Fuerza entre dos distribuciones de carga, a partir del tensor electrostático

Camilo Mejia[1] **y John Morales**[1,2,*]

[1] Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia

[2] Grupo de Campos y Partículas

Resumen

Generalmente, para hallar la fuerza que actúa sobre un cuerpo cargado debido a otro se calcula mediante la relación $F = qE$, pero ¿que pasaría si no conociéramos las distribuciones de carga? En el presente artículo se pretende dar un método para el cálculo de la fuerza existente entre dos cuerpos cargados tomando únicamente el campo eléctrico que ellos producen. Este método se basa en el tensor electrostático. Adicionalmente, se presenta una aplicación para la fuerza existente entre una carga y un alambre de carga.

Palabras claves: Fuerza electrostática, tensor de esfuerzo de Maxwell

Abstract

Generally, the strength that acts over a charged body due to another it is calculated through the relation $F = qE$, but, ¿What would pass if not we know as it is the charge distribution? The present article tries to give a method to calculate the existing strength among two charged bodies, taking only the electric field that they produce. This method is based in the electrostatic tensor, too we present an application that consists in calculate the strength between a charge and a wire of charge.

1. Introducción

En las teorías usuales de electrodinámica se presentan diversas formas para calcular la fuerza existente entre dos distribuciones de carga, pero muchas de estas se basan en el hecho de poder calcular explícitamente la forma de tales distribuciones o al menos una de ellas. Por esta razón, es útil desarrollar un método de cálculo para la situación en la que se tenga solamente los campos eléctricos y que las distribuciones de carga sean muy complicadas para poder hallarlas.

En el presente artículo se pretende desarrollar un método basado en el tensor electrostático [1, 2], el cual dependerá solamente de los campos eléctricos producidos por las cargas que intervienen en la fuerza.

---

*· jmoralesa@unal.edu.co

2. Tensor electrostático

El propósito de esta sección es obtener la fuerza eléctrica que ejerce una distribución de carga ρ sobre otra ρ'

Cuando tenemos la necesidad de hallar la fuerza entre dos distribuciones de carga sin saber sus configuraciones, pero sí sus campos, primero recurrimos a la ecuación de Maxwell

$$\boldsymbol{\nabla} \quad \boldsymbol{E}' = 4\pi\rho' \,, \tag{1}$$

donde ρ' es la distribución de carga sobre la cual vamos a hallar la fuerza debida a un campo $\boldsymbol{E}$, y $\boldsymbol{E}'$ es el campo que ella produce. Con esto la fuerza sobre ella queda determinada por la expresión

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= q'\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{F} &= \int_{v'} \rho' \boldsymbol{E} dv' \,, \end{aligned} \tag{2}$$

siendo $\boldsymbol{E}$ el campo eléctrico que produce la segunda distribución de carga ρ , y v $'$ el volumen de la superficie gaussiana que se tomó alrededor de la distribución de carga ρ' (figura 1).

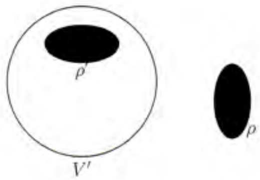

Figura 1. Distribuciones de carga ρ y ρ sobre las cuales se va a trabajar. v es el volumen que encierra a la distribución ρ

Reemplazando la ecuación (1) en la ecuación (2), tenemos:

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi} \int_{v'} (\boldsymbol{\nabla} \quad \boldsymbol{E}')\boldsymbol{E} dv \tag{3}$$

Escribiendo el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ en sus componentes cartesianas, la fuerza se puede escribir como

$$\boldsymbol{F} \quad \frac{1}{4\pi} \int_{v} \left[(\boldsymbol{\nabla} \quad \boldsymbol{E}E')E_x \widehat{\imath} + (\boldsymbol{\nabla} \quad \boldsymbol{E}')E_y \widehat{\jmath} + (\boldsymbol{\nabla} \quad \boldsymbol{E}')E_z \widehat{k} \right] dv \tag{4}$$

