Revista

de

Matemáticas Elementales

VOLUMEN I. Diciembre de 1952 FASCICULO 4 - 5

Tarifa Postal Reducida. — Licencia Nº 1993 del Ministerio de Correos y Telégrafos.

SOBRE GEOMETRIA ANALITICA DE "LUGARES COMPUESTOS" I.

Por Carlos Federici Casa.

O. En la geometría analítica ordinaria los segmentos, los ángulos, los diedros, y las configuraciones que de estos elementos nacen asociándolos de diferentes maneras, no son tratados, en general, sino por vía indirecta. Esto se debe a que los métodos usuales no se prestan para ser aplicados a tales figuras aunque éstas sean, o puedan ser, muy sencillas.

Por ejemplo: ¿Cómo podemos representar el eje de las x en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares? Todos sabemos que la respuesta es

$$y = 0.$$

Pero si deseamos representar analíticamente el semieje positivo de las x la cuestión se complica y la respuesta es

$$y = 0,\ 0 \leqslant x < +\ \infty \qquad (0)$$

o sea, un sistema mixto compuesto de una ecuación y de dos inecuaciones. Entonces la pregunta que espontáneamente surge en nosotros es la siguiente: "¿Es posible transformar, de alguna manera, el sistema mixto (0), en un sistema puro de ecuaciones o, mejor todavía, en una ecuación?

La respuesta es afirmativa, y la ecuación es la siguiente:

$$0 = |y| + |x| - x \qquad (1)$$

en donde con $|x|$ indicamos, siguiendo a WEIERSTRASS (1815), la función **"valor absoluto de x"** que algunos, siguiendo a ARGAND (1814), CAUCHY (1865), PEANO (1905), indican con *mod x,* y leen **"módulo de x".** En efecto, si indicamos con p un número positivo, entonces cualquier punto $P(-p, y)$, **que no puede pertenecer al semieje positivo de las x** es tal que

$$|y| + |-p| - (-p) = |y| + 2p > 0$$

o sea, es tal **que no satisface a la ecuación (1),** mientras que cualquier punto $P(+p, y)$ **que sí puede pertenecer al semieje positivo de las x** es tal que

$$|y| + |+p| - (+p) = |y| = 0$$

si y sólo si

$$y = 0$$

o sea **si y sólo si pertenece al eje de las x.** Es conveniente notar que a la semirrecta representada por la ecuación (1) pertenece también el punto tal que $x = 0$, o sea el origen.

Ejercicio: Determinar las ecuaciones del semieje negativo de las x, y de los semiejes positivo y negativo de las y.

Resulta bastante evidente, de lo dicho, que la ecuación

$$0 = |x| - x$$

representa, de los semiplanos en que el eje y divide al plano, aquel para el cual

$$0 \leqslant x < +\infty$$

o sea el comúnmente llamado "semiplano derecho".

Ejercicio: Determinar la ecuación del "semiplano izquierdo" y las de los "semiplanos inferior" y "superior".

1. Como se ve, la introducción de la función "valor absoluto de" permite dar a la expresión analítica de "lugares", que de otra manera requerirían sistemas mixtos de ecuaciones e inecuaciones, la forma de una simple y sencilla ecuación. Continuando nuestra búsqueda propongámonos el problema de representar por medio de una ecuación el primer cuadrante en el plano, que en la manera

acostumbrada se representa con el siguiente sistema de cuatro inecuaciones.

$$0 \leqslant x < +\infty, 0 \leqslant y < +\infty.$$

La ecuación que responde al problema es la siguiente:

$$0 = |x| + |y| + (-x - y) \qquad (2).$$

En efecto si con ξ y η se indican dos reales positivos se deduce que

1) cada punto I del primer cuadrante es tal que I (ξ, η) y entonces tal que

$$|x| + |y| + (-x - y) = |\xi| + |\eta| + (-\xi - \eta) =$$
$$= \xi + \eta - \xi - \eta = 0$$

o sea tal **que sí satisface la ecuación (2).**

2) cada punto II del segundo cuadrante es tal que II $(-\xi, \eta)$ y entonces tal que

$$|x| + |y| + (-x - y) = |-\xi| + |\eta| + (-(-\xi) - \eta) =$$
$$= 2\,\xi > 0$$

o sea tal **que no satisface la ecuación (2).**

3) cada punto III del tercer cuadrante es tal que III $(-\xi, -\eta)$ y entonces tal que

