Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XX (1986) págs. 27-38

SOLUCIONES PERIODICAS DE UN MODELO DE UN REACTOR DINAMICO

por

Luis A. ORTEGA S.

Introducción. Recientemente muchos investigadores han estudiado el sistema correspondiente a un modelo de un reactor nuclear dinámico, de la forma:

$$(0.01)\qquad \begin{cases} U_t - D_1\Delta U = U(aV-b) \\ V_t - D_2\Delta V = dU, \text{ en } \bar{\Omega}\times[0,\infty) \end{cases}$$

donde D_1, D_2, d, son constantes positivas, $b \geqslant 0$, y las funciones $U(x,t)$ y $V(x,t)$ representan el flujo de neutrones y la temperatura respectivamente. Resultados sobre este sistema los encontramos por ejemplo en [4], [5] y [7].

En este artículo demostraremos la existencia de soluciones periódicas del sistema (0.01), con un factor externo.

En la sección 1 se demuestra un resultado sobre la existencia de soluciones periódicas para un sistema de la forma

$$(0.02)\qquad \left\{\begin{array}{l} L_1[u](x,t) \equiv f_1(x,t,u(x,t),v(x,t)) \\ L_2[v](x,t) \equiv f_2(x,t,u(x,t),v(x,t)) \text{ en } \Omega\times\mathbb{R} \\ u/_{\partial\Omega\times\mathbb{R}} \equiv v/_{\partial\Omega\times\mathbb{R}} \equiv 0, \end{array}\right\}$$

donde L_1 y L_2 son operadores lineales diferenciales de segundo orden de tipo parabólico.

En la sección 2, se demuestra la existencia de soluciones periódicas del sistema (0.01), con un factor externo $q(x,t) > 0$.

Adoptaremos las siguientes notaciones:

Denotaremos por Ω a un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, r y a serán números reales y $D = \Omega\times[a,r]$. Para toda función u definida en D y $0 < \alpha < 1$, se define:

$$\|u\|_\infty^D = \sup_{(x,t)\in D} |u(x,t)|,\quad H_\alpha^D(u) = \sup_{\substack{(x_i,t_i)\in D\\ i=1,2\\ (x_1,t_1)\neq(x_2,t_2)}} \frac{|u(x_1,t_1)-u(x_2,t_2)|}{[|x_1-x_2|^2+|t_1-t_2|]^{\alpha/2}},$$

$$\|u\|_\alpha^D = \|u\|_\infty^D + H_\alpha^D(u).$$

Se dice que u es *Holder-uniformemente continua* en D *de exponente* α, si $H_\alpha^D(u) < \infty$. El conjunto de estas funciones se denota por $C^\alpha(D)$.

El conjunto de todas las funciones $u \in C^1(D)$ tales que u, u_{x_i} pertenecen a $C^\alpha(D)$, para $i = 1,\ldots,N$, se denota por $C^{1+\alpha}(D)$. En la misma forma, el conjunto de todas las funciones $u \in C^2(D)$ tales que $u, u_t, u_{x_i x_j}$, $1 \leq i,j \leq N$, pertenecen a $C^{\alpha}(D)$, se denota por $C^{2+\alpha}(D)$. Se define:

$$\|u\|_{1+\alpha}^{D} = \|u\|_{\alpha}^{D} + \sum_{i=1}^{N} \|u_{x_i}\|_{\alpha}, \text{ para todo } u \in C^{1+\alpha}(D)$$

y

$$\|u\|_{2+\alpha} = \|u\|_{1+\alpha} + \sum_{i,j=1}^{N} \|u_{x_i x_j}\|_{\alpha} + \|u\|_{\alpha}^{D}, \text{ para todo } u \in C^{2+\alpha}(D).$$

Por A se denotará el espacio de Banach de todas las funciones u definidas en $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$, tales que $u(x,t+T) \equiv u(x,t)$ y $u \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}\times[0,T])$, con la norma $\|\cdot\|_{\alpha}^{\bar{\Omega}\times[0,T]}$ (T es un número positivo fijo). Por B al espacio de Banach de todas las funciones u definidas en $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$, tales que $u(x,t) \equiv u(x,t+T)$, $u|_{\partial\Omega\times\mathbb{R}} \equiv 0$ y $u \in C^{2+\alpha}(\Omega\times[0,T])$, con la norma

$$\|u\|_B = \|u\|_{2+\alpha}^{\Omega\times[0,T]}.$$

En este artículo se utilizará el siguiente resultado, el cual fué demostrado en [3], usando fundamentalmente el Teorema de Kolesov, publicado en [1].

