PROBLEMAS PROPUESTOS

Los problemas son señalados por cero, uno o dos asteriscos según su grado de dificultad. Las soluciones de los problemas deben ser enviadas a REVISTA DE MATEMATICAS ELEMENTALES, Universidad de los Andes, calle 18-A, carrera 1-E, Bogotá, Colombia, antes del 30 de abril de 1953. La solución a cada problema debe venir en hoja por separado. Los alumnos de bachillerato deben enviar, junto con las soluciones, el nombre del colegio y de su profesor de matemáticas.

En el fascículo primero el problema número 4 apareció errado. Lo proponemos nuevamente y su solución debe ser enviada al mismo tiempo que las de los demás problemas del presente número.

4. Demostrar que si n es impar, $46^n + 296 \times 13^n$ es divisible por 1947.

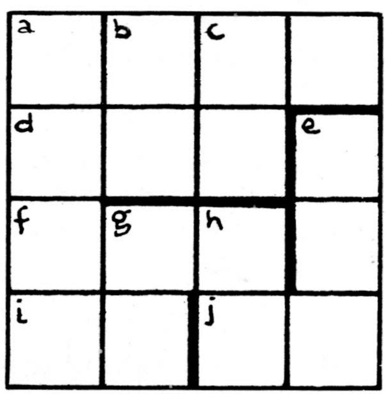
27. Encontrar todas las soluciones de la ecuación diofántica: *

$$x + y = xy.$$

28. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x^3 + y^3 = 1, \qquad xz^2 + yu^2 = -2,$$
$$x^2z + y^2u = 0, \qquad z^3 + u^3 = 22.$$

29. **Crucigrama.** *Horizontales.* a) El año de nacimiento del señor Rodríguez. d). Nueve veces la edad del señor Rodríguez al nacer de su nieto Pepe, al principio de un mes de mayo. f). Once veces el número de nietos del señor Rodríguez. i) La edad del señor Rodríguez a su muerte. j) La raíz cuadrada del año de nacimiento del señor Rodríguez.



Verticales. a) El cubo del día

* DIOFANTES: matemático griego que vivió alrededor de 300 a. de J. C. Una ecuación se llama diofántica si el número de variables es superior a uno. Una tal ecuación puede tener infinitas soluciones.

en el cual nació el señor Rodríguez en un mes de noviembre. b). La calle en que vive el señor Rodríguez. c). La edad del señor Rodríguez en diciembre 1897. e). La edad de Pepe (en días) a la muerte de su abuelo el 1º de marzo de 1934. g). La edad del señor Rodríguez 20 años antes de su muerte. h). La edad del señor Rodríguez 40 años antes de su muerte.

30. Dados los polinomios

$$P = 196x^9 + 98x^8 + 394x^7 + 197x^6 - 2104x^5 - 1052x^4 -$$
$$- 2326x^3 - 1163x^2 - 600x - 300;$$

$$Q = 2x^{10} + x^9 + 8x^8 + 4x^7.$$

Hallar los valores de x que satisfagan a la ecuación $P/Q = 0$.

(Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Examen de Ingreso, Madrid, 1949).

31. Se da un tablero rectangular de lados a y b, constituído por las rectas de ecuaciones

$$x = 0, x = 1, x = 2, \ldots, x = a,$$
$$y = 0, y = 1, y = 2, \ldots, y = b.$$

Del punto (0, 0) parte un móvil que se traslada hasta el punto (a, b) marchando a lo largo de las líneas antes citadas, que limitan los recuadros sin poder trasladarse de un cruce a otro inmediato de ordenada o de abscisa menor que él. Se pide: ¿Cuántas trayectorias distintas podrá seguir el móvil?

(Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Examen de Ingreso, Madrid, 1949).

32. Una bolsa contiene cinco bolas de las que pueden ser blancas las cinco, cuatro, tres, dos, una o ninguna. Se saca una bola que resulta ser blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que esta sea la única bola blanca?

(Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Examen de Ingreso, Madrid, 1949).