$$|x| + |y| + (-x - y) =$$
$$= |-\xi| + |-\eta| + (-(-\xi) - (-\eta)) = 2\,(\xi + \eta) > 0$$

o sea tal **que no satisface la ecuación (2).**

4) cada punto IV del cuarto cuadrante es tal que IV $(\xi, -\eta)$ y entonces tal que

$$|x| + |y| + (-x - y) = |\xi| + |-\eta| + (-\xi - (-\eta)) =$$
$$= 2\,\eta > 0$$

o sea tal **que no satisface la ecuación (2).**

Es conveniente notar que al primer cuadrante, representado por la ecuación (2), le pertenece también la "frontera" constituída por los semiejes positivos de las x y de las y.

Ejercicio. Determinar las ecuaciones del segundo, tercero y cuarto cuadrantes.

2. Tratemos, ahora, de resolver este otro problema. ¿Cuál es la ecuación de la semirrecta a la cual pertenece como "origen" el punto (2, 1) (punto de "detención" o de "arresto") y que pasa por el punto (5, 2)?

Usualmente para representar tal semirrecta se escribe la ecuación de la recta (2, 1), (5, 2) o sea la ecuación

$$y = (x + 1)/3,$$

añadiendo las condiciones

$$2 \leqslant x < + \infty,$$

o sea usando una ecuación y dos inecuaciones.

Usando la función "valor absoluto de" la ecuación de la semirrecta se escribe así:

$$0 = |y - (x + 1)/3| + |x - 2| - (x - 2) \qquad (3).$$

En efecto todo punto $P(2 - p, y)$, **que no puede pertenecer a la semirrecta** en cuestión, es tal que

$$\begin{aligned} &|y - (x + 1)/3| + |x - 2| - (x - 2) = \\ &= |y - (2 - p + 1)/3| + |2 - p - 2| - (2 - p - 2) = \\ &= |y + p/3 - 1| + 2p > 0 \end{aligned}$$

o sea tal **que no satisface la ecuación (3)** mientras que todo punto $P(2 + p, y)$, **que sí puede pertenecer a la semirrecta,** es tal que

$$\begin{aligned} &|y - (x + 1)/3| + |x - 2| - (x - 2) = \\ &= |y - (2 + p + 1)/3| + |2 + p - 2| - (2 + p - 2) = \\ &= |y - p/3 - 1| = 0 \end{aligned}$$

si y sólo si

$$y - p/3 - 1 = 0$$

o sea si y sólo si

$$y = p/3 + 1 = (x - 2)/3 + 1 = (x + 1)/3$$

o sea **si y sólo si el punto P pertenece a la semirrecta** que pasa por los puntos (2, 1) y (5, 2).

Ejercicio. Determinar la ecuación de la semirrecta a la cual pertenece como "origen" el punto (5, 2) (punto de detención o de arresto) y que pasa por el punto (2, 1).

3. De los problemas resueltos se ve que la introducción de la función "valor absoluto de" entre las funciones elementales puede llevar notables ventajas a la geometría analítica y esto impone entonces, un estudio sistemático de aquélla.

Consideremos una recta x y sobre la misma un sistema de coordenadas abscisas (con O "punto origen" y U "punto unidad"). El primer problema que queremos resolver es el de determinar la ecuación de la semirrecta de origen A (de abscisa a) y sentido positivo. La ecuación requerida es la siguiente:

$$0 = |x - a| - (x - a) \qquad (4).$$

En efecto, cada X **perteneciente a la semirrecta** en cuestión es tal que su abscisa x es tal que

$$x = a + p$$

(siendo p un real positivo) y entonces tal que

$$|x - a| - (x - a) = |a + p - a| - (a + p - a) = p - p = 0$$

o sea tal que **la ecuación (4) sí está satisfecha,** mientras que cada punto X **no perteneciente a la semirrecta** en cuestión es tal que su abscisa x es tal que

$$x = a - p,$$

y entonces tal que

$$|x - a| - (x - a) = |a - p - a| - (a - p - a) =$$
$$= p + p = 2\,p > 0$$

o sea tal **que la ecuación (4) no está satisfecha.**

Es conveniente notar que a la semirrecta de origen A (y de sentido positivo) representada por la ecuación (4) pertenece también el mismo A. En efecto

$$|x - a| - (x - a) = |a - a| - (a - a) = 0 - 0 = 0.$$

Ejercicio. Determinar la ecuación de la semirrecta de origen A y de sentido negativo.