(0.03) **TEOREMA**. *Dado* $f \in A$, *existe una única función* $u \in B$ *tal que* $L[u] \equiv f$ *en* $\Omega\times\mathbb{R}$. *Además existen dos constantes* $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, *independientes de* f, *tales que*

$$\|u\|_B \leq k_1 \|L[u]\|_A, \text{ para todo } u \in B$$
$$\|u\|_{1+\alpha} \leq k_2 \|L[u]\|_{\infty} \text{ para todo } u \in B,$$

donde

$$L[u] = \frac{\partial u}{\partial u} - \Big(\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c.u \Big),$$

L *es uniformemente parabólico*, $a_{ij}, b_i, c \in A$ *para todo* $1 \leq i,j \leq N$ *y* $c \leq 0$.

El Teorema (0.03) juega un papel importante en los resultados obtenidos por A.C. Lazer en [3] y A. Castro y A.C. Lazer en [2].

Sección 1. En esta sección estudiaremos la existencia de soluciones del sistema (0.02). En lo que sigue, L_1 y L_2 denotan los siguientes operadores:

$$L_1[u] \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \Big(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x,t) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) + C(x,t)u(x,t)\Big),$$

$$L_2[u](x,t) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \Big(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \bar{a}_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x,t) + \sum_{i=1}^{N} \bar{b}_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) + \bar{C}(x,t)u(x,t)\Big),$$

donde $C \leq 0$, $\bar{C} \leq 0$ en $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$; C, $\bar{C}$, b_i, $\bar{b}_i$, a_{ij}, $\bar{a}_{ij} \in A$, para $1 \leq i,j \leq N$. Suponemos también que L_1 y L_2 son uniformemente parabólicos en $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$.

Denotamos por

$$f_i : \bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x,t,u,w) \mapsto f_i(x,t,u,w), \quad i = 1,2$$

a un par de funciones continuas, con derivadas continuas en las variables u y w, tales que:

$$(1.01) \qquad f_i(x,t+T,u,w) \equiv f_i(x,t,u,w) \text{ en } \bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \quad \text{para } i = 1,2.$$

(1.02) Si $u,w \in A$ entonces $f_i(\ldots,u(\cdot),w(\cdot)) \in A$,
para $i = 1,2$.

(1.03) TEOREMA. *Si* $T_1 > T$ *y existen cuatro funciones* $\bar{u}_1,\bar{u}_2,\underline{u}_1,\underline{u}_2$ *en* $C^{2,1}(\Omega\times[0,T_1])\cap C^{\alpha}(\bar{\Omega}\times[0,T_1])$ *tales que:*

$$L_i[\bar{u}_i](x,t) \geqslant f_i(x,t,\bar{u}_1(x,t),\bar{u}_2(x,t)) \text{ en } \bar{\Omega}\times[0,T_1],\quad i = 1,2,$$

$$L_i[\underline{u}_i](x,t) \leqslant f_i(x,t,\underline{u}_1(x,t),\underline{u}_2(x,t)) \text{ en } \bar{\Omega}\times[0,T_1],\quad i = 1,2,$$

$$\bar{u}_i \geqslant \underline{u}_i \text{ en } \bar{\Omega}\times[0,T_1], \text{ para } i = 1,2,$$

$$\bar{u}_i(x,0) = \bar{u}_i(x,T) \text{ y } \underline{u}_i(x,0) = \underline{u}_i(x,T) \text{ para todo } x \in \Omega,\quad i = 1,2,$$