Mediante la identidad vectorial para la divergencia de un campo escalar y uno vectorial

$$\boldsymbol{\nabla} \quad (E_x \boldsymbol{E}') = E_x(\boldsymbol{\nabla} \quad \boldsymbol{E}') + \boldsymbol{E}' \quad (\boldsymbol{\nabla} E_x) \,,$$

la fuerza resulta ser

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi}\left[\int_{v'} [\boldsymbol{\nabla} \quad (E_x\boldsymbol{E}') \quad \boldsymbol{E}' \quad (\boldsymbol{\nabla} E_x)]\, dv'\,\widehat{i}\right.$$
$$+ \int_{v'} [\boldsymbol{\nabla} \quad (E_y\boldsymbol{E}') \quad \boldsymbol{E}' \quad (\boldsymbol{\nabla} E_y)]\, dv'\,\widehat{j}$$
$$\left. + \int_{v'} [\boldsymbol{\nabla} \quad (E_z\boldsymbol{E}') \quad \boldsymbol{E}' \quad (\boldsymbol{\nabla} E_z)]\, dv'\,\widehat{k}\right] \tag{5}$$

Utilizando el teorema de Gauss para la divergencia y agrupando términos se tiene que

$$\boldsymbol{F} \quad \frac{1}{4\pi}\left(\int_{s'} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}' \quad \widehat{n})da' \quad \int_{v'} (\boldsymbol{E}' \; \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{E}dv'\right), \tag{6}$$

donde s' es la superficie del volumen que encierra a la distribución de carga ρ' Teniendo en cuenta esto, se utilizarán dos identidades vectoriales para convertir la segunda integral en otra integral de superficie. La primera identidad es

$$\nabla(\boldsymbol{E}' \quad \boldsymbol{E}) = (\boldsymbol{E}' \; \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{E}$$
$$+ (\boldsymbol{E} \; \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{E}' + \boldsymbol{E}' \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) + \boldsymbol{E} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}') \tag{7}$$

De la electrostática tomamos que

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0\,, \; \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}' \quad 0$$

Luego, la ecuación (7) se reduce a

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{E}' \quad \boldsymbol{E}) = (\boldsymbol{E}' \; \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{E} \; \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{E}' \tag{8}$$

Por otro lado, la segunda identidad es

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{E}' \times \boldsymbol{E}) = (\boldsymbol{E}' \; \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{E} \quad (\boldsymbol{E} \; \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{E}' + \boldsymbol{E}'(\boldsymbol{\nabla} \quad \boldsymbol{E}) \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\nabla} \quad \boldsymbol{E}') \tag{9}$$

Sumando las identidades (8) y (9), tenemos que

$$(\boldsymbol{E}' \; \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{E}' \quad \boldsymbol{E}) + \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{E}' \times \boldsymbol{E}) + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\nabla} \quad \boldsymbol{E}') \quad \boldsymbol{E}'(\boldsymbol{\nabla} \quad \boldsymbol{E})}{2} \tag{10}$$

Luego, reemplazando la identidad (10) en la ecuación (6) podemos escribir la fuerza como

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi}\int_{s'} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}' \quad \widehat{n})da' \quad \frac{1}{8\pi}\int_{v'} \left[\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{E}'\times\boldsymbol{E}) + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\nabla} \quad \boldsymbol{E}')\right] dv'$$

$$\frac{1}{8\pi}\int_{v'} \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{E}' \quad \boldsymbol{E})dv + \frac{1}{8\pi}\int_{v'} \boldsymbol{E}'(\boldsymbol{\nabla} \quad \boldsymbol{E})dv' \qquad (11)$$

La ultima integral es cero, ya que el volumen v' no encierra ninguna carga de ρ y por ello

$$\boldsymbol{\nabla} \quad \boldsymbol{E} \quad 0,$$

para todo punto en el interior de v', con esto

$$\int_{v} \boldsymbol{E}'(\boldsymbol{\nabla} \quad \boldsymbol{E})dv \qquad 0$$

Así, la fuerza se reduce a

$$\boldsymbol{F} \quad \frac{1}{4\pi}\int_{s} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}' \quad \widehat{n})da' \quad \frac{1}{8\pi}\int_{v'} \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{E}' \quad \boldsymbol{E})dv'$$

$$\frac{1}{8\pi}\int_{v'} \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{E}'\times\boldsymbol{E})dv \qquad \frac{1}{8\pi}\int_{v'} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\nabla} \quad \boldsymbol{E}')dv \qquad (12)$$