4. Tratemos, ahora, de resolver el problema que consiste en determinar la ecuación del segmento AB, sobre la recta x del problema precedente, siendo a y b las coordenadas abscisas de A y de B, respectivamente, y en donde, sin restarle generalidad al problema, podemos suponer que $a < b$.

La ecuación del segmento AB es la siguiente:

$$0 = |x - a| + |x - b| - |a - b| \qquad (5).$$

En efecto, cada punto X perteneciente a la semirrecta $A - \infty$ y por lo tanto **no perteneciente a** $A\ B$, es tal que

$$x = a - p$$

y entonces tal que

$$\begin{aligned} &|x - a| + |x - b| - |a - b| = \\ &= |a - p - a| + |a - p - b| - |a - b| = \\ &= |-p| + |-p - (b - a)| - |-(b - a)| = \\ &= p + p + (b - a) - (b - a) = 2p > 0 \end{aligned}$$

o sea tal **que no satisface a la ecuación (5).**

Además, cada punto X perteneciente a la semirrecta $B + \infty$, y por lo tanto **no perteneciente a** AB, es tal que

$$x = b + p,$$

y entonces tal que

$$\begin{aligned} &|x - a| + |x - b| - |a - b| = \\ &= |b + p - a| + |b + p - b| - |a - b| = \end{aligned}$$

$$= |p + (b - a)| + |p| - |-(b - a)| =$$
$$= p + p + (b - a) - (b - a) = 2p > 0$$

o sea tal **que no satisface la ecuación (5).**

Y por fin, cada punto X **perteneciente al segmento** AB es tal que

$$x = a + (b - a)\,\theta$$

(indicando con θ un real que tal que $0 \leqslant \theta \leqslant 1$) y entonces tal que

$$|x - a| + |x - b| - |a - b| =$$
$$= |a + (b - a)\,\theta - a| + |a + (b - a)\,\theta - b| - |a - b| =$$
$$= |(b - a)\,\theta| + |-(b - a)\,(1 - \theta)| - |-(b - a)| =$$
$$= (b - a)\,\theta + (b - a)\,(1 - \theta) - (b - a) =$$
$$= (b - a)\,(\theta + 1 - \theta - 1) = 0,$$

o sea tal **que sí satisface a la ecuación (5).**

Tratemos de resolver los problemas precedentes en el caso en que semirrecta y segmento estén "inmersos" en un plano (en vez que en una recta) referido a un sistema cartesiano rectangular (O, U_x, U_y).

Empezamos por buscar la ecuación de la semirrecta de origen $P\,(x_0, y_0)$ y que pasa por el punto $P\,(x_1, y_1)$, bajo las hipótesis de que

$$x_0 \neq x_1,\ y_0 \neq y_1.$$

La ecuación requerida es:

$$0 = |(y - y_0) \,/\, (y_1 - y_0) - (x - x_0) \,/\, (x_1 - x_0)| + \\ + |x - x_0| - (x - x_0) \text{ si } x_0 < x_1 \qquad (6)$$

$$0 = |(y - y_0) \,/\, (y_1 - y_0) - (x - x_0) \,/\, (x_1 - x_0)| + \\ + |x - x_0| + (x - x_0) \text{ si } x_1 < x_0 \qquad (7)$$

En efecto, en el primer caso:

cualquier punto $P\ (x_0 - p, y)$, **que no puede pertenecer a la semirrecta** es tal que

$$\begin{aligned}&|(y - y_0) / (y_1 - y_0) - (x - x_0) / (x_1 - x_0)| + \\ &+ |x - x_0| - (x - x_0) = |(y - y_0) / (y_1 - y_0) - \\ &- (x_0 - p - x_0) / (x_1 - x_0)| + |x_0 - p - x_0| - \\ &- (x_0 - p - x_0) = |(y - y_0) / (y_1 - y_0) + \\ &+ p / (x_1 - x_0)| + 2p > 0\end{aligned}$$

o sea tal **que no satisface la ecuación,** mientras que cualquier punto $P\ (x_0 + p, y)$, que **sí puede pertenecer a la semirrecta** es tal que:

$$\begin{aligned}&|(y - y_0) / (y_1 - y_0) - (x - x_0) / (x_1 - x_0)| + \\ &+ |x - x_0| - (x - x_0) = |(y - y_0) / (y_1 - y_0) - \\ &- (x_0 + p - x_0) / (x_1 - x_0)| + |x_0 + p - x_0| - (x_0 + p - x_0) = \\ &= |(y - y_0) / (y_1 - y_0) - p / (x_1 - x_0)| = 0\end{aligned}$$

si y sólo si

$$\begin{aligned}0 &= (y - y_0) / (y_1 - y_0) - p / (x_1 - x_0) = \\ &= (y - y_0) / (y_1 - y_0) - (x - x_0) / (x_1 - x_0)\end{aligned}$$

o sea, **si y sólo si** $P\ (x_0 + p = x, y)$ **pertenece a la semirrecta** $P_0\, P_1$.

Dejamos al lector la demostración del segundo caso que se desarrolla paralelamente a la del primero.

6. En el caso en que

$$y_0 = y_1 = \eta$$

las ecuaciones (6) y (7) se simplifican y se trasforman en las siguientes:

$$0 = |y - \eta| + |x - x_0| - (x - x_0) \text{ si } x_0 < x_1 \qquad (8)$$

$$0 = |y - \eta| + |x - x_0| + (x - x_0) \text{ si } x_1 < x_0 \qquad (9)$$

En efecto en el primer caso cualquier punto $P\ (x_0 - p, y)$ **que no puede pertenecer a la semirrecta** $P_0\ P_1$, es tal que

$$|y - \eta| + |x - x_0| - (x - x_0) =$$
$$|y - \eta| + |x_0 - p - x_0| - (x_0 - p - x_0) = |y - \eta| + 2p > 0$$

o sea tal **que no satisface a la ecuación (8),** mientras que cualquier punto $P\ (x_0 + p, y)$ **que sí puede pertenecer a la semirrecta** $P_0\ P_1$, es tal que

$$|y - \eta| + |x - x_0| - (x - x_0) =$$
$$= |y - \eta| + |x_0 + p - x_0| - (x_0 + p - x_0) = |y - \eta| = 0$$

si y sólo si

$$y - \eta = 0$$

o sea tal **que pertenece a la semirrecta** $P_0\ P_1$, **si y sólo si sus coordenadas satisfacen la ecuación (8).**

Dejamos al lector la demostración del segundo caso.

7. Para agotar las diferentes condiciones en que se puede presentar una semirrecta (con relación a los ejes de referencia) nos falta considerar el caso en que $x_0 = x_1 = \xi$.

Es fácil demostrar, en ese caso, que la ecuación de la semirrecta $P_0\ P_1$ es

$$0 = |x - \xi| + |y - y_0| - (y - y_0) \quad \text{si} \quad y_0 < y_1 \qquad (10)$$
$$0 = |x - \xi| + |y - y_0| + (y - y_0) \quad \text{si} \quad y_1 < y_0 \qquad (11)$$

Dejamos al lector las demostraciones.

Ejercicio. Determinar la ecuación de la semirrecta que tiene como origen al punto $P_0\ (3, 2)$ y que pasa por el punto $P_1\ (-2, -1)$.

8. Tratemos, ahora, de determinar, en el plano, la ecuación del segmento $P_0\ P_1$ siendo x_0, y_0 y x_1, y_1 las respectivas coordenadas (cartesianas rectangulares) de P_0 y de P_1.

En el caso en que

$$x_0 \neq x_1, \quad y_0 \neq y_1$$

la ecuación es la siguiente

$$0 = |(y - y_0) / (y_1 - y_0) - (x - x_0) / (x_1 - x_0)| + \\ + |x - x_0| + |x - x_1| - |x_0 - x_1|. \qquad (12)$$

