Q_z + \frac{V_z I_z - V_y I_{yz}}{b\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)} Q_y$	$\tau_m = \frac{V_y Q_z}{b I_z} + \frac{V_z Q_y}{b I_y}$	$\tau_m = \frac{V_y Q_z}{b I_z}$	$\tau_{cir} = \frac{4V_y}{3A}$	$\tau_{rec} = \frac{3V_y}{2A}$	$\tau_{tub} = \frac{2V_y}{A}$

Elás-tica v	$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \approx \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z}$	$EI_z \frac{dv}{dx} = \int M_z dx + C_1$ $EI_z v = \int\int M_z dx dx + C_1 x + C_2$	$v^- = v^+$ $\left(\frac{dv}{dx}\right)^- = \left(\frac{dv}{dx}\right)^+$	$0_{A/B} = 0_B - 0_A = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M_z}{EI_z} dx$ $t_{B/A} = \int_{x_A}^{x_B} x_2 \frac{M_z}{EI_z} dx$

Rectángulo $A = bh$ $c = b/2$, al borde	Triángulo $A = bh/2$ $c = 2b/3$, al vértice	Parábola $A = bh/3$ $c = 3b/4$, al vértice	Parábola cúbica $A = bh/4$ $c = 4b/5$, al vértice	Parábola enésima $A = bh/(n+1)$ $c = (n+1)/(n+2)$, al vértice

Estabilidad en columnas y en vigas columna

Vigas columna	$\frac{dV}{dx} = -p$	$\frac{dM}{dx} = -V - P\frac{dv}{dx}$	$\frac{d^2M}{dx^2} + \lambda^2 M = p$, $\lambda^2 = \frac{P}{EI}$	$\frac{d^4v}{dx^4} + \lambda^2 \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{p}{EI}$	En viga columna P_{cr} da elástica infinita; en columna, equilibrio indiferente

Co-lum-nas	$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(l_e/r)^2}$	$l_e = 21$, empotrada-libre $l_e = 1$, articulada-articulada $l_e = 0{,}71$, articulada-empotrada $l_e = 0{,}51$, empotrada-empotrada	$\frac{P_w}{A}\left[1 + \frac{e y_{max}}{r^2} \sec\left(\frac{l_e}{2r}\sqrt{\frac{nP_w}{EA}}\right)\right] = \frac{\sigma_y}{n}$
Acero	$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}}$	$0 \le \frac{l_e}{r} \le C_c \le 200$, $\sigma_w = \frac{\sigma_y}{n}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{l_e/r}{C_c}\right)^2\right]$, $n = \frac{5}{3} + \frac{3}{8}\left(\frac{l_e/r}{C_c}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{l_e/r}{C_c}\right)^3$	$C_c \le \frac{l_e}{r} \le 200$, $\sigma_w = \frac{12\pi^2 E}{23(l_e/r)^2}$
Aluminio 6061-T6	$0 \le \frac{l_e}{r} \le 9{,}5$, $\sigma_w = 131$ [MPa]	$9{,}5 < \frac{l_e}{r} \le 66$, $\sigma_w = 139 - 0{,}868\left(\frac{l_e}{r}\right)$ [MPa]	$66 \le l_e/r$, $\sigma_w = \frac{351 \times 10^3}{(l_e/r)^2}$ [MPa]
Aluminio 2014-T6	$0 \le \frac{l_e}{r} \le 12$, $\sigma_w = 193$ [MPa]	$12 < \frac{l_e}{r} \le 55$, $\sigma_w = 212 - 1{,}585\left(\frac{l_e}{r}\right)$ [MPa]	$55 \le l_e/r$, $\sigma_w = \frac{372 \times 10^3}{(l_e/r)^2}$ [MPa]

Ma-dera	σ', paralela a fibra	$0 \le \frac{l_e}{r} \le 38$, $\sigma_w = \sigma'$	$K' = 2{,}324\sqrt{\frac{E}{\sigma'}}$	$38 \le \frac{l_e}{r} \le K'$, $\sigma_w = \sigma'\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{l_e/r}{K'}\right)^4\right]$	$K' \le \frac{l_e}{r} \le 173$, $\sigma_w = \frac{\pi^2 E}{2{,}74(l_e/r)^2}$

BIBLIOGRAFÍA

1. Beer, F. P. y Johnston, E. R. *Mechanics of Materials*; Editorial Mc Graw Hill, New York, 1981.
2. Beer, F. P. y Johnston, E. R. *Vector Mechanics for Engineers*, Statics and Dynamics; Editorial Mc Graw Hill, New York, 1962.
3. Cernica, J. N. *Resistencia de Materiales;* Compañía Editorial Continental, S. A., México, 1968.
4. Gere, J. M. *Mecánica de materiales;* quinta edición, Editorial Thomson Learning, México, 2002.
5. Gómez Perreta, C. *Mecánica Básica para Ingenieros;* Editorial Dossat, S. A. Madrid, 1951.
6. Hibbeler, R. C. *Mecánica de Materiales*; Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A., México, 1997.
7. Mott, R. L. *Resistencia de Materiales;* tercera edición, Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A., México, 1996.
8. Nash, W. *Strenght of Materials*; Editorial Mc Graw Hill, Schaum's Outline Series, New York, 1965.
9. Popov, E. P. *Mecánica de sólidos*; Addison Wesley Longman, México, 2000.
10. Singer, F. y Pytel, A. *Resistencia de Materiales*; tercera edición, Editorial Harla, México, 1980.
11. Timoshenko, S. P, y J. M. Gere. *Mecánica de materiales;* cuarta edición, Editorial Thomson Learning, México, 1998.
12. Wittenbauer, F. *Problemas de Mecánica General y Aplicada;* Editorial Labor, S. A., Madrid, 1958.