Como se puede ver, la cuarta integral es de nuevo la integral con la que iniciamos en la ecuación (3), luego esta es la fuerza, pasando a sumar esta integral se tiene

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{6\pi}\left[\int_{s'} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}' \quad \widehat{n})da' \right.$$

$$\left. \frac{1}{2}\int_{v'} \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{E}' \quad \boldsymbol{E})dv' \quad \frac{1}{2}\int_{v'} \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{E}'\times\boldsymbol{E})dv'\right] \qquad (13)$$

Tomando los teoremas

$$\int_{v'} \boldsymbol{\nabla}\psi dv' = \int_{s'} \psi\, \widehat{n} da',$$

$$\int_{v'} (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})dv' = \int_{s'} (\widehat{n}\times\boldsymbol{A})da',$$

donde A es una función vectorial, ψ es una función escalar y $\widehat{n}$ el vector normal a la superficie s Con esto la ecuación (13) se reduce a

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{6\pi}\left[\int_{s'} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}' \quad \widehat{n})da' \right.$$

$$\frac{1}{2}\int_{s'}(\boldsymbol{E}' \quad \boldsymbol{E})\,\widehat{n}da' \quad \frac{1}{2}\int_{s'}(\widehat{n}\times(\boldsymbol{E}'\times\boldsymbol{E}))da'\Big] \tag{14}$$

Al expandir todas las operaciones de los integrandos y agruparlas en las componentes $\widehat{i}$, $\widehat{j}$ y $\widehat{k}$ todas las operaciones se pueden representar como el producto de una matriz 3×3 y el vector $\widehat{n}$. Llamando al integrando "*tensor electrostático*", la fuerza toma la forma

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{6\pi}\int_{s'} T \quad \widehat{n}da', \tag{15}$$

donde T, es un tensor que puede expresarse como una matriz 3×3, el cual se halla expandiendo todas las operaciones que hay en los integrandos. Por ejemplo, expandiendo una de las operaciones vectoriales se tiene que

$$\begin{aligned}\widehat{n}\times(\boldsymbol{E}'\times\boldsymbol{E}) = {} & \left[(E_x'E_y \quad E_xE_y')n_y \quad (E_z'E_x \quad E_zE_x')n_z\right]\widehat{i} \\ & + \left[(E_y'E_z \quad E_yE_z')n_z \quad (E_x'E_y \quad E_xE_y')n_x\right]\widehat{j} \\ & \quad + \left[(E_z'E_x \quad E_zE_x')n_x \quad (E_y'E_z \quad E_yE_z')n_y\right]\widehat{k}\end{aligned}$$

Tomando todas las sumas por componentes se tiene que el tensor tiene la forma

$$T = \begin{pmatrix} E_xE_x' & \frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}'}{2} & \frac{3}{2}E_xE_y' & \frac{E_yE_x'}{2} & \frac{3}{2}E_xE_z' & \frac{E_zE_x}{2} \\ \frac{3}{2}E_yE_x' & \frac{E_xE_y'}{2} & E_yE_y' & \frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}'}{2} & \frac{3}{2}E_yE_z' & \frac{E_zE_y'}{2} \\ \frac{3}{2}E_zE_x' & \frac{E_xE_z'}{2} & \frac{3}{2}E_zE_y' & \frac{E_yE_z'}{2} & E_zE_z' & \frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}'}{2} \end{pmatrix} \tag{16}$$

Para un cálculo de la fuerza, se toma el tensor de la ecuación (16) y se reemplaza en la ecuación (15), teniendo en cuenta la superficie sobre la cual se va hacer el cálculo, ya que es muy importante para hallar el vector $\widehat{n}$.