En efecto, si suponemos que $x_0 < x_1$, lo que no resta generalidad a la demostración, cualquier punto $P\ (x_0 - p, y)$ **que no puede pertenecer al segmento** $P_0\ P_1$, es tal que

$$|(y - y_0) / (y_1 - y_0) - (x - x_0) / (x_1 - x_0)| + \\ + |x - x_0| + |x - x_1| - |x_0 - x_1| = \\ = |(y - y_0) / (y_1 - y_0) - (x_0 - p - x_0) / (x_1 - x_0)| + \\ + |x_0 - p - x_0| + |x_0 - p - x_1| - |x_0 - x_1| = \\ = |(y - y_0) / (y_1 - y_0) + p / (x_1 - x_0)| + p + p + \\ + (x_1 - x_0) - (x_1 - x_0) = \\ = |(y - y_0) / (y_1 - y_0) + p / (x_1 - x_0)| + 2p > 0$$

o sea tal **que no satisface a la ecuación (12);** además cualquier punto $P\ (x_1 + p, y)$ **que no puede pertenecer al segmento** $P_0\ P_1$ es tal que

$$|(y - y_0) / (y_1 - y_0) - (x - x_0) / (x_1 - x_0)| + \\ + |x - x_0| + |x - x_1| - |x_0 - x_1| = \\ = |(y - y_0) / (y_1 - y_0) - (x_1 + p - x_0) / (x_1 - x_0)| + \\ + |x_1 + p - x_0| + |x_1 + p - x_0| - |x_0 - x_1| = \\ = |(y - y_0) / (y_1 - y_0) - (p + x_1 - x_0) / (x_1 - x_0)| + \\ + p + (x_1 - x_0) + p - (x_1 - x_0) = \\ = |(y - y_0) / (y_1 - y_0) - (p + x_1 - x_0) / (x_1 - x_0)| + 2p > 0$$

o sea tal **que no satisface a la ecuación (12).**

Finalmente, cualquier punto $P\ (x_0 + (x_1 - x_0)\ \theta, y)$ **que sí puede pertenecer al segmento** $P_0\ P_1$, es tal que (recuérdese que θ es un real tal que $0 \leqslant \theta \leqslant 1$)

$$|(y - y_0) / (y_1 - y_0) - (x - x_0) / (x_1 - x_0)| +$$
$$+ |x - x_0| + |x - x_1| - |x_0 - x_1| =$$
$$= |(y - y_0) / (y_1 - y_0) - (x_0 + (x_1 - x_0)\, \theta - x_0) / (x_1 - x_0)| +$$
$$+ |x_0 + (x_1 - x_0)\, \theta - x_0| + |x_0 + (x_1 - x_0)\, \theta - x_1| -$$
$$- |x_0 - x_1| = |(y - y_0) / (y_1 - y_0) - \theta| + (x_1 - x_0)\, \theta +$$
$$+ (x_1 - x_0)\,(1 - \theta) - (x_1 - x_0) = |(y - y_0) / (y_1 - y_0) - \theta|$$
$$= 0$$

si y sólo si

$$0 = (y - y_0) / (y_1 - y_0) - \theta =$$
$$= (y - y_0) / (y_1 - y_0) - (x - x_0) / (x_1 - x_0)$$

o sea tal **que pertenece al segmento $P_0\, P_1$ si y sólo si satisface a la ecuación (12).**

Por ejemplo la ecuación del segmento $P_0\, P_1$ en donde P_0 (3, 2) y P_1 (—2, —1) es la siguiente

$$0 = |(y - 2) / (-1 - 2) - (x - 3) / (-2 - 3)| +$$
$$+ |x - 3| + |x + 2| - |3 - (-2)| =$$
$$= |(y - 2) / (-3) - (x - 3) / (-5)| + |x - 3| +$$
$$+ |x + 2| - |5| =$$
$$= |-5y + 10 + 3x - 9| / 15 + |x - 3| + |x + 2| - 5 =$$
$$= (|3x - 5y + 1| + 15\, |x - 3| + 15\, |x + 2| - 75) / 15 = 0$$

o sea

$$0 = |3x - 5y + 1| + 15\, |x - 3| + 15\, |x + 2| - 75.$$

9. Para agotar las diferentes condiciones en que se puede presentar un segmento (con relación a los ejes de referencia) nos falta considerar los siguientes casos: I) Cuando $x_0 = x_1 = \xi$ y es fácil demostrar que en este caso la ecuación del segmento $P_0\, P_1$ es la siguiente

$$0 = |x - \xi| + |y - y_0| + |y - y_1| - |y_0 - y_1|. \qquad (13)$$

II) Cuando

$$y_0 = y_1 = \eta,$$

y es también fácil demostrar que en este caso la ecuación del segmento $P_0\, P_1$ es la siguiente:

$$0 = |y - \eta| + |x - x_0| + |x - x_1| - |x_0 - x_1| \qquad (14)$$

Dejamos las demostraciones al lector.