$$\bar{u}_i(x,t) \geqslant 0 \text{ y } \underline{u}_i(x,t) \leqslant 0, \text{ para todo } (x,t) \in \partial\Omega\times[0,T_1],\quad i = 1,2,$$

y además existen dos constantes $m_1 > 0$, $m_2 > 0$, *tales que* $f_1(\ldots,u_1,u_2)+m_1u_1$ *y* $f_2(\ldots,u_1,u_2)+m_2u_2$ *son funciones no decrecientes en* u_1 *y* u_2 *para* $(u_1,u_2) \in [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ *donde*

$$a_i = \inf\{\underline{u}_i(x,t)\,|\,(x,t) \in [0,T_1]\},\quad i = 1,2$$

$$b_i = \sup\{\bar{u}_i(x,t)\,|\,(x,t) \in [0,T_1]\},\quad i = 1,2,$$

entonces el problema (0,02) *tiene por lo menos una solución* $u,v \in B$, *tal que* $\underline{u}_1 \leqslant u \leqslant \bar{u}_1$, $\underline{u}_2 \leqslant v \leqslant \bar{u}_2$ *en* $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$.

Demostración. Denotemos también con $\bar{u}_i,\underline{u}_1,\bar{u}_2,\underline{u}_2$ a las extensiones periódicas, con período T, de las funciones $\bar{u}_1,\underline{u}_1,\bar{u}_2,\underline{u}_2$. Consideremos las funciones siguientes definidas en $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:

$$\tilde{f}_i(x,t,u_1,u_2) = f_i(x,t,z_1,z_2)+m_iz_i,\quad i = 1,2,$$

donde

$$z_k = u_k \text{ si } \underline{u}_k(x,t) < u_k < \bar{u}_k(x,t), \quad k = 1,2,$$

$$z_k = \underline{u}_k(x,t), \text{ si } u_k \leqslant \underline{u}_k(x,t), \quad k = 1,2,$$

$$z_k = \bar{u}_k(x,t), \text{ si } u_k \geqslant \bar{u}_k(x,t), \quad k = 1,2,$$

para todo, $(x,t,u_1,u_2) \in \bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. A continuación demostraremos que cualquier solución del problema:

$$(1.04)\begin{cases} L_1[V_1](x,t)+m_1V_1(x,t) = \tilde{f}_1(x,t,V_1(x,t),V_2(x,t)), \\ \qquad\qquad \text{para todo } (x,t) \in \Omega\times\mathbb{R}. \\ L_2[V_2](x,t)+m_2V_2(x,t) = \tilde{f}_2(x,t,V_1(x,t),V_2(x,t)), \\ \qquad\qquad \text{para todo } (x,t) \in \Omega\times\mathbb{R}, \quad V_1,V_2 \in B \end{cases}$$

es solución del problema (0.02).

Para probar esta afirmación, supongamos que (V_1,V_2) es una solución del problema (1.04); ésto es,

$$L_1[V_1](x,t)+m_1V_1(x,t) = \tilde{f}_1(x,t,V_1(x,t),V_2(x,t)),$$
$$\text{para todo } (x,t) \in \Omega\times\mathbb{R},$$

$$L_2[V_2](x,t)+m_2V_2(x,t) = \tilde{f}_2((x,t),V_1(x,t),V_2(x,t)),$$
$$\text{para todo } (x,t) \in \Omega\times\mathbb{R}.$$

Puesto que

$$L_1[\bar{u}_1]+m_1\bar{u}_1 \geqslant \tilde{f}_1(\ldots,\bar{u}_1,\bar{u}_2) \text{ en } \bar{\Omega}\times[0,T_1]$$

$$L_2[\bar{u}_2]+m_2\bar{u}_2 \geqslant \tilde{f}_2(\ldots,\bar{u}_1,\bar{u}_2) \text{ en } \bar{\Omega}\times[0,T_1],$$

restando las desigualdades anteriores de estas últimas, respectivamente, obtenemos

$$L_1[\bar{u}_1-V_1]+m_1(\bar{u}_1-V_1) \geqslant 0 \quad \text{en} \quad \bar{\Omega}\times[0,T_1]$$