3. Aplicación

Para mostrar la forma de utilizar el tensor se presentará la fuerza que actúa sobre una carga en el origen debida a la presencia de un alambre de carga infinito en el punto $(h, 0, 0)$ paralelo al eje Z

La carga es q y la densidad de carga lineal es λ, con ellos se tienen los campos E' y E respectivamente como muestra la figura 2

$$E_x' = \frac{qx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

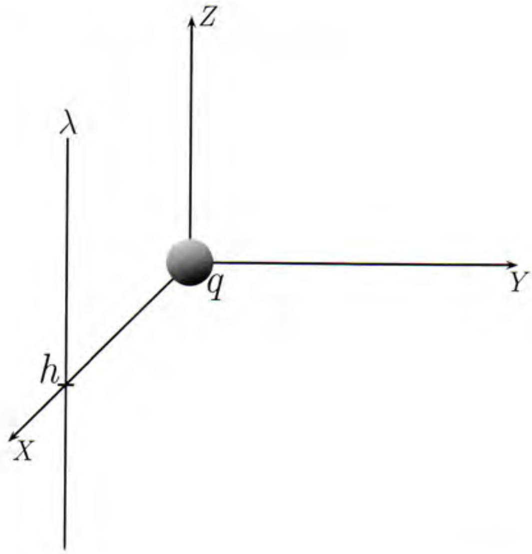

Figura 2. Carga q en el origen y un alambre de carga λ a una distancia h del origen.

$$
\begin{aligned}
E'_y &= \frac{qy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\
E'_z &= \frac{qz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\
E_x &= \frac{2\lambda(x-h)}{[(x-h)^2+y^2]} \\
E_y &= \frac{2\lambda y}{[(x-h)^2+y^2]} \\
E_z &= 0
\end{aligned}
$$

El campo del alambre es cero en la componente Z, ya que es un alambre infinito y el campo se compensa a cada lado del punto a medir. Con estos campos se toman los productos necesarios para el tensor de la ecuación (16)

$$
\begin{aligned}
E \cdot E' &= \frac{2\lambda\left[x(x-h)+y^2\right]}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\left[(x-h)^2+y^2\right]} \\
E_x E'_x &= \frac{2\lambda x(x-h)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\left[(x-h)^2+y^2\right]}
\end{aligned}
$$

$$E_y E'_x = \frac{2\lambda xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\left[(x\quad h)^2+y^2\right]}$$

$$E_z E'_x \quad 0$$

$$E_x E'_y = \frac{2\lambda y(x\quad h)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\left[(x\quad h)^2+y^2\right]}$$

$$E_y E'_y \quad \frac{2\lambda y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\left[(x\quad h)^2+y^2\right]}$$

$$E_z E'_y = 0$$

$$E_x E'_z \quad \frac{2\lambda z(x\quad h)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\left[(x\quad h)^2+y^2\right]}$$

$$E_y E'_z = \frac{2\lambda yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\left[(x\quad h)^2+y^2\right]}$$

$$E_z E'_z = 0$$

Tomando estos productos se construye el tensor

$$T = \frac{q\lambda}{k}\begin{pmatrix} (x^2\quad y^2+xh) & y(2x\quad 3h) & 3z(x\quad h) \\ y(2x+h) & (y^2\quad x^2+xh) & 3yz \\ z(x\quad h) & -yz & (x^2+y^2\quad xh) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

donde $k \quad (x^2+y^2+z^2)^{3/2}\left[(x\quad h)^2+y^2\right]$ Ahora tomamos una gaussiana en forma de cubo de lado $2h$ con la carga q en el centro, como se muestra en la figura 3.

Como la fuerza es de la forma (15), vamos a evaluar la integral de superficie de la forma usual, tomando las integrales en cada cara y sumándolas, considerando el vector normal $\widehat{n}$ para cada cara.

Primero tomaremos la componente F_x, que es la suma de la primera fila del tensor electrostático multiplicada por el vector normal de cada cara.

$$F_x = \frac{1}{6\pi}\left[\int_{s'} T_1 \quad \widehat{n}_1 da + \int_{s'} T_1 \quad \widehat{n}_2 da + \int_{s'} T_1 \quad \widehat{n}_3 da + \int_{s'} T_1 \quad \widehat{n}_4 da + \int_{s'} T_1 \quad \widehat{n}_5 da + \int_{s'} T_1 \quad \widehat{n}_6 da\right],$$

donde T_1 es la fila 1 del tensor, y $\widehat{n}_i$ es el vector normal a la cara i–ésima del cubo. Para proceder con el cálculo se evalúa el tensor sobre la cara y se inte-

