



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# Simulación de la Atenuación de Frecuencias en Ondas Sísmicas Primarias

Alejandro Duitama Leal

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias, Departamento de Geociencias  
Bogotá, D.C., Colombia  
2013

# Simulación de la Atenuación de Frecuencias en Ondas Sísmicas Primarias

Alejandro Duitama Leal

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:  
**Magister en Ciencias - Geofísica**

Director:  
Ph.D. Luis Montes Vides

Línea de Investigación:  
Sísmica

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias, Departamento de Geociencias  
Bogotá, D.C., Colombia  
2013

Investigar es ver lo que todo el mundo ha visto,  
y pensar lo que nadie más ha pensado

Albert Szent-Györgi (1893-1986)



# Agradecimientos

Es una gran oportunidad dar un reconocimiento a aquellas personas que me apoyaron con conocimiento, tiempo y comprensión. Por ello doy un agradecimiento especial a toda mi familia, en especial a mis padres Nelly Leal Jara y Luis Alberto Duitama Barajas, y a mi novia Leydy Johana Perez Alzate quienes me apoyaron todo éste tiempo.

Al Dr. Luis Montes por todo su conocimiento e invaluable apoyo y comprensión en el tiempo que duró la realización del proyecto.

A la Universidad Nacional de Colombia -sede Bogotá-, quien gracias a su programa de Becas de Facultad de Ciencias y Programa de becas para Estudiantes Sobresalientes de Posgrado me ayudaron parcialmente con los costos de la maestría.

A mis amigos Jose John Fredy Gonzalez Veloza y Jose Arturo Celis Gil, con quienes tuve la oportunidad de compartir elementos importantes de programación y que fueron de gran utilidad en el desarrollo y culminación de la tesis.



## Resumen

Actualmente el campo de la exploración de hidrocarburos ha requerido profundizar sus conocimientos en propagación de ondas acústicas para comprender -de una forma más completa- cómo es el comportamiento del campo de onda ya sea longitudinal o transversal, cuando éstos campos interactúan con un medio que muchas veces puede llegar a estar saturado de fluidos y gas, los cuales alteran el valor de la amplitud, el espectro de amplitudes y de fase de la señal. Para comprender éstas interacciones se realizó una simulación del campo de onda para un medio poroso saturado de dos fluidos inmiscibles, y así se determinó cómo la porosidad, saturación (fluido-gas) y viscosidad del medio poroso afectan el campo de onda. La simulación se basó en la *Teoría Biot* modificada para dos fluidos y utilizando el método de *diferencias finitas* se solucionó el sistema de nueve ecuaciones diferenciales vectoriales acopladas que describen la propagación. Con las simulaciones se determinó el comportamiento del factor de calidad Q para la amplitud de la ondícula en función de la porosidad y saturación y además se realizó un análisis desde el espectro de amplitud y de fase en función de la porosidad y saturación para un modelo de tres capas que simula ser un reservorio.

**Palabras claves:** Teoría de Biot, Ondas P y S, atenuación, Fronteras no reflectivas.

## Abstract

Nowadays, the hydrocarbons exploration field requires more in-depth understanding about how acoustic waves increase occurs. Based on the afore mentioned, it is necessary to completely comprehend how the behavior of the wave field is, both longitudinal and transversally, when these fields interact with a porous media. These media could be saturated through fluids and gases which change the amplitude value as well as phases spectra amplitude. To understand those interactions, we did a simulation by means of porous media saturated with two immiscible fluids; and then we determined how the porosity, viscosity and the saturation level (fluid-gas) of the porous media affects the wave field. The simulation was based on the *Biot theory* for two fluids using the method of *finite differences*. In this way, we solved the nine differential coupled equations system that describe the propagation. Along the simulations we determined the behavior of the Q factor quality for the wave amplitude that depends on the porosity and the saturation levels. Moreover we did an analysis by using the amplitude and phase spectra by means of the porosity and saturation for a three layers model that simulates a reservoir.

**Key words:** Biot theory, P and S waves, attenuation, non reflective boundary conditions



# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>v</b>
<b>Resumen</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Tablas</b>	<b>xiv</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xv</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Marco Teórico</b>	<b>5</b>
2.1. Esfuerzos . . . . .	5
2.2. Deformaciones . . . . .	7
2.3. Relaciones Dinámicas . . . . .	9
2.3.1. Energía cinética . . . . .	10
2.3.2. Función de Disipación . . . . .	10
2.3.3. Ecuaciones de Lagrange . . . . .	11
2.4. Ecuaciones Generales del Sistema P-S acoplado . . . . .	12
2.4.1. Modificación de las Ecuaciones Generales para Altas Frecuencias . . . . .	13
2.4.2. Ecuaciones Generales Desacopladas P para Altas Frecuencias . . . . .	14
2.5. Discretización de las Ecuaciones Generales para la onda P . . . . .	15
2.5.1. Discretización Primera Ecuación General . . . . .	15
2.5.2. Discretización Segunda Ecuación General . . . . .	16
2.5.3. Discretización Tercera Ecuación General . . . . .	16
2.6. Método PML (Perfectly Matched Layer) Para Fronteras No Reflectivas . . . . .	17
2.7. Factor de calidad Q . . . . .	19
<b>3 Simulación</b>	<b>21</b>
3.1. Ondícula . . . . .	21
3.2. Fronteras PML . . . . .	22
3.2.1. Simulación con región PML en 1D . . . . .	22

3.2.2. Simulación con región PML en 2D . . . . .	23
3.3. Simulación de una Onda Plana . . . . .	24
<b>4 Resultados y Discusión</b>	<b>31</b>
4.1. Análisis en función de la porosidad $\beta$ del medio . . . . .	31
4.2. Análisis en función de la Saturación $S$ del medio . . . . .	38
4.3. Análisis en función de la viscosidad $\gamma$ del fluido . . . . .	45
4.4. Simulación de modelo de tres capas . . . . .	53
4.4.1. Cambio de la señal registrada en función de $\beta$ y $S$ . . . . .	54
4.4.2. Cambio de la señal registrada en función de la viscosidad $\gamma$ . . . . .	62
<b>5 Conclusiones y recomendaciones</b>	<b>75</b>
5.1. Conclusiones . . . . .	75
5.2. Recomendaciones . . . . .	76
<b>A Anexo: Esfuerzos y Deformaciones</b>	<b>77</b>
<b>B Anexo: Relaciones Dinámicas</b>	<b>81</b>
B.1. Ecuaciones Generales campo de Onda P-S Acoplado . . . . .	81
B.2. Ecuaciones Generales Acopladas P-S para Altas Frecuencias . . . . .	85
B.3. Ecuaciones Generales del campo de onda Primario P desacoplado para Altas Frecuencias . . . . .	85
B.4. Ecuaciones Generales del campo de onda Secundario S desacoplado para Altas Frecuencias . . . . .	87
B.5. Aproximación y discretización por Diferencias Finitas . . . . .	89
B.6. Cálculo de valores de $A_x$ , $A_y$ y $A_z$ . . . . .	90
B.7. Cálculo de valores de $e_x$ , $e_y$ y $e_z$ . . . . .	91
B.8. Factor de Atenuación $Q_i$ Fronteras PML . . . . .	91
<b>Bibliografía</b>	<b>93</b>

# Lista de Figuras

Figura 1	Diagrama de esfuerzos tangenciales y normales que actúan sobre el elemento de Medio Poroso . . . . .	5
Figura 2	Diagrama de esfuerzos en los fluidos . . . . .	6
Figura 3	Región <i>PML</i> 3D . . . . .	18
Figura 4	Ondícula Ricker con su Espectro de Amplitud y Fase . . . . .	22
Figura 5	Incidencia de la Ondícula Ricker de 60 Hz en la frontera <i>PML</i> . . . .	23
Figura 6	Incidencia de la Ondícula Ricker de 60 Hz en la frontera <i>PML</i> . . . .	24
Figura 7	(a). Gráfica posición vs tiempo de la propagación de una onda Ricker de 60 Hz, para diferentes porosidades $\beta$ , con un valor de saturación $S = 99,9\%$ . (b) correlación entre las velocidades simuladas $V_S$ y las velocidades Teóricas $V_T$ . . . . .	25
Figura 8	Gráfica de Velocidad vs $\beta$ para una ondícula Ricker de $60Hz$ propagándose en un medio con saturación $S = 99,9\%$ . . . . .	26
Figura 9	Gráfica de Velocidad vs $S$ para porosidades según el modelo de Gassmann y el modelo de Biot para dos fluidos. (a) Saturaciones de 0 a 90%. (b) saturaciones de 90% a 100% . . . . .	28
Figura 10	Atenuación de la Amplitud y Espectro de Amplitud para $\beta = 15\%$ .	31
Figura 11	Espectro de Fase $\phi$ para un medio con $\beta = 15\%$ y $S = 99,9\%$ . . . .	32
Figura 12	$\frac{\partial \phi}{\partial f}$ en función de la profundidad para diferentes valores de $\beta$ con $S = 99,9\%$ . . . . .	33
Figura 13	Variación del espectro de amplitud en función de la porosidad para diferentes valores de frecuencia dentro del ancho de banda de la señal con $S = 99,9\%$ . . . . .	34
Figura 14	Variación de la Amplitud máxima de la señal para diferentes valores de $\beta$ . . . . .	35
Figura 15	Factor de Atenuación de la Amplitud para diferentes valores de $\beta$ , para una onda de frecuencia principal de $60Hz$ . . . . .	35
Figura 16	Variación de la Amplitud máxima $F(A_{max})$ del espectro de amplitud asociada a la frecuencia principal para diferentes valores de $\beta$ . . . .	36
Figura 17	Variación del Espectro de amplitud máximo en función de la frecuencia principal para diferentes valores de $\beta$ . . . . .	37

Figura 18	Variación temporal de la Amplitud para diferentes valores de $\beta\%$ en función de la saturación $S$ . . . . .	38
Figura 19	Variación del factor $Q$ en función de $\beta$ y $S$ . . . . .	39
Figura 20	Espectro de amplitud en función de la frecuencia. El valor de $\beta = 0,25$	42
Figura 21	$\frac{\partial\phi}{\partial f}$ en función de la profundidad para diferentes valores de saturación $S$ y porosidad $\beta$ . . . . .	44
Figura 22	$\frac{\partial\phi}{\partial f}$ en función de la saturación $S$ a diferentes profundidades y porosidades $\beta$ . . . . .	45
Figura 23	Atenuación con $\beta = 10\%$ . . . . .	47
Figura 24	Amplitud máxima en función del tiempo para diferentes valores de viscosidad $\gamma$ . . . . .	48
Figura 25	Factor de calidad $Q$ en función de la viscosidad dinámica $\gamma$ . . . . .	48
Figura 26	Espectro de Fase en función de la frecuencia para $\gamma = 0,001Pa \cdot s$ . .	50
Figura 27	$\frac{\partial\phi}{\partial t}$ en función de la profundidad . . . . .	50
Figura 28	Espectro de Amplitud máxima normalizada $F(A_{max})_{Normalizado}$ en función de frecuencia predominante $f$ , para diferentes valores de viscosidad dinámica $\gamma$ . . . . .	51
Figura 29	Variación del espectro de amplitud en función de la viscosidad dinámica $\gamma$ , para diferentes valores de frecuencias contenidas en la señal . .	52
Figura 30	Modelo de tres medios . . . . .	53
Figura 31	Amplitud de la señal registrada en superficie para diferentes valores de $\beta$ y $S$ . . . . .	55
Figura 32	Espectro de amplitud para el primer arribo registrado en superficie para diferentes valores de $\beta$ y $S$ . . . . .	57
Figura 33	Espectro de amplitud para el segundo arribo registrado en superficie para diferentes valores de $\beta$ y $S$ . . . . .	58
Figura 34	Amplitud del espectro de amplitud normalizado del segundo arribo en función de la saturación . . . . .	59
Figura 35	Espectro de fase para el primer arribo registrado en superficie para diferentes valores de $S$ con una porosidad $\beta = 10\%$ . . . . .	60
Figura 36	Espectro de fase para el primer arribo registrado en superficie para diferentes valores de $S$ con una porosidad $\beta = 20\%$ . . . . .	60
Figura 37	Espectro de fase para el primer arribo registrado en superficie para diferentes valores de $S$ con una porosidad $\beta = 30\%$ . . . . .	60
Figura 38	Espectro de fase para el segundo arribo registrado en superficie para diferentes valores de $\beta$ y $S$ . $S = 10\%$ negro, $S = 30\%$ rojo, $S = 50\%$ verde, $S = 70\%$ azul y $S = 90\%$ fucsia . . . . .	61
Figura 39	$\frac{\partial\phi}{\partial f}$ en función de la saturación para diferentes porosidades . . . . .	61
Figura 40	Amplitud de la señal registrada en superficie para diferentes valores de $\gamma$ . El valor de $\beta = 5\%$ . . . . .	62

Figura 41	Amplitud de la señal registrada en superficie para diferentes valores de $\gamma$ . El valor de $\beta = 15\%$ . . . . .	63
Figura 42	Amplitud de la señal registrada en superficie para diferentes valores de $\gamma$ . El valor de $\beta = 25\%$ . . . . .	64
Figura 43	Espectro de Amplitud del primer arribo registrado en superficie para diferentes valores de $\gamma$ , $S$ y $\beta$ . . . . .	65
Figura 44	Espectro de Amplitud del segundo arribo registrado en superficie para diferentes valores de $\gamma$ , $S$ y $\beta$ . . . . .	66
Figura 45	Espectro de Amplitud para el segundo arribo en función de la viscosidad $\gamma$ , para diferentes valores de frecuencia, porosidad y saturación .	67
Figura 46	Espectro de Fase del primer arribo registrado en superficie para diferentes valores de $\gamma$ . . . . .	68
Figura 47	Espectro de Fase del segundo arribo registrado en superficie para diferentes valores de $\gamma$ . . . . .	69
Figura 48	$\frac{\partial \phi}{\partial f}$ en función de la viscosidad dinámica para el primer arribo registrado en superficie para diferentes valores de $\beta$ . . . . .	70
Figura 49	$\frac{\partial \phi}{\partial f}$ en función de la viscosidad dinámica para el segundo arribo registrado en superficie para diferentes valores de $\beta$ . . . . .	70
Figura 50	Resultados experimentales iniciales obtenidos por (V. Korneev & Silin, 2004). Análisis para medio poroso donde la mitad se encuentra seca y la otra mitad saturada . . . . .	71
Figura 51	Resultados experimentales finales obtenidos por (V. Korneev & Silin, 2004). Analisis del medio poroso seco y completamente saturado . . .	72
Figura 52	Señal registrada y procesada con filtro pasa alto (a) y pasa bajo (b) .	73
Figura 53	Deformación de un elemento del medio . . . . .	77

# Lista de Tablas

Tabla 1	Parámetros elastomecánicos del medio . . . . .	21
Tabla 2	Parámetros elastomecánicos del medio 1 . . . . .	53
Tabla 3	Parámetros elastomecánicos del medio 2 . . . . .	54

# Lista de Símbolos

## Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
$w_{ij}$	Matriz de Rotación	<i>Adim.</i>	ecuación (79)
$e_{ij}$	Matriz de Deformación	<i>Adim.</i>	ecuación (80)
$\vec{u}$	Desplazamiento de la Estructura	<i>m</i>	ecuación (81)
$\vec{V}$	Desplazamiento del Gas	<i>m</i>	ecuación (82)
$\vec{U}$	Desplazamiento del Fluido	<i>m</i>	ecuación (83)
$e$	Divergencia del vector Desplazamiento $\vec{u}$ de la Estructura	<i>Adim.</i>	ecuación (81)
$E_{pot}$	Energía Potencial Elástica por Unidad de Volumen	$\frac{J}{m^3}$	ecuación (10)
$Q_1$	Acoplamiento Estructura-Fluido 1	$\frac{N}{m^2}$	ecuación (86)
$Q_2$	Acoplamiento Estructura-Fluido 2	$\frac{N}{m^2}$	ecuación (87)
$R_1$	Presión de penetración Fluido 1	$\frac{N}{m^2}$	ecuación (92)
$R_2$	Presión de penetración Fluido 2	$\frac{N}{m^2}$	ecuación (93)
$E_{cin}$	Energía Cinética por Unidad de Volumen	$\frac{J}{m^3}$	ecuación (20)
$D$	Función de Disipación	$\frac{Pa}{s}$	ecuación (21)
$b$	Coefficiente de <i>Darcy</i>	$\frac{Pa \cdot s}{m^2}$	ecuación (23)
$L$	Función de Lagrange	$\frac{J}{m^3}$	ecuación (??)
$A_x$	Campo de Onda <i>PML</i>	<i>m</i>	ecuación (59)
$u_x$	Campo de Onda auxiliar <i>PML</i>	<i>m.</i>	ecuación (60)
$v$	Velocidad de la Onda	$\frac{m}{s}$	ecuación (59)
$q_0$	Amplitud de la función de Atenuación	$\frac{1}{m}$	ecuación (177)

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
$Q$	Factor de calidad	<i>Adim.</i>	ecuación (67)

## Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
$\sigma_{ij}$	Matriz de esfuerzos	$\frac{N}{m^2}$	ecuación (1)
$\sigma_1$	Esfuerzo del fluido 1 (Fluido)	$\frac{N}{m^2}$	ecuación (2)
$\sigma_2$	Esfuerzo del fluido 2 (Gas)	$\frac{N}{m^2}$	ecuación (3)
$\beta$	Porosidad de la estructura	<i>Adim.</i>	ecuación (4)
$S$	Saturación del Fluido 1	<i>Adim.</i>	ecuación (4)
$\varepsilon_1$	Divergencia de $\vec{U}$	<i>Adim.</i>	ecuación (82)
$\varepsilon_2$	Divergencia de $\vec{V}$	<i>Adim.</i>	ecuación (83)
$\mu$	Módulo de Cizalla de la estructura	$\frac{N}{m^2}$	ecuación (86)
$\lambda$	Parametro de <i>Lamé</i>	$\frac{N}{m^2}$	ecuación (86)
$\rho_{11}$	Densidad del medio Poroso	$\frac{Kg}{m^3}$	ecuación (20)
$\rho_{22}$	Densidad del fluido 1	$\frac{Kg}{m^3}$	ecuación (20)
$\rho_{33}$	Densidad del fluido 3	$\frac{Kg}{m^3}$	ecuación (20)
$\rho_{12}$	Densidad aparente Estructura-fluido 1	$\frac{Kg}{m^3}$	ecuación (20)
$\rho_{13}$	Densidad aparente Estructura-fluido 2	$\frac{Kg}{m^3}$	ecuación (20)
$\kappa$	Permeabilidad	$m^2$	ecuación (23)
$\gamma$	Viscosidad cinemática	$Pa \cdot s$	ecuación (23)
$\vec{\theta}$	Rotacional de $\vec{u}$	<i>Adim.</i>	ecuación (137)
$\vec{\phi}$	Rotacional de $\vec{U}$	<i>Adim.</i>	ecuación (138)
$\vec{\varphi}$	Rotacional de $\vec{V}$	<i>Adim.</i>	ecuación (139)
$\delta$	Grosor de la frontera <i>PML</i>	$m$	ecuación (177)
$\gamma_A$	Factor de Atenuación	$\frac{1}{m}$	ecuación (68)
$\omega$	Frecuencia angular	$\frac{rad}{s}$	ecuación (71)

## Subíndices

Subíndice	Término
$S$	Onda $S$
$P$	Onda $P$

## Abreviaturas

Abreviatura	Término
$PML$	Perfectly Matched Layer

# 1. Introducción

Desde hace algunas décadas el estudio de la propagación de ondas acústicas en medios porosos ha tomado un papel importante, no sólo desde lo académico sino en especial desde la industria. Todo esto ocurre en un mundo que constantemente se encuentra buscando y desarrollando nuevas tecnologías que aprovechen las diversas formas de energía que provengan ya sea de elementos fósiles, químicos, eléctricos, mecánicos, entre otros. Uno de los campos que más se ha desarrollado en esta búsqueda de elementos que provean energía es la exploración Geofísica, más particularmente la sísmica, precisamente porque es un método en el cual analizando las propiedades de los campos de onda medidos en superficie es posible conocer estructuras que por su ubicación a profundidad serían muy difíciles de identificar y estudiar. De allí surge un sinnúmero de estudios dentro de la sísmica, los cuales buscan principalmente conocer valores elastomecánicos de las rocas y realizar imágenes del subsuelo con el fin de encontrar estructuras que puedan estar asociadas a reservorios de hidrocarburos.

Uno de éstos campos dentro de la sísmica tiene que ver con la atenuación de frecuencias en medios porosos que se encuentran completa o parcialmente saturados (Aquirialt & Chambon, 1985), (Rubino, 2008), (Ying, 2008) y (Whei Cheng Lo & Ernest, 2006). Para el estudio de éstos medios porosos se hace necesario recurrir a modelos que tengan en cuenta la mayor cantidad de variables y fenómenos que ocurren en éste tipo de sistemas (Guerrero T. I. & Calle, 2009) (Hong & Kennett, 2002). Varios estudios se han realizado desde hace algunas décadas y uno de los primeros de carácter muy teórico fue el elaborado por Biot. Éste surgió como una alternativa a la Teoría de Suspensiones Diluidas y la Teoría de Sólidos Porosos, las cuales describían el comportamiento de las propiedades de la onda cuando ésta se propagaba en un medio con una determinada porosidad. Ésta teoría surgió en 1941 y se le denominó La Teoría de Consolidación del suelo, y fue propuesta por Biot. Ésta Teoría Posteriormente fué ampliada en el año de 1955 para poder estudiar medios porosos saturados de fluido, lo cual dió origen a lo que se conoce con el nombre de la Teoría de Biot (Camarasa, 2002). Ésta teoría fué ampliamente discutida y comprobada, especialmente por Stoll y Bryan (Stoll & Bryan, 1970), quienes encontraron que su aplicación se puede extender a sedimentos marinos. En 1980 Plona y Berryman (Plona, 1980) (Berryman, 1980) corroboraron algunas predicciones teóricas deducidas por Biot en 1941 (M.A.Biot, 1941). En el año de 1985, Oguschwitz (Oguschwitz, 1941a) y (Oguschwitz, 1941b) realizó estudios sobre la validez de la teoría de Biot en rocas sedimentarias saturadas y en suspensiones.

La teoría de Biot expresa una relación entre esfuerzos y deformaciones (Biot, 1962a), con los cuales considera el movimiento del medio poroso y del fluido. A partir de allí surgen algunas consideraciones como la fricción debida al movimiento relativo del medio poroso y del fluido (Biot, 1962b), la energía cinética por unidad de volumen del sistema, y la presión en el poro asumiendo el régimen de movimiento del fluido. Posteriormente Biot realiza un estudio para encontrar los coeficientes elásticos utilizando la *Teoría de Consolidación* (Biot & Willis, 1957).

Biot en 1957 presentó dos trabajos en el que modifica las ecuaciones que rigen la propagación de ondas en medios porosos para altas y bajas frecuencias (Biot, 1956a, b). En este estudio el introduce un término de atenuación el cual depende de características tanto de los fluidos como del medio y la onda, los cuales definen el grado de atenuación de la amplitud de la señal.

En el estudio realizado por Camarasa (Camarasa, 2002) se parte de la misma teoría de Biot pero considerando dos tipos de fluidos que son agua y aire. Considerando estos fluidos construye las relaciones de esfuerzo y deformación, con las cuales obtiene un conjunto de tres ecuaciones vectoriales diferenciales -para un total de nueve ecuaciones diferenciales acopladas- que permiten modelar los desplazamientos que experimentan los dos fluidos y el medio poroso cuando la onda se propaga. En el estudio realizado (Camarasa, 2002) se establecen un conjunto de suposiciones en la onda y el medio para simplificar el sistema de ecuaciones diferenciales y así se encuentra la dependencia entre las velocidades de la onda en función de parámetros como la porosidad y la saturación del medio, entre otros.

Para la simulación se tomaron éstas nueve ecuaciones diferenciales acopladas y se desacoplaron los campos de onda PS en campo P, el cual se desarrolló en el campo de las divergencias y el campo S en el campo de los rotacionales.

Conforme a lo anterior se desarrollo un programa que simula la propagación de ondas compresionales basado en la teoría de Biot para dos fluidos, y así poder realizar un análisis de la amplitud de la señal, del espectro de Fase y del espectro de amplitud. Para ello se desarrollan las 9 ecuaciones diferenciales vectoriales y se realiza una discretización hasta obtener una aproximación a la solución utilizando el metodo de diferencias finitas. El modelo teórico considera tamaño de grano, permeabilidad, saturación, porosidad, viscosidad, densidades de cada fluido y del medio, modulos de bulk para cada medio, modulos de cizalla, entre otros parámetros.

Debido a que una onda sísmica se propaga en una región donde las fronteras son abiertas, es decir que no hay una frontera límite física real que impida la propagación de las ondas en el subsuelo, se hizo necesario modelar el sistema utilizando fronteras que recrearan

el comportamiento de fronteras de espacio abierto o infinito, ya que las fronteras habituales considera la frontera fija o la frontera libre y ésto ocasiona una reflexión de la onda hacia la región de interés. Para ello se utilizó el método *PML* (Perfectly Matched Layer) (Berenger, 1994, 1996), con el fin de simular una frontera abierta y evitar reflexiones que afecten el registro de los datos en la superficie.

Se simuló la propagación de una onda plana en un medio poroso al cual se le varía el valor de la porosidad y saturación, con el fin de determinar cómo éstos parámetros afectan la amplitud de la señal, su espectro de amplitud y de fase. Con estos datos se calcula el factor de calidad en función de la porosidad y saturación.

Posteriormente se consideró un modelo de tres capas que simula ser un reservorio, en el cual se analiza la variación de la respuesta en superficie para una onda plana, cuando al medio poroso que contiene los dos fluidos se varía el valor de porosidad y saturación.

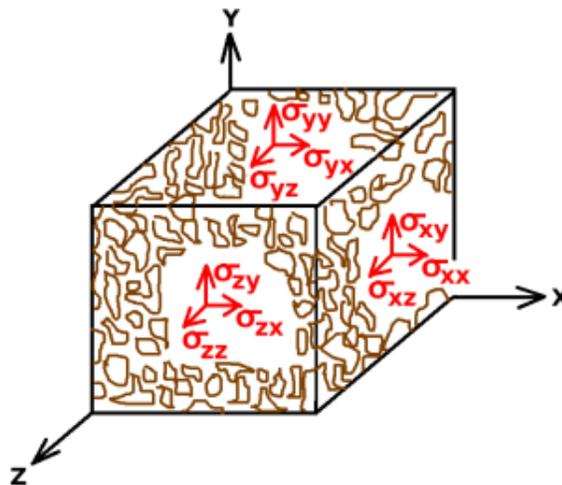


## 2. Marco Teórico

Para abordar los problemas de propagación de ondas acústicas en medios porosos, se hace necesario recurrir a la *Teoría de Suspensiones Diluidas* la cual permite describir la propagación de ondas acústicas en medios que poseen una porosidad relativamente alta. Cuando ésta porosidad es pequeña la Teoría de Suspensiones no describe correctamente la propagación de las ondas acústicas, lo que obligaba a utilizar lo que se conoce con el nombre de Teoría de Sólidos Porosos. Debido a lo anterior en el año de 1955 surgió una teoría propuesta por Biot y se llamó la Teoría de Consolidación del Suelo, con la cual se puede trabajar éste tipo de sistemas. Ésta teoría fué modificada en 1955 para tener en cuenta los diferentes niveles de saturación de fluido en el medio poroso (Camarasa, 2002), y es apartir de allí que surge La Teoría de Biot que actualmente es la base de investigaciones relacionas con esfuerzos y deformaciones en medios porosos saturados.

### 2.1. Esfuerzos

La teoría de Biot se basa principalmente en las relaciones de tensión-deformación (Biot, 1956b, 1962a) para un elemento del medio poroso. Figura 1.



**Figura 1.** Esfuerzos normales y tangenciales en el Elemento Poroso.

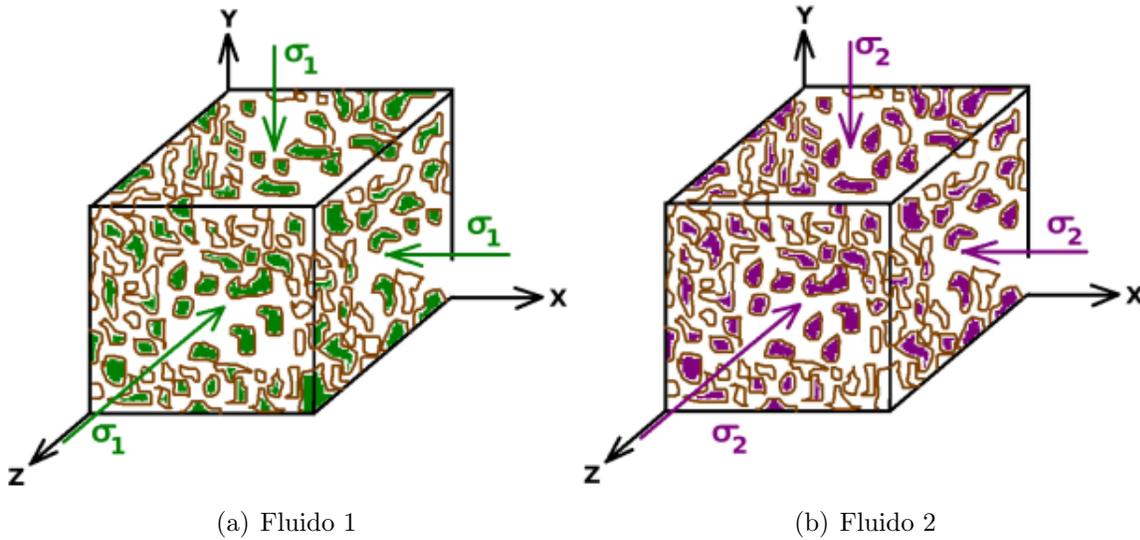
El primer subíndice de los esfuerzos  $\sigma_{i,j}$  corresponde a la cara sobre el elemento poroso, y

toma los valores de  $i = \{x, y, z\}$ . El segundo subíndice corresponde a la dirección sobre la cual actúa el esfuerzo, y toma los valores de  $j = \{x, y, z\}$ .

Según lo anterior, los esfuerzos que actúan sobre cada una de las caras del elemento poroso, vendrían dados por el siguiente tensor. Ecuación 1.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Debido a que el medio poroso se encuentra saturado de fluidos, los esfuerzos que actúan sobre cada uno de los fluidos se muestra a continuación. Figura 2



**Figura 2.** Esfuerzos normales en los Fluidos.

Como se observa en cada uno de los dos fluidos, únicamente se tienen en cuenta los esfuerzos normales, es decir aquellos que generan compresión en el fluido. Ésto debido a que los esfuerzos tangenciales no existen en los fluidos, ya sean en estado líquido o gas.

El tensor de esfuerzo para el fluido 1, vendría dado por la siguiente ecuación. Ecuación 2.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

y para el fluido 2, el tensor de esfuerzos está dado por la ecuación 3.

$$\begin{bmatrix} \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Los valores de  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son proporcionales a la presión del fluido  $p$ . Según lo anterior, debido a que se están considerando dos fluidos en el medio poroso, el valor de los esfuerzos normales en cada fluido vendría dado por las ecuaciones 4 y 5, que corresponden al fluido 1 y 2, respectivamente.

$$\sigma_1 = -\beta S p, \quad (4)$$

$$\sigma_2 = -\beta(1 - S)p. \quad (5)$$

El valor de  $\beta$  corresponde a la porosidad total. El valor de  $S$  corresponde a la saturación de fluido 1 presente en los poros, y el valor de  $1 - S$  corresponde a la cantidad de saturación del fluido 2 presente en los poros.

## 2.2. Deformaciones

Cuando una onda se propaga se produce una deformación en cada uno de los elementos que conforman el medio y según sea la dirección de ésta deformación se pueden establecer dos tipos de ondas básicas: Las compresionales y las transversales. Las ondas compresionales también denominadas ondas Primarias P, se caracterizan por que la perturbación del medio ocurre en la misma dirección de la propagación del medio. Las ondas transversales se les denomina ondas secundarias S y la dirección de perturbación del medio ocurre de forma transversal a la dirección de propagación de la onda. Estas deformaciones ocurren debido a que los esfuerzos que actúan sobre un elemento de volumen que conforma el medio, pueden actuar en direcciones normales o tangenciales a la superficie del elemento. Cuando los esfuerzos son normales, se puede producir un cambio en el volumen lo cual representaría la deformación del medio cuando la onda se propaga. Si el esfuerzo es tangencial se produce una deformación del elemento de volumen. Al analizar un elemento de volumen  $dV$  (Anexo A), se tiene el siguiente tensor de deformación para el elemento de volumen.

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (6)$$

El subíndice  $i = \{x, y, z\}$  y el subíndice  $j = \{x, y, z\}$  representan cada una de las componentes  $i, j$  del tensor de deformación. Según lo anterior si se toma la traza de éste tensor se obtiene:

$$e = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (7)$$

que representa la dilatación volumétrica del elemento  $dV$  cuando hay esfuerzos normales aplicados al elemento de volumen. Si se realiza el mismo procedimiento analizando los fluidos 1 y 2, se llega a las respectivas dilataciones de los fluidos.

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}, \quad (8)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}. \quad (9)$$

Los fluidos inmiscibles 1 y 2 (líquido y gas) que saturan el medio poroso no se encuentran en estado sólido en comparación con la matriz de la roca, además que se van a considerar inmiscibles. Para establecer las relaciones entre los esfuerzos y deformaciones, la estructura es tratada como un sistema conservativo que está en equilibrio, es decir en un punto de mínima energía potencial y cualquier perturbación será tratada como una alteración a ese estado de equilibrio (Camarasa, 2002).

Debido a que las tensiones producidas son relativamente pequeñas, las deformaciones que aparecen serán proporcionales según la ley de Hooke. Por ello se pueden escribir de forma lineal con las componentes de la deformación. Por lo tanto la energía potencial por unidad de volumen  $E_{pot}$  (Biot, 1956b) de la estructura viene dada por:

$$2E_{pot} = (\sigma_{xx}e_{xx} + \sigma_{yy}e_{yy} + \sigma_{zz}e_{zz} + \sigma_{xy}e_{xy} + \sigma_{xz}e_{xz} + \sigma_{yz}e_{yz} + \sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2). \quad (10)$$

Los primeros tres términos de la ecuación 10 representan la energía que se produce por la dilatación en cada una de las tres direcciones producidas por los esfuerzos normales a cada una de las superficies (o caras) del elemento de volumen  $dV$ . Los siguientes tres corresponden a la energía que se produce cuando el elemento de volumen se deforma debido a los esfuerzos tangenciales. Los últimos dos términos hacen referencia a la energía producida por las compresiones que experimentan los fluidos que saturan el poro.

Las relaciones de esfuerzo deformación, pueden ser expresadas como:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial E_{pot}}{\partial e_{xx}}, & \sigma_{yy} &= \frac{\partial E_{pot}}{\partial e_{yy}}, & \sigma_{zz} &= \frac{\partial E_{pot}}{\partial e_{zz}}, \\ \sigma_{xy} &= \frac{\partial E_{pot}}{\partial e_{xy}}, & \sigma_{xz} &= \frac{\partial E_{pot}}{\partial e_{xz}}, & \sigma_{yz} &= \frac{\partial E_{pot}}{\partial e_{yz}}, \\ \sigma_1 &= \frac{\partial E_{pot}}{\partial \varepsilon_1}, & \sigma_2 &= \frac{\partial E_{pot}}{\partial \varepsilon_2} \end{aligned} \quad (11)$$

Por lo tanto se formaría un sistema matricial de orden  $8 \times 8$  simétrico de 35 coeficientes constantes diferentes. Se puede simplificar asumiendo que el sistema sólido-fluido es estadísticamente isotrópico (Biot, 1956b). Bajo estas condiciones los esfuerzos y deformaciones principales coinciden y el sistema se simplifica al siguiente conjunto de ecuaciones (Biot, 1962b).

$$\sigma_{xx} = 2\mu e_{xx} + \lambda e + Q_1\varepsilon_1 + Q_2\varepsilon_2, \quad (12)$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu e_{yy} + \lambda e + Q_1 \varepsilon_1 + Q_2 \varepsilon_2, \quad (13)$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu e_{zz} + \lambda e + Q_1 \varepsilon_1 + Q_2 \varepsilon_2, \quad (14)$$

$$\sigma_{xy} = \mu e_{xy}, \quad (15)$$

$$\sigma_{xz} = \mu e_{xz}, \quad (16)$$

$$\sigma_{yz} = \mu e_{yz}, \quad (17)$$

$$\sigma_1 = Q_1 e + R_1 \varepsilon_1, \quad (18)$$

$$\sigma_2 = Q_2 e + R_2 \varepsilon_2. \quad (19)$$

Las ecuaciones 12, 13 y 14 representan las relaciones entre los esfuerzos normales con las dilataciones que sufre el volumen  $dV$  en cada una de las tres direcciones. Los términos  $Q_1$  y  $Q_2$  son constantes físicas de la estructura y están asociadas al nivel de acoplamiento entre el cambio de volumen en el sólido y cada uno de los fluidos. y  $\lambda$  corresponden a los parámetros elastomecánicos de Lamé.

Las ecuaciones 15, 16 y 17 hace referencia a los esfuerzos tangenciales. sobre cada una de las tres caras del elemento  $dV$ .  $\mu$  es el *Módulo de cizalla* de la estructura.

Las ecuaciones 18 y 19 relacionan los esfuerzos normales que comprimen el fluido 1 y 2 dentro del poro respectivamente. Los valores de  $R_1$  y  $R_2$  son dos constantes física de la estructura que representan la presión necesaria para que penetre en el agregado cierta cantidad de fluido manteniendo el volumen constante.

## 2.3. Relaciones Dinámicas

Las ecuaciones de movimiento del medio poroso y de los fluidos se obtienen construyendo un Lagrangiano que tenga en cuenta la energía cinética del sistema y la función de Disipación de Rayleigh -la cual no es un potencial- y que está asociado a la fuerza de rozamiento debido al movimiento relativo de los fluidos. Además hay que tener en cuenta las fuerzas que no se pueden expresar como un potencial ordinario y por lo tanto hay que incluirlas en las ecuaciones de Lagrange. A continuación se plantea la función energía cinética, la función Disipación y las ecuaciones de Lagrange para poder hallar las ecuaciones de movimiento del sistema que básicamente corresponden a la segunda ley de Newton de un elemento de volumen del sistema poroso saturado.

### 2.3.1. Energía cinética

Para construir la función energía cinética del sistema independiente de si hay o no fricción producida por el movimiento relativo del medio sólido y los fluidos, se debe tener en cuenta el movimiento de los tres sistemas como si se estuvieran desacoplados (Biot, 1956b), junto con la variación de la energía cinética de los sistemas acoplados, es decir, que la función energía cinética toma los sistemas aislados, y adiciona dos términos que son básicamente el acoplamiento entre el sólido-fluido 1 y sólido-fluido2. La función energía cinética esta determinada por:

$$\begin{aligned}
2E_{cin} = & \rho_{11} \left( \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 \right) + \rho_{22} \left( \left( \frac{\partial U_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial U_y}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial U_z}{\partial t} \right)^2 \right) + \\
& + \rho_{33} \left( \left( \frac{\partial V_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_y}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_z}{\partial t} \right)^2 \right) + 2\rho_{12} \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \frac{\partial U_x}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial t} \frac{\partial U_y}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial t} \frac{\partial U_z}{\partial t} \right) + \\
& + 2\rho_{13} \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial t} \frac{\partial V_y}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial t} \frac{\partial V_z}{\partial t} \right). \quad (20)
\end{aligned}$$

Esta ecuación es válida asumiendo que el movimiento de los fluidos se encuentra en régimen laminar, es decir para bajos números de Reynolds. El término  $\rho_{11}$ ,  $\rho_{22}$  y  $\rho_{33}$ , corresponden a las densidades del medio poroso, del fluido 1 y del fluido 2, respectivamente.  $\rho_{12}$  y  $\rho_{13}$  son densidades aparentes, que representan el acoplamiento entre el sólido-fluido 1 y sólido-fluido2. El primer término de la ecuación 20 corresponde a la energía cinética por unidad de volumen de la estructura porosa. El segundo y tercer término corresponde a la energía cinética por unidad de volumen del fluido 1 y 2 respectivamente. Los dos últimos términos hacen referencia a la energía cinética por unidad de volumen aparentes que surgen del acople entre la estructura y cada uno de los dos fluidos.