Ejercicio. Determinar la ecuación del segmento $P_0\, P_1$ en donde P_0 (1, 1) y P_1 (3, 0).

Ejercicio. Determinar la ecuación del segmento $P_0\, P_1$ en donde P_0 (1, 2) y P_1 (5, 2).

Ejercicio. Determinar la ecuación del segmento $P_0\, P_1$ en donde P_0 (3, 2) y P_1 (3, 3).

NOTA HISTORICO — BIBLIOGRAFICA

Si con **"lugar geométrico simple"** se indica la figura representada por una o más ecuaciones **"ordinarias"** algebraicas o trascendentes, la geometría analítica, que establece una correspondencia biunívoca entre ecuaciones (o sistemas de ecuaciones) y "lugares simples", extiende su dominio solamente sobre dichos lugares, los cuales, evidentemente, son sólo una parte del conjunto de todas las figuras geométricas, quedando incluídas entre las demás, los **"lugares geométricos compuestos"** así llamados porque están formados por partes de lugares simples. Estos lugares compuestos han sido tratados analíticamente sólo de una manera indirecta y con artificios varios o sea sin aquella uniformidad de método que es el fin principal de la geometría analítica.

Ya Fourier (J. B. Auxerre 1768, París 1830) en su célebre tratado "Théorie analytique de la chaleur" lamenta varias veces la falta de una representación analítica de dichos "lugares" afirmando la necesidad de la misma, y al tratar analíticamente un fenómeno representable gráficamente por un diagrama triangular y haciendo uso de una especial función (que con las estudiadas por otros autores forma la clase de las funciones, "limitadoras" según la nomenclatura de Laboccetta) apta para delimitar las partes de rectas que constituyen los lados del triángulo, tal vez involuntariamente, indica el camino que hay que seguir para una tal extensión.

El citado inconveniente, puede pensarse, es debido al uso de funciones indefinidamente derivables mientras las funciones representadas gráficamente por lugares compuestos (poligonales, superficies poliédricas, variedades politópicas) tienen derivada discontinua (con uno o más saltos) o son ellas mismas discontinuas.

Para tratar analíticamente las líneas y superficies "spezzate" mixtas y agregados de las mismas se necesita entonces introducir una o más funciones discontinuas o con derivada discontinua como la que usa FOURIER o como las estudiadas, desde el punto de vista analítico, por LABOCCETTA, las cuales utiliza también en algunas aplicaciones geométricas en una serie de trabajos que aparecen entre 1922 y 1933.

Naturalmente, en virtud del conocido principio de economía mental, es oportuno introducir el menor número posible de nuevas funciones puesto que ya una sola oportunamente escogida puede ofrecer vastas posibilidades como lo prueba V. ALACI por medio de la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{sen\ x\alpha}{\alpha}\, d\alpha$$

(que es igual a $+\pi/2, 0, -\pi/2,$

según que x sea positivo, *cero*, negativo) en una serie de memorias publicadas entre 1930 y 1936 en las cuales representa y estudia analíticamente una vasta clase de lugares compuestos y más precisamente polígonos y poliedros convexos.

Haciendo uso él mismo, de un interesante concepto, prueba cómo a cada polígono o poliedro convexo corresponda una ecuación que lo representa biunívocamente y enseña a escribir tal ecuación pero sin lograr pasar, hecha salvedad de casos excepcionalmente sencillos, de la ecuación al polígono o poliedro representado, y frente al problema analítico, el más elemental, como aquel de encontrar las intersecciones de un polígono o poliedro con una recta, no encuentra mejor camino que descomponer la ecuación del polígono o poliedro en las ecuaciones de sus lados o caras y proceder luégo con los métodos analíticos ordinarios.

Este parcial insuceso parece debido a la falta de un estudio preliminar de las propiedades de las ecuaciones a las cuales se llega representando lugares compuestos.

Habiéndose propuesto investigar las propiedades de dichas ecuaciones, TACCHELLA en 1933, se da cuenta que las funciones limitadoras de LABOCCETTA aunque notablemente más sencillas que la función empleada por FOURIER, conducían todavía a ecuaciones demasiado complicadas, y por lo tanto poco intuitivas, y por este motivo se vió impelido a introducir como nueva función limitadora aquella bien conocida, pero hasta entonces no empleada (si se hace excepción del olvidado trabajo de SÖDERBLOM de 1906 y del de AMOROSO de 1924), la función "valor absoluto de" desarrollando luégo los métodos para la resolución de las ecuaciones lineales con términos todos o en parte absolutos, y aplicando los mismos métodos a la representación y a un primer estudio analítico de las poligonales planas y alabeadas de los polígonos y poliedros convexos y cóncavos, cerrados y abiertos, sea considerando los unos como líneas o como partes de plano, y los otros como superficies o como partes de espacio.