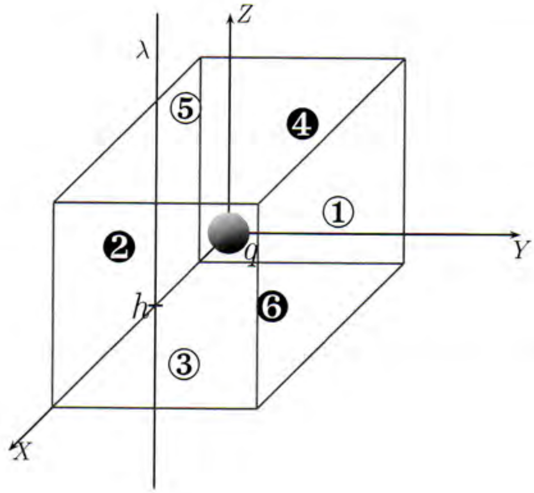

Figura 3. Gaussiana en forma de cubo de lado h alrededor de la carga q sobre la cual se calcularán las integrales.

gran las otras dos componentes.

En la cara 1 $\widehat{n}_1 = (0, 1, 0)$ y $y = h$, con esto

$$\int_{s'} T_1 \ \ \widehat{n}_1 da = \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \frac{q\lambda h(2x \ \ \ 3h)}{(x^2 + h^2 + z^2)^{3/2}\left[(x \ \ \ h)^2 + h^2\right]} dxdz$$

En estas integrales la h, que aparece como límite de las integrales se refiere a las dimensiones del cubo, mientras que la h que aparece en la función se refiere a la posición del alambre de carga.

En la cara 2. $\widehat{n}_2 = (0, \ \ \ 1, 0)$ y $y = \ \ \ h$, con esto

$$\int_{s'} T_1 \ \ \widehat{n}_2 da = \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \frac{q\lambda h(2x \ \ \ 3h)}{(x^2 + h^2 + z^2)^{3/2}\left[(x \ \ \ h)^2 + h^2\right]} dxdz$$

En la cara 3: $\widehat{n}_3 = (1, 0, 0)$ y $x = h$.

$$\int_{s'} T_1 \ \ \widehat{n}_3 da = \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \frac{-q\lambda}{(h^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dydz$$

En la cara 4: $\widehat{n}_4 = (\ \ \ 1, 0, 0)$ y $x = \ \ \ h$.

$$\int_{s'} T_1 \ \ \widehat{n}_4 da = \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \frac{-q\lambda(2h^2 \ \ \ y^2)}{(h^2 + y^2 + z^2)^{3/2}(4h^2 + y^2)} dydz$$

En la cara 5: $\widehat{n}_5 = (0, 0, 1)$ y $z = h$.

$$\int_{s'} T_1 \quad \widehat{n}_5 da = \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \frac{q\lambda h(3x \quad 3h)}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}\,[(x \quad h)^2 + y^2]} dxdy$$

En la cara 6: $\widehat{n}_6 = (0, 0, \quad 1)$ y $z = \quad h$.

$$\int_{s'} T_1 \quad \widehat{n}_6 da = \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \frac{q\lambda h(3x \quad 3h)}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}\,[(x \quad h)^2 + y^2]} dxdy$$

Tomando las integrales sobre cada cara y sumándolas tenemos que

$$\begin{aligned} F_x = \frac{q\lambda}{6\pi} \Bigg[& \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \frac{2h(2x \quad 3h)}{(x^2 + h^2 + z^2)^{3/2}\,[(x \quad h)^2 + h^2]} dxdz \\ & + \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \frac{6h(x \quad h)}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}\,[(x \quad h)^2 + y^2]} dxdy \\ & \quad \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \frac{2h^2 \quad y^2}{(h^2 + y^2 + z^2)^{3/2}(4h^2 + y^2)} dydz \\ & \quad \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \frac{1}{(h^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dydz \Bigg] \end{aligned}$$