### 2.3.2. Función de Disipación

Debido a que se tomará en cuenta la fricción que aparece debido al movimiento relativo entre el sólido y cada uno de los fluidos, se hace necesario establecer una función llamada Disipación (Biot, 1956b), que tenga en cuenta éstos efectos. Para ello desde la mecánica clásica, se han trabajado con funciones de rozamiento las cuales dependen básicamente de la velocidad. Como cada uno de los agregados a la estructura (sólido, fluido 1 y fluido 2) se mueve, se puede establecer que la velocidad relativa entre sólido-fluido 1 está dada por  $v_{rel1} = (\dot{u}_i - \dot{U}_i)$  con  $i = \{x, y, z\}$ , y la velocidad relativa entre sólido-fluido 2 es  $v_{rel2} = (\dot{u}_i - \dot{V}_i)$  con  $i = \{x, y, z\}$ . Según lo anterior, la función de Disipación es:

$$D = \frac{b}{2} \left[ \sum_{i=x,y,z} (\dot{u}_i - \dot{U}_i)^2 + \sum_{i=x,y,z} (\dot{u}_i - \dot{V}_i)^2 \right], \quad (21)$$

donde al resolver la sumatoria llegamos a :

$$\begin{aligned}
D = & \frac{b}{2}(\dot{u}_x - \dot{U}_x)^2 + \frac{b}{2}(\dot{u}_y - \dot{U}_y)^2 + \frac{b}{2}(\dot{u}_z - \dot{U}_z)^2 + \\
& + \frac{b}{2}(\dot{u}_x - \dot{V}_x)^2 + \frac{b}{2}(\dot{u}_y - \dot{V}_y)^2 + \frac{b}{2}(\dot{u}_z - \dot{V}_z)^2. \quad (22)
\end{aligned}$$

El coeficiente  $b$  se conoce con el nombre de coeficiente de Darcy del fluido que esta en el agregado. El coeficiente de Darcy representa la relación entre la fuerza total y la velocidad del fluido (Camarasa, 2002). Éste coeficiente viene dado por la ecuación:

$$b = \frac{\gamma\beta^2}{\kappa}, \quad (23)$$

donde  $\gamma$  representa la viscosidad dinámica del fluido,  $\kappa$  la permeabilidad física del medio poroso y  $\beta$  es la porosidad del medio.

Como el agregado esta compuesto por dos fluidos, se hace necesario establecer el coeficiente de Darcy para todo el sistema. Para ello se plantea el coeficiente de Darcy para el fluido 1 y el fluido 2.

$$b_1 = \frac{\gamma_1(\beta S)^2}{\kappa}, \quad (24)$$

$$b_2 = \frac{\gamma_2(\beta(1-S))^2}{\kappa}. \quad (25)$$

El subíndice 1 hace referencia al fluido 1, y el 2 al fluido 2. Por lo tanto el comportamiento del rozamiento total de los dos fluidos, se puede expresar como una combinación de la contribución de ambos fluidos presentes:

$$b = b_1 + b_2 = \frac{\gamma_1(\beta S)^2}{\kappa} + \frac{\gamma_2(\beta(1-S))^2}{\kappa}. \quad (26)$$

### 2.3.3. Ecuaciones de Lagrange

Para obtener las ecuaciones dinámicas del medio poroso saturado, se hace necesario establecer inicialmente el lagrangiano del sistema. Para ello se debe tener en cuenta que el lagrangiano está dado (Campos & Isaza, 2002):

$$L(r, \dot{r}, t) := T(\dot{r}) - V(r, t), \quad (27)$$

donde  $T(\dot{r})$  es la energía cinética del sistema y  $V(r, t)$  es la energía asociada a fuerzas que se pueden escribir como un potencial ordinario.

El Lagrangiano lleva toda la información del sistema, aunque cuando se tienen fuerzas que no se pueden escribir como un potencial ordinario, se hace necesario introducir éstas fuerzas dentro de las ecuaciones de Lagrange, ya que afectan directamente el comportamiento del sistema. Para ello, se recurre a las ecuaciones de lagrange generalizadas, las cuales vienen dadas por la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} - Q_k - \sum_{j=1}^J \lambda_j \frac{\partial B_j(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} = 0, \quad (28)$$

donde  $k = \{x, y, z\}$ , y  $B_j(q, \dot{q}, t)$  hace referencia a la fuerzas  $j$  –ésima con  $j = 1, 2, \dots, J$  que se pueden escribir como un potencial generalizado y no como un potencial ordinario, es decir que para nuestro caso es la función de Disipación, que es conocida con el nombre de función de Rayleigh. Es válido aclarar que un potencial ordinario es aquel que al calcular su gradiente se obtiene el campo vectorial de la fuerza, mientras que en el potencial generalizado no se calcula el gradiente, sino que hay que derivar con respecto a la velocidad para obtener el campo vectorial de la fuerza. Es preciso mencionar que el potencial generalizado no es un potencial ordinario, ya que son completamente diferentes. los términos  $q_i$  y  $Q_i$  hacen referencia a las fuerzas que no se pueden expresar como potenciales ordinarios o potenciales generalizados (Campos & Isaza, 2002). Según lo anterior y teniendo en cuenta que  $T = E_{cin}$  y que  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$ , se obtienen las ecuaciones de Lagrange, para cada una de las direcciones.

En x:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{u}_x} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{u}_x} &= q_x, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{U}_x} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{U}_x} &= Q_{1x}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{V}_x} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{V}_x} &= Q_{2x}. \end{aligned} \quad (29)$$

En y:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{u}_y} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{u}_y} &= q_y, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{U}_y} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{U}_y} &= Q_{1y}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{V}_y} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{V}_y} &= Q_{2y}. \end{aligned} \quad (30)$$

En z:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{u}_z} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{u}_z} &= q_z, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{U}_z} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{U}_z} &= Q_{1z}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{V}_z} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{V}_z} &= Q_{2z}. \end{aligned} \quad (31)$$

## 2.4. Ecuaciones Generales del Sistema P-S acoplado

Tomando las nueve ecuaciones finales que se obtuvieron en la ecuaciones 29, 30 y 31, se hallará el sistema general de ecuaciones que permiten modelar la propagación de las ondas en el medio poroso. Según el Anexo B.1 las ecuaciones son las siguientes:

$$\begin{bmatrix} \mu \vec{\nabla}^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \\ Q_1 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + Q_2 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} \vec{u} + \rho_{12} \vec{U} + \rho_{13} \vec{V}) + \\ b \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u} - \vec{U}) + b \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u} - \vec{V}) \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + R_1 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{22} \vec{U} + \rho_{12} \vec{u}) - \\ b \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u} - \vec{U}) \end{bmatrix}, \quad (33)$$

$$\left[ Q_2 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + R_2 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \right] = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{33} \vec{V} + \rho_{13} \vec{u}) - \\ b \frac{\partial}{\partial t}(\vec{u} - \vec{V}) \end{array} \right]. \quad (34)$$

Las ecuaciones 32, 33 y 34, respresentan en forma más simplificada el conjunto de ecuaciones que gobiernan los desplazamientos del medio poroso, fluido 1 y fluido 2 en el sistema. Es preciso aclarar que en éstas ecuaciones los desplazamientos  $\vec{u}$ ,  $\vec{U}$  y  $\vec{V}$  son de carácter vectorial, por lo tanto hay que calcular el Laplaciano vectorial del vector  $\vec{u}$  en la ecuación 32. En la ecuación 33 y 34, hay que calcular el gradiente de la divergencia de los tres campos de desplazamiento ( $\vec{u}$ ,  $\vec{U}$ ,  $\vec{V}$ ), los cuales representan el sólido y los dos fluidos.

A partir del campo de onda general para ondas compresionales P y transversales S, se realizarán algunos cálculos para desacoplar el sistema y tener las ecuaciones generales del campo de onda P y S.

### 2.4.1. Modificación de las Ecuaciones Generales para Altas Frecuencias

Conforme a las metodología vista en las secciones anteriores, se tienen un conjunto de ecuaciones que permiten modelar el comportamiento de la onda en medios porosos saturados de fluidos. Éstas ecuaciones son válidas para frecuencias bajas, por ello hay que realizar una modificación a éstas ecuaciones que permitan modelar el rango de frecuencias altas y así mismo determinar como sería la atenuación para éstos campos de onda. Para ello se agrega un factor de atenuación  $F(\Gamma)$  que acompaña al coeficiente de *Darcy*, el cual va a producir una atenuación en el campo de onda. Éste coeficiente es de tipo complejo y depende de la frecuencia de la ondícula y de parámetros del medio. Debido a que a frecuencias altas el comportamiento del fluido se aleja de un fluido de poiseuille, se hace necesario modificar las ecuaciones de movimiento y por ello al introducir el factor de atenuación, estamos considerando ese efecto que tiene el movimiento del fluido cuando se aleja del comportamiento de un fluido de Poiseuille. Debido a que Biot (Biot, 1956a) dedujo que la oposición que ofrece un fluido en su movimiento relativo con las partículas del medio poroso depende de la geometría de los poros  $\delta$ , factor de estructura, y de la frecuencia de la ondícula:

$$F(\Gamma) = F \left( \delta \left( \frac{w(\rho_{12} + \rho_{22} + \rho_{13} + \rho_{33})}{4\sqrt{2}b} \right)^{\frac{1}{2}} \right), \quad (35)$$

donde:

$$\rho_{11} = \rho - m_1 \beta^2 S^2 - m_2 \beta^2 (1 - S)^2 - 2\rho_1 \beta S - 2\rho_g \beta (1 - S), \quad (36)$$

$$\rho_{22} = m_1 (\beta S)^2, \quad (37)$$

$$\rho_{33} = m_2 (\beta (1 - S))^2, \quad (38)$$

$$\rho_{12} = \rho_1 \beta S - m_1 (\beta S)^2, \quad (39)$$

$$\rho_{13} = \rho_g \beta (1 - S) - m_2 (\beta (1 - S))^2, \quad (40)$$

$$m_1 = c \frac{\rho_1}{\beta S}, \quad (41)$$

$$m_2 = c \frac{\rho_g}{\beta (1 - S)}. \quad (42)$$

El valor de  $c$  es llamado el factor de tortuosidad y es una constante que se puede determinar experimentalmente. Éste factor toma el valor de 1 cuando los poros son uniformes y paralelos, mientras que toma el valor de 3 cuando el sistema tiene todas las orientaciones posibles.  $\delta$  es el factor de estructura que varía dependiendo de la forma de los poros. Para poros circulares se utiliza la ecuación 43, y para poros laminares la ecuación 44.

$$\delta = (8\varepsilon)^{\frac{1}{2}}, \quad (43)$$

$$\delta = (16/3\varepsilon)^{\frac{1}{2}}, \quad (44)$$

donde  $\varepsilon$  se define como el factor de sinusoidad y toma valores entre  $1 \leq \varepsilon \leq \frac{3}{2}$ . Las ecuaciones generales modificadas que incluyen éste factor  $F(\Gamma)$  son las siguientes:

$$\left[ \begin{array}{l} \mu \vec{\nabla}^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \\ Q_1 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + Q_2 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} \vec{u} + \rho_{12} \vec{U} + \rho_{13} \vec{V}) + \\ bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u} - \vec{U}) + bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u} - \vec{V}) \end{array} \right], \quad (45)$$

$$\left[ Q_1 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + R_1 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \right] = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{22} \vec{U} + \rho_{12} \vec{u}) - \\ bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u} - \vec{U}) \end{array} \right], \quad (46)$$

$$\left[ Q_2 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + R_2 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \right] = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{33} \vec{V} + \rho_{13} \vec{u}) - \\ bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u} - \vec{V}) \end{array} \right]. \quad (47)$$

### 2.4.2. Ecuaciones Generales Desacopladas P para Altas Frecuencias

Para desacoplar el sistema se hace necesario tener en cuenta que se están considerando dos tipos de ondas: las transversales y las longitudinales. Para obtener el campo de onda P, calculamos la divergencia del sistema de ecuaciones generales de las ondas P-S acopladas, es decir que calculamos la divergencia y se simplifica en las tres ecuaciones generales (ecuación 45, 46, 47) (Anexo B.3).

$$\left[ (\lambda + 2\mu) \vec{\nabla}^2 e + Q_1 \vec{\nabla}^2 \varepsilon_1 + Q_2 \vec{\nabla}^2 \varepsilon_2 \right] = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} e + \rho_{12} \varepsilon_1 + \rho_{13} \varepsilon_2) + \\ bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (e - \varepsilon_1) + bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (e - \varepsilon_2) \end{array} \right], \quad (48)$$

$$Q_1 \vec{\nabla}^2 e + R_1 \vec{\nabla}^2 \varepsilon_1 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{22} \varepsilon_1 + \rho_{12} e) - bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (e - \varepsilon_1), \quad (49)$$

$$Q_2 \vec{\nabla}^2 e + R_2 \vec{\nabla}^2 \varepsilon_2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{33} \varepsilon_2 + \rho_{13} e) - bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (e - \varepsilon_2). \quad (50)$$

Para obtener el campo de onda S, basta con realizar el mismo procedimiento pero realizando el rotacional sobre las ecuaciones 45, 46 y 47 (Anexo B.4).

$$\mu \vec{\nabla}^2 \vec{\theta} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} \vec{\theta} + \rho_{12} \vec{\phi} + \rho_{13} \vec{\varphi}) + bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\theta} - \vec{\phi}) + bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\theta} - \vec{\varphi}), \quad (51)$$

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{22} \vec{\phi} + \rho_{12} \vec{\theta}) - bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\theta} - \vec{\phi}), \quad (52)$$

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{33} \vec{\varphi} + \rho_{13} \vec{\theta}) - bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\theta} - \vec{\varphi}). \quad (53)$$

## 2.5. Discretización de las Ecuaciones Generales para la onda P

Se toman las tres ecuaciones generales vectoriales que describen el comportamiento de las ondas P-S y reemplaza la equivalencia del rotacional, gradiente y divergencia, para los campos de onda  $\vec{u}$ ,  $\vec{U}$  y  $\vec{V}$ . Para ello es necesario tener en cuenta que las relaciones que aparecen en la ecuación son de tipo vectorial, por lo tanto hay que calcular los laplacianos vectoriales y el gradiente de la divergencia de un campo vectorial. Según lo anterior, y teniendo en cuenta las ecuaciones 150, 154 y 155 del apéndice B.5, Los resultados se pueden ver a continuación.

### 2.5.1. Discretización Primera Ecuación General

Tomando la ecuación 48, al discretizarla el resultado fue:

En la dirección  $\hat{i}$

$$e_x(x, y, z, t + \Delta t) \left( \frac{\rho_{11}}{\Delta t^2} + \frac{bF(\Gamma)}{\Delta t} \right) = (\lambda + 2\mu) \left( \frac{e(x+\Delta x, y, z, t) - 2e(x, y, z, t) + e(x-\Delta x, y, z, t)}{\Delta x^2} + \frac{e(x, y+\Delta y, z, t) - 2e(x, y, z, t) + e(x, y-\Delta y, z, t)}{\Delta y^2} + \frac{e(x, y, z+\Delta z, t) - 2e(x, y, z, t) + e(x, y, z-\Delta z, t)}{\Delta z^2} + \right) +$$

$$+ Q_1 \left( \frac{\varepsilon_1(x+\Delta x, y, z, t) - 2\varepsilon_1(x, y, z, t) + \varepsilon_1(x-\Delta x, y, z, t)}{\Delta x^2} + \frac{\varepsilon_1(x, y+\Delta y, z, t) - 2\varepsilon_1(x, y, z, t) + \varepsilon_1(x, y-\Delta y, z, t)}{\Delta y^2} + \frac{\varepsilon_1(x, y, z+\Delta z, t) - 2\varepsilon_1(x, y, z, t) + \varepsilon_1(x, y, z-\Delta z, t)}{\Delta z^2} + \right) +$$

$$+ Q_2 \left( \frac{\varepsilon_2(x+\Delta x, y, z, t) - 2\varepsilon_2(x, y, z, t) + \varepsilon_2(x-\Delta x, y, z, t)}{\Delta x^2} + \frac{\varepsilon_2(x, y+\Delta y, z, t) - 2\varepsilon_2(x, y, z, t) + \varepsilon_2(x, y-\Delta y, z, t)}{\Delta y^2} + \frac{\varepsilon_2(x, y, z+\Delta z, t) - 2\varepsilon_2(x, y, z, t) + \varepsilon_2(x, y, z-\Delta z, t)}{\Delta z^2} + \right) +$$

$$+ \left( \begin{array}{l} \rho_{11} \left( \frac{2e(x,y,z,t)-e(x,y,z,t-\Delta t)}{\Delta t^2} \right) + \rho_{12} \left( \frac{-\varepsilon_1(x,y,z,t+\Delta t)+2\varepsilon_1(x,y,z,t)-\varepsilon_1(x,y,z,t-\Delta t)}{\Delta t^2} \right) + \\ \rho_{13} \left( \frac{-\varepsilon_2(x,y,z,t+\Delta t)+2\varepsilon_2(x,y,z,t)-\varepsilon_2(x,y,z,t-\Delta t)}{\Delta t^2} \right) + bF(\Gamma) \frac{e(x,y,z,t-\Delta t)}{\Delta t} + \\ bF(\Gamma) \frac{\varepsilon_1(x,y,z,t+\Delta t)-\varepsilon_1(x,y,z,t-\Delta t)}{2\Delta t} + bF(\Gamma) \frac{\varepsilon_2(x,y,z,t+\Delta t)-\varepsilon_2(x,y,z,t-\Delta t)}{2\Delta t} \end{array} \right). \quad (54)$$

### 2.5.2. Discretización Segunda Ecuación General

Se toma la ecuación 49, y la discretización es la siguiente:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x, y, z, t + \Delta t) \left( \frac{\rho_{22}}{\Delta t^2} + \frac{bF(\Gamma)}{\Delta t} \right) = & -\rho_{12} \left( \frac{e(x,y,z,t)-2e(x,y,z,t-\Delta t)+e(x,y,z,t-2\Delta t)}{\Delta t^2} \right) + \\ + Q_1 \left( \begin{array}{l} \frac{e(x+\Delta x,y,z,t)-2e(x,y,z,t)+e(x-\Delta x,y,z,t)}{\Delta x^2} + \\ \frac{e(x,y+\Delta y,z,t)-2e(x,y,z,t)+e(x,y-\Delta y,z,t)}{\Delta y^2} + \\ \frac{e(x,y,z+\Delta z,t)-2e(x,y,z,t)+e(x,y,z-\Delta z,t)}{\Delta z^2} + \end{array} \right) & + R_1 \left( \begin{array}{l} \frac{\varepsilon_1(x+\Delta x,y,z,t)-2\varepsilon_1(x,y,z,t)+\varepsilon_1(x-\Delta x,y,z,t)}{\Delta x^2} + \\ \frac{\varepsilon_1(x,y+\Delta y,z,t)-2\varepsilon_1(x,y,z,t)+\varepsilon_1(x,y-\Delta y,z,t)}{\Delta y^2} + \\ \frac{\varepsilon_1(x,y,z+\Delta z,t)-2\varepsilon_1(x,y,z,t)+\varepsilon_1(x,y,z-\Delta z,t)}{\Delta z^2} + \end{array} \right) + \\ + bF(\Gamma) \left( \frac{e(x, y, z, t) - e(x, y, z, t - 2\Delta t)}{2\Delta t} + \frac{\varepsilon_1(x, y, z, t - \Delta t)}{2\Delta t} \right) & + \\ + \rho_{22} \frac{2\varepsilon_1(x, y, z, t) - \varepsilon_1(x, y, z, t - \Delta t)}{\Delta t^2}. & \quad (55) \end{aligned}$$

### 2.5.3. Discretización Tercera Ecuación General

Se toma la ecuación 50, y la discretización es la siguiente:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(x, y, z, t + \Delta t) \left( \frac{\rho_{33}}{\Delta t^2} + \frac{bF(\Gamma)}{\Delta t} \right) = & -\rho_{13} \left( \frac{e(x,y,z,t)-2e(x,y,z,t-\Delta t)+e(x,y,z,t-2\Delta t)}{\Delta t^2} \right) + \\ + Q_2 \left( \begin{array}{l} \frac{e(x+\Delta x,y,z,t)-2e(x,y,z,t)+e(x-\Delta x,y,z,t)}{\Delta x^2} + \\ \frac{e(x,y+\Delta y,z,t)-2e(x,y,z,t)+e(x,y-\Delta y,z,t)}{\Delta y^2} + \\ \frac{e(x,y,z+\Delta z,t)-2e(x,y,z,t)+e(x,y,z-\Delta z,t)}{\Delta z^2} + \end{array} \right) & + R_2 \left( \begin{array}{l} \frac{\varepsilon_2(x+\Delta x,y,z,t)-2\varepsilon_2(x,y,z,t)+\varepsilon_2(x-\Delta x,y,z,t)}{\Delta x^2} + \\ \frac{\varepsilon_2(x,y+\Delta y,z,t)-2\varepsilon_2(x,y,z,t)+\varepsilon_2(x,y-\Delta y,z,t)}{\Delta y^2} + \\ \frac{\varepsilon_2(x,y,z+\Delta z,t)-2\varepsilon_2(x,y,z,t)+\varepsilon_2(x,y,z-\Delta z,t)}{\Delta z^2} + \end{array} \right) + \\ + bF(\Gamma) \left( \frac{e(x, y, z, t) - e(x, y, z, t - 2\Delta t)}{2\Delta t} + \frac{\varepsilon_2(x, y, z, t - \Delta t)}{2\Delta t} \right) & + \\ + \rho_{33} \frac{2\varepsilon_2(x, y, z, t) - \varepsilon_2(x, y, z, t - \Delta t)}{\Delta t^2}. & \quad (56) \end{aligned}$$

Se puede observar que en cada una de las nueve ecuaciones, la componente del campo de onda correspondiente a cada uno de los tres campos de onda, depende de los valores  $u_i$ , como de los campos de onda  $U_i$  y  $V_i$ . Esto debido a que el movimiento de cada uno de los fluidos,

depende no solamente del movimiento de la estructura sino tambien del movimiento relativo entre los fluidos, lo que ocasiona que los tres campos de onda directa e indirectamente estén acoplados.

## 2.6. Método PML (Perfectly Matched Layer) Para Fronteras No Reflectivas

El método PML permite modelar una región de frontera como una frontera de *espacio libre* en la cual el campo de onda se atenúa suavemente evitando que haya una reflexión del tipo *extremo libre* ( $\frac{\partial e(x,y,z,t)}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial e(x,y,z,t)}{\partial y} = 0$ ,  $\frac{\partial e(x,y,z,t)}{\partial z} = 0$ ) o *extremo fijo* ( $e(x,y,z,t) = 0$ ). Esto evitaría que los campos de onda se reflejen hacia la región del espacio de estudio que se está trabajando. Para ello se crea inicialmente una grilla que básicamente discretiza el espacio en un número entero de puntos en los cuales se representará el valor de  $e$  en el tiempo  $t$  para cada posición  $(x, y, z)$ , según las reglas de evolución calculadas a partir de las ecuaciones 54, 55 y 56.

El método de fronteras *PML* permite crear puntos intermedios entre los puntos de la grilla inicial, los cuales también tienen la información del campo potencial y según las reglas de evolución que se obtienen para esta región *PML* permiten ir atenuando el campo de onda a los puntos vecinos (Berenger, 1994), (Baysal E. & Sherwood, 1984), (Cerjan C. & M., 1985) y (Hasting F. & S., 1996).

Para determinar la regla de evolución en las fronteras no reflectivas se comienza por calcular la regla de evolución en estos puntos intermedios de la grilla. Para ello se introducirán tres funciones llamadas  $e_x(x, y, z, t)$ ,  $e_y(x, y, z, t)$ ,  $e_z(x, y, z, t)$  cuya suma definirán el valor del potencial  $e(x, y, z, t)$  en el punto de la grilla inicial, y tres funciones  $A_x(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z, t)$ ,  $A_y(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z, t)$ ,  $A_z(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}, t)$ , con las cuales se determinan el valor de  $e_x$ ,  $e_y$  y  $e_z$ . A continuación realizamos este proceso para una sola dimensión, teniendo en cuenta que para obtener las reglas en las tres componentes solo basta con realizar el mismo procedimiento para las otras dos direcciones.

Debido a que se realiza en una sola dirección, el potencial  $e(x, t) = e_x(x, t)$ . Se toma la ecuación de onda en una dimensión para un medio homogéneo e isotrópico:

$$\frac{\partial^2 e_x(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 e_x(x, t)}{\partial x^2}. \quad (57)$$

Reescribimos la ecuación 57 teniendo en cuenta que la velocidad de la onda P del medio *PML* no presenta gradientes fuertes de velocidad.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{v} \frac{\partial e_x(x, t)}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial e_x(x, t)}{\partial x} \right). \quad (58)$$

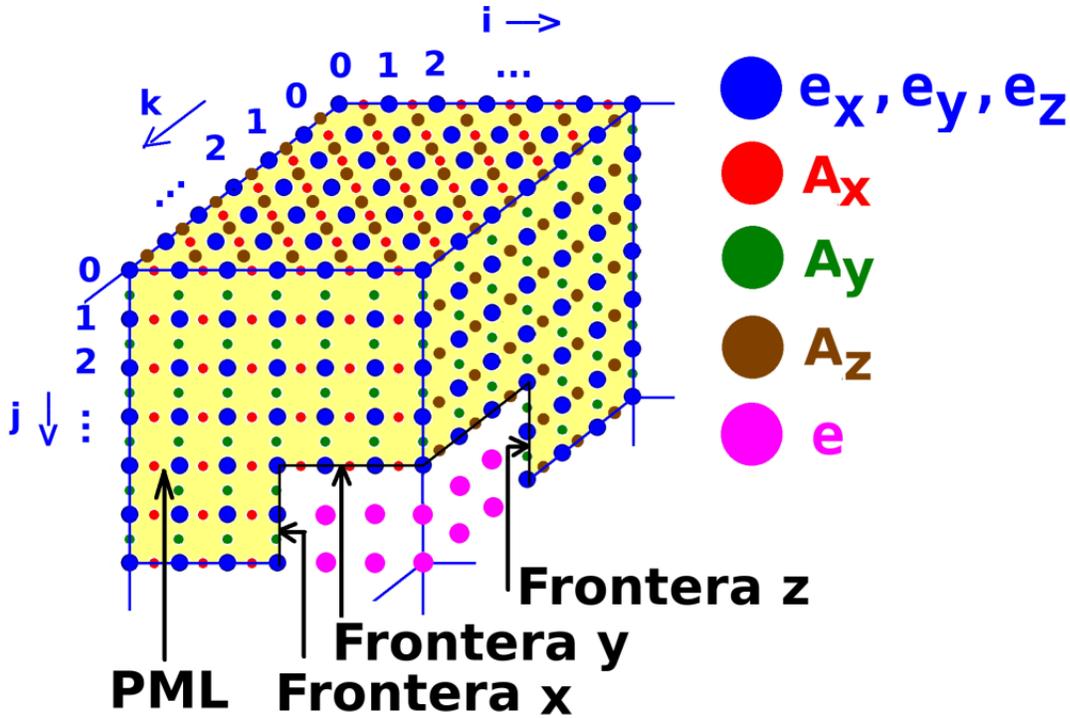
En el término de la derecha se hace la siguiente sustitución:

$$v \frac{\partial e(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial t}, \quad (59)$$

y en el término de la izquierda la siguiente:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial e_x(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial A_x}{\partial x}, \quad (60)$$

donde  $A_x(x + \frac{\Delta x}{2}, t)$  es un potencial que depende de la posición y el tiempo, y se encuentran en los puntos intermedios de los potenciales  $e_x(x, t)$ . Si se tomaran todas las seis ecuaciones  $e_x(x, y, z, t)$ ,  $e_y(x, y, z, t)$ ,  $e_z(x, y, z, t)$  y  $A_x(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z, t)$ ,  $A_y(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z, t)$ ,  $A_z(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}, t)$  para absorber en un medio de 3 dimensiones, la ubicación de éstos seis potenciales se puede ver a continuación en la siguiente Figura 3.



**Figura 3.** Se observa el campo de onda  $u$ , y los campos de onda asociados a la región *PML*  $A_x, A_y, A_z$ , junto con las fronteras que delimitan la región *PML* (de color amarillo) en cada una de las tres direcciones.

En la Figura 3 cada punto azul hay tres campos de onda  $e_x(x, y, z, t)$ ,  $e_y(x, y, z, t)$ ,  $e_z(x, y, z, t)$  cuya suma definen el campo total  $e(x, y, z, t)$  en ese punto dentro de la región *PML*, es decir,  $e_{i,j,k,t+1} = e_x(i, j, k, t + 1) + e_y(i, j, k, t + 1) + e_z(i, j, k, t + 1)$ . Los valores de  $e(x, y, z, t)$  fuera de la región *PML* (puntos fucsia) vienen dados por las ecuaciones 54, 55 y 56. Cada uno de los campos  $e_x(x, y, z, t)$ ,  $e_y(x, y, z, t)$ ,  $e_z(x, y, z, t)$  en la región *PML* se calcula a partir de los

valores de  $A_x(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z, t)$  que están identificados con puntos rojos,  $A_y(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z, t)$  identificados con puntos verdes y  $A_z(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}, t)$  identificados con puntos cafés (Berenger, 1996).

Se toma la ecuación 59 y se realiza la discretización utilizando el método de diferencias finitas. Este proceso se puede ver en el Anexo B.6 y Anexo B.8. Los resultados fueron los siguientes para cada una de las tres direcciones:

$$A_x(x, y, z, t + \Delta t) = Q_{1x}A_x(x, y, z, t) + Q_{2x}[e_x(x + \Delta x, y, z, t) - e_x(x, y, z, t)], \quad (61)$$

$$A_y(x, y, z, t + \Delta t) = Q_{1y}A_y(x, y, z, t) + Q_{2y}[e_y(x, y + \Delta y, z, t) - e_y(x, y, z, t)], \quad (62)$$

$$A_z(x, y, z, t + \Delta t) = Q_{1z}A_z(x, y, z, t) + Q_{2z}[e_z(x, y, z + \Delta z, t) - e_z(x, y, z, t)], \quad (63)$$

ahora se toma la ecuación 60, y se obtiene igualmente la discretización para los potenciales  $e_x, e_y, e_z$ . Ver Anexo B.7 y Anexo B.8.

$$e_x(x, y, z, t + \Delta t) = Q_{1x}(x)e_x(x, y, z, t) + Q_{2x}(x)[A_x(x + \Delta x, y, z, t) - A_x(x, y, z, t)], \quad (64)$$

$$e_y(x, y, z, t + \Delta t) = Q_{1y}(y)e_y(x, y, z, t) + Q_{2y}(y)\Delta y[A_y(x, y + \Delta y, z, t) - A_y(x, y, z, t)], \quad (65)$$

$$e_z(x, y, z, t + \Delta t) = Q_{1z}(z)e_z(x, y, z, t) + Q_{2z}[A_z(z)(x, y, z + \Delta z, t) - A_z(x, y, z, t)], \quad (66)$$

donde  $Q_{1x}, Q_{2x}, Q_{1y}, Q_{2y}, Q_{1z}, Q_{2z}$  son funciones que definen el valor del factor de atenuación en función de la posición para cada una de los tres campos  $e_x, e_y$  y  $e_z$  (Anexo B.8).

## 2.7. Factor de calidad Q

Cuando una onda se propaga en un medio, normalmente se produce un efecto denominado absorción intrínseca, que básicamente consiste en la transformación de energía elástica de la onda en otros tipos de energía como energía térmica o piezoeléctrica, lo que produce una disminución en la amplitud de la onda (Vargas, 2003).

El factor de calidad es un valor adimensional y da una medida de la cantidad de energía que se pierde en un ciclo de una excitación armónica en un cierto volumen y viene dado por la ecuación:

$$\frac{2\pi}{Q} = \frac{\Delta E}{E}. \quad (67)$$

A partir de la anterior definición se define el factor de atenuación  $\gamma_A$ , el cual se define como la variación relativa de la amplitud con respecto a la distancia.

$$\gamma_A = -\frac{dA}{A dr}. \quad (68)$$

integrando esta expresión se llega la siguiente expresión:

$$A = A_0 e^{\gamma A (r - r_0)}. \quad (69)$$

Utilizando la ecuación de energía para un movimiento armónico

$$E = \frac{kA^2}{2}, \quad (70)$$

reemplazamos en la ecuación 67, y teniendo en cuenta que el comportamiento es cuasielástico (Vargas, 2003),  $\frac{\Delta A}{T} = -\frac{dA}{dt}$  se obtiene finalmente que

$$A = A_0 e^{-\frac{\omega(t-t_0)}{2Q}}. \quad (71)$$

Se observa que el coeficiente  $\frac{\omega}{2Q}$  está asociado a la disminución del valor de la amplitud de la señal cuando ésta evoluciona temporalmente. El valor de  $A_0$  y  $t_0$  son constantes que dependen de las condiciones iniciales.

### 3. Simulación

Se creó como modelo inicial conformado por arena, la cual tiene cierto grado de porosidad y permeabilidad. Los valores que caracterizan cada uno de los fluidos y la roca están dados en la tabla 1.

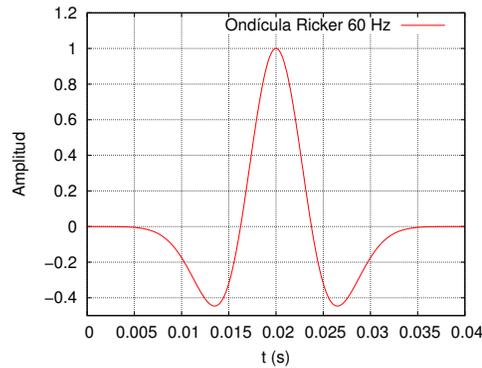
**Tabla 1.** Parámetros elastomecánicos del medio.

Magnitud Física y Unidades	Agua	Arena	Aire
Densidad ( $\frac{kg}{m^3}$ )	$\rho_w = 1 \times 10^3$	$\rho_s = 2,65 \times 10^3$	$\rho_g = 1,21$
Módulo de Compresibilidad de cada medio ( $\frac{N}{m^2}$ )	$k_w = 2 \times 10^9$	$k_s = 2 \times 10^{10}$	$k_g = 1,42 \times 10^5$
Viscosidad Dinámica ( $\frac{N \cdot s}{m^2}$ )	$\gamma_1 = 1 \times 10^{-3}$		$\gamma_2 = 1,81 \times 10^{-5}$
Porosidad		$0\% < \beta < 100\%$	
Saturación		$S = 99\%$	
Diámetro de los granos ( $m$ )		$d = 5 \times 10^{-4}$	
Módulo de Compresibilidad de la Estruct. ( $\frac{N}{m^2}$ )		$k_b = 4,36 \times 10^7$	
Módulo de Cizalladura de la Estruct. ( $\frac{N}{m^2}$ )		$\mu = 2,61 \times 10^7$	
Permeabilidad Dinámica ( $m^2$ )		$10^{-8} \leq \chi \leq 10^{-12}$	
Tortuosidad de los poros $c$		$c = 1,25$	

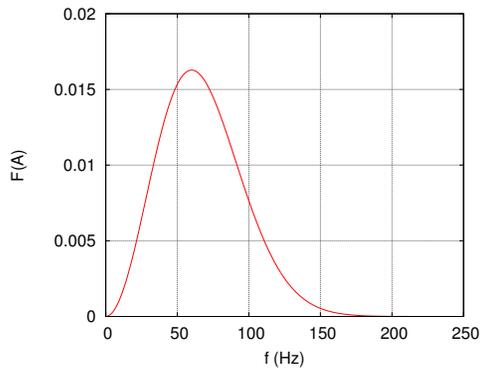
#### 3.1. Ondícula

En la simulación se utilizó una ondícula Ricker de  $60Hz$ , ver Figura 4. Ésta ondícula se generó a partir de una ecuación en la cual se puede configurar el valor de la frecuencia de la ondícula, amplitud, y su fase. Se modeló hasta una profundidad de  $2000m$  con pasos de  $\Delta x = 0,5 \frac{m}{Div}$ , por lo tanto cada división en la grilla equivale a  $0,5m$ . El tiempo de evolución del sistema varía según la velocidad de la ondícula. Se varió el valor de la porosidad de

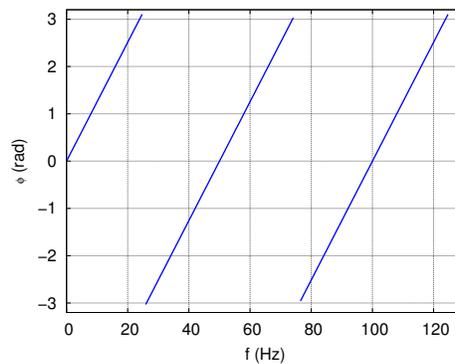
tal forma que se registraron los campos de onda a diferentes posiciones en profundidad. La distancia de separación entre los puntos de registro del campo de onda es de  $150m$ .



(a) Ondícula Ricker de 60 Hz



(b) Espectro de Amplitud de la Ondícula Ricker de 60 Hz



(c) Espectro de fase de la Ondícula Ricker de 60 Hz

**Figura 4.** Ondícula Ricker (Harold, 1994) con su Espectro de Amplitud y Fase calculado (Merry, 2005). (a) Ondícula Ricker de  $60Hz$ . (b) Espectro de Amplitud. (c) Espectro de Fase.

## 3.2. Fronteras PML

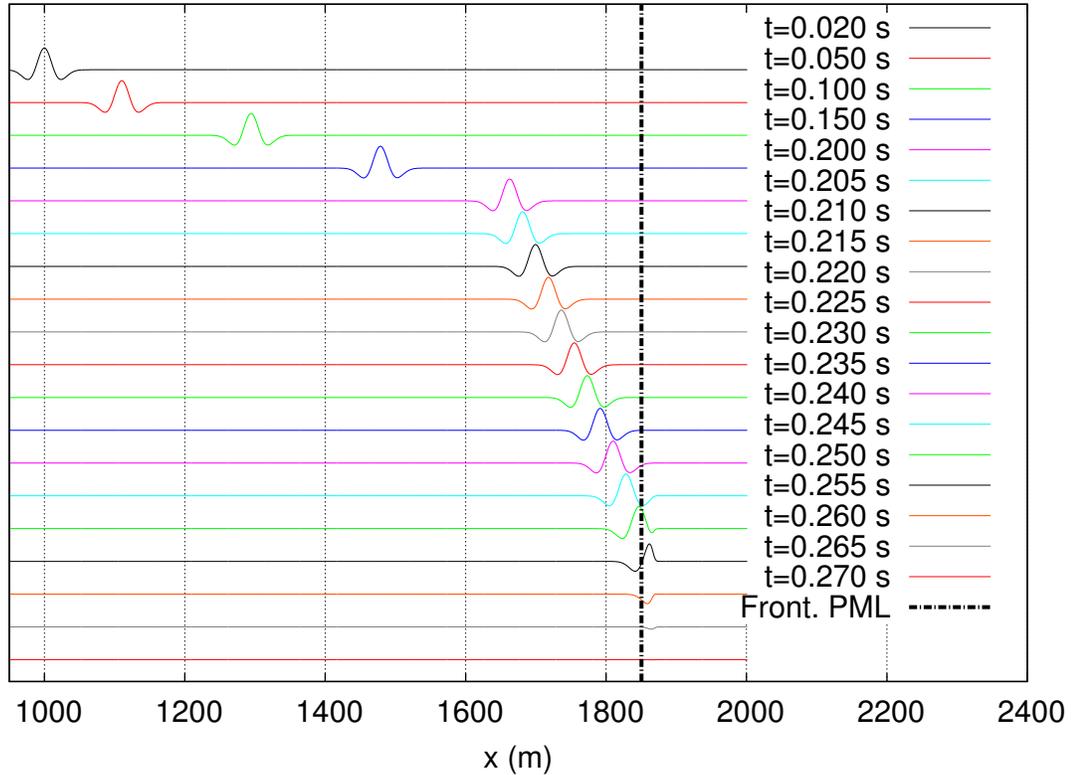
Se realizaron varias simulaciones con la implementación del método *Perfectly Matched Layer PML* con el objetivo de encontrar los valores más óptimos de absorción de la onda en las fronteras. La primera simulación es en  $1D$  y la segunda es en  $2D$  que corresponde a un perfil del espacio en  $3D$ .