(1.05)

$$L_2[\bar{u}_2-V_2]+m_2(\bar{u}_2-V_2) \geqslant 0 \quad \text{en} \quad \bar{\Omega}\times[0,T_2]$$

y

$$\bar{u}_i \equiv (\bar{u}_i-V_i) \geqslant 0 \quad \text{en } \partial\Omega\times[0,T_1].$$

Si el mínimo de $(\bar{u}_i-V_i)$ en $\Omega\times[0,T_1] > 0$ entonces $\bar{u}_i > V_i$ en $\Omega\times[0,T_1]$ para $i = 1,2$. Si el mínimo de $(\bar{u}_i-V_i)$ en $\bar{\Omega}\times[0,T_1]$ es menor o igual a cero, entonces por el Principio de Máximo para ecuaciones diferenciales de tipo parabólico (ver [6]), y (1.05), tenemos que

$$\underset{\bar{\Omega}\times[0,T_1]}{\text{mínimo}}\ (\bar{u}_i-V_i) = \underset{\partial\Omega\times[0,T_1]}{\text{mínimo}}\ (\bar{u}_i-V_i) = \underset{\partial\Omega\times[0,T_1]}{\text{mínimo}}\ \bar{u}_i \geqslant 0.$$

Por todo lo anterior tenemos que:

$$V_i(x,t) \leqslant \bar{u}_i(x,t) \text{ para todo } (x,t) \in \Omega\times[0,T_1], \quad i = 1,2.$$

Con el mismo argumento podemos probar que $\underline{u}_i \leqslant V_i$ en $\bar{\Omega}\times[0,T_1]$, para $i = 1,2$. Esto es, $\underline{u}_i \leqslant V_i \leqslant \bar{u}_i$ en $\bar{\Omega}\times[0,T_1]$ y

$$L_i[V_i]+m_iV_i = \tilde{f}_i(\ldots,V_1,V_2) = f_i(\ldots,V_1,V_2)+mV_i$$

en $\Omega\times[0,T_1]$, para $i = 1,2$. Ya que V_1,V_2, f_i y los coeficientes de L_i son funciones periódicas en la variable t con período T, tenemos que

$$L_i[V_i](x,t) = f_i(x,t,V_1(x,t),V_2(x,t)),$$

para todo $(x,t) \in \Omega\times\mathbb{R}$, $i = 1,2$, y $V_1,V_2 \in B$. Esta última identidad implica que (V_1,V_2) es una solución del problema, (0,02). Definamos:

$\bar{E} = \{u \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}) \mid u(x,t+T) \equiv u(x,t), \text{ y } u|_{\partial\Omega\times\mathbb{R}} = 0\}$,

$\hat{E} = \bar{E}\times\bar{E}$, y

$$\|(u,V)\|_{\hat{E}} = \max\{\|u\|_{\alpha}, \|V\|_{\alpha}\} .$$

$\hat{E}$ con esta norma es un espacio de Banach. Si hacemos $M_1[u] = L_1[u]+m_1u$, $M_2[u] = L_2 u + m_2u$, por el Teorema (0.03) existen los operadores inversos $M_1^{-1}:B \to A$, $M_2^{-1}:B \to A$, y son continuos. Se define la siguiente aplicación $\hat{R}$ de $\hat{E}$ en $\hat{E}$:

$$\hat{R}(u_1,u_2) = (i\cdot M_1^{-1}(\tilde{f}_1(\dots,u_1,u_2)),\ i\cdot M_2^{-1}(\tilde{f}_2(\dots,u_1,u_2))),$$

donde $i:B \to E$, es la inyección $u \mapsto i(u) = u$. Por definición de f_i, $i = 1,2$, existe $r_1 > 0$ tal que

$$\|\tilde{f}_i(\dots,u_1(..),u_2(..))\|_{\infty} < r_1, \quad i = 1,2,$$

para todo $(u_1,u_2) \in \hat{E}$. Por el mismo teorema (0.03), existe una constante $k_1 > 0$ tal que

$$\|M_i^{-1}(\tilde{f}_i(\dots,u_1,u_2))\|_{1+\alpha} \leq k_1\|f_i(\dots,u_1,u_2)\|_{\infty} \leq k_1r_1 = r_2$$

para todo $(u_1,u_2) \in \hat{E}$, e $i = 1,2$. Por esta última desigualdad obtenemos:

(1.06) $\quad \|\hat{R}(u_1,u_2)\|_{\hat{E}} \leq r_2$ para todo $(u_1,u_2) \in \hat{E}$.