Análogamente, para las componentes F_y y F_z, tomando las filas 2 y 3 del tensor, teniendo el cuidado de multiplicarlo por su respectivo vector normal. Con esto obtenemos

$$\begin{aligned} F_y = \frac{q\lambda}{6\pi} \Bigg[& \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \frac{6yh}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}\,[(x \quad h)^2 + y^2]} dxdy \\ & + \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \frac{yh}{(h^2 + y^2 + z^2)^{3/2}(4h^2 + y^2)} dydz \\ & + \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \frac{3h}{y(h^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dydz \Bigg], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_z = \frac{q\lambda}{6\pi} \Bigg[& \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \frac{2zh}{(x^2 + h^2 + z^2)^{3/2}\,[(x \quad h)^2 + h^2]} dxdz \\ & + \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \frac{2zh}{(h^2 + y^2 + z^2)^{3/2}(4h^2 + y^2)} dydz \Bigg] \end{aligned}$$

Al hacer el cálculo de las integrales para F_y y F_z éstas son cero para todo valor de h, lo cual nos quiere decir, que estas en general son cero, ya que h es el único parámetro externo que interviene en las integrales. Este resultado era de esperarse debido a la simetría del ejercicio.

Para el cálculo de F_x nos damos cuenta que éste depende del valor que le demos a la variable h, por lo tanto la fuerza es función de h. Al hacer el cálculo de las integrales la forma analítica es demasiado complicada, por ello recurrimos a hacer las integrales por métodos numéricos, de tal forma que al graficar el valor de la integral en función del parámetro h nos pudiéramos dar cuenta de su dependencia. Tomamos diferentes valores para el parámetro h, como se muestra en la tabla 1

Tabla 1. Valores de h y de F_x.

h	F_x
0.5	$-4{,}17$ qλ
1	$-1{,}8$ qλ
2	$-0{,}81$ qλ
3	$-0{,}52$ qλ
4	$-0{,}42$ qλ
5	$-0{,}35$ qλ

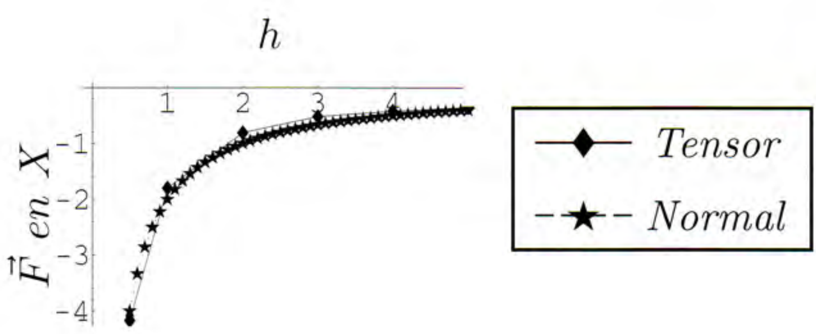

Figura 4. Gráfica de la fuerza en el eje x entre la carga y el alambre en función de la distancia h, por el método del tensor y el método usual.

En la gráfica (figura 4) se toman los valores hallados al realizar el cálculo de la fuerza por medio del tensor electrostático, la gráfica delgada es la función

$y = \quad 2/h$, luego podemos decir

$$
\begin{aligned}
F_x &\approx \frac{2q\lambda}{h} \\
F_y &= 0 \\
F_z & \quad 0
\end{aligned}
$$

Éste es el mismo resultado obtenido utilizando el método $F = qE$

4. Conclusiones

El tensor electrostático es útil a la hora de calcular la fuerza entre distribuciones de carga, aunque éstas sean desconocidas, lo único que debemos conocer son los campos que ellas producen.

El método del tensor electrostático para hallar la fuerza eléctrica es muy poderoso, ya que no tiene restricciones de ningún tipo para los campos que intervienen en los cálculos.

Referencias

[1] M. Bredov, V Rumiántsev, I. Toptiguin, *Electrodinámica Clásica*, Ed. MIR Moscu (1985)

[2] Melvin Schwartz, *Principles of Electrodynamics*, Ed. Dover (1972)

[3] D. J Griffiths and Reed College *Classical Electrodynamics*, Prentice Hall (1999)

[4] R. Plonsey and R. E. Collin *Principles and Applications of Electromagnetic Fields*, Tata de Mc Graw Hill (1978)