### 3.2.1. Simulación con región PML en $1D$

Se simuló la propagación de una onda ricker de  $60Hz$  en una región lineal de  $2km$ . El valor de los parámetros de la región *PML* son:  $n = 4$ , número de divisiones es de 300,  $\delta = 150(m)$

y  $q_0 = 0,4(\frac{1}{m})$ .

Se tomó toda la señal en varios puntos del espacio para diferentes tiempos  $t_i$ , y se observó como era la reflexión al incidir en la región *PML*.

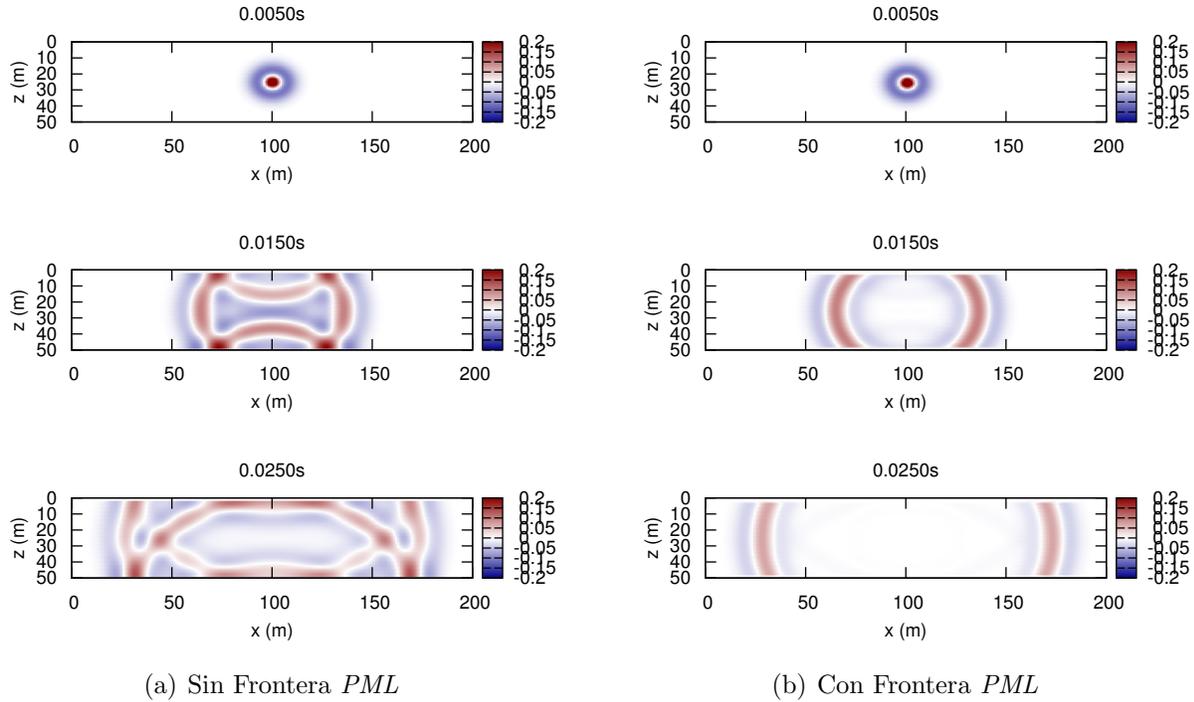


**Figura 5.** Incidencia de la Ondícula Ricker de 60 Hz en la frontera *PML*.

En la Figura 5 la línea punteada vertical corresponde a la frontera *PML* y se encuentra delimitada entre  $x = 1850m$  y  $x = 2000m$ . Se tomaron pasos de tiempo  $\Delta t = 0,00005s$  para la evolución del algoritmo. Para la captura de los datos inicialmente se configuró el algoritmo con intervalos de muestreo de  $\Delta t_1 = 0,05$  y posteriormente cada  $\Delta t_2 = 0,005$ , ya que en éstos tiempos la ondícula se encuentra incidiendo en la Frontera *PML*. Al incidir se observa un decaimiento paulatino de la amplitud de la onda en la zona *PML* sin reflexión en la zona comprendida entre los 0 y  $1850m$

### 3.2.2. Simulación con región PML en 2D

Se realizó la simulación para un modelo 2D. Para la simulación, se tomó  $\Delta x = 0,5\frac{m}{Div}$  y  $\Delta z = 0,5\frac{m}{Div}$  en una región que tiene una longitud de  $x = 200,5m$  y una profundidad de  $z = 50,5m$ . Se tomaron pasos de tiempo  $\Delta t = 0,00005s$ . Los parámetros elástomecánicos del medio están dados por la Tabla 1.



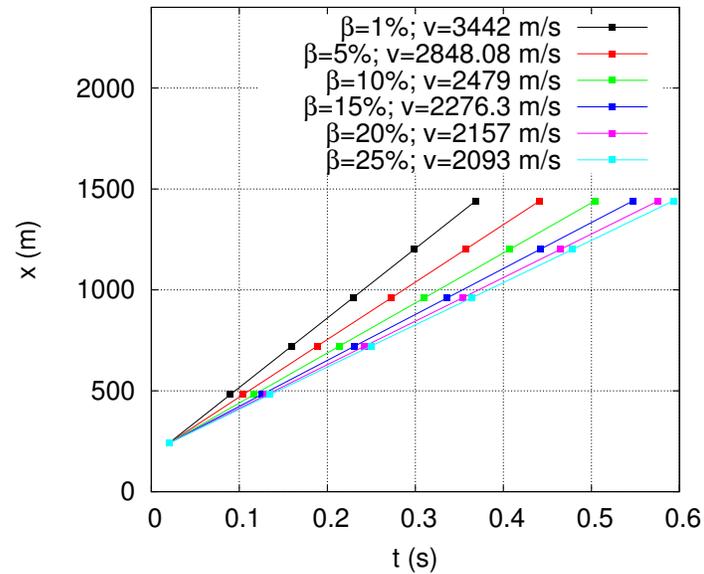
**Figura 6.** Incidencia de la Ondícula Ricker de 160 Hz en la frontera. (a) Fronteras libres. (b) Con región *PML*.

En la Figura 6 se observa la propagación de una ondícula Ricker de  $60\text{Hz}$  para diferentes tiempos  $t$ . El intervalo de muestreo es de  $\Delta t_{\text{muestreo}} = 0,0075\text{s}$ . Se puede ver que en  $t = 0,005\text{s}$  comienza verse el pulso, en  $t = 0,0200\text{s}$  la onda alcanza la frontera *PML*. Para tiempos mayores, la mayor parte del campo de onda es absorbido por la frontera simulando una frontera de espacio abierto infinita. Hay un aspecto importante y es que la frontera absorbe adecuadamente evitando que reflexiones considerables afecten la medición en los puntos de registro. Aumentar  $\delta$  produce un costo computacional mayor, ya que para mantener la misma región de estudio se hace necesario aumentar la grilla (número de divisiones del espacio) y por lo tanto se tendrían que incluir más puntos en la evolución temporal de cada punto del espacio.

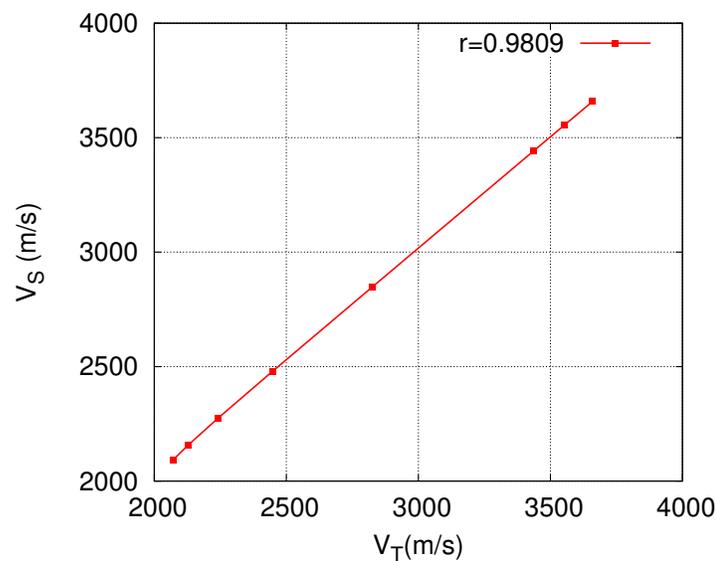
### 3.3. Simulación de una Onda Plana

Según la configuración que se definió se procede a realizar la primera simulación para darle validez al algoritmo. Para ello se ubicaron las estaciones según lo definido anteriormente y se puso a evolucionar el sistema. Con los datos ya registrados posteriormente se procede a tomar los picos del campo de onda en cada uno de los archivos asociados a los puntos de registro. Conforme a lo anterior se obtuvo la siguiente gráfica de posición vs Desplazamiento

para la ondícula con diferentes niveles de porosidad del medio, cuando la saturación es del  $S = 99,9\%$ .



(a)

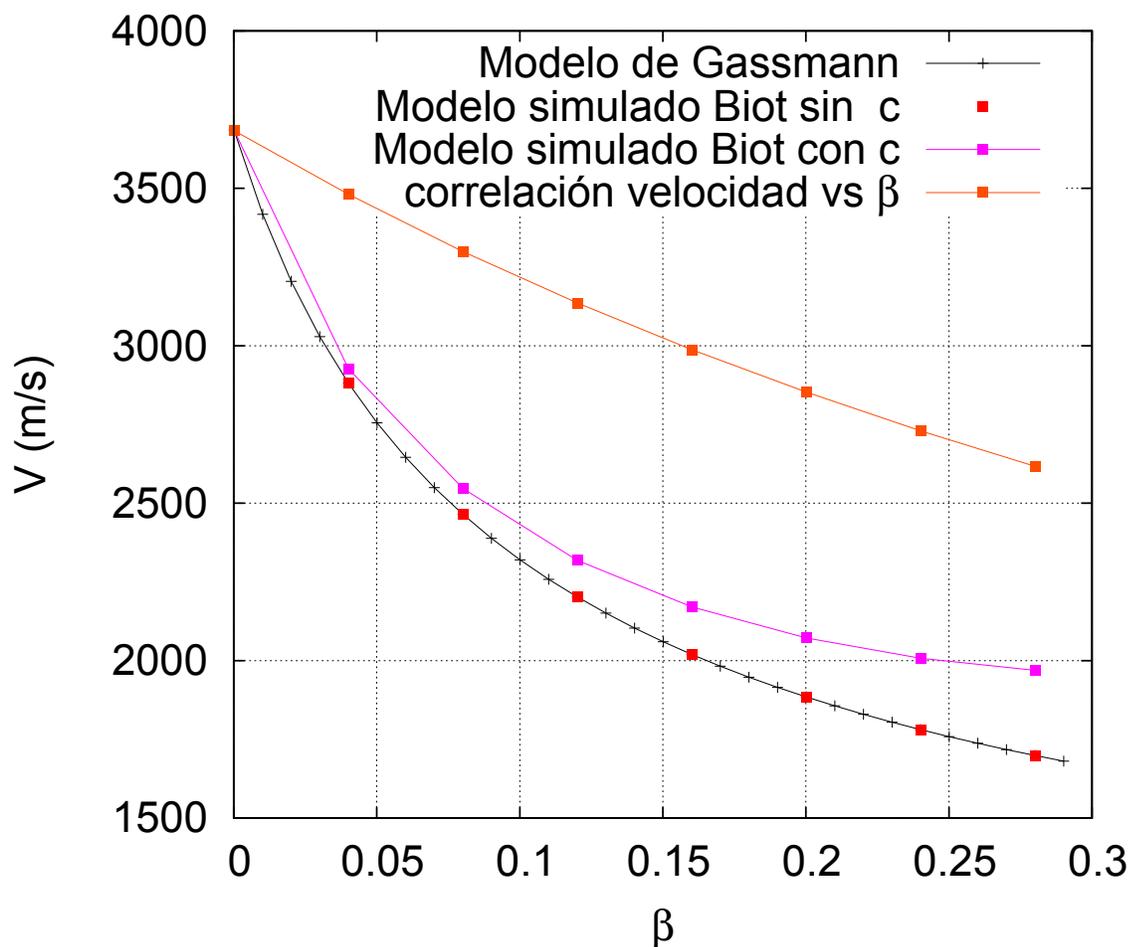


(b)

**Figura 7.** (a). Gráfica posición vs tiempo de la propagación de una onda Ricker de 60 Hz, para diferentes porosidades  $\beta$ , con un valor de saturación  $S = 99,9\%$ . (b) correlación entre las velocidades simuladas  $V_S$  y las velocidades Teóricas  $V_T$ .

Se puede observar en las gráficas de la Figura 7(a) que hay una proporción entre cada uno de los desplazamientos  $\Delta x$  por cada diferencia de tiempo  $\Delta t$ . Debido al comportamiento lineal entre las posiciones que marcan cada uno de los picos en cada uno los tiempos en los que se registró la onda, se realizó una linealización para determinar cual es el valor de la pendiente y así definir el valor de la magnitud de la velocidad de la onda en el medio, ya que en una gráfica de Posición  $x$  vs Tiempo  $t$  la pendiente corresponde a ésta cantidad vectorial. Es preciso saber que hasta el momento toda la región se considera como un medio homogéneo e isotrópico. Según ésta metodología se graficó la velocidad simulada  $V_S$  con las velocidades teóricas y el resultados se puede ver en la Figura 7 (b)

A partir de los valores de las velocidades se realiza una gráfica para ver como se comporta la magnitud de la velocidad de la onda a medida que aumenta la porosidad y se obtuvo la siguiente gráfica:



**Figura 8.** Gráfica de Velocidad vs  $\beta$  para una ondícula Ricker de  $60\text{Hz}$  propagándose en un medio con saturación  $S = 99,9\%$ .

En la Figura 8 se observan cuatro curvas diferentes. La primera curva superior que tiene un comportamiento casi lineal, es la correlación de velocidad vs  $\beta$ .

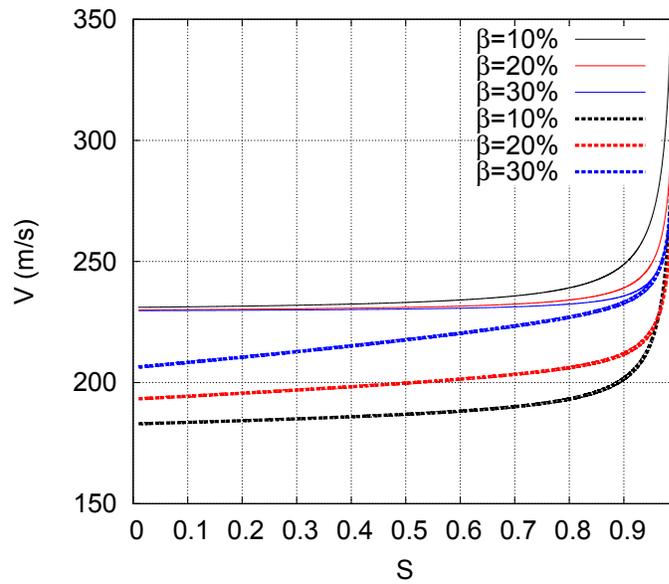
$$\frac{1}{v} = \frac{\beta}{v_f} + \frac{1 - \beta}{v_m} \quad (72)$$

donde  $v_f$  es la velocidad de la onda en el fluido y  $v_m$  es la velocidad de la onda en la matriz (M. Wyllie & Gardner, 1956). Esta correlación presentó buen comportamiento en el trabajo de (Gregory, 1977) aunque el material al presentar cantidades considerables de arcilla, la correlación no predice la disminución en el valor de la velocidad (Winkler & Murphy, 1955), precisamente porque no se considera el valor de densidad y de los parámetros elástomecánicos en función de la porosidad con una saturación de  $S = 100\%$  (sedimento de Biot).

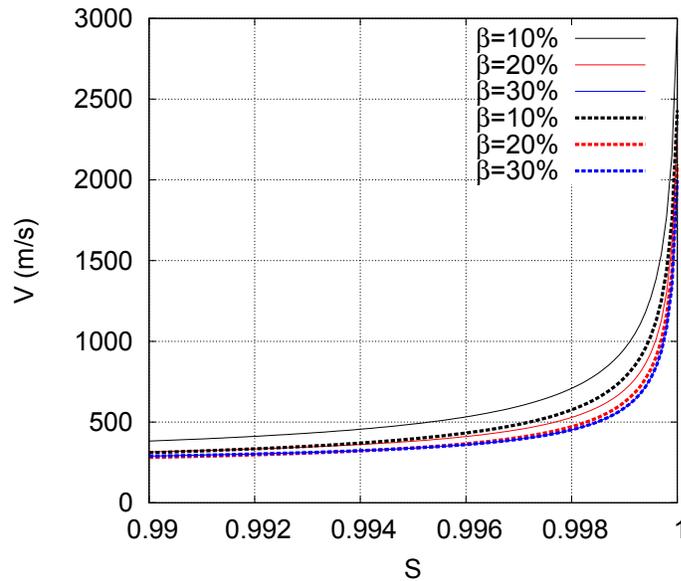
La segunda curva corresponde al modelo de velocidad según el trabajo de (Gassmann, 1951). Se encontró que la velocidad disminuye al aumentar la porosidad y esto se debe a que el módulo de bulk depende de la porosidad al igual que la densidad del medio. Al considerar esta dependencia con la porosidad se observa una diferencia mayor con el modelo propuesto por (M. Wyllie & Gardner, 1956).

La tercera curva corresponde a la velocidad simulada con el modelo de Biot para dos fluidos (Camarasa, 2002) teniendo en cuenta la porosidad  $\beta$  y la saturación  $S$ , sin la tortuosidad  $c$ . La última curva representa el mismo modelo de Biot pero considerando la tortuosidad  $c$  del medio poroso. Es evidente que hay diferencias al tener en cuenta la orientación y la distancia media de conexión entre los poros, ya que este factor llamado tortuosidad afecta directamente el valor de la densidad aparente del fluido y es por ello que al no considerar la tortuosidad, se ve el mismo comportamiento de la velocidad según el modelo de Gassmann y el de Biot. Al considerar la tortuosidad, aparecen en la densidad aparente del sistema dos términos que dan evidencia del acople que experimenta el sistema debido al movimiento de cada uno de los dos fluidos con respecto al medio sólido de la estructura. Estos términos de acople producen una disminución de la densidad aparente y con ello un aumento en la velocidad (Camarasa, 2002).

Se puede observar en la Figura 8, que para valores de porosidad bajos, la velocidad tiende a ser mayor del orden de los  $v = 3600 \frac{m}{s}$ . Si la porosidad se tomara casi nula  $\beta \sim 0$  de tal forma que tenemos un sistema de una capa con densidad constante que coincide con la matriz de la roca, ya que no se considera saturada por algún fluido la velocidad de propagación de la onda es de  $3682,8 \frac{m}{s}$ , según Camarasa (Camarasa, 2002), la velocidad debería estar alrededor de los  $3686 \frac{m}{s}$ , lo que da un error del  $0,08\%$ . Esta velocidad corresponde a la velocidad de la onda P para un medio homogéneo e isotrópico en donde no hay ningún nivel de porosidad.



(a)



(b)

**Figura 9.** Gráfica de Velocidad vs  $S$  para porosidades de  $\beta = 0,1$  (negra),  $\beta = 0,2$  (roja) y  $\beta = 0,3$  (azul). Las líneas continuas se obtuvieron con el modelo de Gassman y las líneas punteadas con el modelos de Biot para dos fluidos. (a) Saturaciones de 0 a 90%. (b) saturaciones de 90% a 100%.

Se observa en la Figura 9 (a) y (b) que el comportamiento de la variación de la velocidad en función de la saturación  $S$  según el modelo de Biot modificado para dos fluidos, presenta un comportamiento similar al modelo propuesto por Gassmann (Gassmann, 1951), teniendo

en cuenta que los parámetros tales como el módulo de bulk y la densidad aparente para el sistema saturado son descritos según el trabajo realizado por (C. Ecker & Nur, 1998) y (Kuster & Toksoz, 1974a) (Kuster & Toksoz, 1974b). Se ve un comportamiento casi constante en la velocidad cuando el medio se encuentra saturado de algún gas. Esto ocurre debido a que el módulo de compresibilidad del gas es bajo, y esto produce que al haber algún porcentaje de nivel de gas, y al tener un valor bajo en su modulo de compresibilidad (en comparación con el fluido y la matriz), produce que el valor de la compresibilidad del sistema disminuya. Un análisis parecido se puede hacer desde el punto de vista de la densidad aparente del sistema saturado, debido a que nuevamente hay que tener en cuenta los términos inerciales producidos por el nivel de porosidad y saturación, junto con la tortuosidad del medio poroso. Los valores de velocidad presentan un fuerte incremento para valores de saturación  $S > 90\%$ . Esto sucede debido a que el volumen de poro que ocupa el gas cada vez es menor y por lo tanto la densidad aparente del sistema queda conformado principalmente por la densidad del fluido y de la matriz. Otros trabajos han analizado la dependencia de la velocidad en función del nivel de saturación, y es precisamente en el trabajo de (Winkler & Murphy, 1955) donde vemos un resultado similar, ya que realiza un análisis a partir de los resultados obtenidos por (Murphy, 1985), en donde se introduce la dependencia del modulo de compresibilidad efectivo cuando el poro se encuentra saturado de liquido y gas. A partir de dicha relación junto con el modulo de compresibilidad propuesto por Gassmann, se obtiene una muy buena descripción a los datos experimentales.

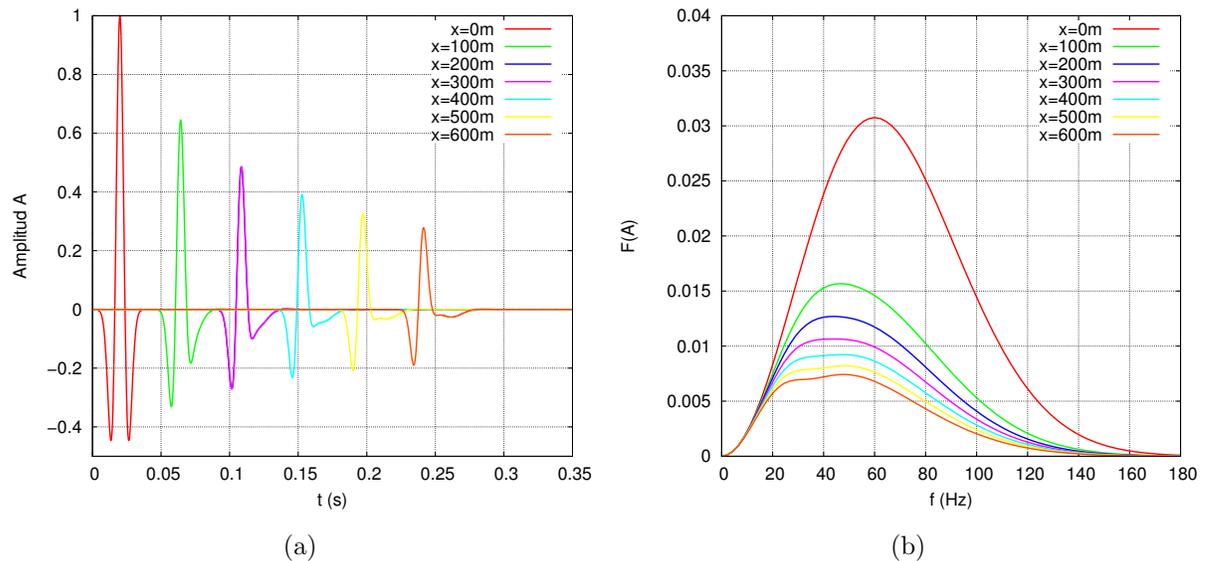


## 4. Resultados y Discusión

Se van a estudiar como son las variaciones en la amplitud y la amplitud en el espectro de Amplitud para una ondícula que se propaga en un medio poroso saturado por dos fluidos: agua y aire. La primera parte del análisis consiste en mirar como son éstas variaciones en función de la porosidad del medio y posteriormente se hace una análisis en función del porcentaje de saturación de fluidos en el poro.

### 4.1. Análisis en función de la porosidad $\beta$ del medio

Se empezó por realizar una simulación de la propagación de una onda en un medio poroso con  $\beta = 15\%$  y una saturación de  $S = 99\%$  y se tomaron los valores del campo de onda cada  $100m$ . Los resultados correspondientes se ven en la siguiente Figura 10.



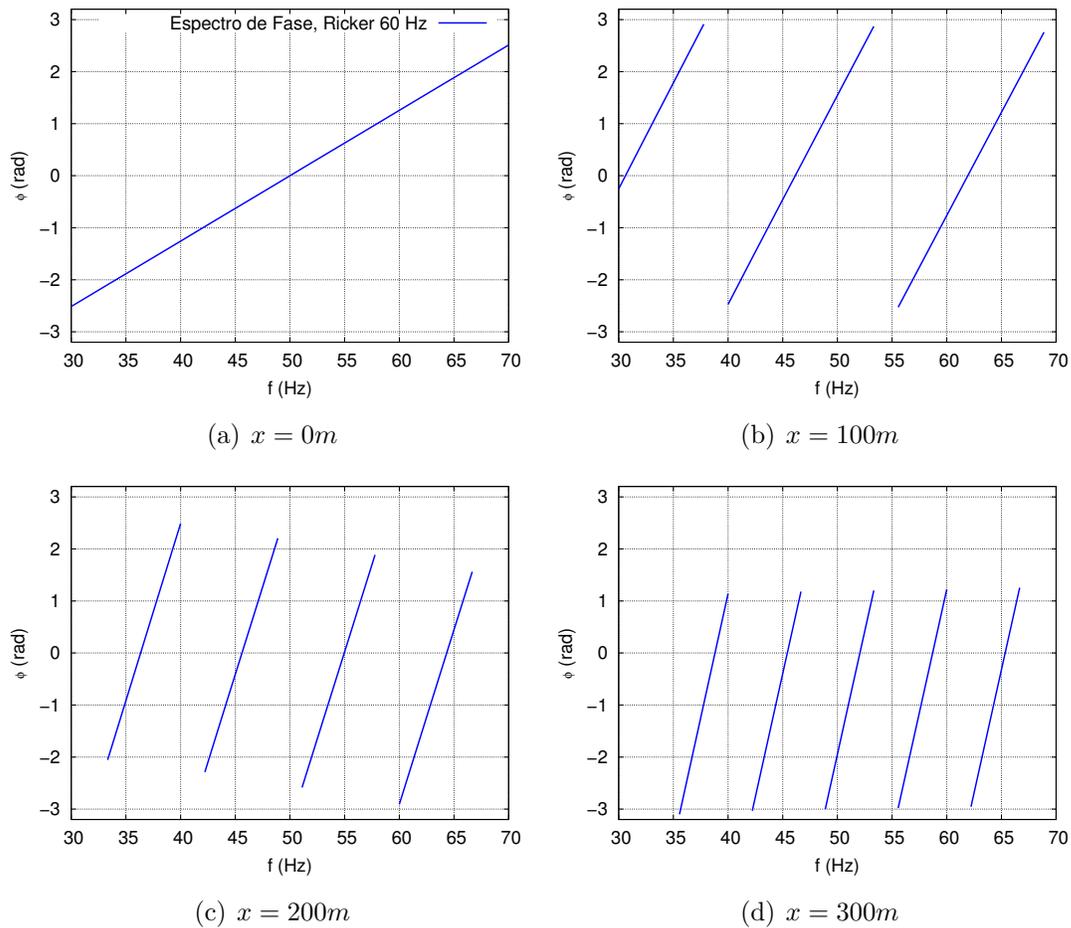
**Figura 10.** Señal registrada a diferentes profundidades para una ondícula Ricker de  $60Hz$  que se propaga en un medio con porosidad  $\beta = 15\%$ . (a) Amplitud  $A$  de la Señal en función del tiempo para diferentes profundidades. (b) Espectro de Amplitud  $F(A)$  de la señal  $A$  para diferentes profundidades.

En la Figura 10 (a) se observa como la onda es atenuada a medida que se va alejando de la

fuelle. No se considera el fenómeno de divergencia esférica debido a que son ondas planas.

La amplitud disminuye decayendo de forma exponencial. Esto se debe a que hay un movimiento relativo entre el fluido y el medio poroso que actúa como factor de amortiguamiento. Este efecto aumenta con la porosidad por el aumento en contenido de agua dentro del medio poroso.

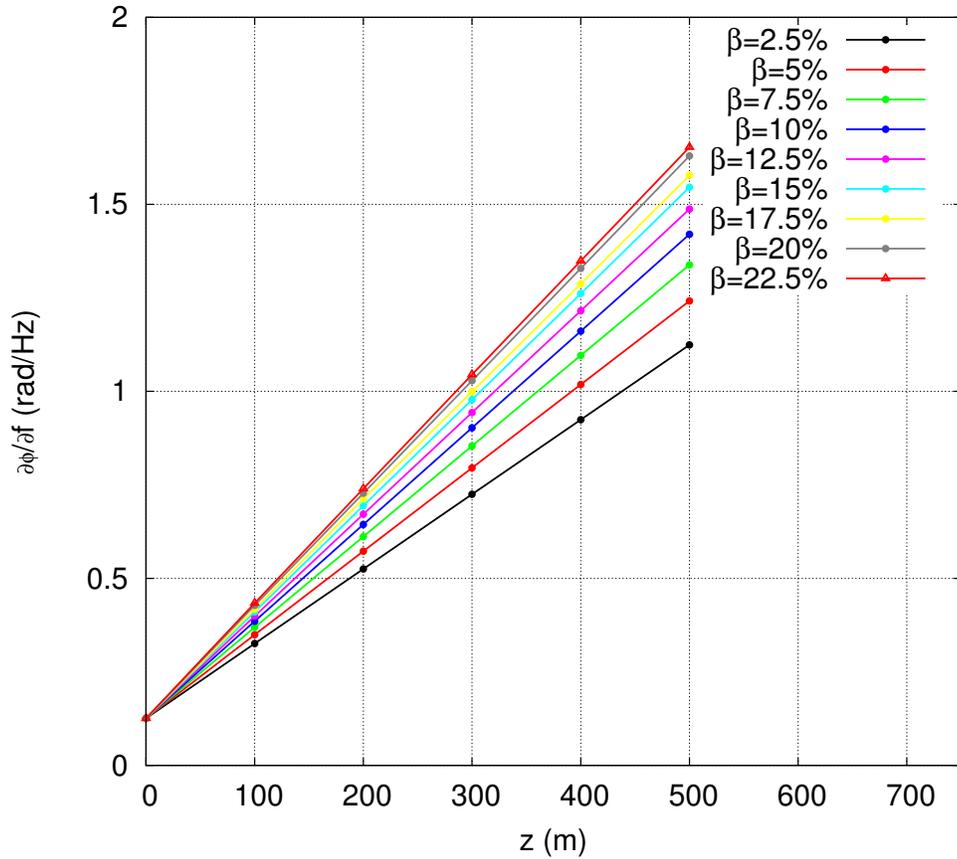
En la Figura 10(b) se observa en el espectro de Amplitud un corrimiento de la frecuencia asociada a la amplitud máxima además de una disminución del valor de la amplitud en el espectro de Amplitud los siguientes espectros de fase de la señal.



**Figura 11.** Espectro de Fase  $\phi$  para un medio con  $\beta = 15\%$  y  $S = 99,9\%$ .

La Figura 11(a) muestra un cambio de fase de la señal a medida que ésta se propaga. En (b) el cambio de fase que tienen los armónicos de la señal se hace mayor lo que sugiere que  $\frac{\partial \phi}{\partial f}$  se incrementa con la profundidad. Al observar (c) y (d) ocurre exactamente lo mismo.

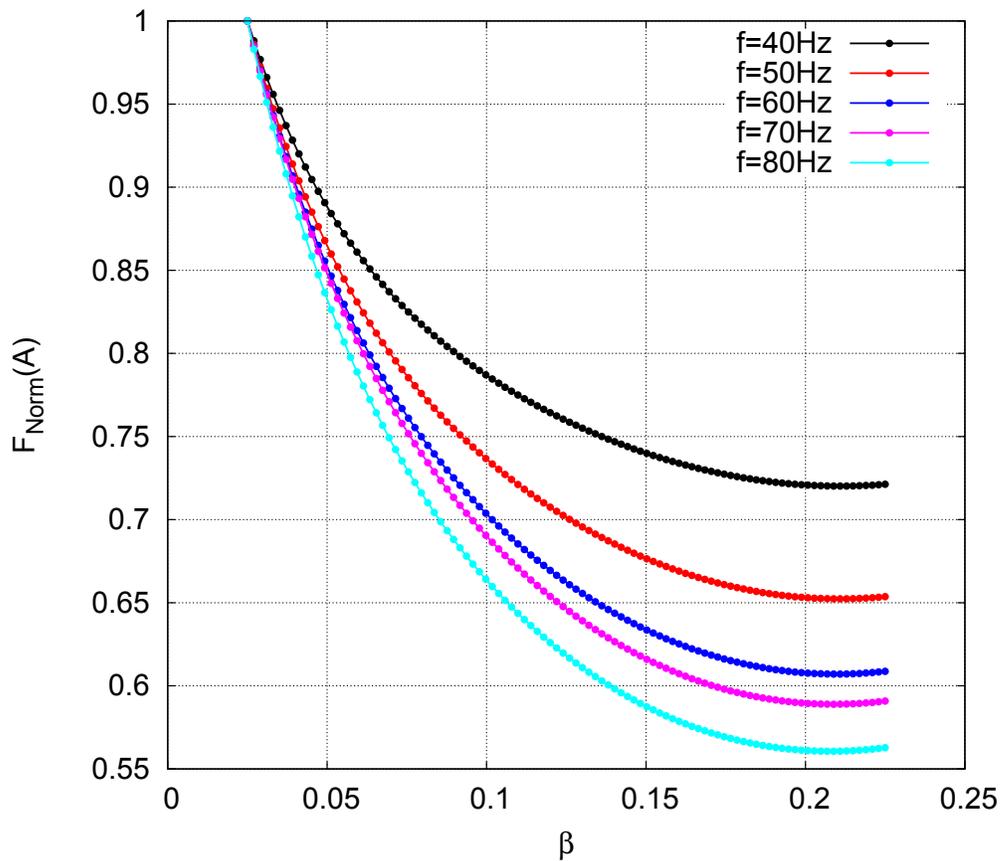
Se realiza la misma metodología hecha hasta ahora para diferentes porosidades del medio ( $2,5\% \leq \beta \leq 22,5\%$ ) y se calcula la variación de la fase en función de la frecuencia  $\frac{\partial\phi}{\partial f}$  a medida que la profundidad aumenta. Los resultados se pueden ver en la Figura 12.



**Figura 12.**  $\frac{\partial\phi}{\partial f}$  en función de la profundidad para diferentes valores de  $\beta$  con  $S = 99,9\%$ .

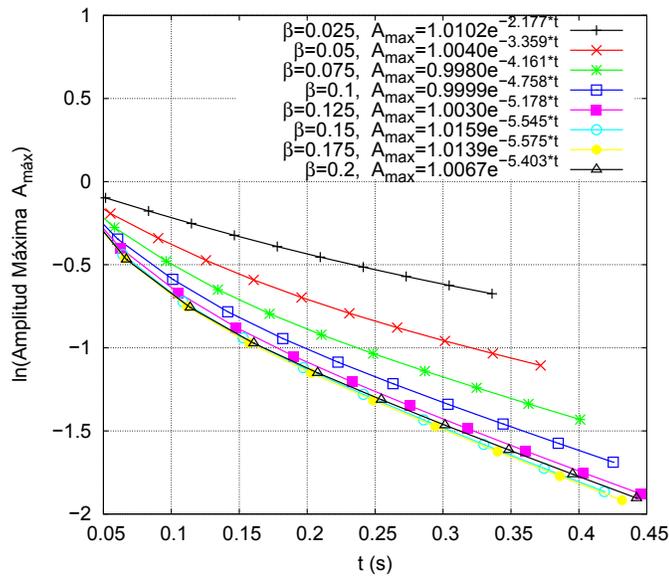
Se puede observar que hay una variación lineal entre la variación de la fase en función de la frecuencia a medida que la profundidad aumenta ( $\frac{\partial\phi}{\partial f}$ ) para cada valor de porosidad. Esta variación es mayor a medida que el valor de la porosidad aumenta.

Debido a que la amplitud del espectro  $F(A)$  de frecuencias mostradas en la Figura 10(b) disminuyen a medida que aumenta la profundidad y dependen del valor de la frecuencia del armónico, se calculan los espectros de amplitud  $F(A)$  en función de la frecuencia para diferentes porosidades. Posteriormente y se realizan cortes a una determinada frecuencia dentro del ancho de banda del espectro de amplitud, y se determina como es la variación de  $F(A)$  en función de la porosidad (Ver Figura 13).



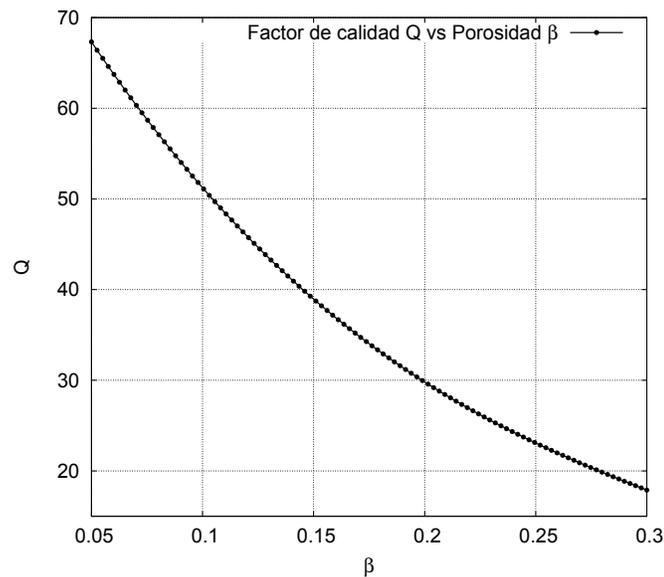
**Figura 13.** Variación del espectro de amplitud en función de la porosidad para diferentes valores de frecuencia dentro del ancho de banda de la señal con  $S = 99,9\%$ .

En la Figura 13 se observa que la amplitud del espectro es menor a medida que la porosidad aumenta y este valor depende de la frecuencia, es por ello que cada frecuencia tiene un comportamiento diferente y la amplitud se hace menor a medida que aumenta la frecuencia. Esto ocurre debido a que el acople del movimiento entre el medio poroso y los fluidos es mayor para bajas frecuencias lo que implica que los fluidos tienden a moverse con la misma frecuencia del medio, mientras que para frecuencias altas ocurriría pero en menor grado. Para observar mejor los efectos que se dan en la atenuación de la Amplitud máxima de la señal se procedió a tomar los valores del campo de onda a diferentes profundidades asumiendo que el medio es homogéneo e isotrópico. En la Figura 14 se observa el decrecimiento de la amplitud de la onda con la profundidad para diferentes valores de porosidad del medio, con profundidades que van cada  $100m$  desde la fuente.



