SOLUCION DE PROBLEMAS

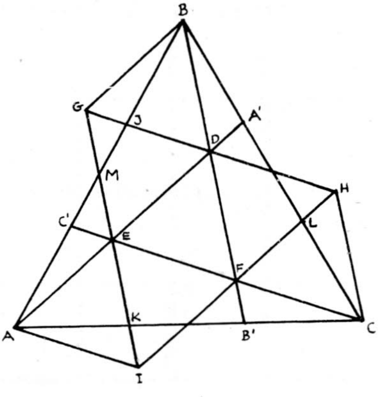
1. Demostrar que el producto de tres números enteros consecutivos es siempre divisible por 6, y que el producto de cuatro números enteros consecutivos es siempre divisible por 24.

Solución. Entre tres números enteros consecutivos hay necesariamente por lo menos uno divisible por tres y uno divisible por dos, o uno divisible por dos y por tres. Pero el producto de un número divisible por tres, por uno divisible por dos, tiene que ser divisible por seis, luego el producto de tres números enteros consecutivos es siempre divisible por 6.

Lo mismo sucede con el producto de cuatro números enteros consecutivos. Entre tres números enteros consecutivos, tiene que haber por lo menos uno divisible por dos, uno divisible por tres, y uno divisible por cuatro. El producto de tres números divisibles por dos, tres y cuatro respectivamente, siempre es divisible por 24 ($2 \times 3 \times 4 = 24$), luego queda probada la segunda parte del problema.

Carlos Ignacio Córdoba (Colegio San Ignacio, Medellín).

15. Sea ABC un triángulo equilátero. Sean A', B', C' puntos sobre los tres lados de ABC tales que $AB' : B'C = CA' : A'B = BC' : C'A = 2 : 1$. Demostrar que el área del triángulo que encierran los segmentos AA', BB', CC' es un séptimo del área de ABC.



Solución. [Sean D, E, F los vértices del pequeño triángulo. Sea DG paralelo a FE y BG paralelo a DE. Entonces BGD es un triángulo equilateral, igual a DEF. De manera semejante se construyen los triángulos AIE y CHF].

Tengo que demostrar que la suma de las áreas de los siete triángulos BGD, GDE, DEF, DFH, EFI, EAI, HFC son iguales a la del triángulo grande ABC.

El triángulo BDA' es igual a BJG, porque tienen un lado igual comprendido por ángulos respectivamente iguales. En efecto: El lado BD es común en BDA' con el triángulo equilátero BGD, luego es igual a BG de BJG. Los ángulos BGJ y BDA' son iguales porque tienen 60°. (BGJ por construcción, BDA' por ser opuesto por el vértice a uno del triángulo equilátero DEF). Los ángulos GBJ y DBA' son también iguales por faltarles lo mismo (JBD) para ser iguales a 60°. Luego los dos triángulos BDA' y BJG son iguales, luego el área del cuadrilátero $BJDA'$ es igual a la del triángulo GBD. Por la misma razón son iguales las áreas de $AKEC'$ y AEI y las de $CLFB'$ y CFH.

El triángulo JGM es igual a MEC' porque tienen un lado y dos ángulos (homólogos) iguales. Efectivamente: El lado EC' es igual a JG por ser lados homólogos de triángulos que ya se probó ser iguales ($AC'E$ y JGB). Los ángulos EMC' y JMG son iguales por ser opuestos por el vértice. Los ángulos JGM y MEC' son iguales por tener ambos 60° (JGM por pertenecer a un triángulo equilátero y MEC' por ser opuesto por el vértice a KEF). Luego los dos triángulos JGM y MEC' son iguales, luego el área del cuadrilátero $JDEC'$ es igual a la del triángulo DGE. Por la misma razón son iguales las áreas de EIF y $KEFB'$ y las de HDF y $LFDA'$.

Pero las áreas de estos seis cuadriláteros (iguales cada uno a la de un triángulo equilátero), más el área del triángulo DEF, son iguales a la de ABC, luego el área de cada triángulo equilátero pequeño es un séptimo del grande.

Carlos Ignacio Córdoba (Colegio San Ignacio, Medellín).