Después de TACCHELLA, e independientemente, llegaba a su vez, en 1936 y por otros caminos, a resultados notables, OAKLEY.

Fundamentándose, por fin, en los trabajos de TACCHELLA y de OAKLEY, el prematuramente desaparecido amigo mío, F. PRETTI, se propone, en dos memorias que salen a la luz en los años de 1937 y 1938, en primer término estudiar de cual manera y entre cuales límites la función "valor absoluto de" pueda servir para representar "lugares lineales compuestos" (o sea figuras constituídas de puntos, segmentos, polígonos, poliedros y polítopos) reales, en cualquier número de dimensiones, situados sobre la recta, el plano, el espacio, o un hiperspacio proyectivo cualquiera, y en segundo término explicar a fondo las ecuaciones lineales con términos absolutos de primero y de segundo orden (éstos incidentalmente usados por OAKLEY) y las ecuaciones paramétricas encontradas simultánea e independientemente de TACCHELLA.

Además de los citados motivos, que ya parecen suficientes, otro motivo encuentra, y pesado, de la necesidad de representar lugares compuestos con una ecuación, quien lea los modernos tratados de "Análisis operatorial" en los cuales se usan frecuentemente funciones representadas gráficamente por los lugares compuestos llamados "meandros", "sierras", "escaleras", "ondas rectangulares", "ondas triangulares", etc., como es fácil darse cuenta si se hojea, por ejemplo, el "Cours de Calcul Operationnel" D. PAPIN et A. KAUFFMANN, A. MICHEL, París, 1951 o el "Advanced Engineering Mathematics" WYLIE, Mc Graw - Hill, New - York, 1951, o también el "Fourier Transforms" Jan N. SNEDDON Mc Graw - Hill. New - York, 1951.

BIBLIOGRAFIA:

o) A. Söderblom, "Sur l'emploi des valeurs absolues dans la géometrie analytique". Göteborg, Wald. Zachrisson, Boktryckeri A. B., 1906.

1) L. Amoroso, Rend. Circ. Palermo, VI XLVIII (1924), págs. 333-336.

2) L. Laboccetta, Rend. Acc. Lincei, (5) XXXI (1922), 1º sem. pág. 499; (5) XXXII (1923) 1º sem. págs. 381, 603, (6) V (1927), págs. 322, 421, 855, 865, 939. (6) (1928), pág. 522, (6) (1929), pág. 628, (6) XI, pág. 930, pág. 41 (6) XIII (1931), pág. 822, 921, (6) XIV (1931), pág. 3, (6) XVI (1932), págs. 27, 95, 212 (6) XX (1934), pág. 373, (6) XXI (1935), pág. 745.

Politécnico (1923), Nr. II, 12, Elettrotécnica (1924), Nr. 19, 20, 21 Boll.

Un. Mat. Ital. (1927), VI, págs. 91, 179, (1931), X pág. 259 (1932), XI págs. 208, 278, (1933), XII, pág. 232.

3) V. Alaci, Bull. Scient. de L'Ec. Polyt. de Timisora Tm. 3 Fs. I. 2, 3, 4 (1930), Tm. 4, Fs. I, 2, (1931), Tm. 5, pág. 143 (1934), Tm. 6. págs. 3, 163 (1936).

4) R. Rotha, Höhere Mathematik, Teil 1, pág. 3, Teil 2 pág. 26, Teil 4 Heft 1, págs. 4, 10, Heft 2, pág. 96, Heft 3, pág. 21.

5) G. Tacchella, Giorn. di Nat. LXXI (/) 23 (1933), págs. 1-52.

6) C. Oakley, Toh. Math. Jour. XLI (1935), págs. 52-69.

The Amer. Math. Monthly XIII (1936), Nr. 8, págs. 476-487.

7) F. Pretti, Giorn. Mat. LXXVII (1937), págs. 69-86 (1938), págs. 97-114.

Universidad Nacional de Colombia.