**Figura 14.** Variación de la Amplitud máxima de la señal para diferentes valores de  $\beta$ .

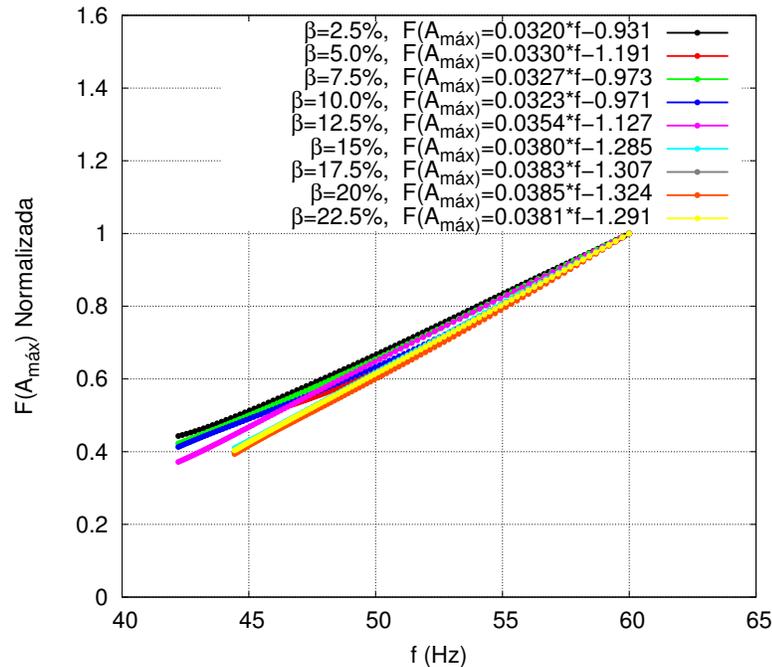
A medida que aumenta la porosidad también aumenta el factor de atenuación de la amplitud. También se observan las funciones que se obtienen al realizar un ajuste de los datos para cada valor de porosidad. Al observar el exponente se hace evidente un incremento a medida que aumenta  $\beta$ , lo que establece una relación entre la atenuación de la amplitud de la señal con el aumento de la porosidad. Para comprender un poco este comportamiento se realiza una gráfica del factor de calidad  $Q$  en función de la porosidad  $\beta$  (Ver Figura 15).



**Figura 15.** Factor de calidad  $Q$  de la Amplitud para diferentes valores de  $\beta$ , para una onda de frecuencia principal de  $60Hz$ .

Según la Figura 15, se obtuvo un comportamiento en el cual a mayor porosidad el factor de calidad  $Q$  disminuye. Esto se debe a que al aumentar la porosidad el coeficiente de Darcy aumenta, ya que este depende directamente de la porosidad y permite que el efecto producido por el movimiento relativo de cada uno de los dos fluidos con la matriz (*función de Disipación*), ocasione una pérdida progresiva en el valor de la amplitud. Ahora se calcula la variación de la amplitud máxima en el espectro de amplitud de la ondícula. Para esto se calcularon los espectros de amplitudes a diferentes profundidades y así obtener su respectivo factor de atenuación. De la Figura 16 se observa que la variación de la Amplitud máxima de la frecuencia principal en el espectro de amplitudes tiene un comportamiento aproximadamente lineal en función de  $\beta$  en el rango de valores de porosidad que se están utilizando.

Debido a que el comportamiento se ajusta a una línea recta, se hace un ajuste por mínimos cuadrados para encontrar el mejor ajuste lineal a los datos y el resultado es reportado en la tabla de la misma Figura 16.



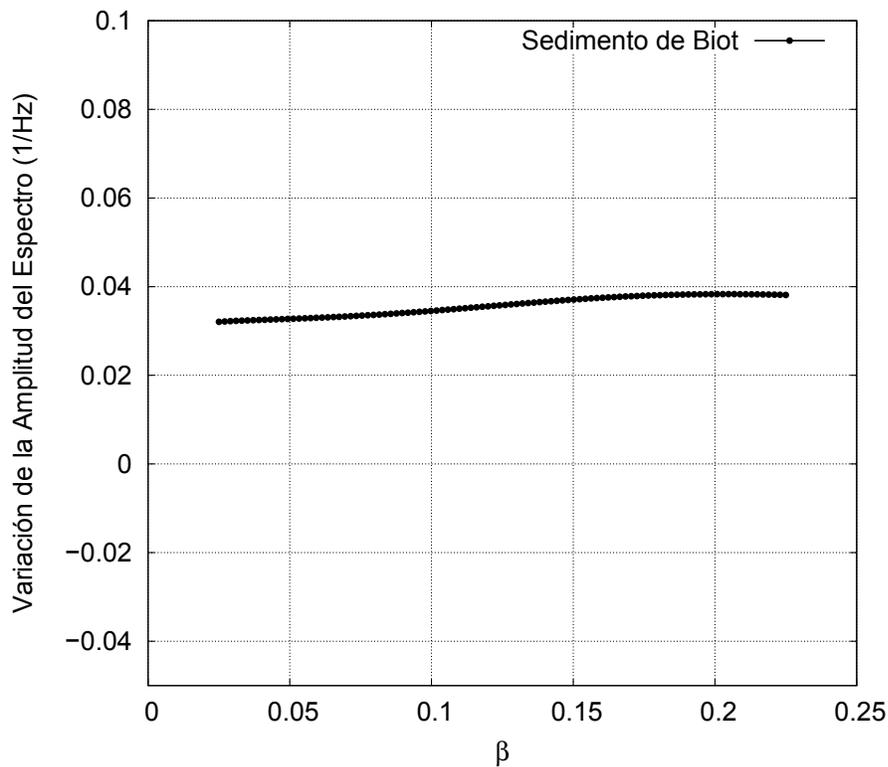
**Figura 16.** Variación de la Amplitud máxima  $F(A_{max})$  del espectro de amplitud asociada a la frecuencia principal para diferentes valores de  $\beta$ .

En la Figura 16 se puede observar que el valor de la pendiente cambia en cada una de las rectas, lo que sugiere que la variación de la máxima amplitud del espectro de amplitud depende de la porosidad asumiendo que todo el poro se encuentra saturado con agua. En el espectro de amplitud (Ver Figura 10 parte (b)) se puede ver que la amplitud máxima asociada a la frecuencia principal tiene un corrimiento de frecuencias altas a bajas y que ésta también

depende del valor de la porosidad.

Se podría esperar en la Figura 16 que al aumentar progresivamente el valor de la porosidad aumente la pendiente, pero no se puede ignorar que hay otros efectos como el cambio de fase que dificulta la determinación de la amplitud máxima del espectro  $F(A_{max})$ , e incluso el efecto de la viscosidad del fluido.

Ahora se procedió a graficar el valor de la pendiente de cada uno de los ajustes en función de la porosidad  $\beta$ . Según lo anterior se obtuvo la Figura 17.



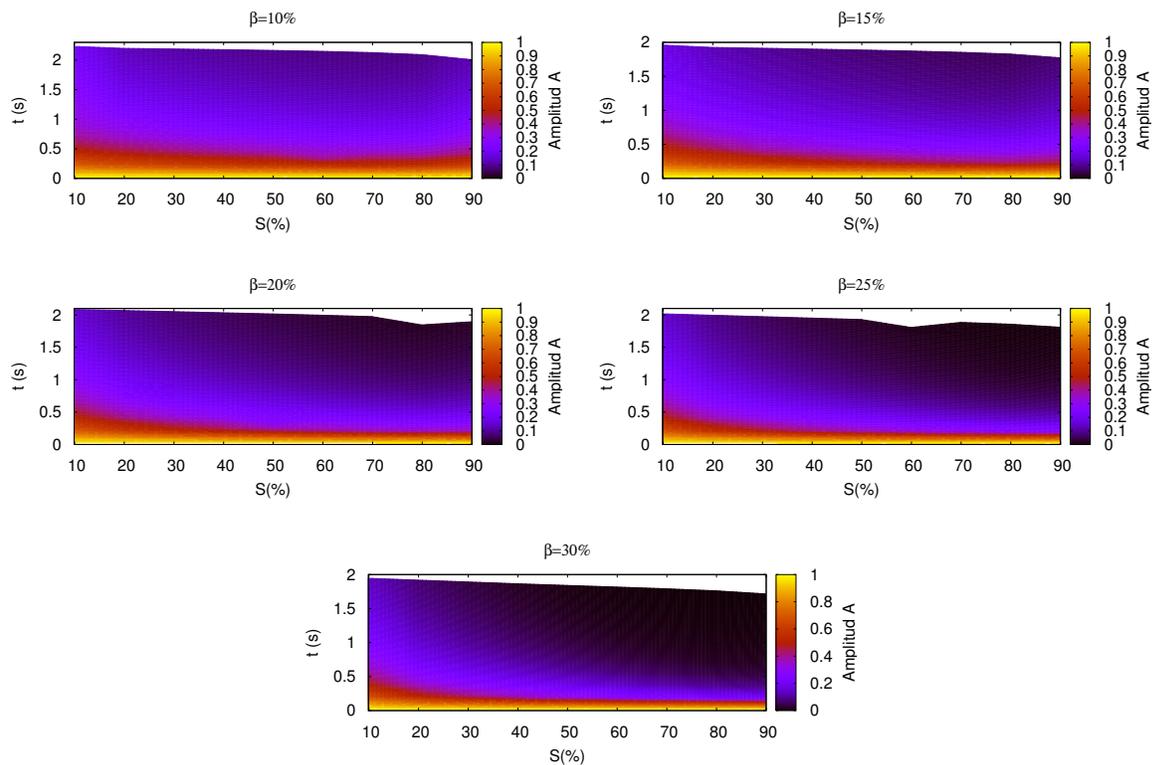
**Figura 17.** Variación del Espectro de amplitud máximo en función de la frecuencia principal para diferentes valores de  $\beta$ .

En la Figura 17 se puede ver la variación del máximo valor del espectro de amplitud  $F(A_{max})$  con respecto a la frecuencia principal  $f(p)$  de la señal  $\frac{dF(A_{max})}{df_p}$  a medida que aumenta la porosidad del medio. Se observa que se presenta un comportamiento constante para porosidades que van desde  $0,25 < \beta < 0,1$ . Para porosidades comprendidas entre  $0,1 < \beta < 0,15$  aumenta y nuevamente se presenta un comportamiento constante en  $0,15 < \beta < 0,25$ . La amplitud máxima asociada a la frecuencia principal tiene un corrimiento mayor hacia las frecuencias bajas (Valeri A. K. & D., 2004) si la porosidad aumenta.

## 4.2. Análisis en función de la Saturación $S$ del medio

Se realizó una simulación utilizando los mismos parámetros elastomecánicos utilizados definidos en la Tabla 3, variando el nivel de saturación de agua y gas contenidos en el medio poroso. Los valores de porosidad están entre  $5\% \leq \beta \leq 30\%$  y los valores de saturación  $10\% \leq S \leq 90\%$ .

Se propagó una ondícula Ricker de  $60\text{Hz}$  a través del medio que se encuentra saturado de agua y aire, con una porosidad de  $\beta = 10\%$ ,  $\beta = 15\%$ ,  $\beta = 20\%$ ,  $\beta = 25\%$  y  $\beta = 30\%$ . Para cada valor de porosidad la saturación  $S$  cambia cada  $10\%$ . La variación de la amplitud se puede ver en la siguiente Figura 18.

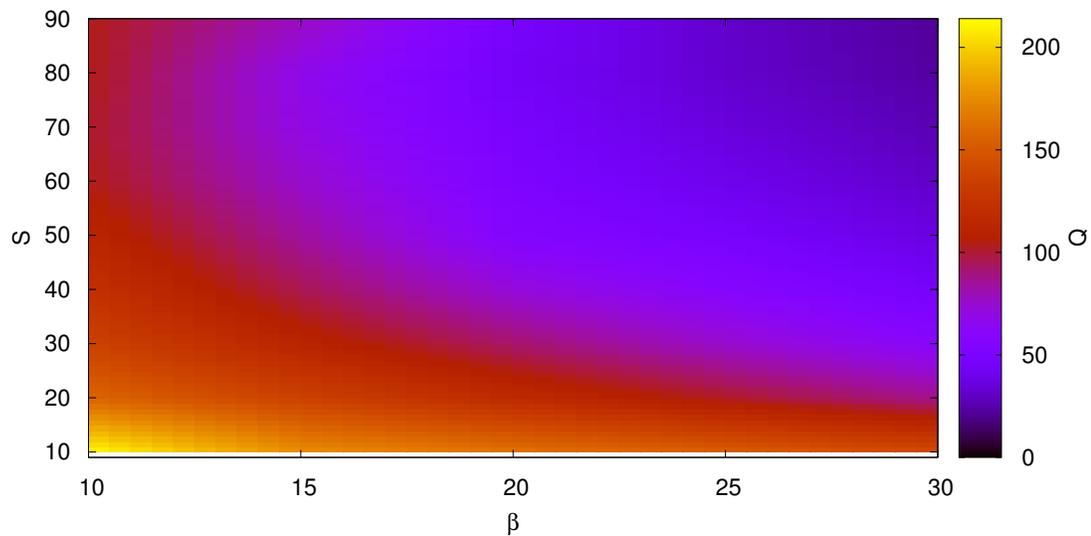


**Figura 18.** Variación temporal de la Amplitud para diferentes valores de  $\beta\%$  en función de la saturación  $S$ .

De la gráfica se puede observar que hay una disminución en la amplitud de la señal a medida que el tiempo transcurre. En  $t = 0$  la señal tiene un valor de 1 el cual representa la amplitud en el mismo punto donde se encuentra la fuente. A medida que transcurre el tiempo la amplitud va decreciendo, y este decrecimiento se debe a varios factores. El primero es por los efectos producidos por las fuerzas disipativas que aparecen en el medio debido al movimiento relativo de los fluidos con el campo de onda de la señal cuando ésta se propaga en él. En la Figura 18 se observa que a medida que la saturación  $S$  aumenta, el decaimiento

en la amplitud se hace más pronunciado y esto se debe a que al aumentar la saturación en los poros ( $S \approx 100\%$ ) la cantidad de agua aumenta en el medio poroso, lo que ocasiona que haya una mayor contribución del efecto de movimiento relativo del agua. El efecto de divergencia esférica no se considera debido a que se está trabajando con una onda plana.

En las gráficas de la Figura 18 se observa como varía la amplitud máxima cuando la señal evoluciona en el tiempo para diferentes niveles de saturación de agua y aire. Cuando el valor de saturación se encuentra alrededor de  $S = 90\%$  se presentan las variaciones decrecientes más pronunciadas de la amplitud máxima de la onda las cuales se incrementan a medida que la porosidad aumenta. A partir de éstos datos se obtiene la gráfica del factor de calidad  $Q$  en función de  $\beta$  y  $S$  Figura 19.

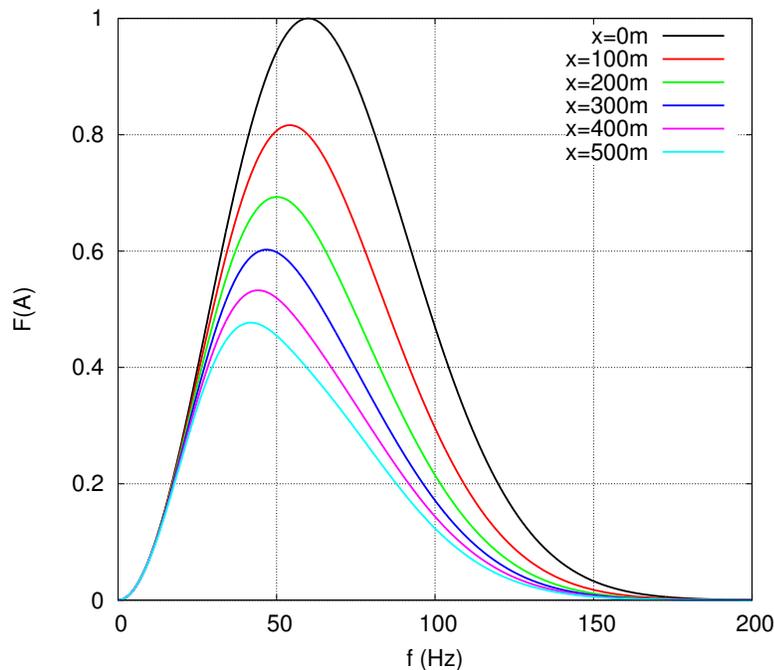


**Figura 19.** Variación del factor  $Q$  en función de  $\beta$  y  $S$ .

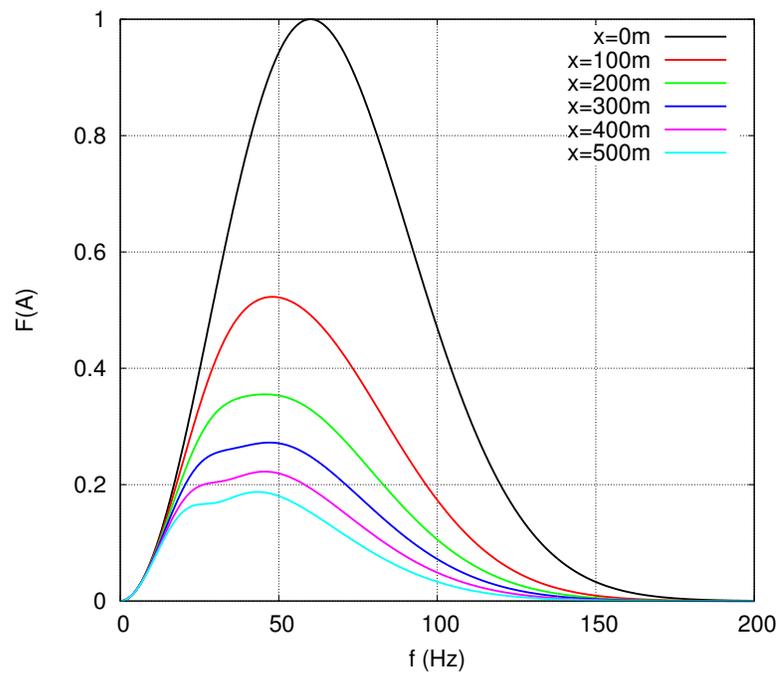
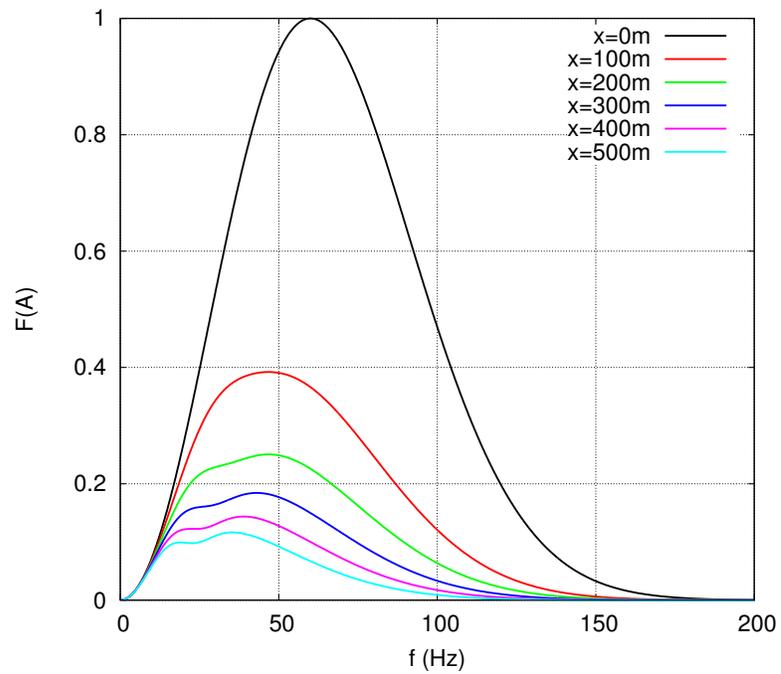
Se observa de la Figura 19 que el factor  $Q$  disminuye a medida que aumenta la porosidad y la Saturación. Hay dos excepciones en las cuales el factor de calidad  $Q$  permanece casi constante y es cuando la saturación  $S$  varía para porosidades bajas ( $\beta < 10\%$ ) o cuando se varía la porosidad para valores altos de saturación ( $S > 90\%$ ). Cuando la porosidad es baja  $\beta \approx 10\%$  es casi despreciable, es decir que no hay variación considerable a medida que el poro se satura de agua o de aire. Esto se puede explicar debido a que la cantidad de volumen del poro al ser pequeña, si se satura de uno u otro fluido no atenúa considerablemente la amplitud, y es porque el efecto debido al movimiento relativo de los fluidos es pequeño ya que su cantidad dentro del material es muy pequeña. Al ir aumentando el valor de la porosidad a valores cercanos a  $\beta \approx 20\%$  se comienzan a notar algunas variaciones considerables del

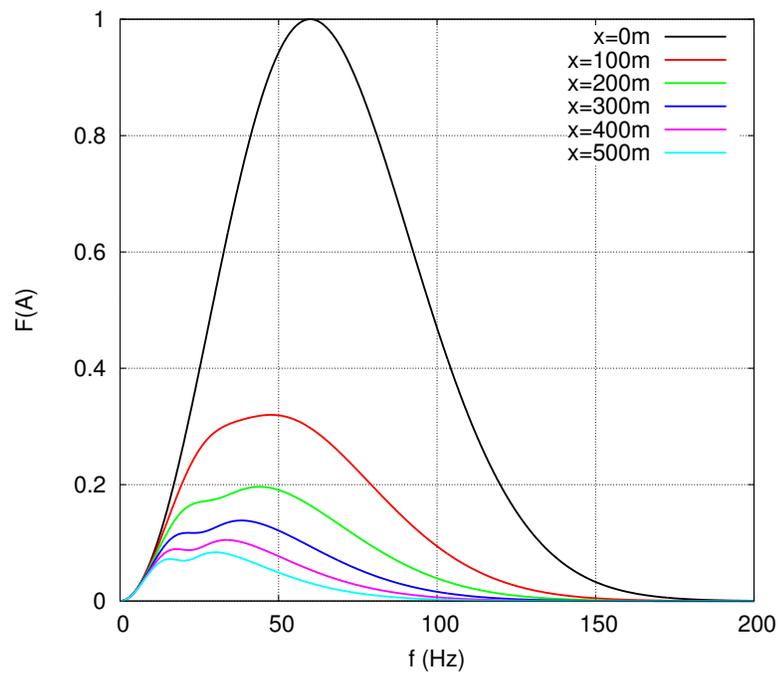
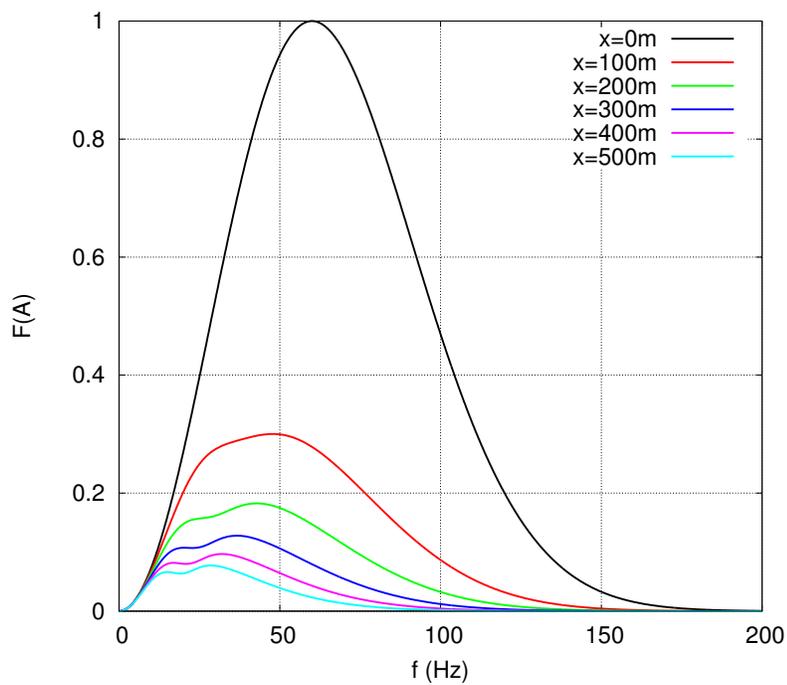
factor  $Q$  a medida que se aumenta la saturación  $S$  de agua. Para éste valor de porosidad se nota un cambio en  $S \approx 40\%$ , en donde  $Q = 70$ . Al seguir aumentando la porosidad  $\beta \approx 30\%$  se observa que al haber mayor porcentaje de agua en el poro el factor de calidad es bajo y esto significa que se produce una mayor pérdida en el valor de la amplitud de la señal. Esto era de esperarse debido a que hay mayor cantidad de agua en el medio poroso, lo que produce que al propagarse el campo de onda por el medio, se produce pérdida de energía debido a la función de *Disipación de Rayleigh*, la cual tiene en cuenta el movimiento relativo de los fluidos. En éste caso la mayor cantidad de fluido es agua, y por ello al compararla con el aire, el agua tiene mayor densidad y viscosidad, lo que aumenta el efecto de atenuación.

Ahora con los datos de la señal registrados a diferentes profundidades, se calculó el espectro de amplitud de la señal para diferentes saturaciones y porosidades. A continuación en la Figura 20 se muestran los resultados obtenidos para una porosidad de  $\beta = 0,25$ .



(a)  $S = 0,1$

(b)  $S = 0,3$ (c)  $S = 0,5$

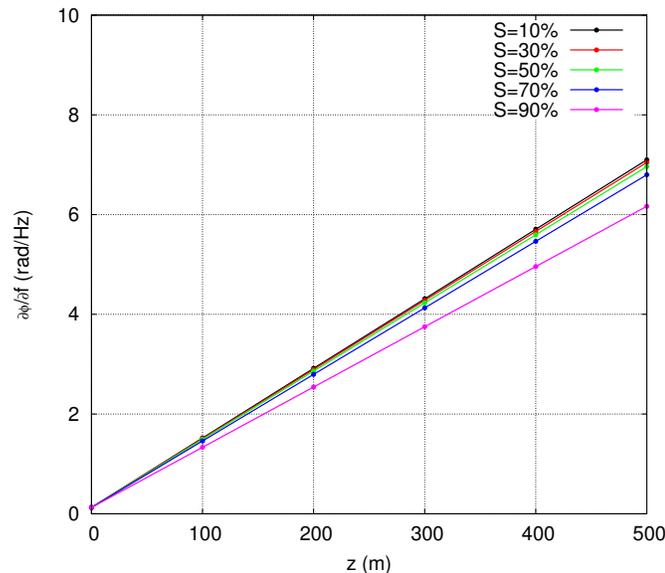
(d)  $S = 0,7$ (e)  $S = 0,9$ **Figura 20.** Espectro de amplitud en función de la frecuencia. El valor de  $\beta = 0,25$ .

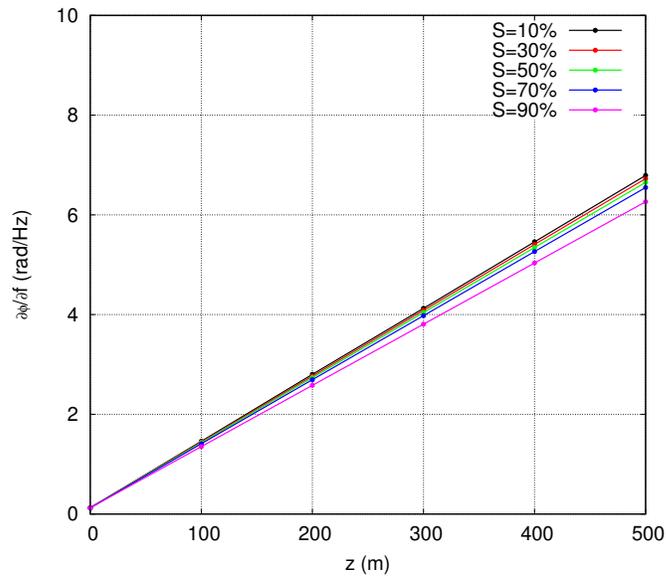
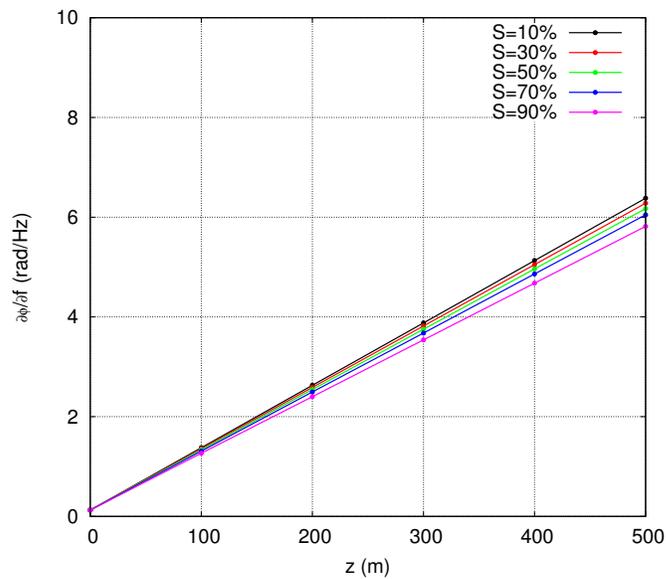
Se puede observar que la máxima amplitud que indica la frecuencia predominante de la señal

se encontraba en  $60Hz$  pero a medida que la ondícula se propaga éste valor máximo en el espectro de amplitud fue disminuyendo progresivamente y el valor en frecuencia asociado a la máxima amplitud se va corriendo a las frecuencias bajas. Este es un resultado importante ya que la valor máximo en el espectro de amplitud de la señal disminuye y ésta disminución esta asociada al grado de saturación agua-aire en los poros. Esto se debe precisamente porque el factor de calidad de la señal esta asociado con el coeficiente de Darcy y este es el resultado de la interacción de cada uno de los dos fluidos con la matriz porosa.

La disminución de la amplitud asociada a las frecuencias altas tiene una relación con la cantidad de fluido presente en el medio. Si se observan gráficas Figura 20 (b), (c), (d) y (e) el corrimiento en la frecuencia y la variación de la máxima amplitud asociada a esta frecuencia se hace más significativo. Esto no sugiere que en algún momento la frecuencia se haga cero, ya que a profundidades mayores la amplitud del espectro de amplitud disminuye y las amplitud de la frecuencia predominante toma valores por debajo de los  $50Hz$ .

Según lo anterior, el sistema al encontrarse saturado produce una disminución en la amplitud en el espectro de amplitud y un corrimiento en la frecuencia principal de la señal. La saturación de agua aumenta la disminución de la amplitud máxima en función del corrimiento de la frecuencia principal, es decir que para valores de saturación altos, se produce una mayor variación en el valor máximo del espectro de amplitud. Para valores bajos de saturación el corrimiento y la variación de la amplitud en el espectro de amplitud es suave, mientras que para valores mayores de saturación éstas variaciones son más pronunciadas. Para cada gráfica de la figura 20 se calculó su espectro de fase  $\phi$  en función de la profundidad  $z$ . Este proceso se realiza por igual para las porosidades de  $\beta = 0,05$  y  $\beta = 0,15$

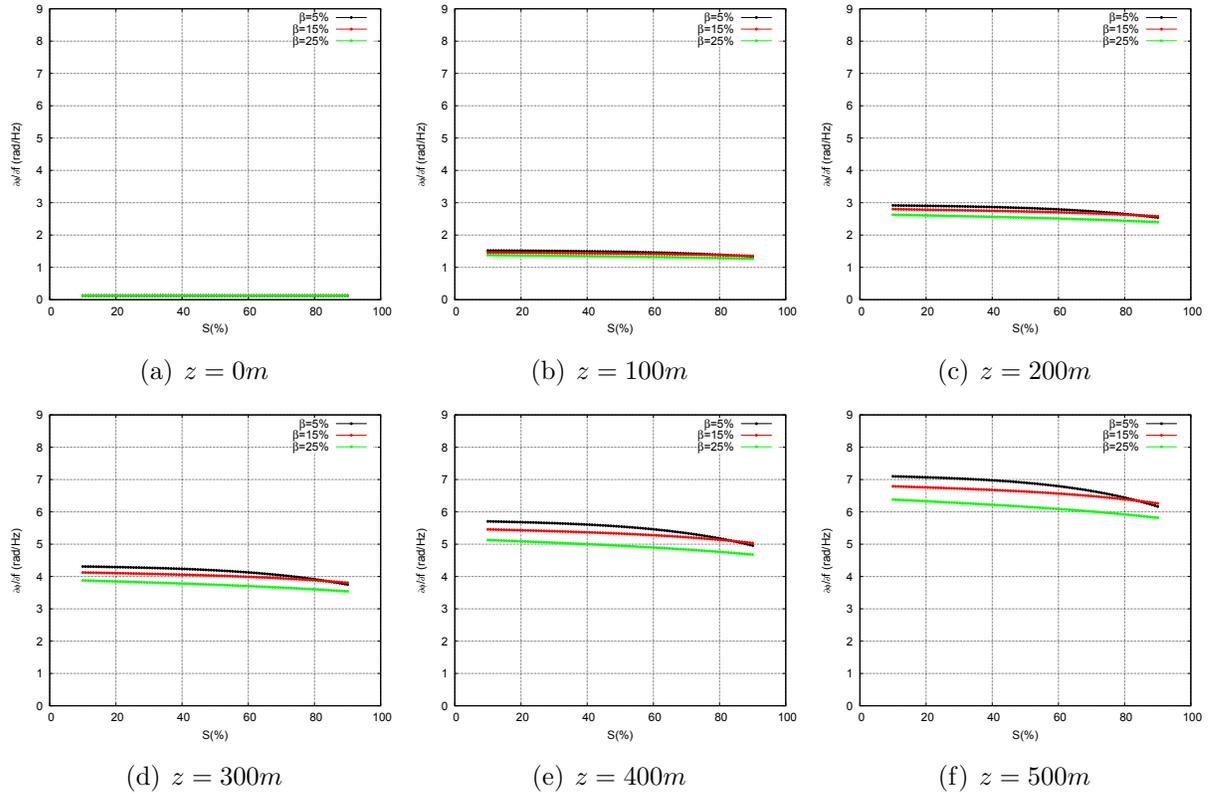
(a)  $\beta = 5\%$

(b)  $\beta = 15\%$ (c)  $\beta = 25\%$ 

**Figura 21.**  $\frac{\partial\phi}{\partial f}$  en función de la profundidad para diferentes valores de saturación  $S$  y porosidad  $\beta$ .

De la Figura 21 (a), (b) y (c) al aumentar la saturación  $S$  de agua, la variación de la fase en función de la frecuencia disminuye. Esto ocurre en cada una de las tres porosidades, y al aumentar el valor de la porosidad disminuye el valor de  $\frac{\partial\phi}{\partial f}$ . Por lo tanto si hay mayor presencia de gas se producirá una variación mayor de la fase de la señal, mientras que si se

encuentra saturado en su mayor porcentaje de agua la variación de la fase sera menor. Para diferentes profundidades se analizó el comportamiento de  $\frac{\partial\phi}{\partial f}$  en función de la saturación y se obtuvo la siguiente Figura 22.

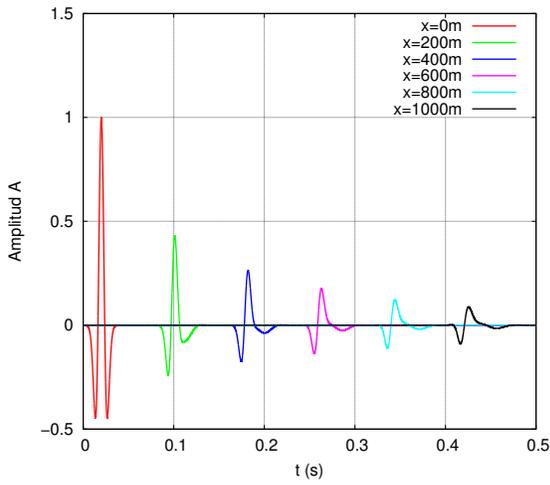
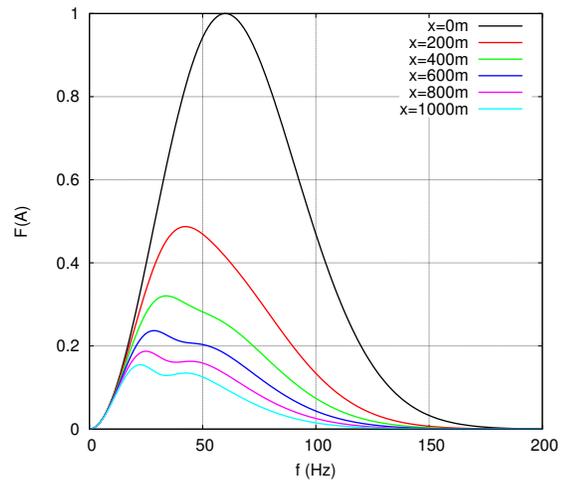
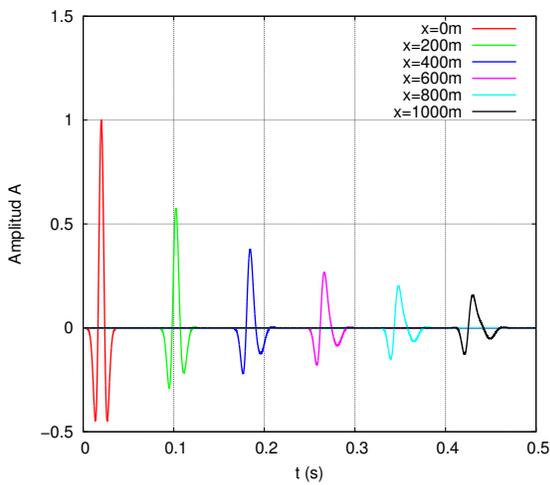
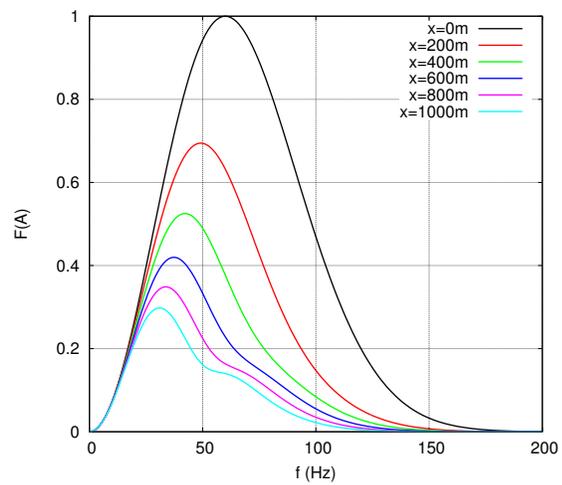
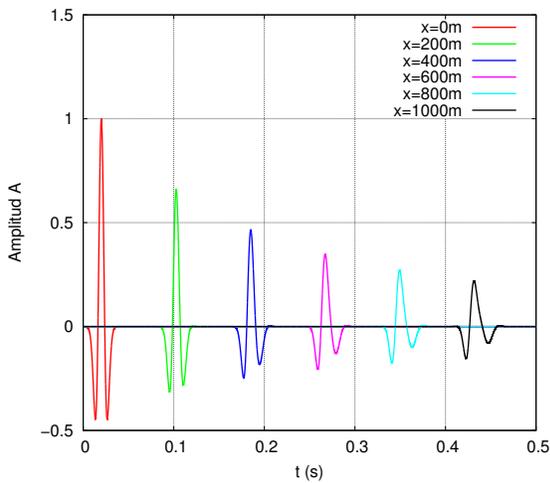
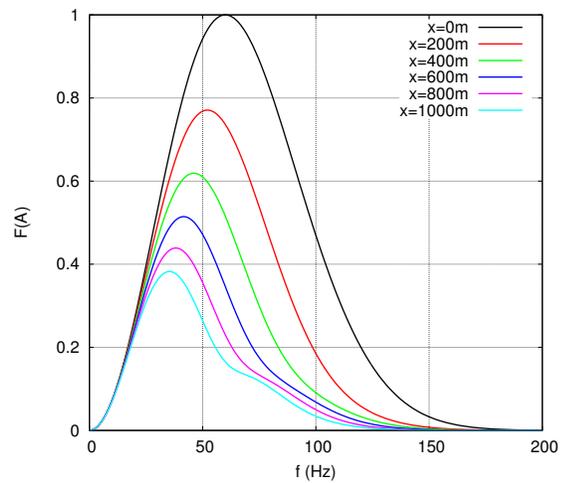


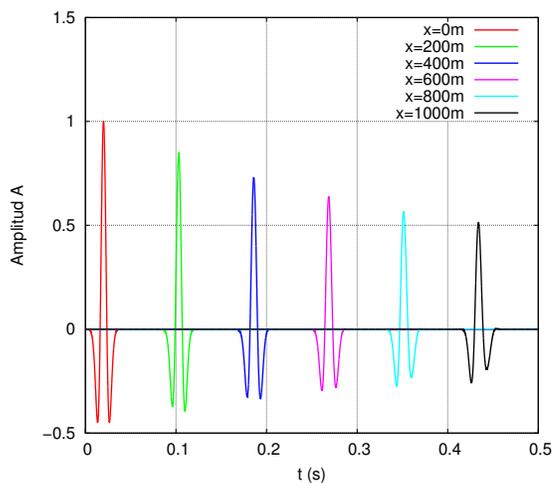
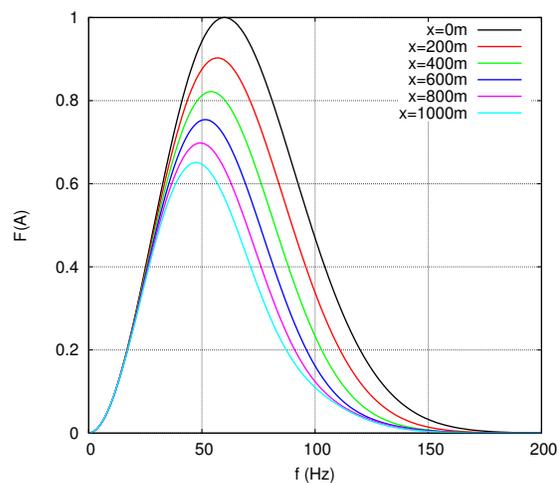
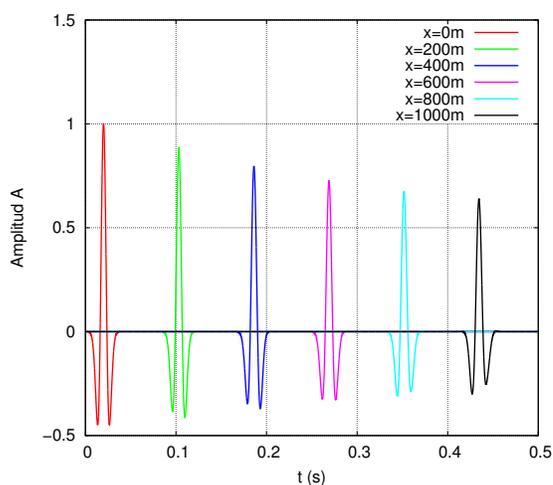
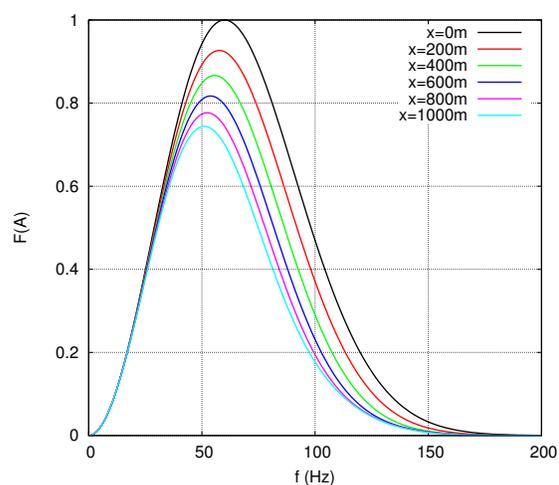
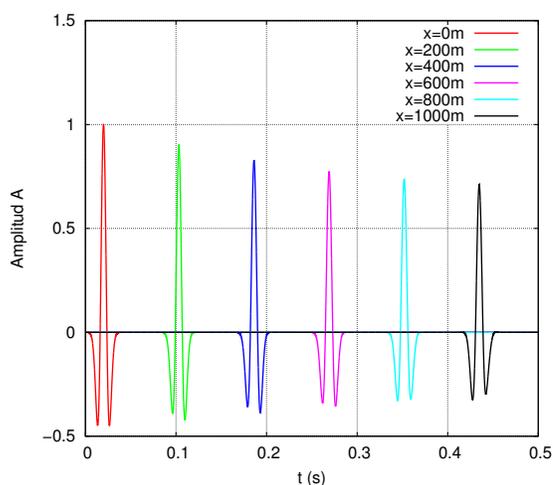
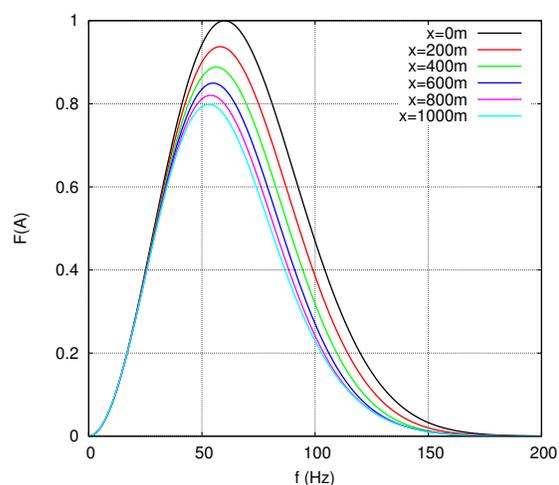
**Figura 22.**  $\frac{\partial\phi}{\partial f}$  en función de la saturación  $S$  a diferentes profundidades y porosidades  $\beta$ .