Denotaremos por $\bar{B}(0,r_2)$ a la bola cerrada en $\hat{E}$ de centro cero y radio r_2. Por (1.06) tenemos que:

(1.07) $\quad \hat{R}(\bar{B}(0,r_2) \subset \bar{B}(0,r_2)$.

Es fácil ver que $\hat{R}$ es un operador compacto de $\hat{E}$ en $\hat{E}$. Por el Teorema del punto fijo de Schauder, existe $(V_1,V_2) \in \hat{E}$ tal que $\tilde{R}(V_1,V_2) = (V_1,V_2)$, ésto es

$$M_1[V_1] = L_1[V_1]+m_1V_1 \equiv \tilde{f}_1(\dots,V_1,V_2),$$

$$M_2[V_2] = L_2[V_2]+m_2V_2 \equiv \tilde{f}_2(\dots,V_1,V_2),\ V_1,V_2 \in B.$$

Lo anterior implica que

$$L_1[V_1](x,t) = f_1(x,t,V_1(x,t),V_2(x,t)),$$

$$L_2[V_2](x,t) = f_2(x,t,V_1(x,t),V_2(x,t)) \text{ en } \Omega\times\mathbb{R},$$

$$V_1,V_2 \in B,\ \underline{u}_1 \leqslant V_1 \leqslant \bar{u}_1,\quad \underline{u}_2 \leqslant V_2 \leqslant \bar{u}_2 \text{ en } \Omega\times\mathbb{R}.$$

Sección 2. En esta sección aplicaremos el resultado de la sección anterior al siguiente sistema

$$(2.01)\qquad \left\{\begin{array}{ll} L[u] = u[a(\cdot)V-b]+q(x,t) & \text{en } \Omega\times\mathbb{R} \\ L[V] = d\cdot u & \text{en } \Omega\times\mathbb{R} \\ u > 0,\ V > 0 \text{ en } \Omega\times\mathbb{R},\ u,V \in B & \end{array}\right\}$$

donde $a(x,t) \in A$, $a(x,t) > 0$, para todo $(x,t) \in \Omega\times\mathbb{R}$, $b \geqslant 0$, $d > 0$, $q(\cdot) \in A$, $q(x,t) > 0$ en $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$ y

$$L[u](x,t) = \frac{\partial u}{\partial t} - \Big[\sum_{i,j=1} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}$$

$$+ C(x,t)u(x,t)\Big],$$

para todo $(x,t) \in \Omega\times\mathbb{R}$, $C \leqslant 0$; $a_{ij}(\cdot)$, b_i, $C \in A$, y L es uniformemente parabólico.

Se puede ver fácilmente que las funciones $f_1(x,t,u,V) \equiv u(a(x,f)V-b)$, $f_2(x,t,u,V) = d\cdot u$, satisfacen las condiciones del Teorema (1.03).

Denotemos con $\phi(x,t)$ la función propia del problema de valor propio con valor en la frontera, (ver [3]).

$$\{L(\phi)(x,t) \equiv \lambda_1\phi(x,t),\ \lambda_1 > 0,\ \phi(x,t) > 0 \text{ en } \Omega\times\mathbb{R},\ \phi \in B\},$$

donde, λ_1 es el primer valor propio de L, $\|\phi\|_\infty = 1$.