33. Un viajero va de un punto A, de la superficie terrestre a otro punto B, distantes entre sí 2.237 millas, medidas sobre el arco de círculo máximo que pasa por los dos puntos. Este viajero lleva un cronómetro que adelanta 22 segundos en las 24 horas. Al empezar el viaje, hace la determinación del tiempo en A y observa en ese

instante que el cronómetro está adelantado 4 minutos 18,7 segundos con relación al tiempo local medio de *A*.

Al llegar a *B*, comprueba que el cronómetro está atrasado 5 minutos 12,3 segundos con respecto al tiempo local medio en *B*.

Sabiendo que el tiempo transcurrido en el viaje entre las determinaciones en *A* y en *B* es, según dicho cronómetro, de 37,45 días, y que el punto *A* está situado en el Ecuador, se pide determinar la distancia de *B* al Polo, expresada en kilómetros.

Se supone que la Tierra es esférica.

Una milla equivale a 1.853,15 metros.

(Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Examen de Ingreso, Madrid, 1949).

34. Sea *ABC* un triángulo, a, b, c sus lados y α, β, γ sus ángulos.

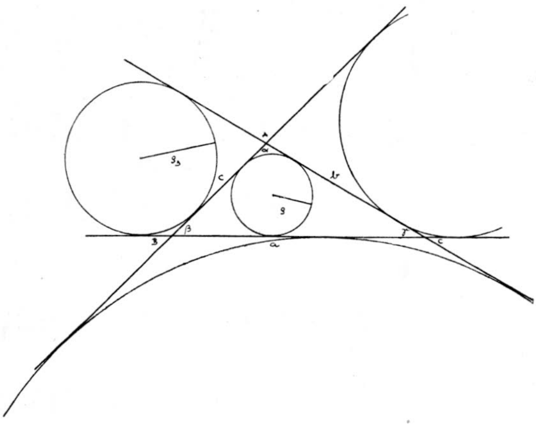
Pongamos $s = (a + b + c)/2$,

$$s_1 = s - a,$$
$$s_2 = s - b,$$
$$s_3 = s - c,$$

y sean

$$\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3,$$

los radios de los círculos tangentes al triángulo. Demostrar que el área T del triángulo es igual a



$$T = \rho s = \rho_1 s_1 = \rho_2 s_2 = \rho_3 s_3.$$

35. (Continuación). Demostrar que

$$T = ss_1 \; tg \; (\alpha/2) = ss_2 \; tg \; (\beta/2) = ss_3 \; tg \; (\gamma/2),$$

y que

$$T = s_2 s_3 \; ctg \; (\alpha/2) = s_1 s_3 \; ctg \; (\beta/2) = s_1 s_2 \; ctg \; (\gamma/2).$$

36. (Continuación). Demostrar que

$$T = \rho\rho_1 \, ctg \, (\alpha/2) = \rho\rho_2 \, ctg \, (\beta/2) = \rho\rho_3 \, ctg \, (\gamma/2),$$

y que

$$T = \rho_2\rho_3 \, tg \, (\alpha/2) = \rho_1\rho_3 \, tg \, (\beta/2) = \rho_1\rho_2 \, tg \, (\gamma/2).$$

37. Sea ABC un triángulo rectángulo en A. Sea AH la altura perpendicular a la base BC. Pongamos $BC = a$, $AC = x$, $AB = y$, $AH = h$.

a) Calcular h en función de a, x, y.

b) Dar en función de x, y la expresión del volumen V generado al girar del triángulo ABC alrededor del lado AB.

c) Dar en función de x, y la expresión del volumen V' generado al girar del triángulo ABC alrededor del lado AC.

d) Determinar la condición para que la suma $V + V'$ sea igual al volumen S de la esfera con centro A y tangente a BC.

e) Dados a y h, determinar x e y para que $V + V' = S$. ¿Cuál es la condición para que el problema sea posible?

(Bachillerato, 1ª parte, Lyon, Francia, 1948).