Se observa en la Figura 22 que para una porosidad  $\beta$  el valor de  $\frac{\partial\phi}{\partial f}$  disminuye cuando aumenta la saturación. Si el medio se encuentra saturado en su mayor parte de agua, se produce un cambio de fase, pero  $\frac{\partial\phi}{\partial f}$  disminuye. Si aumenta la cantidad de gas (saturaciones bajas), la variación  $\frac{\partial\phi}{\partial f}$  aumenta. Por otro lado al aumetar la profundidad el valor de  $\frac{\partial\phi}{\partial f}$  aumenta.

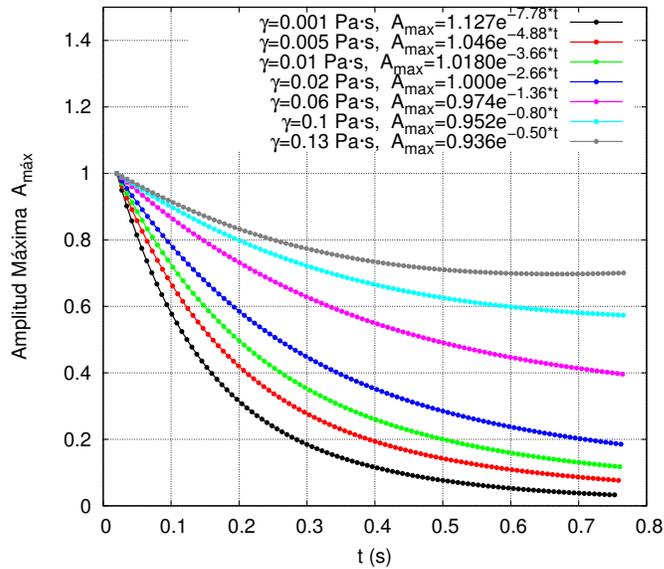
### 4.3. Análisis en función de la viscosidad $\gamma$ del fluido

Utilizando el mismo análisis se realizaron simulaciones variando el valor de la viscosidad dinámica  $\gamma$  del fluido que se encuentra saturando el poro. Conforme a lo anterior se utilizó un medio con una porosidad  $\beta = 10\%$  y una saturación  $S = 99,9\%$  y se registraron las siguientes señales, junto con el cálculo de su respectivo espectro de Amplitud.

(a) Señal  $\gamma = 0,001 Pa \cdot s$ (b) Esp. de Amplitud.  $\gamma = 0,001 Pa \cdot s$ (c) Señal  $\gamma = 0,005 Pa \cdot s$ (d) Esp. de Amplitud  $\gamma = 0,005 Pa \cdot s$ (e) Señal  $\gamma = 0,01 Pa \cdot s$ (f) Esp. de Amplitud  $\gamma = 0,01 Pa \cdot s$

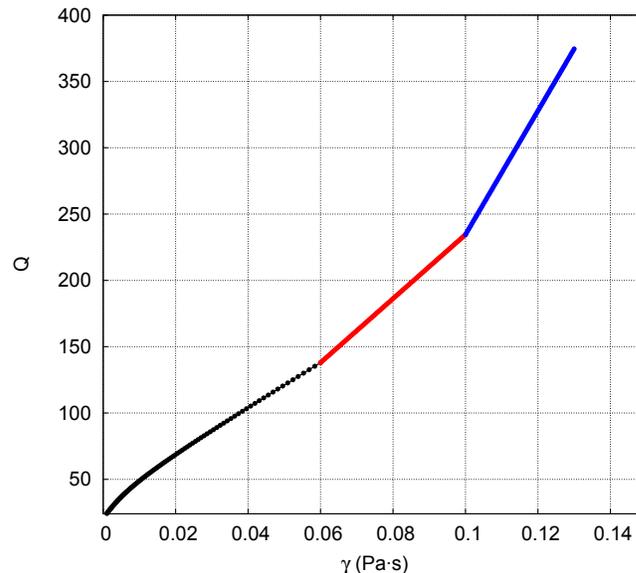
(g) Señal  $\gamma = 0,06 Pa \cdot s$ (h) Esp. de Amplitud  $\gamma = 0,06 Pa \cdot s$ (i) Señal  $\gamma = 0,1 Pa \cdot s$ (j) Esp. de Amplitud  $\gamma = 0,1 Pa \cdot s$ (k) Señal  $\gamma = 0,13 Pa \cdot s$ (l) Esp. de Amplitud  $\gamma = 0,13 Pa \cdot s$ **Figura 23.** Señal registrada y espectro de amplitudes para diferentes valores de  $\gamma$ .

Los resultados evidencian que para un valor de viscosidad dado, la amplitud de la onda disminuye pero no tan fuertemente en comparación con otros valores de viscosidad menores. Esto se debe a que al aumentar el valor de la viscosidad, la resistencia del fluido a desplazarse aumenta, por lo tanto el fluido se acopla más al movimiento de la matriz. Ahora se toman las máximas amplitudes y se obtiene la siguiente Figura 24



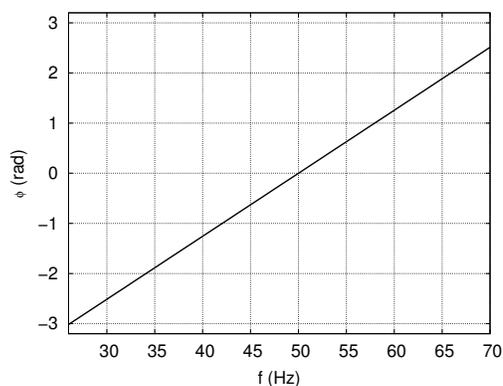
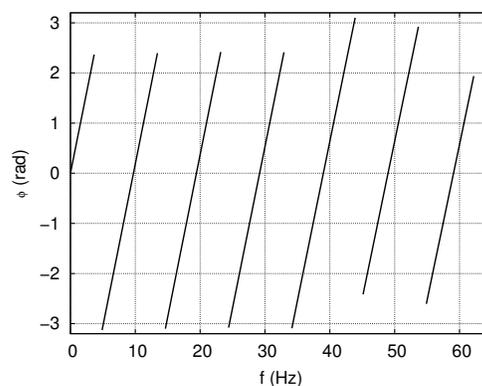
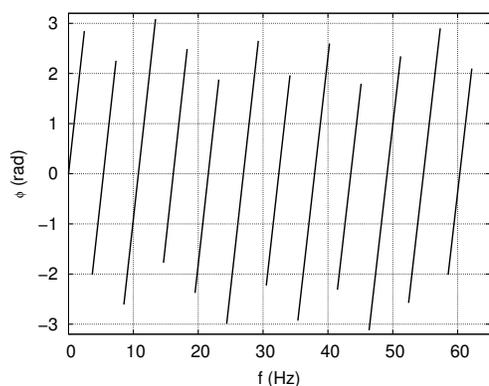
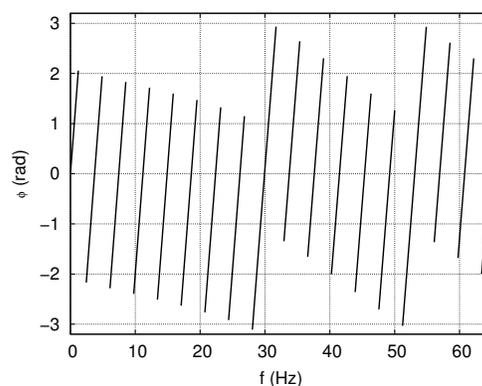
**Figura 24.** Amplitud máxima en función del tiempo para diferentes valores de viscosidad  $\gamma$ .

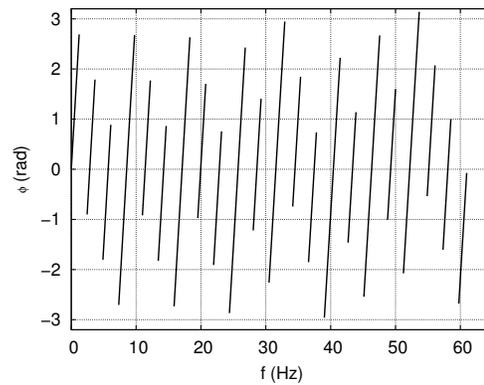
Con el decaimiento de la amplitud de la señal, se obtuvo el factor de calidad  $Q$  en función de la viscosidad dinámica  $\gamma$ .



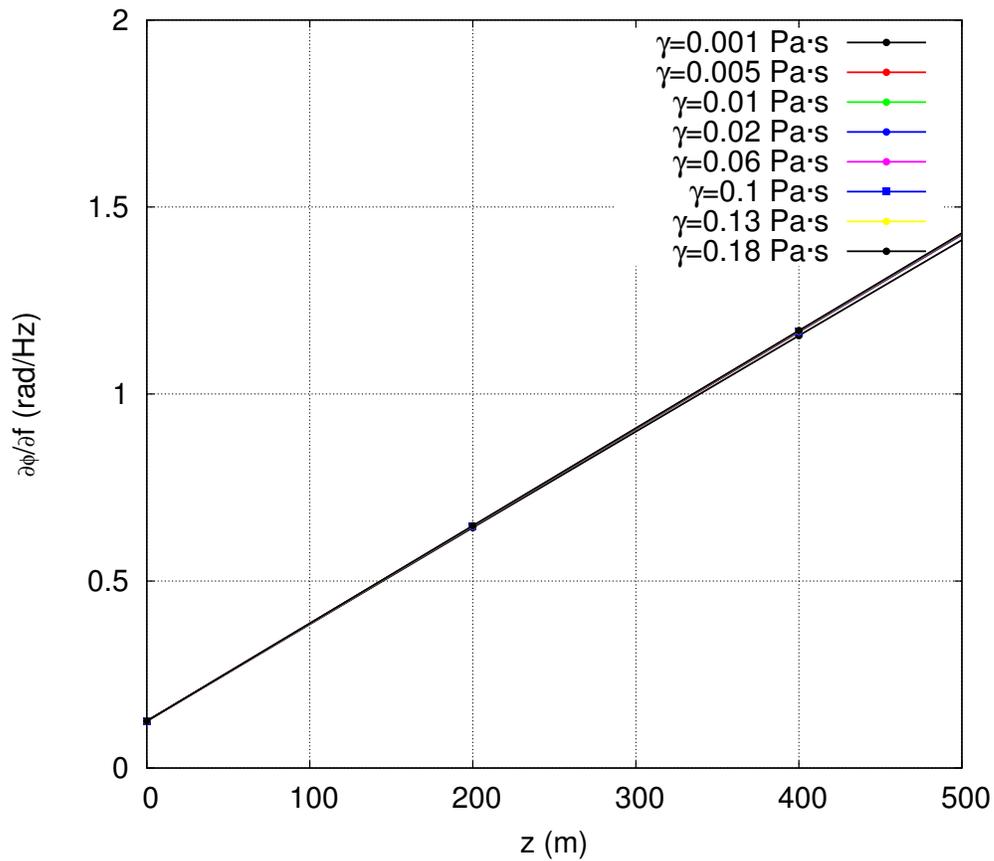
**Figura 25.** Factor de calidad  $Q$  en función de la viscosidad dinámica  $\gamma$ .

En la Figura 25 se puede establecer un comportamiento proporcional entre el factor de calidad  $Q$  y el valor de la viscosidad dinámica. Esto se debe a que cuando la onda se propaga en un medio poroso que posee un mayor valor de viscosidad, el fluido se moverá de acuerdo al movimiento del medio poroso, ya que su capacidad de movimiento dentro de las cavidades porosas es mínima. Si el valor de viscosidad del fluido es menor, implica que el fluido se puede mover más fácilmente dentro del poro y por ende se produce mayor variación de la amplitud, ya que el movimiento de los fluidos y el medio poroso experimentarían un desfase. Se identifican tres regiones cuyos comportamientos se pueden aproximar a tres rectas de diferente pendiente. Esto quiere decir que dependiendo del tipo de fluido que esté saturando la matriz, dentro de un rango de viscosidades dinámica, el factor de calidad  $Q$  se puede comportar linealmente. En la Figura 25 la línea negra representa fluidos donde la viscosidad es muy baja, es decir se refiere a fluidos como el agua, el hexano o hidrocarburos aromáticos como el benceno. En ésta categoría se pueden incluir el crudo de pozos normales (Carrera, 2001) según API. La segunda recta corresponde a un rango más amplio de hidrocarburos, como algunos aceites cuya densidad es similar al aceite vegetal. En la tercera recta tenemos algunos hidrocarburos mas viscosos como el Crudo La Rosa (Carrera, 2001). Ahora se calculan sus respectivos espectros de fase a diferentes profundidades.

(a)  $x = 0m$ (b)  $x = 200m$ (c)  $x = 400m$ (d)  $x = 600m$

(e)  $x = 800m$ **Figura 26.** Espectro de Fase en función de la frecuencia para  $\gamma = 0,001 Pa \cdot s$ .

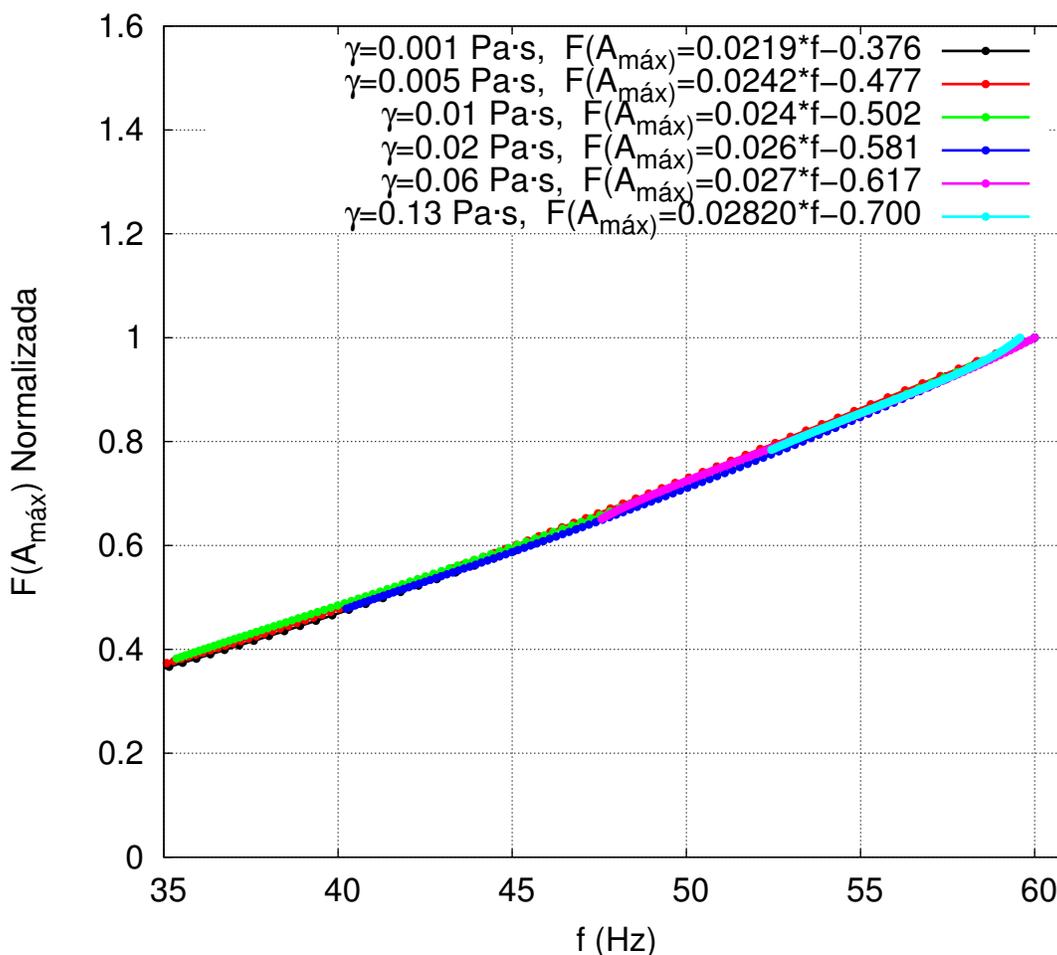
A partir de los espectros mostrados en 26 se calcula el valor de  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ , obteniendo la siguiente Figura 27.

**Figura 27.**  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$  en función de la profundidad.

El valor de  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$  aumenta con la profundidad, pero no se observa un cambio significativo con

el valor de la viscosidad del fluido debido a que los poros se encuentran completamente saturados y al aumentar la viscosidad el fluido tendrá una mayor dificultad para desplazarse en el poro.

Ahora a partir de los espectros de amplitud, se toman las máximas amplitudes correspondientes a la frecuencia dominante, para cada valor de viscosidad dinámica y se obtuvo la siguiente Figura 28.

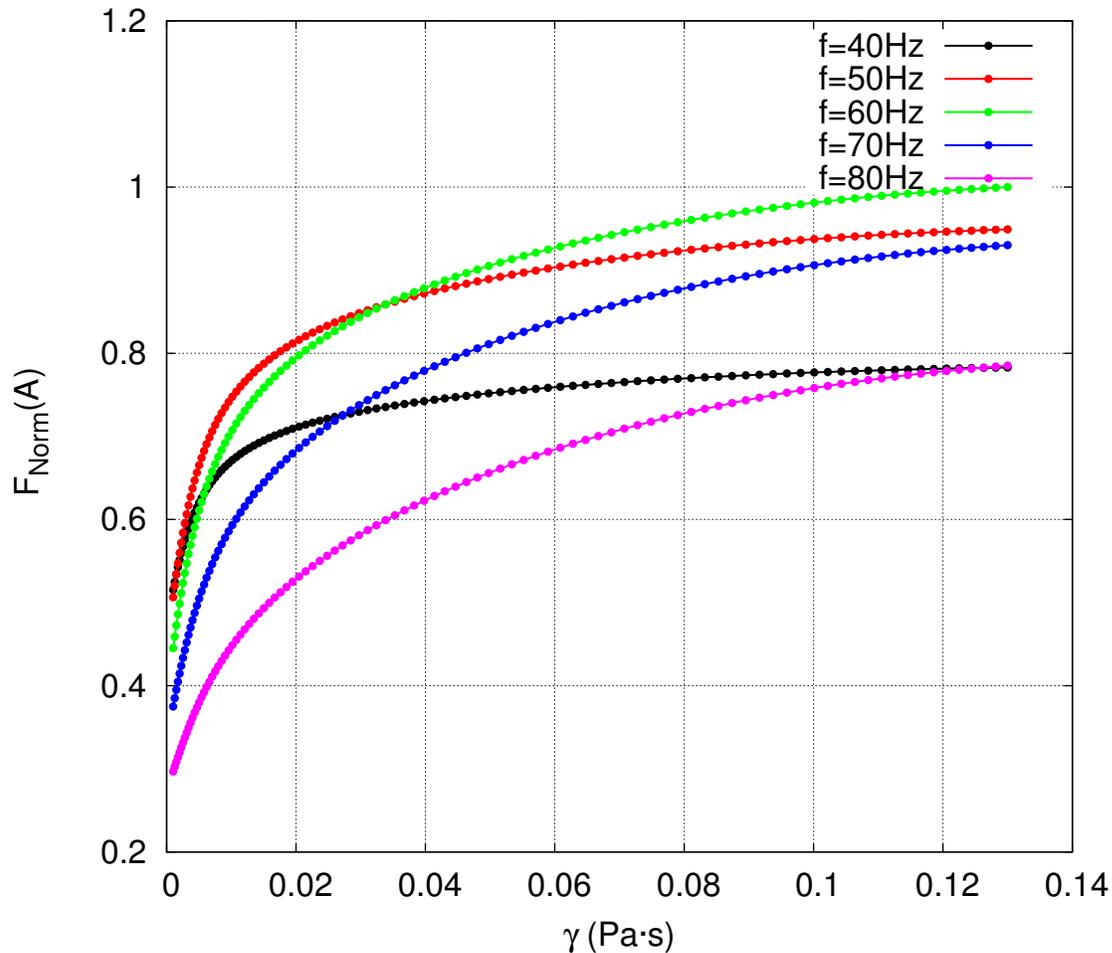


**Figura 28.** Espectro de Amplitud máxima normalizada  $F(A_{\text{máx}})_{\text{Normalizado}}$  en función de frecuencia predominante  $f$ , para diferentes valores de viscosidad dinámica  $\gamma$ .

Se observa de la Figura 28 que la máxima amplitud asociada a la frecuencia dominante en el espectro de amplitud, presenta un comportamiento lineal a medida que experimenta un corrimiento hacia las frecuencias bajas. Por lo tanto no solo disminuye el valor de la frecuencia principal, sino que el valor de la amplitud en el espectro de amplitudes disminuye.

De los espectros de amplitud, que se obtuvieron en la Figura 23, se realizan cortes para

determinar como es la variación del espectro de amplitud para diferentes valores de frecuencia. Los resultados se observan en la Figura 29



**Figura 29.** Variación del espectro de amplitud en función de la viscosidad dinámica  $\gamma$ , para diferentes valores de frecuencias contenidas en la señal.

Se identifica que para valores de frecuencia por debajo de la frecuencia predominante asociada al espectro de amplitud máximo, el espectro de amplitud aumenta más rápidamente a medida que el valor de la viscosidad dinámica  $\gamma$  aumenta. Lo mismo ocurre con las frecuencias mayores a la frecuencia predominante, salvo que el aumento en el valor del espectro de amplitud es más suave a medida que aumenta la viscosidad. A medida que el valor de  $\gamma$  aumenta se puede observar un comportamiento cuasi-convergente en los espectros de amplitudes tanto para altas como para bajas frecuencias.

## 4.4. Simulación de modelo de tres capas

Ahora se procede a realizar una simulación de una onda que se propaga en un sistema conformado por tres medios que poseen diferentes valores elastomecánicos. El sistema se puede ver en la siguiente Figura 30.

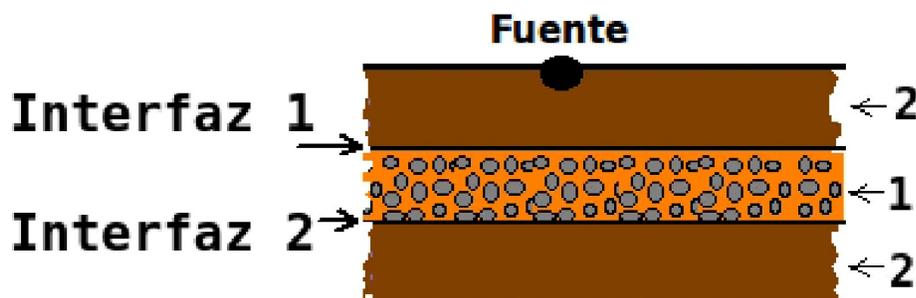


Figura 30. Modelo de tres medios.

El sistema consiste en tres medios cuyos valores elastomecánicos están dados por los valores de la Tabla 2 para el medio 1, y Tabla 3 para el medio 2.

Tabla 2. Parámetros elastomecánicos del medio 1.

Magnitud Física y Unidades	Agua	Arena	Aire
Densidad ( $\frac{kg}{m^3}$ )	$\rho_w = 1 \times 10^3$	$\rho_s = 2,65 \times 10^3$	$\rho_g = 1,21$
Módulo de Compresibilidad de cada medio ( $\frac{N}{m^2}$ )	$k_w = 2 \times 10^9$	$k_s = 2 \times 10^{10}$	$k_g = 1,42 \times 10^5$
Viscosidad Dinámica ( $\frac{N \cdot s}{m^2}$ )	$\gamma_1 = 1 \times 10^{-3}$		$\gamma_2 = 1,81 \times 10^{-5}$
Porosidad		$10\% \leq \beta \leq 30\%$	
Saturación		$10\% \leq S \leq 90\%$	
Diámetro de los granos ( $m$ )		$d = 5 \times 10^{-4}$	
Módulo de Compresibilidad de la Estruct. ( $\frac{N}{m^2}$ )		$k_b = 4,36 \times 10^7$	
Módulo de Cizalladura de la Estruct. ( $\frac{N}{m^2}$ )		$\mu = 2,61 \times 10^7$	
Permeabilidad Dinámica ( $m^2$ )		$10^{-8} \leq \chi \leq 10^{-12}$	
Tortuosidad de los poros $c$		$c = 1,25$	

**Tabla 3.** Parámetros elastomecánicos del medio 2.

Magnitud Física y Unidades	Agua	Arena	Aire
Densidad ( $\frac{kg}{m^3}$ )	$\rho_w = 1 \times 10^3$	$\rho_s = 2,65 \times 10^3$	$\rho_g = 1,21$
Módulo de Compresibilidad de cada medio ( $\frac{N}{m^2}$ )	$k_w = 2 \times 10^9$	$k_s = 2 \times 10^{10}$	$k_g = 1,42 \times 10^5$
Viscosidad Dinámica ( $\frac{N \cdot s}{m^2}$ )	$\gamma_1 = 1 \times 10^{-3}$		$\gamma_2 = 1,81 \times 10^{-5}$
Porosidad		$\beta = 0$	
Saturación		$S = 100\%$	
Diámetro de los granos ( $m$ )		$d = 5 \times 10^{-4}$	
Módulo de Compresibilidad de la Estruct. ( $\frac{N}{m^2}$ )		$k_b = 4,36 \times 10^9$	
Módulo de Cizalladura de la Estruct. ( $\frac{N}{m^2}$ )		$\mu = 2,61 \times 10^9$	
Permeabilidad Dinámica ( $m^2$ )		$10^{-12} \leq \chi \leq 10^{-12}$	
Tortuosidad de los poros $c$		$c = 1,25$	

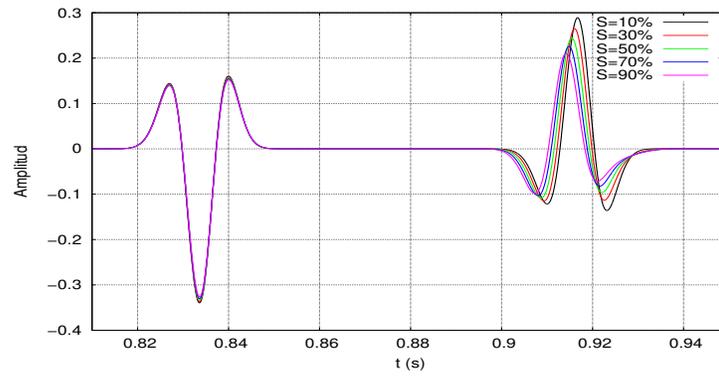
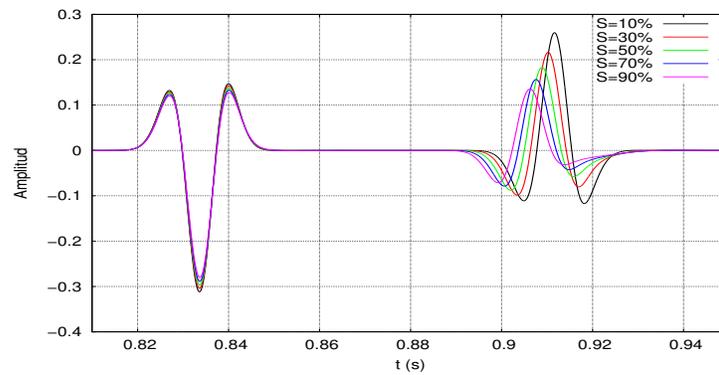
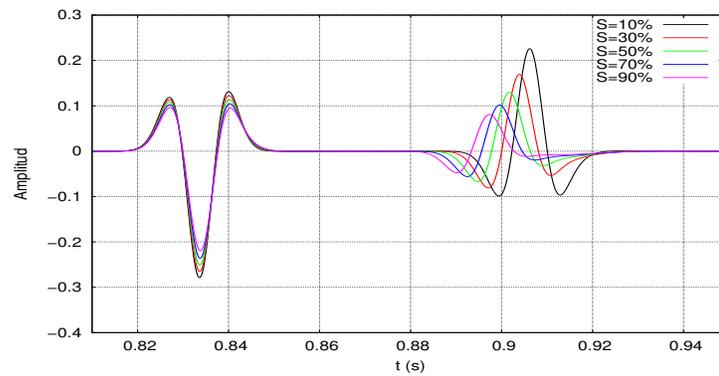
El medio 1 corresponde a un medio poroso que se encuentra a una profundidad de  $2000m$  y tiene un espesor de  $75m$ . El sistema representa un sistema de tres capas donde hay presencia de agua o petróleo y gas en el medio poroso. A partir de éstos parámetros se procede a realizar varias simulaciones en donde se cambian los valores de porosidad y saturación, para identificar como es la respuesta del medio registrada en superficie cuando una onda plana se propaga por el medio.

El medio 1 representa un ambiente donde hay porosidad con un grado de saturación de agua y gas, lo que permite almacenar fluidos, por lo tanto este medio representa el reservorio.

El medio 2 representa un medio donde la porosidad y permeabilidad es muy baja y por lo tanto no hay posibilidad de que almacene algún tipo de fluido y a su vez funciona como roca sellante para que no haya migración del fluido almacenado en el medio 1.

#### 4.4.1. Cambio de la señal registrada en función de $\beta$ y $S$

Ahora se realizan varias simulaciones para determinar como es el cambio de la respuesta en superficie cuando se aumenta la saturación entre  $S = 10\%$  y  $S = 90\%$  para porosidades de  $\beta = 10\%$ ,  $\beta = 20\%$  y  $\beta = 30\%$  en el medio 1.

(a)  $\beta = 10\%$ (b)  $\beta = 20\%$ (c)  $\beta = 30\%$ 

**Figura 31.** Amplitud de la señal registrada en superficie para diferentes valores de  $\beta$  y  $S$ .

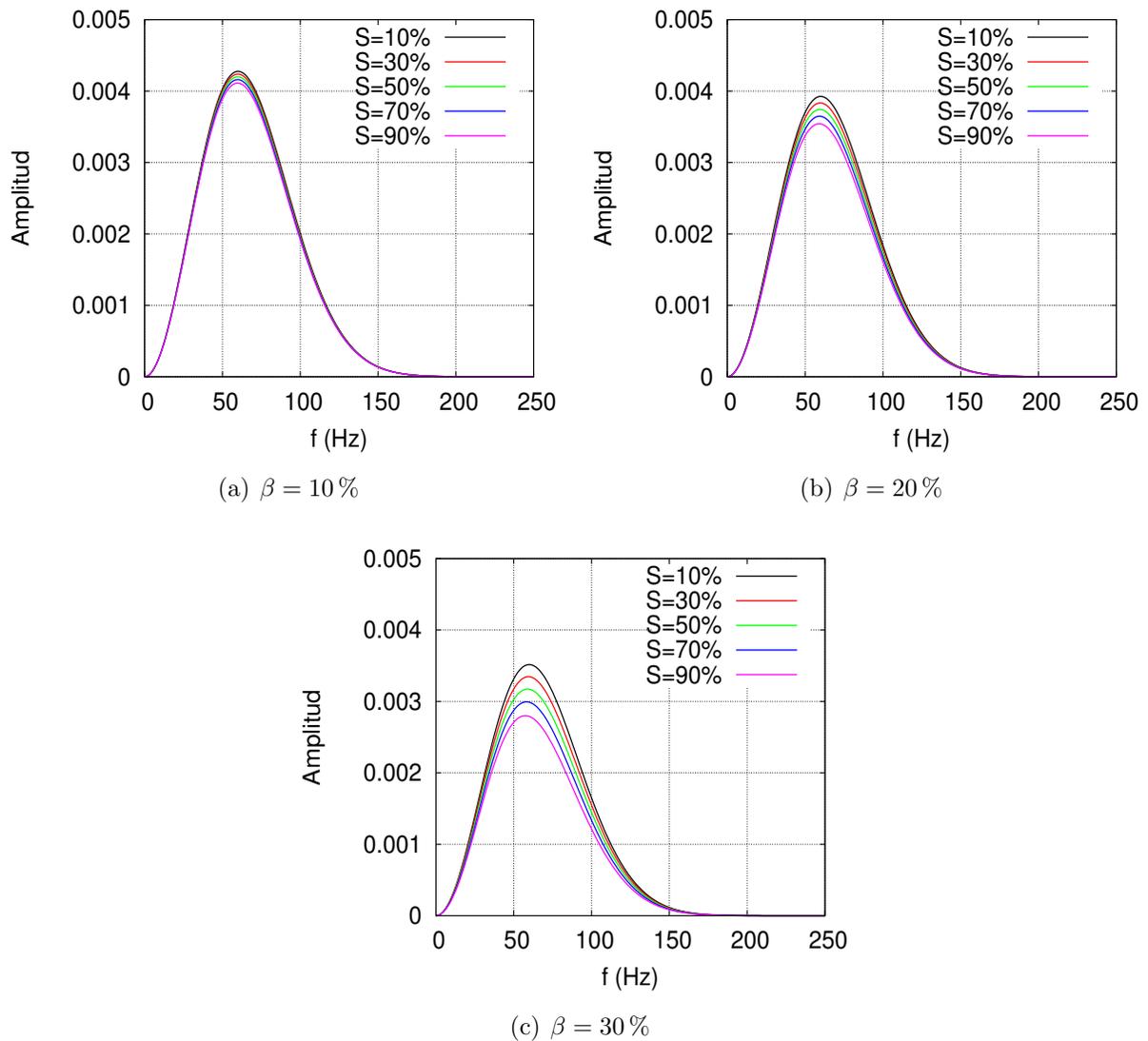
De la Figura 31(a),(b) y (c) se identifican dos arribos en los tiempos ( $t \approx 0,83s$  y  $t \approx 0,9s$ ). El primero de ellos corresponde a la reflexión que hay cuando la onda incide en la primera

interfaz 1 (Ver Figura 30) entre el medio 2 y medio 1 que se encuentra ubicada a una profundidad ( $z = 2000m$ ). Posteriormente parte de la energía de la onda se transmite al medio 1 que es el medio poroso de interés y ésta onda transmitida se refleja en la interfaz 2 entre el medio 1 y medio 2 a una profundidad de  $z = 2075m$ .

De la Figura 31(a) en el primer arribo que representa la reflexión de la onda incidente en la interfaz 1, se observa que hay una disminución en el valor de la amplitud a medida que aumenta la saturación del medio 1, y éste aumento se hace mas notorio a medida que aumenta el valor de la porosidad (Ver Figura 31(b) y (c)). Esto ocurre debido a que al variar la saturación y la porosidad del medio 1, se está cambiando su respectivo valor de velocidad y con ello cambia la impedancia acústica. Este valor define junto con la impedancia acústica del medio 2, el coeficiente de reflexión entre la amplitud de la onda incidente y la onda reflejada y por ello se observa que la amplitud varía con la porosidad y la saturación. Si la saturación es baja  $S \approx 10\%$  la amplitud es mayor, pero a medida que se satura con agua el medio 1, la amplitud del primer arribo disminuye. Este comportamiento es más visible en porosidades altas ( $\beta \approx 30\%$ ).