(2.02) **TEOREMA**. *Si* $q(x,t) > 0$ *en* $\Omega\times\mathbb{R}$, $\frac{\partial q}{\partial \vec{n}} < 0$ *en* $\partial\Omega\times\mathbb{R}$, $q \in B$, a *y* b *son suficientemente grandes tales que* $a\lambda_1 > d$ *y* $(\lambda_1-(a^2-b))\phi > q(x,t)$ *en* $\Omega\times\mathbb{R}$ *entonces el sistema* (2.01) *tiene solución.*

Demostración. Tomemos $k_2 = \inf_{\bar{\Omega}\times[0,T]} a(x,t)$. Por hipótesis $k_2\lambda_1 > d$, además $0 < k_2 \leqslant a$. Por estas dos últimas desigualdades existe una constante k_1, $1 < k_1 < \frac{k_2\lambda_1}{d}$ y $k_2\phi \leqslant a$ en $\Omega\times\mathbb{R}$. Además por hipótesis:

$$(2.03) \qquad (\lambda_1-(a^2-b))k_1 > q(x,t) \text{ en } \Omega\times\mathbb{R}.$$

Denotemos $\bar{u} \equiv k_1\phi$, $\bar{V} \equiv k_2\phi$. Por (2.03) obtenemos lo siguiente:

$$(2.04) \qquad L[\bar{u}] = k_1\lambda_1\phi > (a^2-b)k_1\phi + q(x,t) \equiv \bar{u}[a^2-b] + q(x,t)$$

$$\geqslant \bar{u}[ak_2\phi-b] + q(x,t) \equiv \bar{u}[a\bar{V}-b] + q(x,t), \text{ en } \Omega\times\mathbb{R},$$

además,

$$(2.05) \qquad L[\bar{V}] = k_2L[\phi] = \lambda_1k_2\phi > dk_1\phi \equiv d\bar{u} \quad \text{en } \Omega\times\mathbb{R}$$

Tomemos $\alpha > 0$, $\beta > 0$ dos constantes suficientemente pequeñas tales que, $\alpha < k_1$, $\beta < k_2$, $\beta\lambda_1 < d\alpha$, $\alpha(\lambda_1+b)\phi \leqslant q(x,t)$ en $\Omega\times\mathbb{R}$ y denotemos $\underline{u} \equiv \alpha\phi$, $\underline{V} \equiv \beta\phi$. Por lo anterior obtenemos:

$$(2.06) \qquad L[\underline{u}] = \alpha\lambda_1\phi \leqslant -\alpha b\phi+q(x,t) \equiv -b\underline{u}+q(x,t)$$

$$\leqslant \underline{u}[a\underline{V}-b] + q(x,t) \quad \text{en } \Omega\times\mathbb{R},$$

$$(2.07) \qquad L[\underline{V}] = \lambda_1\beta\phi \leqslant d\alpha\phi \equiv d\underline{u} \quad \text{en } \Omega\times\mathbb{R}$$

Por (2.04), (2.05), (2.06), (2.07) y el Teorema (1.03) existen dos funciones $u,V \in B$ las cuales satisfacen el problema (2.01) y $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$, $\underline{V} \leq V \leq \bar{V}$ en $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$

BIBLIOGRAFIA

[1] Kolesov, Ju.S., *A test for the existence of periodic solutions to Parabolic Equations.* Soviet Math. Dokl. Vol.7 (1966), Nº 5. 1318-1320.

[2] Castro, A. y Lazer, A.C., *Results on periodic solutions of parabolic equations suggested by elliptic theory.* Bolletino Un. Mat. Ital. (6) 1-B (1982), 1089-1104

[3] Lazer, A.C., *Some remarks on periodic solutions of Parabolic Differential Equations.* In *Dynamical Systems II.* Academic Press, 1980 (pp 228-246).

[4] Pao, C.V., *On Nonlinear Reaction-Diffusion Systems.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 87 (1982), 165-198.

[5] Pao, C.V., *Bifurcations Analysis on a Nonlinear Diffusion Systems in Reactor Dynamics.* J. Applicable Anal. (1979), 107-119.

[6] Proter, M.H. and Weinberger, H.F., *Maximum Principles in Differential Equations.* Prentice-Hall, Inc.

[7] Stacey, W.M., *Space-Time Nuclear Reactor Kinetics.* Academic Press, New York, 1969.

Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle
CALI.

(Recibido en marzo de 1985, la versión revisada en noviembre de 1985).