De la Figura 31(a) en el segundo arribo que representa la onda que se transmitió al medio poroso y es reflejada en la interfaz 2, se evidencian cambios en la amplitud de la señal donde el valor máximo presenta un corrimiento temporal cuando el valor de  $S$  varía. Si el valor de la saturación aumenta, la máxima amplitud disminuye. Esta variación en la amplitud se puede apreciar tanto para porosidades altas y bajas, pero para porosidades altas el decaimiento en la amplitud es mayor (Ver Figura 31(b) y (c)).

Realizando un análisis análogo al que se hizo para el primer arribo, el valor de la amplitud de la onda transmitida esta ligado a la impedancia acústica de los medios 1 y 2, por ello al variar la porosidad o la saturación del medio 1, se está variando la relación entre las amplitudes de la onda incidente y transmitida según el coeficiente de transmisión. Debido a que la señal sufre cambios en la fase de los armónicos que la componen se calculan los espectro de amplitud de la señal para cada uno de los dos arribos a diferentes porosidades y saturaciones. Los resultados se pueden ver en la Figura 32.

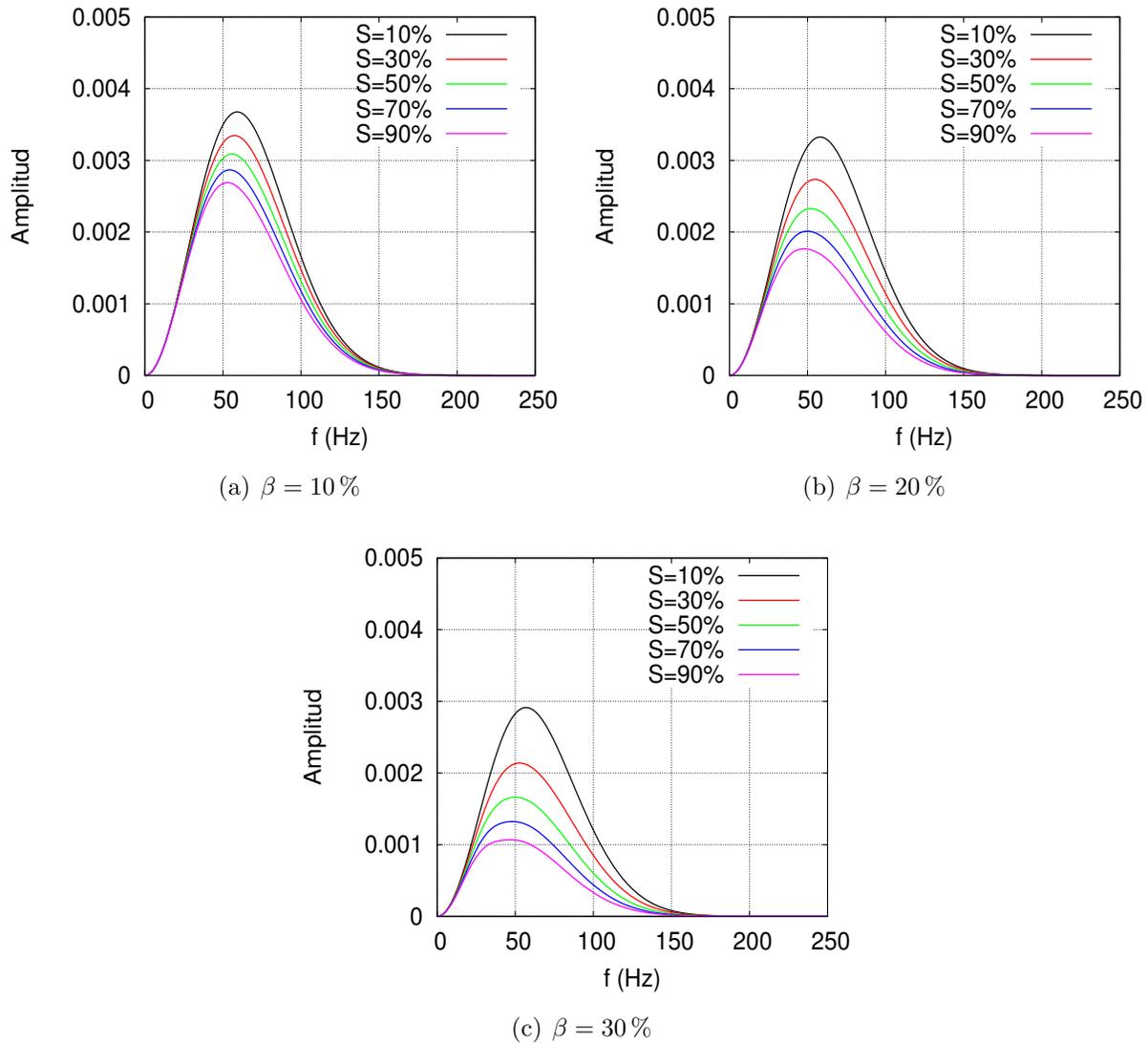


**Figura 32.** Espectro de amplitud para el primer arribo registrado en superficie para diferentes valores de  $\beta$  y  $S$ .

En la Figura 32(a) Se observa que hay un decrecimiento en el valor del espectro de amplitud a medida que el valor de la saturación en el medio 1 aumenta. Debido a que el valor de la porosidad es bajo, esta disminución es pequeña. Si se observan las Figuras 32(b) y (c), ésta disminución en la amplitud del espectro se hace mayor. Por lo tanto el nivel de saturación del medio 1 afecta la amplitud de la onda reflejada así ésta no se propague sobre el medio 1. Lo anterior ocurre debido a que al variar la saturación del medio 1 se estaría cambiando el valor de la impedancia acústica y esta variación afecta la relación entre la onda incidente y reflejada cuando la onda incide en la interfaz 1.

Ahora se calculan los respectivos espectros de amplitud para el segundo arribo y se obtiene

lo siguiente:

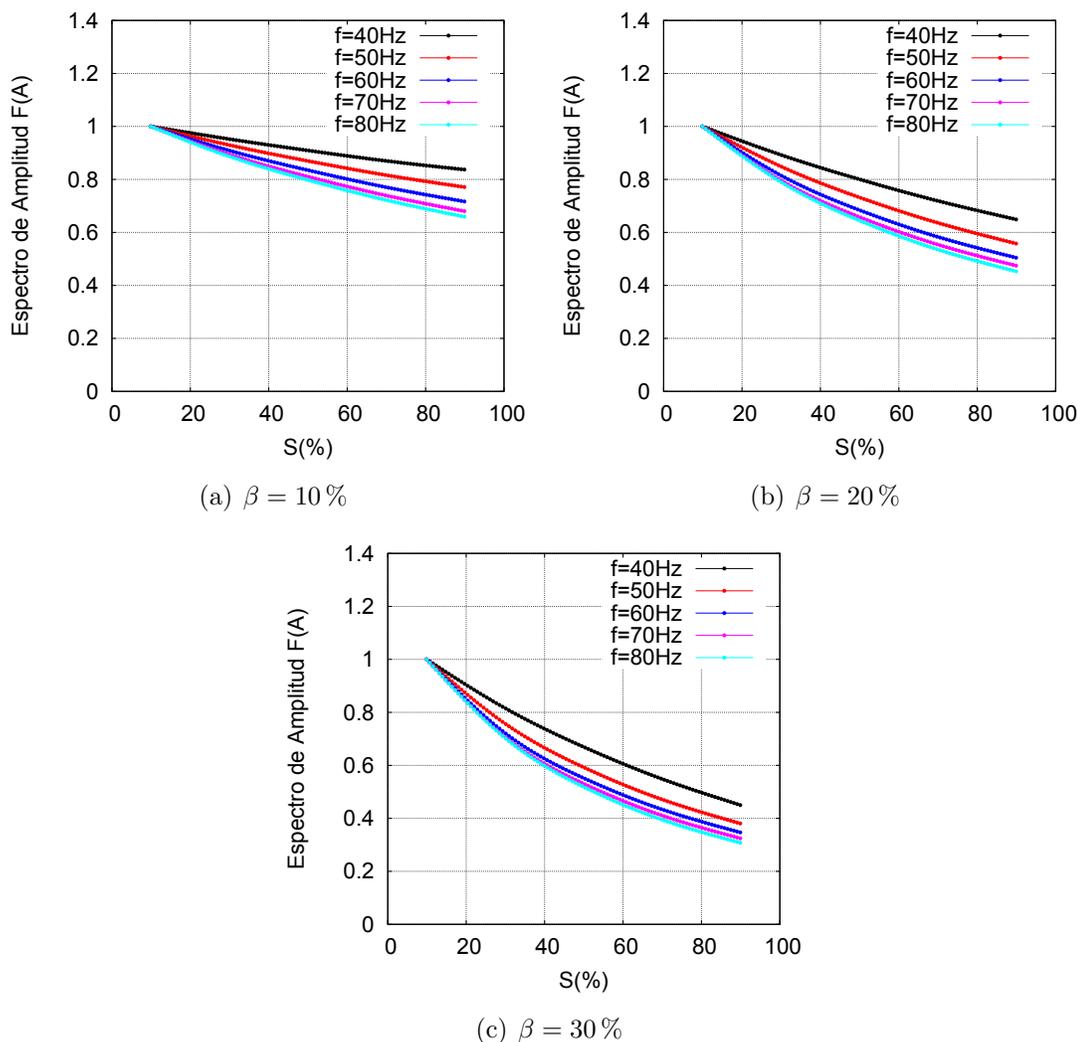


**Figura 33.** Espectro de amplitud para el segundo arribo registrado en superficie para diferentes valores de  $\beta$  y  $S$ .

Se observa en la Figura 33(a) que la amplitud en el espectro disminuye si lo comparamos con 32(a). Esto se debe a que el segundo arribo se propagó por el medio poroso y se reflejó en la interfaz 2, por ello no solo tarda más en llegar a la superficie sino la disminución en la amplitud de la señal y de su espectro de amplitudes es mayor.

Para el segundo arribo (Figura 39(b)) se puede ver que al aumentar la saturación, el valor de  $\frac{\partial\phi}{\partial f}$  se incrementa negativamente. Si aumenta la porosidad el valor de  $\frac{\partial\phi}{\partial f}$  también se incrementa. A partir del espectro de amplitud para el segundo arribo (Ver Figura 33) se re-

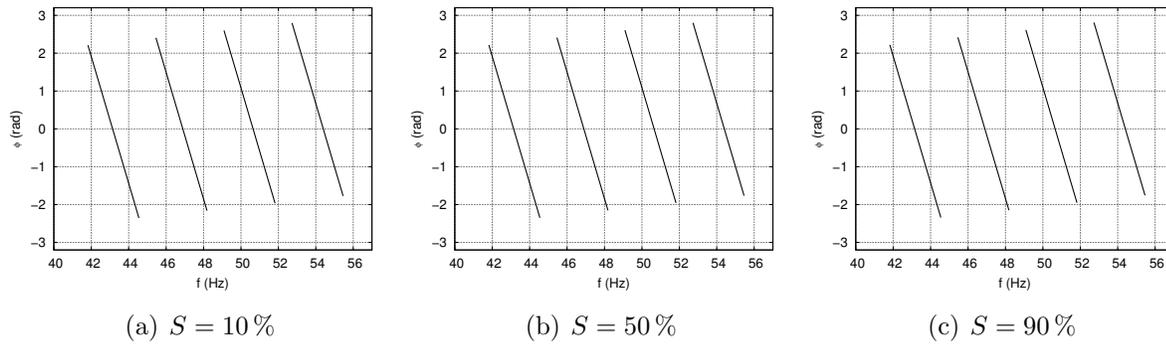
alizaron cortes en el contenido de frecuencias ( $f = 40Hz$ ,  $f = 50Hz$ ,  $f = 50Hz$ ,  $f = 70Hz$  y  $f = 80Hz$ ) para establecer como cambia la amplitud en el espectro de amplitud en función de la Saturación para diferentes porosidades.



**Figura 34.** Amplitud del espectro de amplitud normalizado del segundo arribo en función de la saturación.

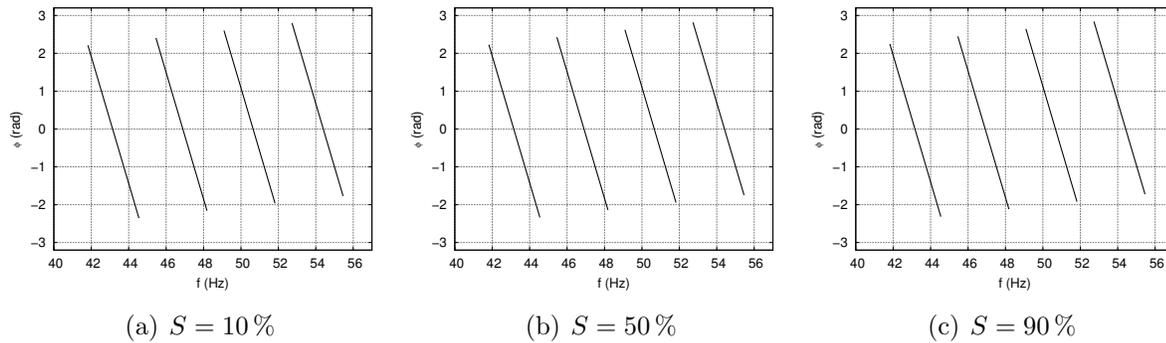
En la Figura 34(a) se observa que para una frecuencia determinada, se produce una disminución de la amplitud en el espectro de amplitudes asociada a medida que aumenta la saturación. Al aumentar la frecuencia aumenta la variación de la amplitud en el espectro de amplitudes en función de la saturación, y ésta variación se hace mayor cuando el valor de la porosidad aumenta (Ver Figura 34 (b) y (c)).

Se calculan los espectros de fase para el primer arribo y se obtiene la siguiente Figura 35.

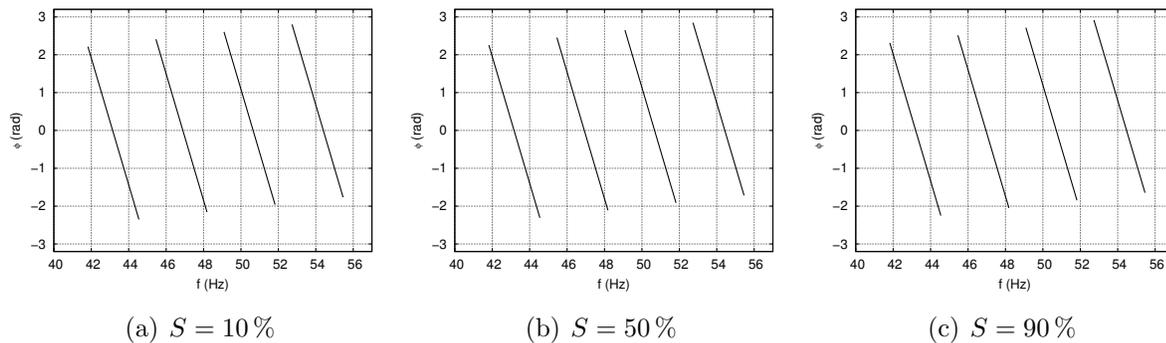


**Figura 35.** Espectro de fase para el primer arribo registrado en superficie para diferentes valores de  $S$  con una porosidad  $\beta = 10\%$ .

Se observa que hay un cambio de fase, pero éste no cambia cuando se aumenta la porosidad y la saturación del medio 1. Para corroborar ésta información realizamos los espectros de fase correspondientes a las porosidades  $\beta = 20\%$  y  $\beta = 30\%$  y los resultados se observan en las Figuras 36 y 37.

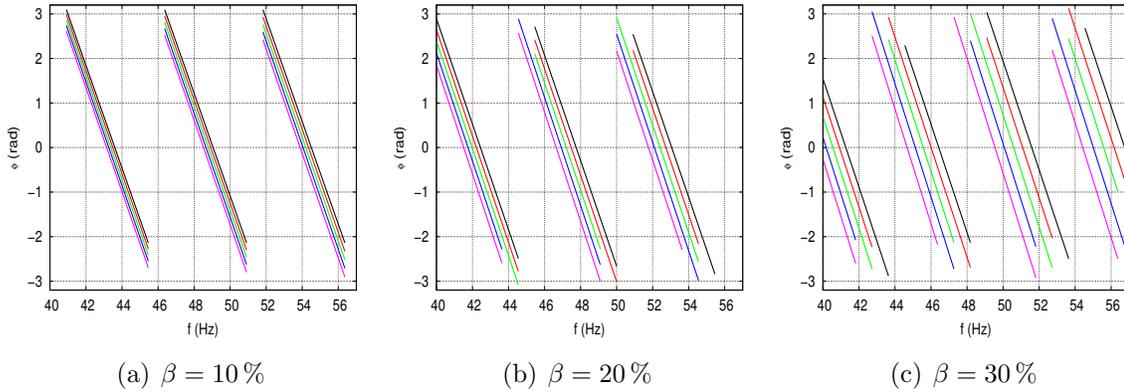


**Figura 36.** Espectro de fase para el primer arribo registrado en superficie para diferentes valores de  $S$  con una porosidad  $\beta = 20\%$ .



**Figura 37.** Espectro de fase para el primer arribo registrado en superficie para diferentes valores de  $S$  con una porosidad  $\beta = 30\%$ .

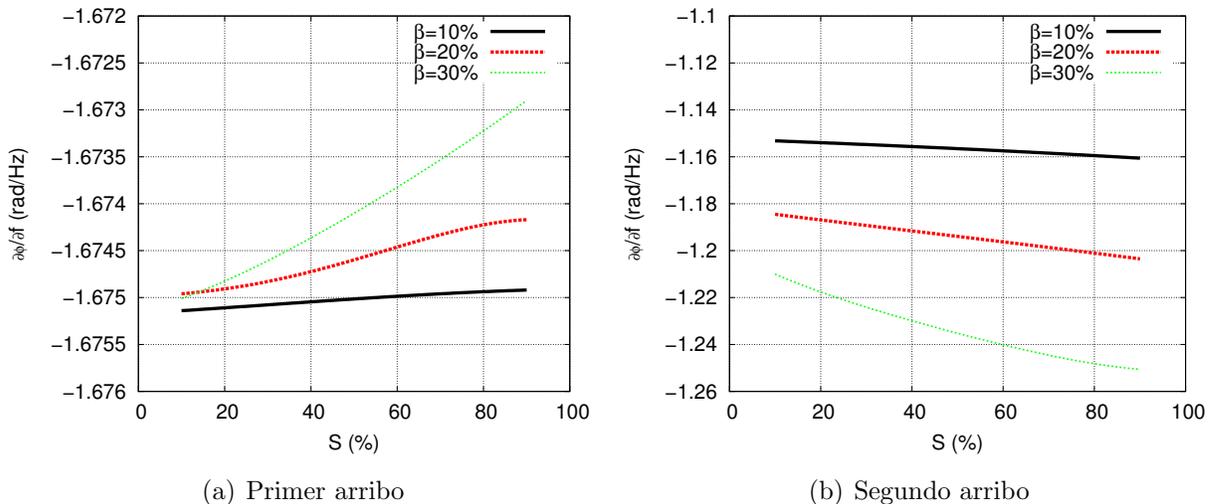
Se observa en la Figura 36 y 37 que prácticamente el comportamiento de la fase es el mismo, por lo tanto se concluye que la porosidad del medio 1, solo afecta la amplitud del primer arribo. Para el segundo arribo los espectros de fase se pueden ver en la Figura 38



**Figura 38.** Espectro de fase para el segundo arribo registrado en superficie para diferentes valores de  $\beta$  y  $S$ .  $S = 10\%$  negro,  $S = 30\%$  rojo,  $S = 50\%$  verde,  $S = 70\%$  azul y  $S = 90\%$  fucsia.

Se observa en la Figura 38(a), (b) y (c) que hay un cambio de fase para cada una de las tres porosidades a medida que aumenta la saturación. El incremento de la fase es negativa, por lo tanto ocurre un mayor desfase para las porosidad altas.

Ahora se calcula  $\frac{\partial\phi}{\partial f}$  en función de la saturación para los dos arribos en función de la saturación para cada una de las porosidades y se obtiene la siguiente Figura 39.

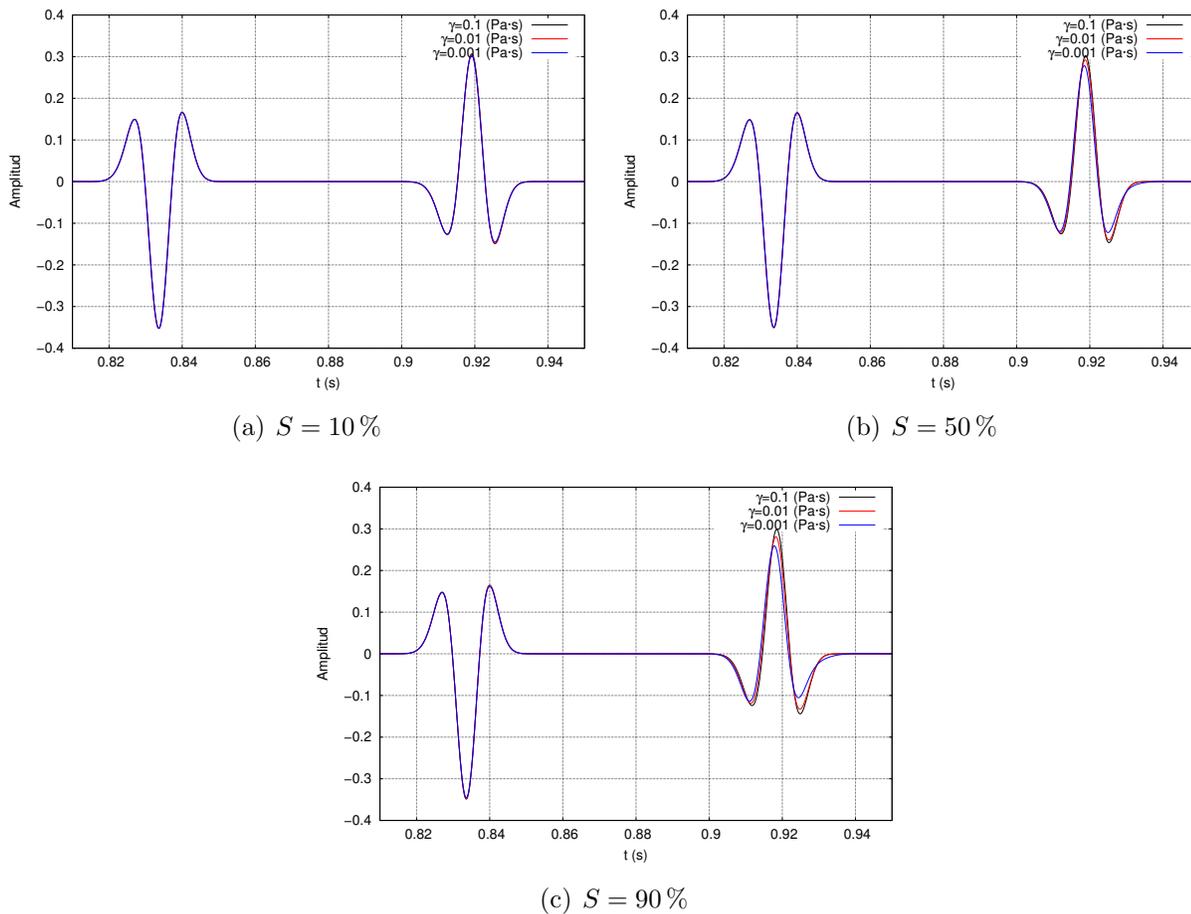


**Figura 39.**  $\frac{\partial\phi}{\partial f}$  en función de la saturación para diferentes porosidades.

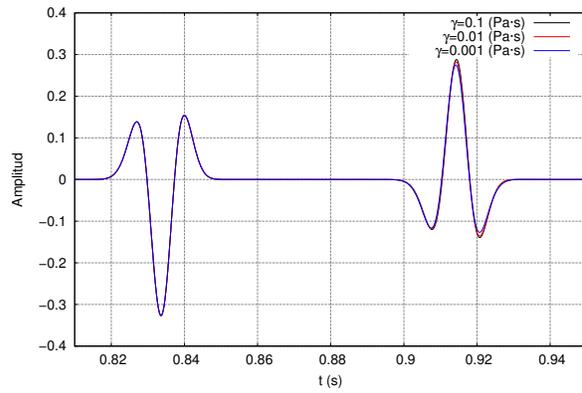
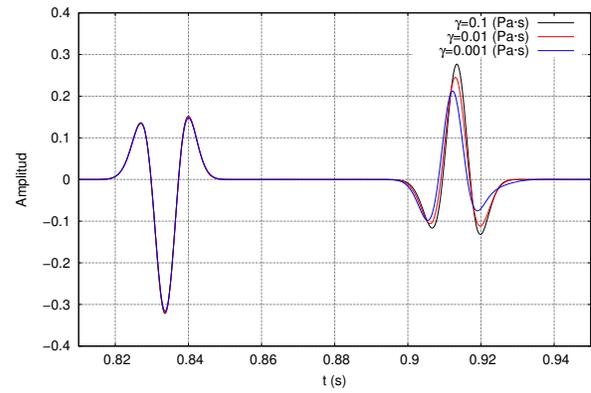
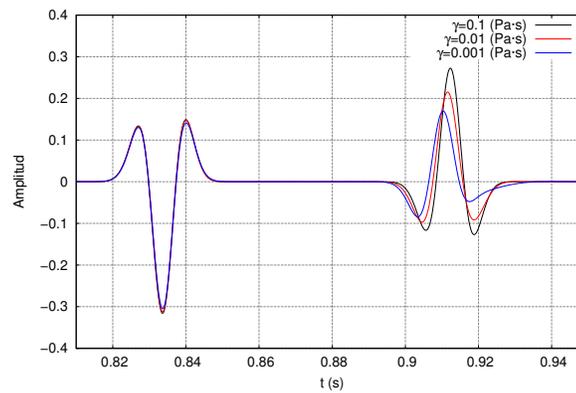
De la Figura 39 se observan dos situaciones. La primera es que para el primer arribo (Figura 39(a)) se observa que al aumentar la saturación del medio 1 decrece negativamente el valor de  $\frac{\partial \phi}{\partial f}$  para cualquier porosidad. A mayor porosidad  $\beta$  del medio 1 el valor de  $\frac{\partial \phi}{\partial f}$  decrece negativamente.

#### 4.4.2. Cambio de la señal registrada en función de la viscosidad $\gamma$

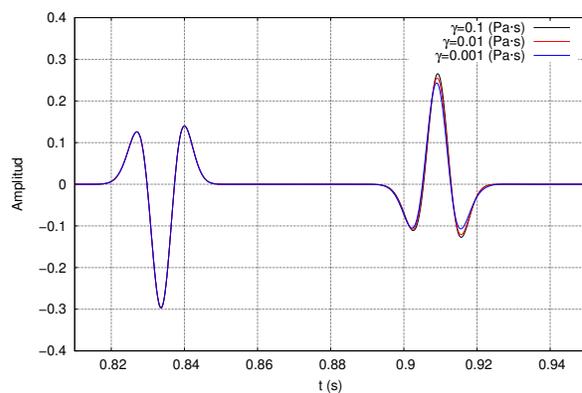
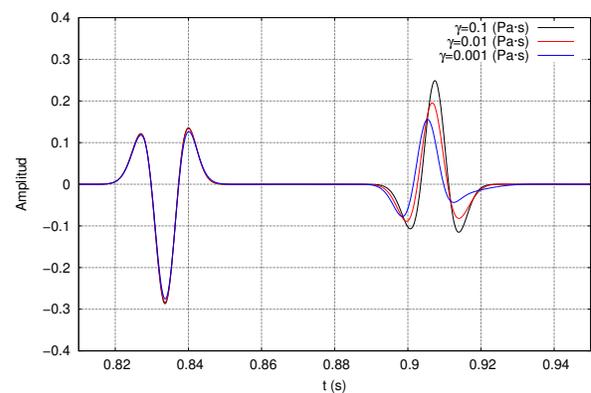
Utilizando los mismos parámetros físicos se analiza la respuesta en superficie del medio para diferentes valores de viscosidad dinámica del fluido. A partir de éstos datos registrados se calculan los respectivos espectros de amplitud y espectros de fase para cada valor de viscosidad.

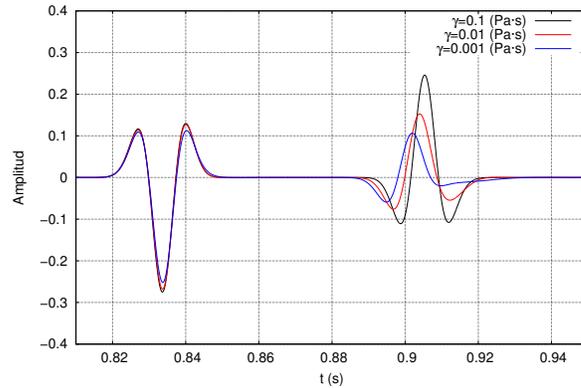


**Figura 40.** Amplitud de la señal registrada en superficie para diferentes valores de  $\gamma$ . El valor de  $\beta = 5\%$ .

(a)  $S = 10\%$ (b)  $S = 50\%$ (c)  $S = 90\%$ 

**Figura 41.** Amplitud de la señal registrada en superficie para diferentes valores de  $\gamma$ . El valor de  $\beta = 15\%$ .

(a)  $S = 10\%$ (b)  $S = 50\%$

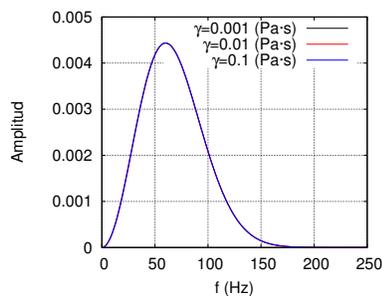
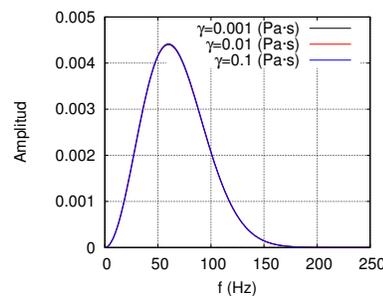
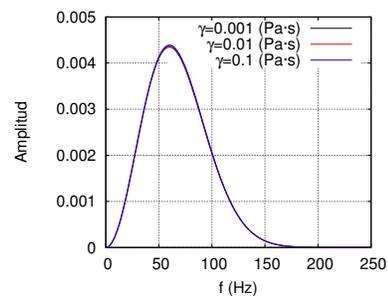
(c)  $S = 90\%$ 

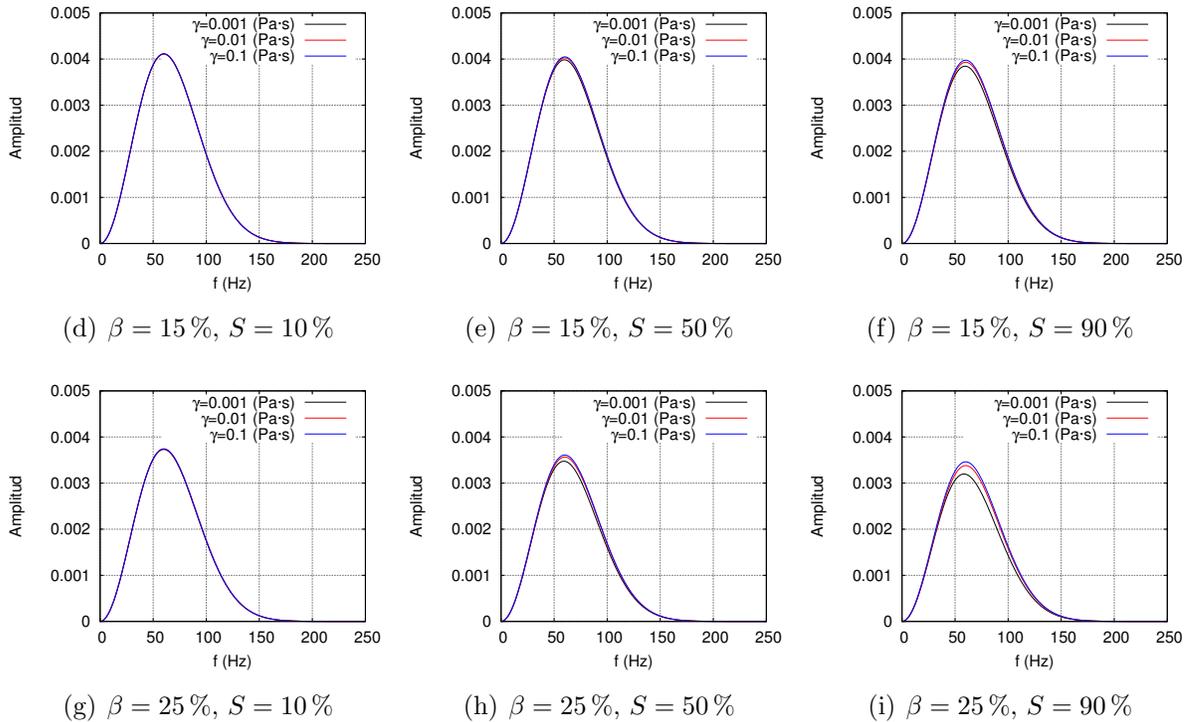
**Figura 42.** Amplitud de la señal registrada en superficie para diferentes valores de  $\gamma$ . El valor de  $\beta = 25\%$ .

Al observar las Figuras 40, 41 y 42 se distinguen dos arribos: el primero corresponde a la primera reflexión con la capa superior del medio poroso, y el segundo corresponde a la reflexión con interfaz inferior del medio poroso.

De forma general la pérdida de amplitud refleja la disipación de energía que es el resultado del rozamiento intergranular y del movimiento local del fluido entre partículas, y esto ocurre por el movimiento local del fluido con las regiones próximas a éste (Rasolofosaon, 1991).

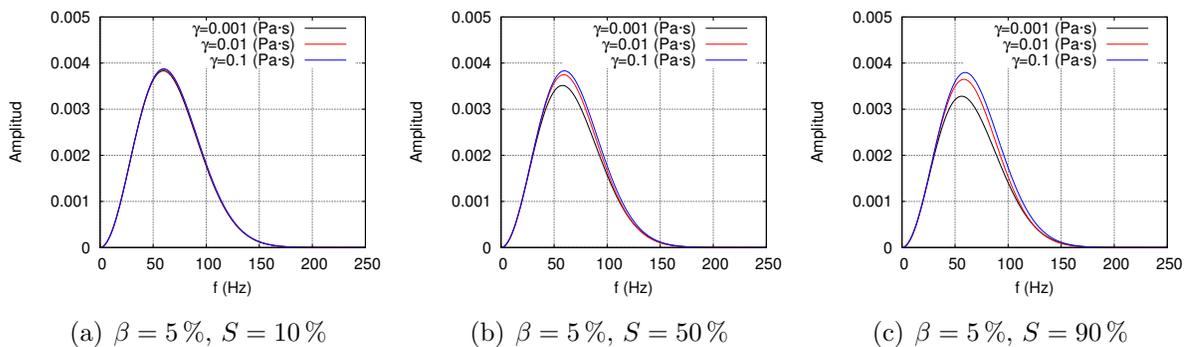
Conforme a la teoría de Biot éstos fenómenos de pérdidas de energía se consideran dentro del modelo, y aparecen en función de los parámetros y propiedades de cada uno de los medios que conforman el medio poroso (Camarasa, 2002). Ahora calculamos los respectivos espectros de amplitud.

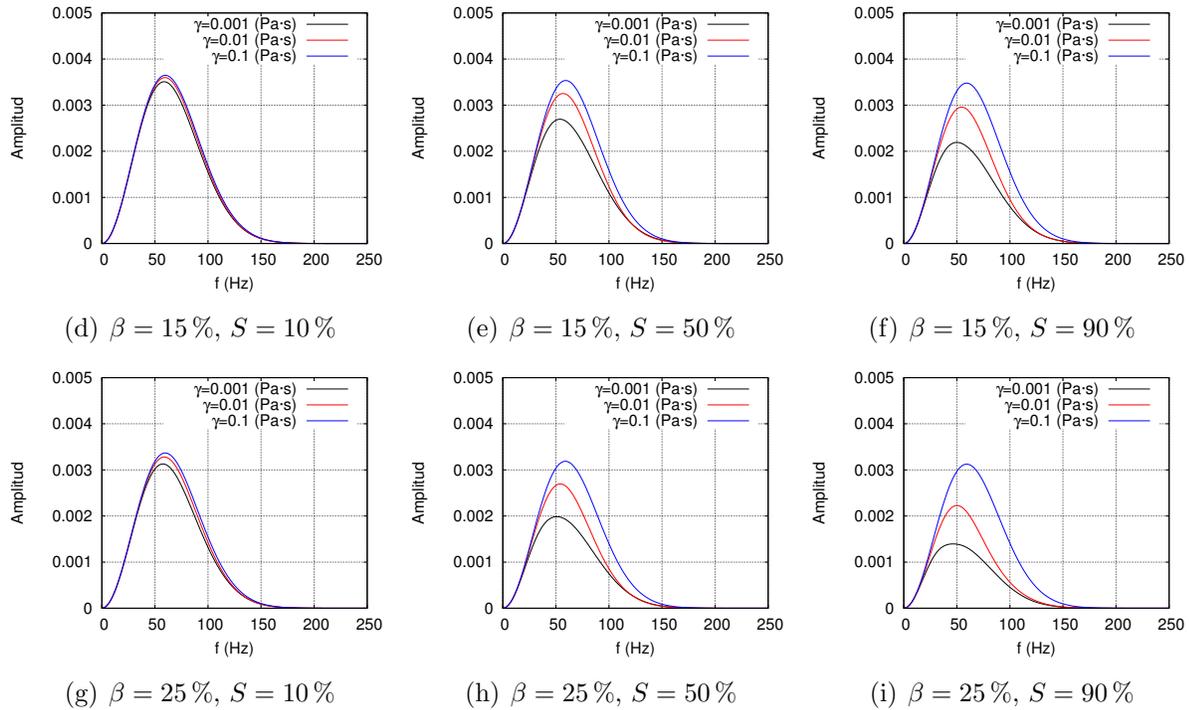
(a)  $\beta = 5\%$ ,  $S = 10\%$ (b)  $\beta = 5\%$ ,  $S = 50\%$ (c)  $\beta = 5\%$ ,  $S = 90\%$



**Figura 43.** Espectro de Amplitud del primer arribo registrado en superficie para diferentes valores de  $\gamma$ ,  $S$  y  $\beta$ .

Se observa en cada uno de los espectros de amplitud del primer arribo de la Figura 43 que la onda cuando se refleja en la primera interfaz que corresponde al tope superior del medio poroso saturado, se producen variaciones cuando el valor de la porosidad, saturación y viscosidad cambian. Si el valor de la viscosidad  $\gamma$  disminuye, la máxima amplitud asociada a la frecuencia principal también disminuye. Aunque el primer arribo nunca se propaga por el medio poroso, la amplitud depende de las propiedades elastomecánicas del medio poroso. Esto se puede justificar debido a que la señal reflejada depende de la relación entre las impedancias acústicas del medio poroso (medio 1) y del medio 2: y el valor de éstas impedancias están determinados por los parámetros de cada medio. Ahora se obtienen los espectros de amplitud para el segundo arribo y se obtuvieron los siguientes resultados.



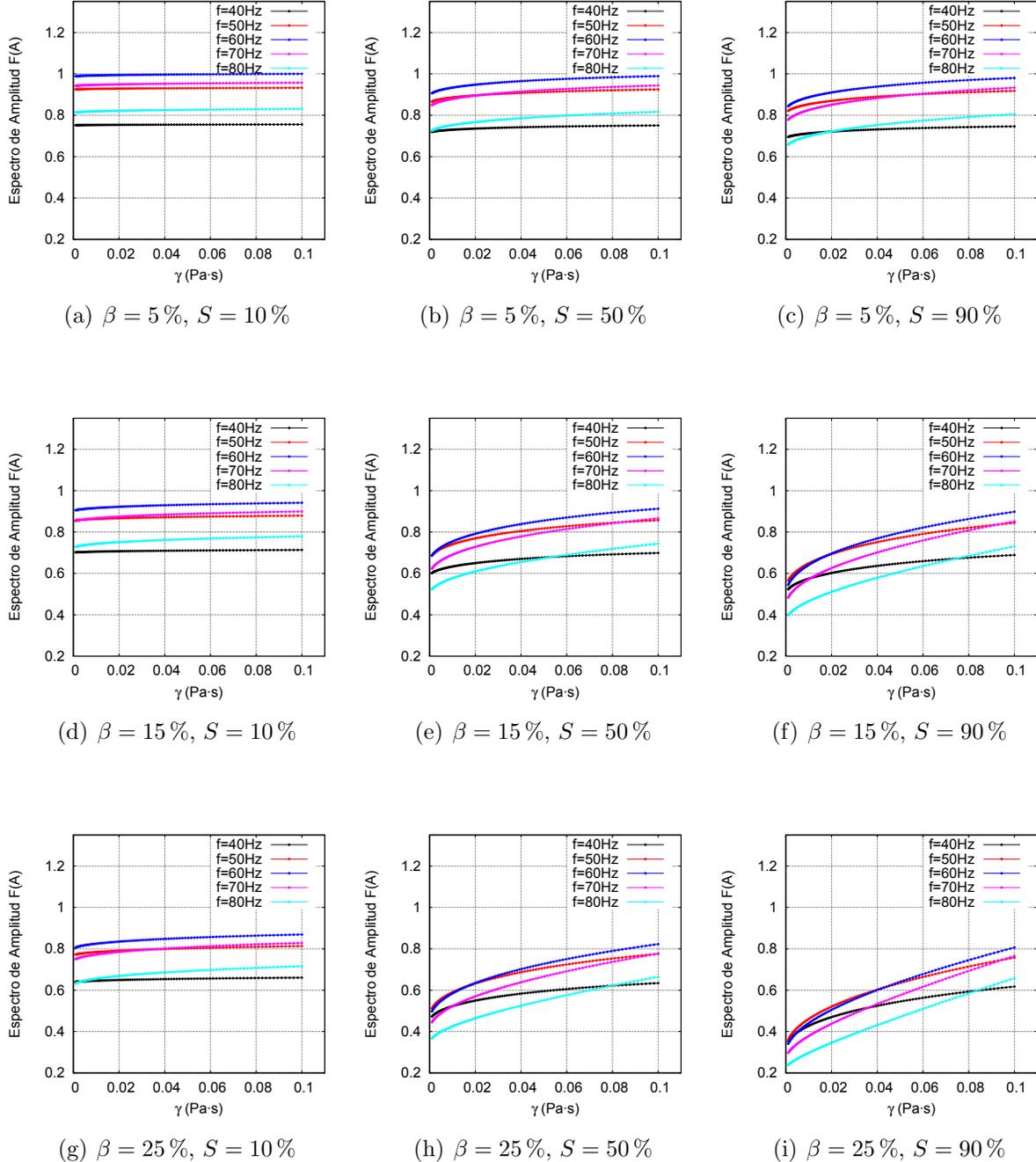


**Figura 44.** Espectro de Amplitud del segundo arribo registrado en superficie para diferentes valores de  $\gamma$ ,  $S$  y  $\beta$ .

Se observa en cada uno de los espectros de amplitud segundo arribo de la Figura 44 que el espectro de amplitud sufre cambios a medida que disminuye la viscosidad y se hacen más notorios para valores altos de porosidad y saturación. Para un valor de porosidad del 25%, a medida que aumenta el nivel de saturación se hace más evidente el cambio en el espectro de amplitud, cuando el valor de la viscosidad del fluido disminuye. Para valores de  $\gamma = 0,001 Pa \cdot s$  se encuentra que el espectro de amplitud cambia notoriamente. Esto debido a que el valor máximo en el espectro de amplitud asociado a la frecuencia predominante experimenta un corrimiento a frecuencias bajas, a medida que la viscosidad dinámica disminuye.

A mayor porosidad y saturación se hacen más visibles los cambios que sufre el espectro de amplitud cuando el valor de la viscosidad dinámica cambia, y esto se debe a que hay más fluido y por lo tanto el efecto que produce la viscosidad en la amplitud de la señal se debe precisamente a que el fluido tiene capacidad de fluir dentro del medio poroso y esto se produce cuando los valores de viscosidad dinámica son bajos. Es por ello que a medida que aumentamos el valor de la viscosidad dinámica, es más difícil que el fluido se desplace dentro de los conductos que forman el medio poroso, y por ello el tiende a mover junto con la roca porosa. Si el valor de la viscosidad es bajo, entonces va a fluir con más facilidad y por lo tanto habrá un movimiento relativo entre el fluido y el medio poroso que produce una

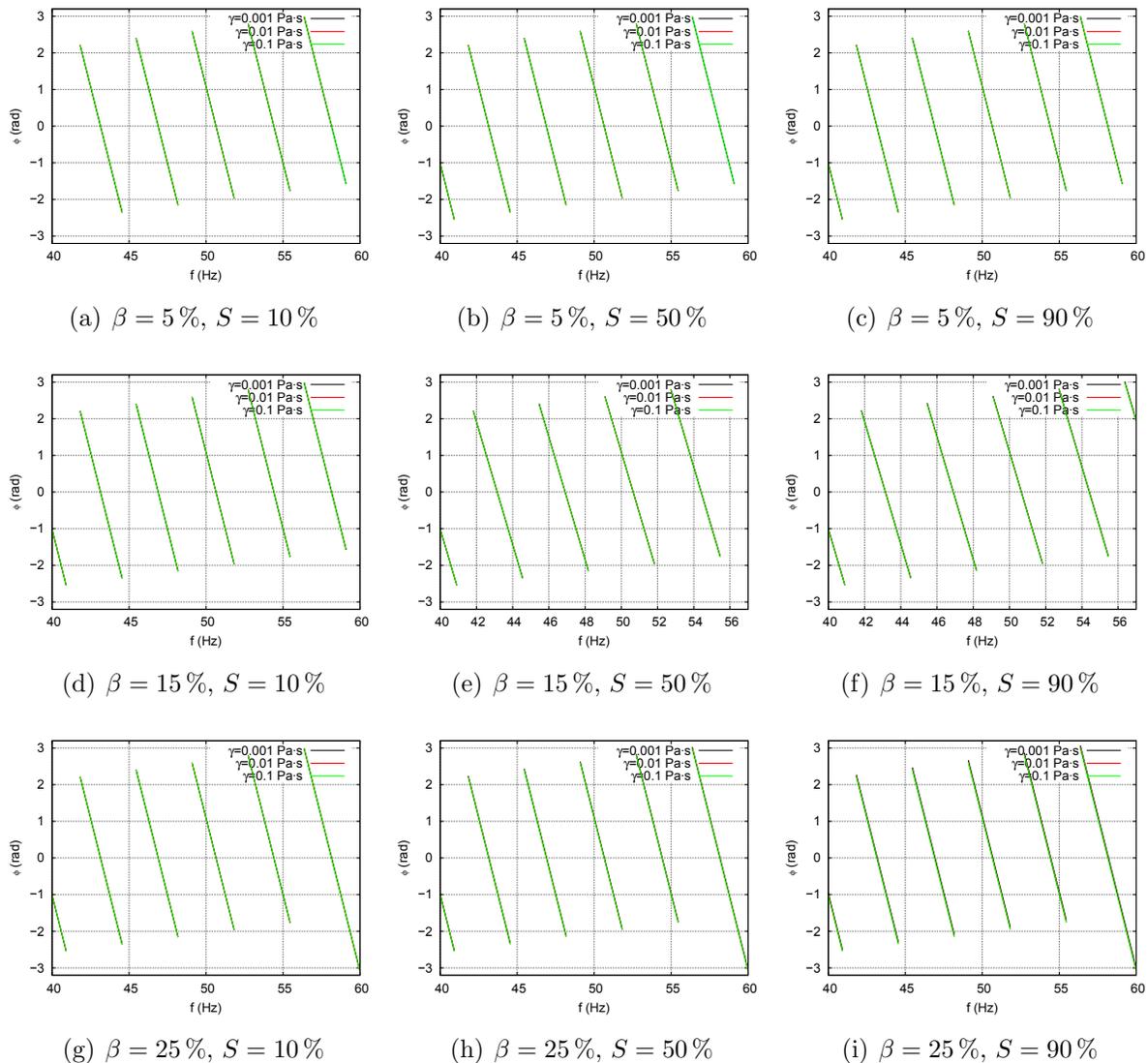
disminución de la energía de la onda, y por ende una disminución de su amplitud.



**Figura 45.** Espectro de Amplitud para el segundo arribo en función de la viscosidad  $\gamma$ , para diferentes valores de frecuencia, porosidad y saturación.

En la Figura 45, para cada uno de los valores de porosidad  $\beta$  y saturación  $S$ , el espectro de amplitud aumenta para las frecuencias que se encuentran contenidas dentro del ancho de banda del espectro de amplitudes cuando aumenta el valor de la viscosidad dinámica del

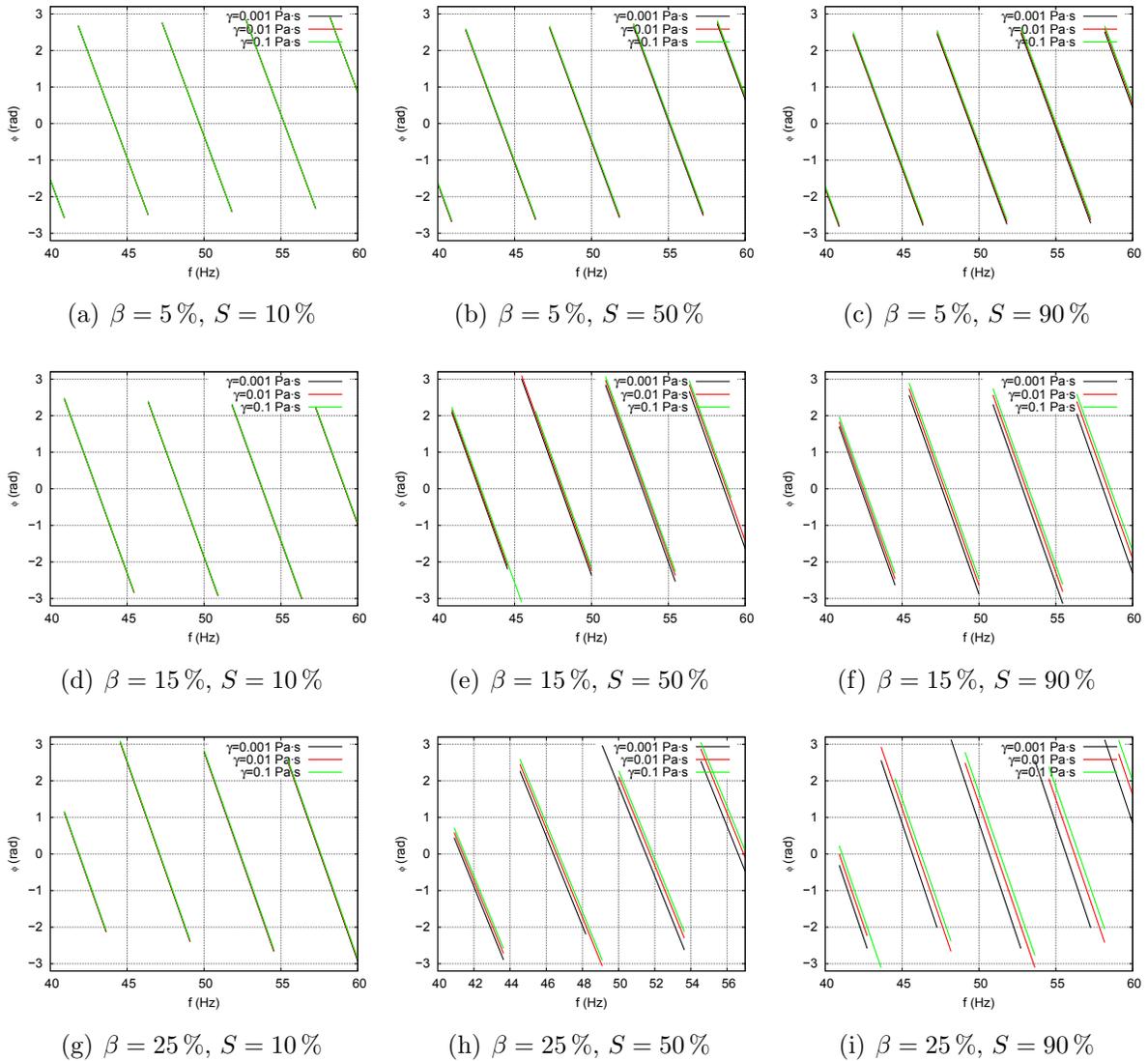
fluido  $\gamma$ . Para valores bajos de viscosidad, el espectro de amplitud disminuye para todos los valores de frecuencias cuando  $\beta$  y  $S$  aumentan. Cuando el valor de la porosidad es de  $\beta = 5\%$ , el cambio que sufre el espectro de amplitud para diferentes valores de frecuencia tiende a ser pequeño, en cambio si se observa este mismo patrón para porosidades de  $\beta = 15\%$  y  $\beta = 25\%$ , los cambios al aumentar la viscosidad dinámica es mayor. La mayor amplitud se presenta con la frecuencia cercana a los  $60\text{Hz}$ , debido a que es la frecuencia predominante en la onda. Ahora analizamos los respectivos espectros de fase para los dos arribos.



**Figura 46.** Espectro de Fase del primer arribo registrado en superficie para diferentes valores de  $\gamma$ .

Para el primer arribo se puede observar en la Figura 46 que al aumentar el valor de la saturación  $\gamma$  para cada una de los valores de porosidad  $\beta$  y saturación  $S$ , los valores de cada

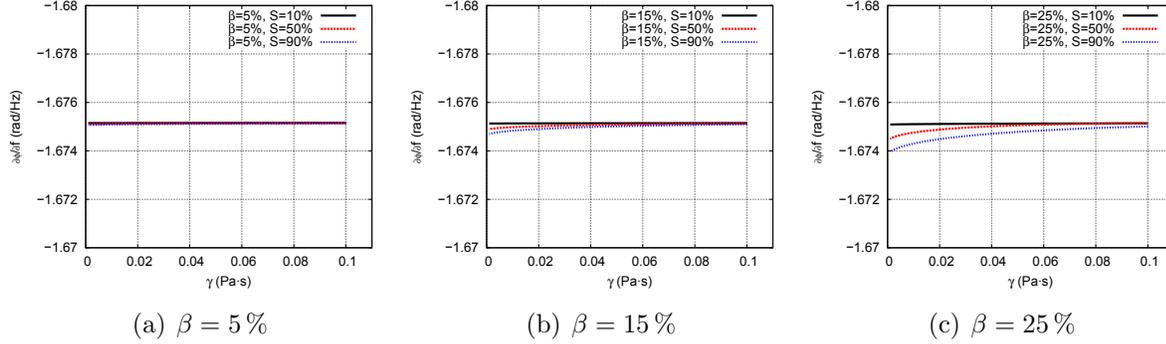
uno de los espectros de fase cambian, principalmente porque se produce un cambio en la polaridad. Los cambios en fase asociados a este arribo están determinados principalmente por la reflexión que experimenta la onda cuando incide en la interfaz. Ahora se analizan los espectros de fase para el segundo arribo.



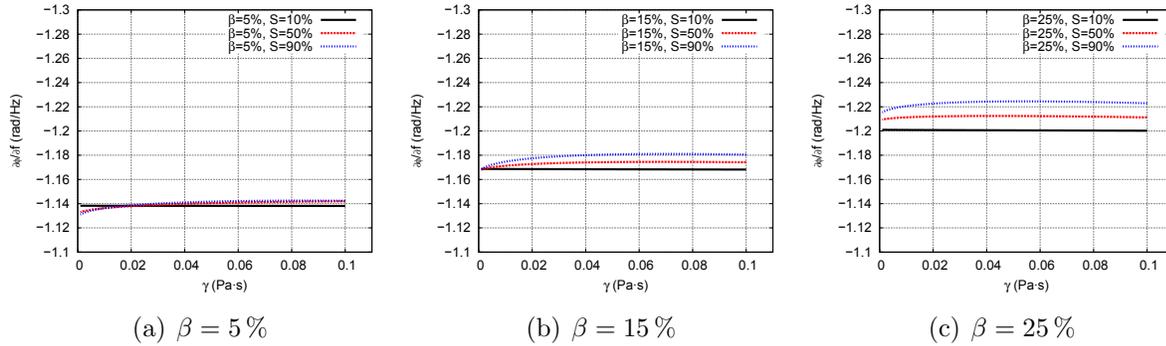
**Figura 47.** Espectro de Fase del segundo arribo registrado en superficie para diferentes valores de  $\gamma$ .

En la Figura 47 se observa que el espectro de fase para las frecuencias que componen la señal, experimentan un cambio en su valor a medida que disminuye la viscosidad dinámica  $\gamma$ , pero éste cambio se hace más visible para valores altos de porosidad y saturación. Esto significa que se debe a que el fluido al poseer menor viscosidad, adquiere una capacidad mayor de fluir a través de las cavidades del medio poroso. Si la viscosidad es alta, el fluido tiende

a moverse aproximadamente en fase con la onda sísmica. Ahora se calcula en los dos arribos la variación de la fase en función de la frecuencia para cada uno de los diferentes valores de  $\beta$  y  $S$ . Los resultados se ven en la siguiente Figura 48



**Figura 48.**  $\frac{\partial\phi}{\partial f}$  en función de la viscosidad dinámica para el primer arribo registrado en superficie para diferentes valores de  $\beta$ .



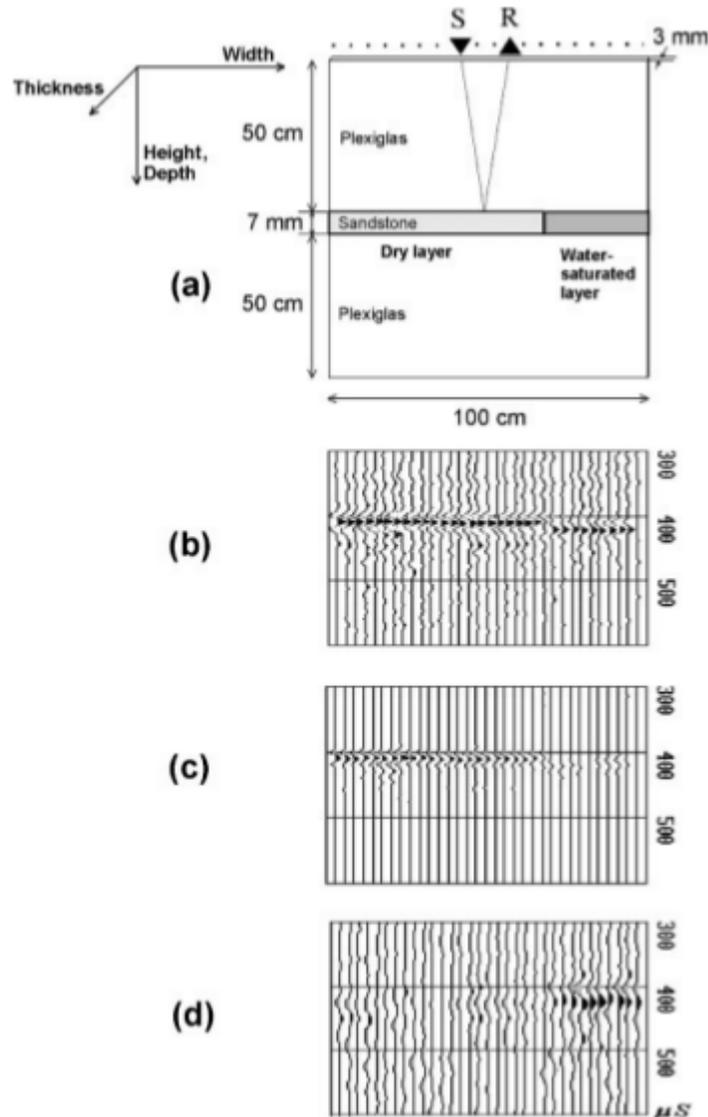
**Figura 49.**  $\frac{\partial\phi}{\partial f}$  en función de la viscosidad dinámica para el segundo arribo registrado en superficie para diferentes valores de  $\beta$ .

Para el primer arribo se observa en la Figura 48(a), (b) y (c) que para valores de porosidad bajos  $\beta = 5\%$ , el valor de  $\frac{\partial\phi}{\partial f}$  tiende a permanecer constante a medida que aumenta la viscosidad  $\gamma$ , independiente del valor de saturación  $S$  y porosidad  $\beta$ . Dicho valor es aproximadamente  $\frac{\partial\phi}{\partial f} \approx -1,675 \frac{rad}{Hz}$ . Es preciso mencionar que el primer arribo solo interactúa con el medio poroso cuando incide sobre el medio poros, de tal forma que la onda es reflejada hacia la superficie.

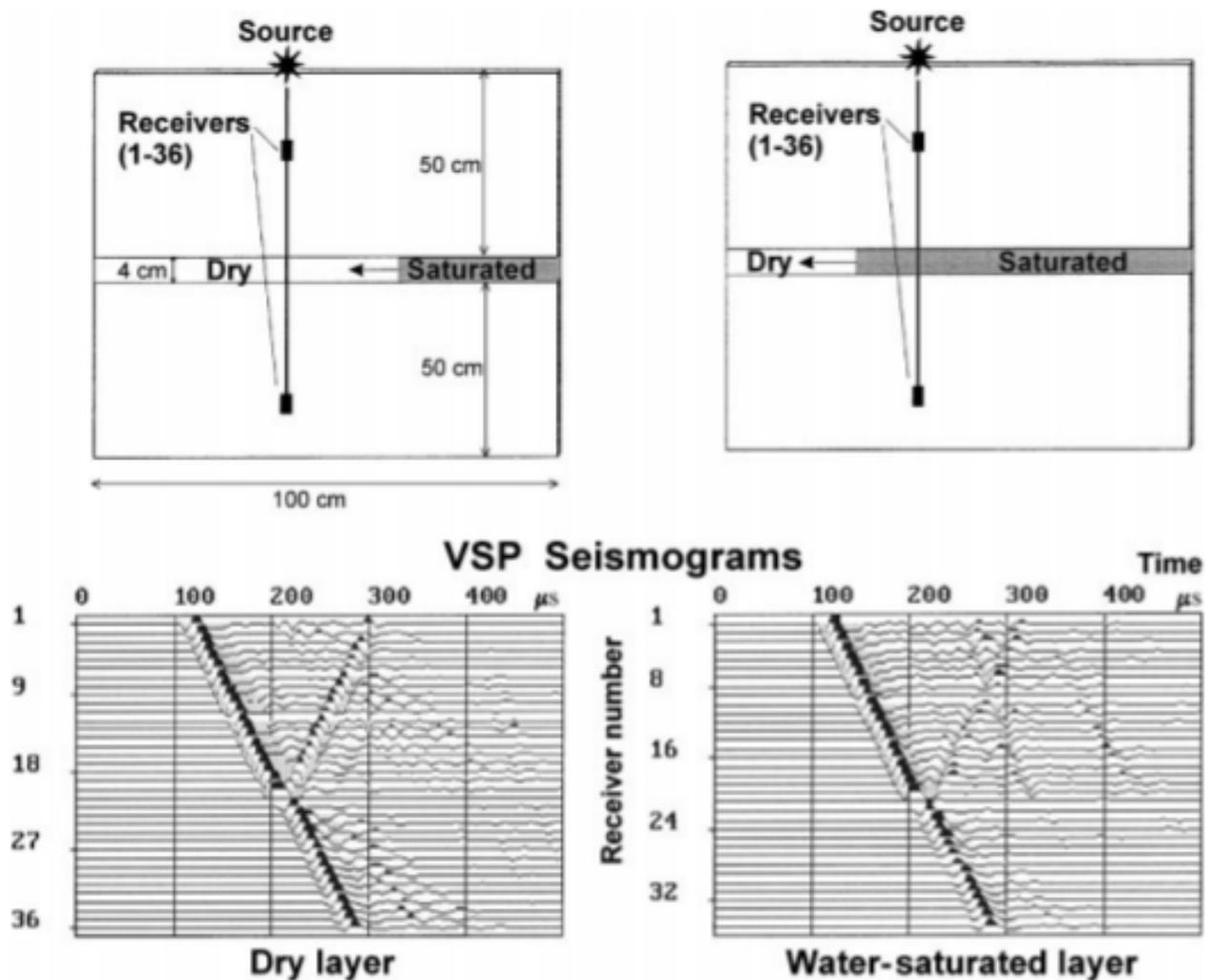
En el segundo arribo (Figura 49(a)) para valores de porosidad de  $\beta = 5\%$  el comportamiento de  $\frac{\partial\phi}{\partial f}$  muestra un comportamiento casi constante, e independiente del nivel de saturación. El valor de  $\frac{\partial\phi}{\partial f} \approx -1,14 \frac{rad}{Hz}$  y tiende a permanecer constante cuando aumenta  $\gamma$ . En la Figura 49(b)(c) el valor de  $\frac{\partial\phi}{\partial f}$  para una porosidad de  $\beta = 15\%$  depende del valor de la saturación.

En todos los tres casos es evidente que existe una relación del cambio de  $\frac{\partial\phi}{\partial f}$  en función de la saturación y porosidad, y al aumentar el valor de viscosidad dinámica permite que haya una tendencia en el valor de  $\frac{\partial\phi}{\partial f}$  a un valor constante.

A continuación se muestran los resultados obtenidos experimentalmente por (V. Korneev & Silin, 2004), en los cuales se aprecian los efectos que se han analizado. Ellos tomaron un modelo de tres capas conformado por un plexiglas, una arenisca sin saturar (Dry sandstone) y una arenisca saturada (Saturated sandstone).

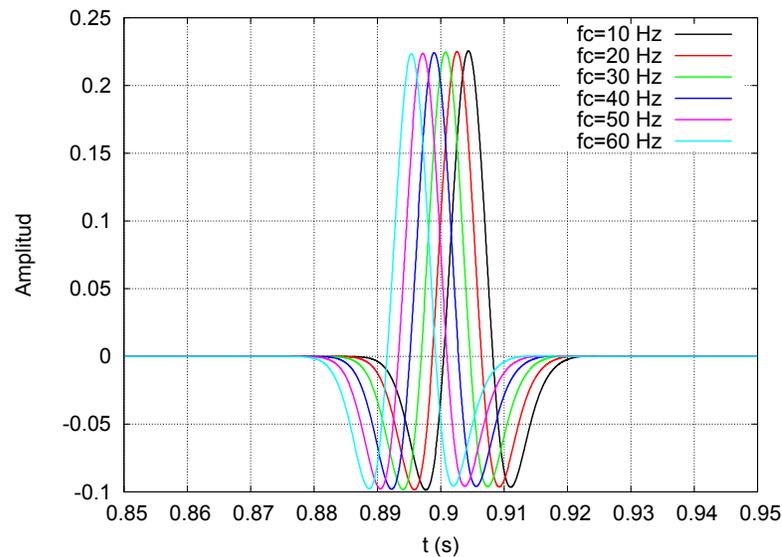


**Figura 50.** (a) Modelo de tres capas experimental. (b) señal registrada *common offset gather*. A estos datos se les aplicó un filtro pasa alto (c) pasa alto (60kHz) y (d) pasa bajo. Imagen tomada de (V. Korneev & Silin, 2004).

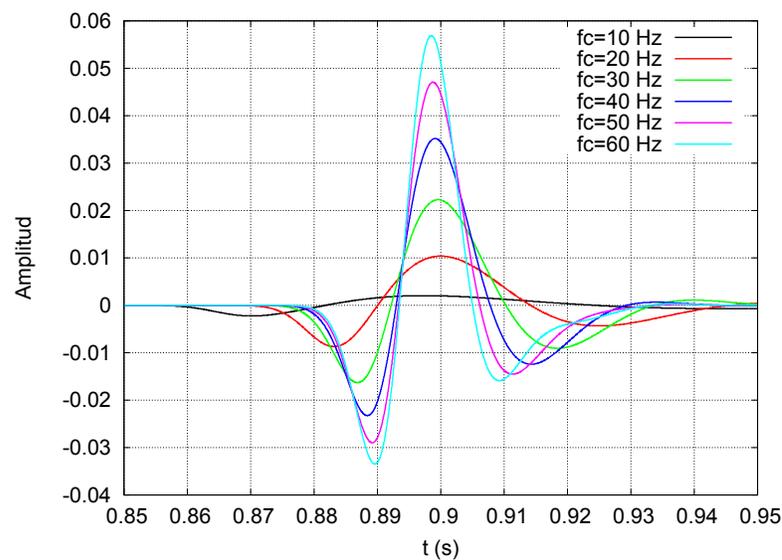


**Figura 51.** Resultados experimentales obtenidos por (V. Korneev & Silin, 2004). En la izquierda está el montaje experimental correspondiente a la zona seca. En la derecha está el medio poroso completamente saturado. Imagen tomada de (V. Korneev & Silin, 2004).

Al observar la Figura 50 (c) y (d) que corresponden a las imágenes procesadas mediante un filtro pasa alto para un medio seco y pasa bajo para uno saturado respectivamente, se ve un retardo en los tiempo de arribo para los armónicos de frecuencias altas y bajas respectivamente. Este fenómeno se observa igualmente en el modelo simulado de tres capas que se trabajó y cuyos resultados se pueden ver en la Figura 31. Se toman los datos del segundo arribo y se aplica un filtro pasa alto a los datos relacionados con  $S = 10\%$  y un filtro pasa bajo a  $S = 90\%$  simulando así el sistema seco y saturado. Se obtuvo que para diferentes frecuencias de corte los siguientes resultados son los siguientes.



(a)



(b)

**Figura 52.** Resultados obtenidos después de aplicar filtros: (a) pasa alto para un medio con  $S = 10\%$  y (b) pasa bajo para un medio con  $S = 90\%$ , para diferentes frecuencias de corte a los resultados obtenidos en la Figura 31 para el segundo arribo.

Se visualiza en la Figura 52 (a) un corrimiento en la señal tal como ocurre en los resultados experimentales mostrados por (V. Korneev & Silin, 2004). Los armónicos altos tienden a moverse con mayor velocidad en comparación con los armónicos de menor frecuencia, tal como ocurre con los datos experimentales. Lo mismo ocurre si se comparan las amplitudes

de la onda reflejada, ya que en los resultados mostrados por korneev (Ver Figura 51), se observa que hay una pérdida de amplitud en la señal cuando el medio se encuentra saturado y eso mismo se observa en la Figura 52 (b). Aquí hay un factor a considerar muy importante, ya que estamos hablando del segundo arribo que corresponde a la señal de la onda cuando incide en la interfaz inferior del medio poroso.

# 5. Conclusiones y recomendaciones

## 5.1. Conclusiones

Se realizó el programa que permite la simulación de la propagación de una onda en un medio poroso basado en la *Teoría de Biot* modificada para tener en cuenta dos fluidos dentro del poro y así calcular el Factor de calidad  $Q$  de la amplitud de la ondícula en función de la porosidad  $\beta$ , la saturación  $S$  y la viscosidad  $\gamma$ , además de determinar la variación de la máxima amplitud en el espectro de frecuencias de la señal en función del corrimiento en el valor de la frecuencia principal de la señal.

Cuando la onda incide en un medio poroso saturado, se produce una disminución en la amplitud de la onda reflejada, y se experimenta un retardo en el tiempo de llegada de los armónicos de bajas frecuencias.

Para valores bajos en la viscosidad del fluido que satura el poro, se produce mayor pérdida en la amplitud de la onda que se propaga en este medio. Si la onda incide en el medio poroso, se pierde amplitud en la onda reflejada a medida que la viscosidad disminuye.

Para valores de porosidad  $\beta \approx 10\%$  el factor de calidad  $Q$  es  $Q \approx 170$  y tiende a permanecer constante a medida que aumenta el valor de la saturación  $S$ . Esto se debe a que el valor de la porosidad cuando es bajo, la presencia de agua o gas, no altera sustancialmente el factor de calidad  $Q$ . Para valores de porosidad de  $\beta \approx 20\%$  se evidencian cambios mas notorios en el factor de calidad  $Q$  a medida que la saturación de agua aumenta. Para valores bajos de saturación hasta  $S \approx 30\%$  el valor del factor de calidad es  $Q \approx 110$ , mientras que para valores mayores el factor de calidad disminuye a un valor  $Q \approx 50$ . Cuando la porosidad se encuentra alrededor de  $\beta \approx 30\%$ , si la saturación es baja hasta un valor de ( $S \approx 20\%$ ), el factor de calidad toma un valor de ( $Q \approx 120$ ), mientras que para valores mayores de saturación el factor de calidad disminuye y tiende a permanecer constante con un valor de  $Q \approx 50$ .

Se realizó un modelo de tres capas para simular la respuesta que se registra en superficie de una onda que se propaga en un medio poroso que se encuentra saturado con agua y gas, para el estudio de la variación del espectro de fase y del espectro de amplitud de la señal. Se encontró una relación directa entre el cambio de fase de la señal y la variación en a amplitud del espectro de amplitud en función del valor de la saturación del medio poroso

y la porosidad.

Se encontró que para valores altos de viscosidad el factor de calidad  $Q$  aumenta, y ocurre debido a que el fluido no se puede desplazar fácilmente dentro de los poros, ya que la resistencia a fluir que vendría dada por la viscosidad es considerable, por lo tanto el fluido tiende a desplazarse con el mismo movimiento de la estructura. Si el valor de la viscosidad cinemática disminuye el fluido podrá moverse sin mucha resistencia "más libremente." en el medio poroso, por lo tanto se produce mayor pérdida de energía precisamente porque habría una velocidad relativa entre el movimiento de la roca porosa y el fluido, y esto produce una disipación, según la función de Rayleigh.

## 5.2. Recomendaciones

Para mejorar el algoritmo, es adecuado pasarlo a un lenguaje de programación basado en CUDA, para correr las rutinas en un tiempo más prudente, ya que las iteraciones toman bastante tiempo.

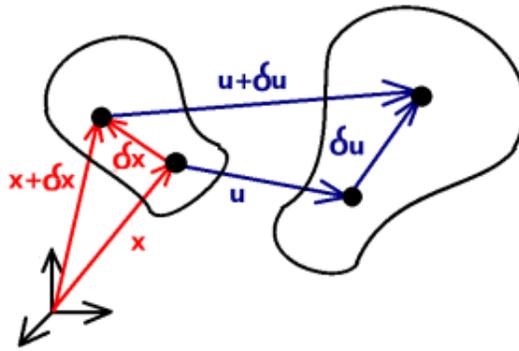
Se puede mejorar el código para realizar análisis de atenuación para frecuencias extremadamente altas ( $\approx KHz$ ).

Uno de los mayores inconvenientes es definir la resolución temporal y espacial debido a que la modificación de alguno de éstos parámetros conlleva a un costo computacional alto, ya que al aumentar la definición espacial implicaría aumentar el número de puntos a evolucionar temporalmente en la grilla para cubrir el espacio de interés. Si se aumenta el valor de los pasos de tiempo, implicaría en aumentar mucho más el tiempo de cómputo, ya que una misma evolución la debería hacer una mayor cantidad de veces.

Un aspecto interesante que se surge del trabajo, es que además de permitir el estudio de la propagación de ondas longitudinales también se pueden estudiar las ondas transversales. Esto permitiría mejorar la comprensión de los fenómenos que se dan en las ondas convertidas, ya que se pueden analizar desde el campo de la divergencia (onda P) o desde el campo de los rotacionales (onda S), o analizar los campos acoplados analizando los desplazamientos que sufre el medio cuando la onda se propaga.

# A. Anexo: Esfuerzos y Deformaciones

Para analizar un poco mas en detalle éste fenómeno se toma un elemento del medio el cual sufre una deformación en cualquier dirección, tal como se ve en la figura 53.



(a) Fluido 1

**Figura 53.** Deformación de un elemento del medio.

Realizando una expansión en series de Taylor, se encuentra que el desplazamiento  $u$  después de la deformación en la dirección  $i$ -ésima con  $i = \{x, y, z\}$  de un punto cualquiera que se encuentra en la posición  $x$  antes de la deformación es:

$$u_i(x + \delta x) = u_i(x) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta x_j. \quad (73)$$

De la ecuación 73, tomamos el término de la derivada parcial y se renombra como  $\delta u_j$ , es decir:

$$\delta u_j = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (74)$$

ahora reescribiendo éste término como  $\delta u_j = \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  sumamos y restamos la cantidad  $\frac{1}{2} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$  para llegar finalmente a la siguiente ecuación:

$$\delta u_j = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (75)$$

Ésta ecuación 75 se puede reescribir como:

$$\delta u_j = e_{ij} + w_{ij}, \quad (76)$$

con  $i = \{x, y, z\}$  y  $j = \{x, y, z\}$  donde:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (77)$$

$$w_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (78)$$

En la ecuación 77, el término  $e_{ij}$  corresponde a la deformación del medio poroso, mientras que el término  $w_{ij}$  de la ecuación 78 hace referencia a la rotación del cuerpo rígido. La representación matricial del término de rotación de cuerpo es:

$$w_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix}. \quad (79)$$

La representación matricial del término de deformación es:

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (80)$$

De la ecuación 80, si tomamos la traza de la matriz de deformación, ésta corresponde a la dilatación del sólido.

$$e = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (81)$$

de ésta forma ahora se definen las convenciones para diferenciar cada uno de los fluidos. El vector  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t) = (u_x, u_y, u_z)$  representa las componentes del vector desplazamiento del medio poroso. El vector  $\vec{U} = \vec{U}(\vec{r}, t) = (U_x, U_y, U_z)$  representa el vector desplazamiento del fluido 1, que en nuestro caso puede ser agua, y el vector  $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t) = (V_x, V_y, V_z)$  representa el desplazamiento del fluido 2, que puede ser gas.

Por lo tanto para los fluidos las deformaciones estarían representadas por las dilataciones. Ver ecuaciones 82 y 83.

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}, \quad (82)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}. \quad (83)$$

Para establecer las relaciones entre los esfuerzos y deformaciones, la estructura es tratada como un sistema conservativo que está en equilibrio, es decir en un punto de mínima energía potencial y cualquier perturbación será tratada como una alteración a ese estado de equilibrio. (Camarasa, 2002).

Debido a que las tensiones producidas son relativamente pequeñas, las deformaciones que aparecen serán proporcionales según la ley de Hooke. Por ello se pueden escribir de forma lineal con las componentes de la deformación. Por lo tanto la energía potencial por unidad de volumen (Biot, 1956b) de la estructura  $E_{pot}$  viene dada por:

$$2E_{pot} = (\sigma_{xx}e_{xx} + \sigma_{yy}e_{yy} + \sigma_{zz}e_{zz} + \sigma_{xy}e_{xy} + \sigma_{xz}e_{xz} + \sigma_{yz}e_{yz} + \sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2). \quad (84)$$

En la ecuación 84, se puede ver que los primero tres términos corresponden a la energía potencial por unidad de volumen producida por compresiones o dilataciones normales. Los siguientes tres términos corresponden a la energía potencial por unidad de volumen producida por los esfuerzos tangenciales o de cizalla, y los dos últimos términos corresponden a la energía potencial por unidad de volumen producida por la dilatación del fluido 1 y la dilatación del fluido 2.

Las relaciones de esfuerzo deformación, pueden ser expresadas como:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial E_{pot}}{\partial e_{xx}}, & \sigma_{yy} &= \frac{\partial E_{pot}}{\partial e_{yy}}, & \sigma_{zz} &= \frac{\partial E_{pot}}{\partial e_{zz}}, \\ \sigma_{xy} &= \frac{\partial E_{pot}}{\partial e_{xy}}, & \sigma_{xz} &= \frac{\partial E_{pot}}{\partial e_{xz}}, & \sigma_{yz} &= \frac{\partial E_{pot}}{\partial e_{yz}}, \\ \sigma_1 &= \frac{\partial E_{pot}}{\partial \varepsilon_1}, & \sigma_2 &= \frac{\partial E_{pot}}{\partial \varepsilon_2}. \end{aligned} \quad (85)$$

Por lo tanto se formaría un sistema matricial de orden  $8 \times 8$  simétrico de 35 coeficientes constantes diferentes. Se puede simplificar asumiendo que el sistema sólido-fluido es estadísticamente isótropico (Biot, 1956b). Bajo estas condiciones los esfuerzos y deformaciones principales coinciden y el sistema se simplifica al siguiente conjunto de ecuaciones: (Biot, 1962b)

$$\sigma_{xx} = 2\mu e_{xx} + \lambda e + Q_1\varepsilon_1 + Q_2\varepsilon_2, \quad (86)$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu e_{yy} + \lambda e + Q_1\varepsilon_1 + Q_2\varepsilon_2, \quad (87)$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu e_{zz} + \lambda e + Q_1\varepsilon_1 + Q_2\varepsilon_2, \quad (88)$$

$$\sigma_{xy} = \mu e_{xy}, \quad (89)$$

$$\sigma_{xz} = \mu e_{xz}, \quad (90)$$

$$\sigma_{yz} = \mu e_{yz}, \quad (91)$$

$$\sigma_1 = Q_1 e + R_1 \varepsilon_1, \quad (92)$$

$$\sigma_2 = Q_2 e + R_2 \varepsilon_2. \quad (93)$$

Del anterior sistema de ecuaciones,  $\mu$  y  $\lambda$  corresponden a los parámetros elastomecánicos de Lamé.  $\mu$  es el módulo de cizalla.

$R_1$  y  $R_2$  son dos constantes física de la estructura y representan la presión necesaria para que penetre en el agregado cierta cantidad de fluido, manteniendo el volumen constante.

$Q_1$  y  $Q_2$  son constantes físicas de la estructura y dan infomación del nivel de acoplamiento el cambio de volumen en el sólido y en cada uno de los fluidos.

## B. Anexo: Relaciones Dinámicas

### B.1. Ecuaciones Generales campo de Onda P-S Acoplado

Sustituyendo la función energía cinética (ecuación 20) y la función de Disipación de rayleigh (ecuación 22), en el sistema de la ecuación 29, 30 y 31 se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales.

En x:

$$\begin{aligned} q_x &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11}u_x + \rho_{12}U_x + \rho_{13}V_x) + b\frac{\partial}{\partial t} (u_x - U_x) + b\frac{\partial}{\partial t} (u_x - V_x), \\ Q_{1x} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{22}U_x + \rho_{12}u_x) - b\frac{\partial}{\partial t} (u_x - U_x), \\ Q_{2x} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{33}V_x + \rho_{13}u_x) - b\frac{\partial}{\partial t} (u_x - V_x). \end{aligned} \quad (94)$$

En y:

$$\begin{aligned} q_y &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11}u_y + \rho_{12}U_y + \rho_{13}V_y) + b\frac{\partial}{\partial t} (u_y - U_y) + b\frac{\partial}{\partial t} (u_y - V_y), \\ Q_{1y} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{22}U_y + \rho_{12}u_y) - b\frac{\partial}{\partial t} (u_y - U_y), \\ Q_{2y} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{33}V_y + \rho_{13}u_y) - b\frac{\partial}{\partial t} (u_y - V_y). \end{aligned} \quad (95)$$

En z:

$$\begin{aligned} q_z &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11}u_z + \rho_{12}U_z + \rho_{13}V_z) + b\frac{\partial}{\partial t} (u_z - U_z) + b\frac{\partial}{\partial t} (u_z - V_z), \\ Q_{1z} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{22}U_z + \rho_{12}u_z) - b\frac{\partial}{\partial t} (u_z - U_z), \\ Q_{2z} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{33}V_z + \rho_{13}u_z) - b\frac{\partial}{\partial t} (u_z - V_z). \end{aligned} \quad (96)$$

Debido a que el flujo en los poros no es uniforme, se tiene que trabajar con las nueve ecuaciones. Las fuerzas por unidad de volumen definidas en el sólido, y en los fluidos, por cada una de las direcciones x,y,z son:  $q_x, q_y, q_z, Q_{1x}, Q_{1y}, Q_{1z}$  y  $Q_{2x}, Q_{2y}, Q_{2z}$ , se pueden definir en función de las tensiones que aparecen en el medio poroso.

Para x:

$$\begin{aligned} q_x &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}, \\ Q_{1x} &= \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}, \\ Q_{2x} &= \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}. \end{aligned} \quad (97)$$

Para y:

$$\begin{aligned} q_y &= \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}, \\ Q_{1y} &= \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}, \\ Q_{2y} &= \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}. \end{aligned} \quad (98)$$

Para z:

$$\begin{aligned} q_z &= \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}, \\ Q_{1z} &= \frac{\partial \sigma_1}{\partial z}, \\ Q_{2z} &= \frac{\partial \sigma_2}{\partial z}. \end{aligned} \quad (99)$$

Reemplazando éste conjunto de ecuaciones 97, 98 y 99 en el sistema de ecuaciones 94, 95 y 96, respectivamente se obtiene lo siguiente:

En x:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11}u_x + \rho_{12}U_x + \rho_{13}V_x) + b \frac{\partial}{\partial t} (u_x - U_x) + b \frac{\partial}{\partial t} (u_x - V_x), \quad (100)$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{22}U_x + \rho_{12}u_x) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_x - U_x), \quad (101)$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{33}V_x + \rho_{13}u_x) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_x - V_x). \quad (102)$$

En y:

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11}u_y + \rho_{12}U_y + \rho_{13}V_y) + b \frac{\partial}{\partial t} (u_y - U_y) + b \frac{\partial}{\partial t} (u_y - V_y), \quad (103)$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{22}U_y + \rho_{12}u_y) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_y - U_y), \quad (104)$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{33}V_y + \rho_{13}u_y) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_y - V_y). \quad (105)$$

En z:

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11}u_z + \rho_{12}U_z + \rho_{13}V_z) + b \frac{\partial}{\partial t} (u_z - U_z) + b \frac{\partial}{\partial t} (u_z - V_z), \quad (106)$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{22}U_z + \rho_{12}u_z) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_z - U_z), \quad (107)$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{33}V_z + \rho_{13}u_z) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_z - V_z). \quad (108)$$

Para resolver éste sistema, se utilizan las ecuaciones del 86 al 93.

Se toman las ecuaciones 86, 89, 90 y se reemplazan en la ecuación 100, teniendo en cuenta

que el valor de  $e_{xx}$  se obtiene a partir de la ecuación 77, cuyos valores están representados en la matriz de la ecuación 80. El valor de  $e$ , esta dado en la ecuación 81.

$$\left[ \begin{array}{l} 2\mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\ Q_1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + \\ Q_2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) + \\ \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \\ \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11}u_x + \rho_{12}U_x + \rho_{13}V_x) + \\ b \frac{\partial}{\partial t} (u_x - U_x) + b \frac{\partial}{\partial t} (u_x - V_x) \end{array} \right]. \quad (109)$$

Se realiza el mismo proceso, reemplazando la ecuación 92, en la ecuación 101, teniendo en cuenta que  $\varepsilon_1$  está dado por la ecuación 82.

$$\left[ \begin{array}{l} Q_1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\ R_1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{22}U_x + \rho_{12}u_x) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_x - U_x) \end{array} \right]. \quad (110)$$

Para finalizar con las ecuaciones en la dirección x, se reemplaza la ecuación 93 en la ecuación 102, teniendo en cuenta que  $\varepsilon_2$  está dado por la ecuación 83. Con lo cual se obtiene:

$$\left[ \begin{array}{l} Q_2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\ R_2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{33}V_x + \rho_{13}u_x) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_x - V_x) \end{array} \right]. \quad (111)$$

Realizando el mismo procedimiento para las otras direcciones se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

En y:

$$\left[ \begin{array}{l} 2\mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\ Q_1 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + \\ Q_2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) + \\ \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \\ \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11}u_y + \rho_{12}U_y + \rho_{13}V_y) + \\ b \frac{\partial}{\partial t} (u_y - U_y) + b \frac{\partial}{\partial t} (u_y - V_y) \end{array} \right], \quad (112)$$

$$\left[ \begin{array}{l} Q_1 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\ R_1 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{22}U_y + \rho_{12}u_y) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_y - U_y) \end{array} \right], \quad (113)$$

$$\left[ \begin{array}{l} Q_2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\ R_2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{33}V_y + \rho_{13}u_y) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_y - V_y) \end{array} \right]. \quad (114)$$

En  $z$ :

$$\left[ \begin{array}{l} 2\mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\ Q_1 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + \\ Q_2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) + \\ \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \\ \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} u_z + \rho_{12} U_z + \rho_{13} V_z) + \\ b \frac{\partial}{\partial t} (u_z - U_z) + b \frac{\partial}{\partial t} (u_z - V_z) \end{array} \right], \quad (115)$$

$$\left[ \begin{array}{l} Q_1 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\ R_1 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{22} U_z + \rho_{12} u_z) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_z - U_z) \end{array} \right], \quad (116)$$

$$\left[ \begin{array}{l} Q_2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\ R_2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{33} V_z + \rho_{13} u_z) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_z - V_z) \end{array} \right]. \quad (117)$$

Éste conjunto de 9 ecuaciones diferenciales acopladas permite el modelamiento de ondas transversales y longitudinales, es decir, que se tienen los campos de la P y S acoplados.

Ahora se hallará una expresión que represente el conjunto de ecuaciones diferenciales que permiten modelar el sistema. Para ello, se multiplica la ecuación 109 por el vector unitario  $\hat{i}$ , la ecuación 112 por  $\hat{j}$ , y la ecuación 115 por  $\hat{k}$ . Agrupando los términos según el vector se llega finalmente a:

$$\left[ \begin{array}{l} \mu \vec{\nabla}^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \\ Q_1 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + Q_2 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} \vec{u} + \rho_{12} \vec{U} + \rho_{13} \vec{V}) + \\ b \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u} - \vec{U}) + b \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u} - \vec{V}) \end{array} \right]. \quad (118)$$

Ahora se multiplica la ecuación 110 por el vector unitario  $\hat{i}$ , la ecuación 113 por  $\hat{j}$ , y la ecuación 116 por  $\hat{k}$ . Agrupando términos según el vector se obtiene:

$$\left[ Q_1 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + R_1 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \right] = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{22} \vec{U} + \rho_{12} \vec{u}) - \\ b \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u} - \vec{U}) \end{array} \right]. \quad (119)$$

Se finaliza, multiplicando la ecuación 111 por el vector unitario  $\hat{i}$ , la ecuación 114 por  $\hat{j}$ , y la ecuación 117 por  $\hat{k}$ . Agrupando términos según el vector se obtiene:

$$\left[ Q_2 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + R_2 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \right] = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{33} \vec{V} + \rho_{13} \vec{u}) - \\ b \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u} - \vec{V}) \end{array} \right]. \quad (120)$$

Las ecuaciones 118, 119 y 120, representan en forma más simplificada el conjunto de ecuaciones que gobiernan los desplazamientos del medio poroso, fluido 1 y fluido 2 en el sistema.

Es preciso aclarar que en éstas ecuaciones los desplazamientos  $\vec{u}$ ,  $\vec{U}$  y  $\vec{V}$  son de carácter vectorial, por lo tanto hay que calcular el Laplaciano vectorial del vector  $\vec{u}$  en la ecuación 118. En la ecuación 119 y 120, hay que calcular el gradiente de la divergencia de los tres campos de desplazamiento  $(\vec{u}, \vec{U}, \vec{V})$ , los cuales representan el sólido y los dos fluidos.

A partir del campo de onda general para ondas compresionales P y transversales S, se realizarán algunos cálculos para desacoplar el sistema y tener las ecuaciones generales del campo de onda P y S.

## B.2. Ecuaciones Generales Acopladas P-S para Altas Frecuencias

Para tener en cuenta las altas frecuencias, se hace necesario introducir el factor  $F(\Gamma)$ . Este factor que depende de parámetros del medio como el radio de los poros, su forma sinusoidal, la tortuosidad, orientación de los poros y su forma.

$$\left[ \begin{array}{l} \mu \vec{\nabla}^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \\ Q_1 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + Q_2 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{11} \vec{u} + \rho_{12} \vec{U} + \rho_{13} \vec{V}) + \\ bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t}(\vec{u} - \vec{U}) + bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t}(\vec{u} - \vec{V}) \end{array} \right], \quad (121)$$

$$\left[ Q_1 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + R_1 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \right] = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{22} \vec{U} + \rho_{12} \vec{u}) - \\ bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t}(\vec{u} - \vec{U}) \end{array} \right], \quad (122)$$

$$\left[ Q_2 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + R_2 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \right] = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{33} \vec{V} + \rho_{13} \vec{u}) - \\ bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t}(\vec{u} - \vec{V}) \end{array} \right]. \quad (123)$$

## B.3. Ecuaciones Generales del campo de onda Primario P desacoplado para Altas Frecuencias

Tomando inicialmente la ecuación 121 y aplicando el operador divergencia, se obtiene:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ \begin{array}{l} \mu \vec{\nabla}^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \\ Q_1 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + Q_2 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \end{array} \right] = \vec{\nabla} \cdot \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{11} \vec{u} + \rho_{12} \vec{U} + \rho_{13} \vec{V}) + \\ bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t}(\vec{u} - \vec{U}) + bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t}(\vec{u} - \vec{V}) \end{array} \right], \quad (124)$$

aplicando la propiedad distributiva del operador divergencia, llegamos a la ecuación 125.

$$\begin{bmatrix} \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}^2 \vec{u} + \\ (\lambda + \mu) \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \\ Q_1 \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + \\ Q_2 \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \rho_{12} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \rho_{13} \vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + \\ bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + \\ bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \end{bmatrix}. \quad (125)$$

Debido a que  $\vec{\nabla}^2 \vec{f} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{f})$  para cualquier vector  $\vec{f}$ , reemplazamos y obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \mu \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u})) + \\ (\lambda + \mu) \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \\ Q_1 \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + \\ Q_2 \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \rho_{12} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \rho_{13} \vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + \\ bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + \\ bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \end{bmatrix}, \quad (126)$$

y como la divergencia de un rotacional cumple  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}) = 0$ , para cualquier vector  $\vec{f}$ , simplificamos y obtenemos que:

$$\begin{bmatrix} \mu \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})) + \\ (\lambda + \mu) \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \\ Q_1 \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + \\ Q_2 \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \rho_{12} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \rho_{13} \vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + \\ bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + \\ bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \end{bmatrix}, \quad (127)$$

teniendo en cuenta que la dilatación del medio poroso, del fluido 1 y fluido 2 están dadas por las respectivas divergencias mostradas en las ecuaciones 81, 82 y 83, respectivamente, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} e + (\lambda + \mu) \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} e + \\ Q_1 \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varepsilon_1 + Q_2 \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} e + \rho_{12} \varepsilon_1 + \rho_{13} \varepsilon_2) + \\ bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (e - \varepsilon_1) + \\ bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (e - \varepsilon_2) \end{bmatrix}. \quad (128)$$

Finalmente obtenemos la primera ecuación:

$$\left[ (\lambda + 2\mu) \vec{\nabla}^2 e + Q_1 \vec{\nabla}^2 \varepsilon_1 + Q_2 \vec{\nabla}^2 \varepsilon_2 \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} e + \rho_{12} \varepsilon_1 + \rho_{13} \varepsilon_2) + \\ bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (e - \varepsilon_1) + bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (e - \varepsilon_2) \end{bmatrix}, \quad (129)$$

y se realiza el mismo procedimiento para la ecuación 122 aplicando el operador divergencia.

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ Q_1 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + R_1 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \right] = \vec{\nabla} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{22} \vec{U} + \rho_{12} \vec{u}) - \\ bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u} - \vec{U}) \end{bmatrix}, \quad (130)$$

aplicando la propiedad distributiva del operador divergencia se obtiene:

$$\left[ Q_1 \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + R_1 \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \right] = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{22} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \rho_{12} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \\ bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \end{array} \right]. \quad (131)$$

Simplificando y utilizando las dilataciones del sólido y los fluidos. Se obtiene:

$$Q_1 \vec{\nabla}^2 e + R_1 \vec{\nabla}^2 \varepsilon_1 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{22} \varepsilon_1 + \rho_{12} e) - bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (e - \varepsilon_1). \quad (132)$$

La ecuación 132 corresponde a la segunda ecuación desacoplada para el campo de onda P. Finalmente realizamos el mismo procedimiento en la ecuación 123, y se obtiene la tercera y última ecuación desacoplada de la onda P.

$$Q_2 \vec{\nabla}^2 e + R_2 \vec{\nabla}^2 \varepsilon_2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{33} \varepsilon_2 + \rho_{13} e) - bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (e - \varepsilon_2). \quad (133)$$

Es preciso tener en cuenta que una de las diferencias entre las ecuaciones acopladas 121, 122 y 123 con las ecuaciones desacopladas 129, 132 y 133, además de no considerar el rotacional, es que se trabaja en el campo de las divergencias de cada uno de los agregados del sistema compuesto, es decir, los fluidos y el medio poroso. En cambio las ecuaciones acopladas están en términos de los desplazamientos de cada agregado al sistema saturado, que dan lugar cuando cada uno de los tres campos de onda se propagan en el medio compuesto.

## B.4. Ecuaciones Generales del campo de onda Secundario S desacoplado para Altas Arecuencias

Para desacoplar las ondas transversales de las longitudinales, se hace necesario calcular el rotacional del sistema de ecuaciones generales de las ondas P-S acopladas, es decir se aplica el rotacional en las tres ecuaciones generales.

Se toma inicialmente la ecuación 121 y aplicando el operador rotacional se obtiene:

$$\vec{\nabla} \times \left[ \begin{array}{l} \mu \vec{\nabla}^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \\ Q_1 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + Q_2 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \end{array} \right] = \vec{\nabla} \times \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} \vec{u} + \rho_{12} \vec{U} + \rho_{13} \vec{V}) + \\ bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u} - \vec{U}) + bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u} - \vec{V}) \end{array} \right]. \quad (134)$$

Aplicando la propiedad distributiva del operador divergencia, llegamos a la ecuación 135.

$$\left[ \begin{array}{l} \mu \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}^2 \vec{u} + \\ (\lambda + \mu) \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \\ Q_1 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + \\ Q_2 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} \vec{\nabla} \times \vec{u} + \rho_{12} \vec{\nabla} \times \vec{U} + \rho_{13} \vec{\nabla} \times \vec{V}) + \\ bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{u} - \vec{\nabla} \times \vec{U}) + \\ bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{u} - \vec{\nabla} \times \vec{V}) \end{array} \right], \quad (135)$$

con la identidad vectorial  $\vec{\nabla}^2 \vec{f} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{f})$  para cualquier vector  $\vec{f}$ , reemplazamos y obtenemos:

$$\left[ \begin{array}{l} \mu \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u})) + \\ (\lambda + \mu) \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \\ Q_1 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + \\ Q_2 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{11} \vec{\nabla} \times \vec{u} + \rho_{12} \vec{\nabla} \times \vec{U} + \\ \rho_{13} \vec{\nabla} \times \vec{V}) + \\ bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{u} - \vec{\nabla} \times \vec{U}) + \\ bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{u} - \vec{\nabla} \times \vec{V}) \end{array} \right]. \quad (136)$$

Simplificando un poco el término  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}))$  al distribuir el rotacional se obtiene:  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u})$ . Como el rotacional de un gradiente siempre cumple que  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} F) = 0$ , para cualquier campo escalar  $F$ , el primer término se hace cero y nos queda  $-\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u})$ . Ahora de la identidad vectorial se despeja el rotacional y nuevamente se reemplaza para llegar a:  $-(\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u})) - \vec{\nabla}^2(\vec{\nabla} \times \vec{u}))$  aquí nuevamente el primer término se hace cero por que la divergencia de un rotacional es cero. Simplificamos y obtenemos que:  $\vec{\nabla}^2(\vec{\nabla} \times \vec{u})$ . Reemplazando éste resultado y haciendo las siguientes sustituciones,

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{\theta}, \quad (137)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{U} = \vec{\phi}, \quad (138)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\varphi}, \quad (139)$$

obtenemos finalmente la primera ecuación desacoplada del sistema S.

$$\mu \vec{\nabla}^2 \vec{\theta} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{11} \vec{\theta} + \rho_{12} \vec{\phi} + \rho_{13} \vec{\varphi}) + bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\theta} - \vec{\phi}) + bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\theta} - \vec{\varphi}). \quad (140)$$

Se realiza el mismo procedimiento para la ecuación 122 aplicando el operador rotacional.

$$\vec{\nabla} \times \left[ Q_1 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + R_1 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \right] = \vec{\nabla} \times \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{22} \vec{U} + \rho_{12} \vec{u}) - \\ bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t}(\vec{u} - \vec{U}) \end{array} \right], \quad (141)$$

aplicando la propiedad distributiva del operador rotacional se obtiene:

$$\left[ Q_1 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + R_1 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \right] = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{22} \vec{\nabla} \times \vec{U} + \rho_{12} \vec{\nabla} \times \vec{u}) - \\ bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{u} - \vec{\nabla} \times \vec{U}) \end{array} \right], \quad (142)$$

se simplifica y utilizando las rotaciones del sólido y los fluidos, ecuaciones 137, 138 y 139, se obtiene la segunda ecuación del sistema desacoplado de la onda S.

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{22} \vec{\phi} + \rho_{12} \vec{\theta}) - bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\theta} - \vec{\phi}). \quad (143)$$

Ahora desacoplamos la última ecuación 123 haciendo los mismos procedimientos y se llega finalmente a:

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{33} \vec{\varphi} + \rho_{13} \vec{\theta}) - bF(\Gamma) \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\theta} - \vec{\varphi}). \quad (144)$$

Vale la pena aclarar que una de las diferencias entre las ecuaciones acopladas 121, 122 y 123 con las ecuaciones desacopladas 140, 143 y 144, además de no considerar la divergencia, es que se trabaja en el campo de los rotacionales de cada uno de los agregados del sistema compuesto, es decir, los fluidos y el medio poroso. En cambio las ecuaciones acopladas están en términos de los desplazamientos de cada agregado al sistema saturado, que dan lugar cuando cada uno de los tres campos de onda se propagan en el medio compuesto.

## B.5. Aproximacion y discretización por Diferencias Finitas

El método de diferencias finitas consiste básicamente en hallar una aproximación de las derivadas de una ecuación diferencial por expresiones discretas las cuales se les denominan diferencias finitas. Para hallar estas expresiones discretas se realizan expansiones en series de Taylor progresivas y regresivas para una función  $h(x)$ . (André, 1999) (Charles, 1950). Ver ecuación 145 y 146.

$$h(x + \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta x^n}{n!} \frac{\partial^n h(x)}{\partial x^n}, \quad (145)$$

$$h(x - \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Delta x^n}{n!} \frac{\partial^n h(x)}{\partial x^n}. \quad (146)$$

Realizando las expansiones se obtiene:

$$h(x + \Delta x) = h(x) + \Delta x \frac{\partial h(x)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 h(x)}{\partial x^3} + \dots, \quad (147)$$

$$h(x - \Delta x) = h(x) - \Delta x \frac{\partial h(x)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 h(x)}{\partial x^3} + \dots. \quad (148)$$

Restando las ecuaciones 147 y 148, es claro apreciar que los términos n-ésimos que son pares se anulan, quedando únicamente los impares.

$$h(x + \Delta x) - h(x - \Delta x) = 2\Delta x \frac{\partial h(x)}{\partial x} + 2 \sum_{n_{imp} \geq 3}^{\infty} \frac{\Delta x^n}{n!} \frac{\partial^n h(x)}{\partial x^n}. \quad (149)$$

Se realiza un truncamiento de orden  $O(\Delta x^2)$  en la ecuación 149 y despejando  $\frac{\partial h(x)}{\partial x}$ , se obtiene:

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x} \approx \frac{h(x + \Delta x) - h(x - \Delta x)}{2\Delta x}. \quad (150)$$

Por lo tanto ya se tiene la aproximación de diferencias finitas para los términos que poseen Primeras derivadas.

Ahora para calcular la expresión para segundas derivadas, se suman las ecuaciones 147

y 148. Es claro que los términos  $n$ -ésimos que son impares se anulan, quedando únicamente los pares.

$$h(x + \Delta x) + h(x - \Delta x) = 2h(x) + \frac{2\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x^2} + 2 \sum_{n_{par} \geq 4}^{\infty} \frac{\Delta x^n}{n!} \frac{\partial^n h(x)}{\partial t^n}. \quad (151)$$

Se realiza un truncamiento de orden  $O(\Delta x^2)$  en la ecuación 151 y despejando  $\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x^2}$ , se obtiene:

$$\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x^2} \approx \frac{h(x + \Delta x) - 2h(x) + h(x - \Delta x)}{\Delta x^2}. \quad (152)$$

Por lo tanto ya se tiene la aproximación de diferencias finitas para los términos que poseen segundas derivadas. Debido a que en el sistema acoplado aparecen términos en donde las derivadas parciales son cruzadas, se hace necesario recurrir a estas ecuaciones discretizadas, aplicando una segunda discretización. Suponiendo que la función dependiera de dos variables  $h(x, y)$ , se realiza lo siguiente: Lo primero es discretizar con respecto a una de las dos variables, por ejemplo  $x$ , asumiendo  $y$  constante.

$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \approx \frac{h(x + \Delta x, y) - h(x - \Delta x, y)}{2\Delta x}. \quad (153)$$

Posteriormente realizamos la segunda discretización utilizando la ecuación 150.

$$\frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial y \partial x} \approx \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{h(x + \Delta x, y) - h(x - \Delta x, y)}{2\Delta x} \right), \quad (154)$$

para finalmente obtener:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial y \partial x} &\approx \left( \frac{\frac{\partial h(x + \Delta x, y)}{\partial y} - \frac{\partial h(x - \Delta x, y)}{\partial y}}{2\Delta x} \right) \\ &\approx \left( \frac{h(x + \Delta x, y + \Delta y)}{4\Delta x \Delta y} - \frac{h(x + \Delta x, y - \Delta y)}{4\Delta x \Delta y} - \frac{h(x - \Delta x, y + \Delta y)}{4\Delta x \Delta y} + \frac{h(x - \Delta x, y - \Delta y)}{4\Delta x \Delta y} \right). \end{aligned} \quad (155)$$

Así se obtiene la aproximación en diferencias finitas de cada uno de los para el sistema de ecuaciones diferenciales. A continuación se mostrará la discretización de los sistemas tanto acoplados como desacoplados.

## B.6. Cálculo de valores de $A_x$ , $A_y$ y $A_z$

Para discretizar la ecuación 59 y hallar el potencial  $A_x$  en un tiempo  $t + \Delta t$ , es decir,  $A_x(x, y, z, t + \Delta t)$ , se realiza una expansión en series de Taylor con respecto a la variable  $t$  para hallar el término  $\frac{\partial A_x}{\partial t}$ .

$$\begin{aligned} A_x(x, y, z, t + \Delta t) &= A_x(x, y, z, t) + \frac{\Delta t}{1!} \frac{\partial A_x(x, y, z, t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 A_x(x, y, z, t)}{\partial t^2} \\ &\quad + \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 A_x(x, y, z, t)}{\partial t^3} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{\Delta t^n}{n!} \frac{\partial^n A_x(x, y, z, t)}{\partial t^n}. \end{aligned} \quad (156)$$

Se realiza un truncamiento de orden 2. Por lo tanto al despejar  $\frac{\partial A_x}{\partial t}$  se obtiene:

$$\frac{\partial A_x(x, y, z, t)}{\partial t} \approx \frac{A_x(x, y, z, t + \Delta t) - A_x(x, y, z, t)}{\Delta t}. \quad (157)$$

Se realiza el mismo procedimiento para hallar  $\frac{\partial e_x}{\partial x}$  y se obtiene:

$$\frac{\partial e_x(x, y, z, t)}{\partial x} \approx \frac{e_x(x + \Delta x, y, z, t) - e_x(x, y, z, t)}{\Delta x}, \quad (158)$$

y se reemplazan las ecuaciones 157 y 158 en 59, obteniendo:

$$A_x(x, y, z, t + \Delta t) = A_x(x, y, z, t) + \frac{v\Delta t}{\Delta x} [e_x(x + \Delta x, y, z, t) - e_x(x, y, z, t)], \quad (159)$$

que representan las ecuaciones para la evolución del campo de onda en la región *PML*. Realizando el mismo procedimiento para las otras dos componentes se obtienen las siguientes relaciones.

$$A_y(x, y, z, t + \Delta t) = A_y(x, y, z, t) + \frac{v\Delta t}{\Delta y} [e_y(x, y + \Delta y, z, t) - e_y(x, y, z, t)], \quad (160)$$

$$A_z(x, y, z, t + \Delta t) = A_z(x, y, z, t) + \frac{v\Delta t}{\Delta z} [e_z(x, y, z + \Delta z, t) - e_z(x, y, z, t)]. \quad (161)$$

## B.7. Cálculo de valores de $e_x$ , $e_y$ y $e_z$

Para hallar los valores de  $e_x$ ,  $e_y$  y  $e_z$ , se realiza el mismo proceso de discretización indicado en la sección anterior teniendo en cuenta que la discretización de  $A$  es con respecto a  $x$  y  $e_x$  es con respecto a  $t$ . Se reemplaza en la ecuación 60 y se obtienen los siguientes resultados:

$$e_x(x, y, z, t + \Delta t) = e_x(x, y, z, t) + \frac{v\Delta t}{\Delta x} [A_x(x + \Delta x, y, z, t) - A_x(x, y, z, t)], \quad (162)$$

$$e_y(x, y, z, t + \Delta t) = e_y(x, y, z, t) + \frac{v\Delta t}{\Delta y} [A_y(x, y + \Delta y, z, t) - A_y(x, y, z, t)], \quad (163)$$

$$e_z(x, y, z, t + \Delta t) = e_z(x, y, z, t) + \frac{v\Delta t}{\Delta z} [A_z(x, y, z + \Delta z, t) - A_z(x, y, z, t)]. \quad (164)$$

## B.8. Factor de Atenuación $Q_i$ Fronteras PML

Ahora se realiza una modificación a las ecuaciones 159, 160, 161, 162, 163 y 164 introduciendo las funciones  $Q_{1x}$ ,  $Q_{2x}$ ,  $Q_{1y}$ ,  $Q_{2y}$ ,  $Q_{1z}$  y  $Q_{2z}$  los cuales representan la atenuación de la amplitud

de la onda a medida que esta se propaga en la región *PML*. (Berenger, 1996). Estas funciones se muestran a continuación.

$$Q_{1x}(x) = e^{-v \cdot q(x)}, \quad (165)$$

$$Q_{2x}(x) = \frac{1 - e^{-v \cdot q(x)\Delta t}}{q(x)\Delta x}, \quad (166)$$

$$Q_{1y}(y) = e^{-v \cdot q(y)}, \quad (167)$$

$$Q_{2y}(y) = \frac{1 - e^{-v \cdot q(y)\Delta t}}{q(y)\Delta y}, \quad (168)$$

$$Q_{1z}(z) = e^{-v \cdot q(z)}, \quad (169)$$

$$Q_{2z}(z) = \frac{1 - e^{-v \cdot q(z)\Delta t}}{q(z)\Delta z}. \quad (170)$$

Es preciso mencionar que al incluir éstos dos parametros en el sistema de ecuaciones, lo que se esta haciendo es atenuar suavemente cada uno de los campos de onda  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $e_z$ ,  $A_x$ ,  $A_y$  y  $A_z$ . En términos más generales si realizamos el  $\lim_{q(x) \rightarrow 0} Q_{1x}(x) = 1$  y  $\lim_{q(x) \rightarrow 0} Q_{2x}(x) = \frac{v\Delta t}{\Delta x}$  para cada una de las seis ecuaciones que representan las tres direcciones, se obtiene la misma expresión que se tenía inicialmente. Ahora se reemplaza en las ecuaciones 159, 160, 161, 162, 163 y 164 se obtiene finalmente:

$$A_x(x, y, z, t + \Delta t) = Q_{1x}A_x(x, y, z, t) + Q_{2x}[e_x(x + \Delta x, y, z, t) - e_x(x, y, z, t)], \quad (171)$$

$$A_y(x, y, z, t + \Delta t) = Q_{1y}A_y(x, y, z, t) + Q_{2y}[e_y(x, y + \Delta y, z, t) - e_y(x, y, z, t)], \quad (172)$$

$$A_z(x, y, z, t + \Delta t) = Q_{1z}A_z(x, y, z, t) + Q_{2z}[e_z(x, y, z + \Delta z, t) - e_z(x, y, z, t)], \quad (173)$$

$$e_x(x, y, z, t + \Delta t) = Q_{1x}(x)e_x(x, y, z, t) + Q_{2x}(x)[A_x(x + \Delta x, y, z, t) - A_x(x, y, z, t)], \quad (174)$$

$$e_y(x, y, z, t + \Delta t) = Q_{1y}(y)e_y(x, y, z, t) + Q_{2y}(y)\Delta y[A_y(x, y + \Delta y, z, t) - A_y(x, y, z, t)], \quad (175)$$

$$e_z(x, y, z, t + \Delta t) = Q_{1z}(z)e_z(x, y, z, t) + Q_{2z}[A_z(z)(x, y, z + \Delta z, t) - A_z(x, y, z, t)]. \quad (176)$$

Tomando los factores de la dirección  $x$  sin perder generalidad en las otras dos direcciones, estos valores de  $Q_{1x}(x)$  y  $Q_{2x}(x)$  dependen de  $q(x)$  que es una función que representa el factor de atenuación en función de la posición  $x$  a medida que la onda se propaga en la región *PML*. Su expresión es la siguiente:

$$q(x) = q_0 \left( \frac{x}{\delta} \right)^n. \quad (177)$$

El valor de  $q_0$  es la amplitud máxima del factor de atenuación  $q(x)$  dentro de la región *PML*.  $\delta_x$  representa el grosor de la región *PML* en la dirección  $x$ .  $n$  es un exponente adimensional que define el comportamiento del factor de Atenuación  $q(x)$  a medida que aumenta la posición  $x$ . Cuando  $n = 4$  presenta un buen comportamiento en la atenuación de la onda.

# Bibliografía

- André, J., 1999. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Roya; Institute of Technology, Stockholm.
- Aquiralt, J., B. L. & Chambon, R., 1985. Dynamics of porous saturated media, checking of the generalized law of darcy, *Journal Acoustic Society of America*, **77**, 1641–1650.
- Baysal E., K. D. & Sherwood, J., 1984. A two-way non reflectin wave equation, *Geophysics Journal*, **49**(2), 132–141.
- Berenger, J. P., 1994. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, *Journal Of Computational Physics*, pp. 185–200.
- Berenger, J. P., 1996. Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, *Journal Of Computational Physics*, (0181), 363–379.
- Berryman, J. G., 1980. Confirmation of biot's theory, *Applied Physics Letters*, (37).
- Biot, M. A., 1956a. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. ii. higher-frequency range, *The Journal Of The Acoustical Society Of America*, **28**(2), 179–191.
- Biot, M. A., 1956b. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. i. low-frequency range, *The Journal Of The Acoustical Society Of America*, **28**(2), 168–178.
- Biot, M. A., 1962a. Generalized theory of acoustic propagation in porous media, *The Journal Of The Acoustical Society Of America*, **34**(5), 1254–1264.
- Biot, M. A., 1962b. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media, *Journal Of Applied Physics*, **33**(4), 1482–1498.
- Biot, M. A. & Willis, D. G., 1957. The elastic coefficients of the theory of consolidation, *Journal Of Applied Mechanics*, (4), 594–601.
- C. Ecker, J. D. & Nur, A., 1998. Sediments with gashydrates: internal structure from seismic avo., *Geophysics*, **63**, 1659–69.

- Camarasa, R. M., 2002. *Contribución a la teoría de Biot sobre propagación de ondas acústicas en sedimentos saturados en una mezcla de fluidos*, Tesis de doctorado, Universidad Complutense de Madrid.
- Campos, D. & Isaza, J. F., 2002. *Prolegómenos a los sistemas Dinámicos*, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá., Bogotá.
- Carrera, M. L., 2001. *Modelización del desplazamiento de bteq en un acuífero por la ruptura de una tanque de gasolina en la zona de Alicante*, Tesis de fin de carrera, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Minas.
- Cerjan C., Kosloff D., K. R. & M., R., 1985. A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations, *Geophysics Journal*, **80**(4), 705–708.
- Charles, J., 1950. *Calculus of Finite Differences*, Chelsea Publishing Company, New York.
- Gassmann, F., 1951. Uber die elastiziat poroser medien, *Vier. der Natur. Gesellschaft*, **96**(1).
- Gregory, A. R., 1977. Aspects of rock physics from laboratory and log data that are important to seismic interpretation, *Am. Assoc. Petr. Geol. Mem*, **26**(15).
- Guerrero T. I., H. G. & Calle, A., 2009. Modelado de la propagación de ondas en medios porosos saturados con fluidos, *Asociación Argentina de Mecanica Computacional*, **28**, 2319–2327.
- Harold, R., 1994. Ricker, ormsby, klauder, butterworth - a choice of wavelets, *CSEG Recorder*, pp. 8–9.
- Hasting F., S. J. & S., B., 1996. Application of the perfectly matched layer (pml) absorbing boundary condition to elastic wave propagation, *Acoustical Society of America*, **100**(5), 3061–3069.
- Hong, T.-K. & Kennett, B. L. N., 2002. A wavelet-based method for simulation of two-dimensional elastic wave propagation, *Geophysics Journal*, **150**, 610–638.
- Kuster, G. & Toksoz, M., 1974a. Velocity and attenuation of seismic waves in two-phases media. i. theoretical formulations, *Geophysics*, **39**, 583–606.
- Kuster, G. & Toksoz, M., 1974b. Velocity and attenuation of seismic waves in two-phases media. ii. experimental results, *Geophysics*, **39**, 607–618.
- M. Wyllie, A. R. G. & Gardner, L. W., 1956. Elastic wave velocities in heterogeneous and porous media, *Geophysics*, **21**(41).
- M.A.Biot, 1941. General theory of the three-dimensional consolidation, *Journal Applied Physics*, (12).

- Merry, J., 2005. *Wavelet Theory Applications*, Eindhoven University of Technology, Eindhoven.
- Murphy, W., 1985. Acoustic measures of partial gas saturation in tight sandstones, *J. Geophysics*, **80**(11), 549.
- Oguschwitz, P. R., 1941a. Applicability of the biot theory. i. low-porosity materials, *Journal of the Acoustical Society of America*, (2).
- Oguschwitz, P. R., 1941b. Applicability of the biot theory. ii. low-porosity materials, *Journal of the Acoustical Society of America*, (2).
- Plona, T. J., 1980. Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies, *Applied Physics Letters*, (36).
- Rasolofosaon, P. N. J., 1991. Plane acoustic waves in linear viscoelastic porous media: Energy, particle displacement, and physical interpretation, *Acoustical society of America*, **89**(4), 1532–1550.
- Rubino, G., 2008. *Atenuación y dispersión de Ondas sísmicas en medios porosos saturados altamente heterogeneos*, Tesis de doctorado, Universidad Nacional de la Plata.
- Stoll, D. R. & Bryan, M., 1970. Wave attenuation of sound in saturated sediments, *J. A. S. A*, (5).
- V. Korneev, G. Goloshubin, T. D. & Silin, D., 2004. Seismic low-frequency effects in monitoring fluid-saturated reservoirs, *Geophysics*, **69**(2), 522–532.
- Valeri A. K., Goloshubin M. G., D. T. & D., S., 2004. Seismic low-frequency effects in monitoring fluid-saturated reservoirs, *Geophysics Journal*, **69**(2), 522–532.
- Vargas, J. C. A., 2003. *Propagación de ondas sísmicas y atenuación de ondas CODA en el territorio colombiano*, Tesis de doctorado, Universidad Politécnica de Cataluña.
- Whei Cheng Lo, G. S. & Ernest, M., 2006. Low-frequency dilatational wave propagation through unsaturated porous media containing two immiscible fluids, *Springer Science + Business Media*, **68**, 91–105.
- Winkler, K. & Murphy, W., 1955. Acoustic velocity and attenuation in porous rocks, *Schlumberger-Doll Research*.
- Ying, H., 2008. A wavelet finite-difference method for numerical simulation of wave propagation in fluid-saturated porous media, *Applied Mathematics and Mechanics*, **29**, 1495–1504.