



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

MODELIZACIÓN Y DINÁMICA NO SUAVE EN SISTEMAS DE CONFLICTOS

Felipe Antonio Gallego López

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas, Departamento de Matemáticas
Maestría en Matemática Aplicada
Manizales, Colombia
2014

MODELLING AND NON-SMOOTH DYNAMIC IN CONFLICT SYSTEMS

Felipe Antonio Gallego López

Thesis or research paper submitted as partial requirement for the degree of:

MSc. - Applied Mathematics

Advisor:

Ph.D. Gerard Olivar Tost

National University of Colombia
Exact Science Faculty, Department of Mathematics
MSc. - Applied Mathematics
2014

Resumen

Utilizando los sistemas dinámicos se modela la competición entre actores en conflicto, con el objetivo de analizar teóricamente los conflictos intratables desde la mirada de la competición entre los actores y la forma de intervención de un mediador. Se presenta una revisión del tema de los conflictos y su modelación, enfatizando en las características de los sistemas dinámicos no suaves. Se aplica la teoría de dinámica de sistemas para desarrollar el respectivo modelo, a través de diagramas causales y diagramas de niveles y flujos. El análisis del sistema dinámico se realizó mediante la teoría de sistemas de Filippov, identificándose las superficies de conmutación y sus deslizamientos, las bifurcaciones y los puntos de equilibrio. Mediante simulación del modelo, se obtuvieron los retratos de fase, los cuales permiten realizar interpretaciones sobre las bifurcaciones y los puntos de equilibrio del sistema y su relación con la influencia de la intervención del mediador en el conflicto. Se logró encontrar un indicador de influencia del medio, que permite generar políticas de tratamiento del conflicto.

Palabras claves: conflicto, fenómenos no lineales, complejidad, teoría de bifurcación, sistemas no suaves.

Abstract

Using dynamical systems, competition among actors in conflict is modeled in order to analyze theoretically intractable conflict, from the perspective of competition between actors and how a mediator can influence the resolution. A review is presented of the issue of conflict and its modeling, emphasizing the characteristics of non-smooth dynamical systems. The theory of system dynamics to develop the respective model is applied through causal diagrams and diagrams of levels and flows. The analysis of the dynamic system was performed using the theory of Filippov systems, identifying switching surfaces and sliding, bifurcations and equilibrium points. Through model simulation, the phase portraits are obtained, which allow interpretations of the bifurcations and the equilibrium points of the system and its relation to the influence of the intervention of the mediator in the conflict. This allows to find an indicator of environmental influence, which generates conflict treatment policies.

Keywords: conflict, competition, nonlinear phenomena, complexity, bifurcation theory, non-smooth systems.

Lista de Figuras

	pag.
Fig. 2.1 Órbitas de un sistema a tiempo continuo. Figura adaptada de Kuznetsov (2004).	9
Fig. 2.2. Curva solución y órbita en el espacio X . Adaptada de Kuznetsov (2004).....	11
Fig. 2.3. Aplicación de Poincaré asociada a una órbita cíclica. Adaptada de Kuznetsov (2004).	14
Fig. 2.4. (a) sistema continuo a trozos, (b) sistemas de Filippov, (c) sistemas con impactos. Adaptada de Di Bernardo et al. (2008).....	15
Fig. 2.5. Representación gráfica del (a) Sliding, (b) Escaping, y (c) Crossing. Adaptada de Guardia et al. (2011).	16
Fig. 2.6. (a) punto tangente visible en S_1 , (b) punto tangente invisible en S_1 . Adaptada de Kuznetsov et al. (2003).	17
Fig. 2.7. Aplicación de involución. Adaptada de Guardia et al. (2011).	17
Fig. 2.8. (a) Foco difuso inestable, (b) Foco difuso estable. Adaptada de Kuznetsov et al (2003).	18
Fig. 2.9. Bifurcación <i>Fold-Fold</i> : un ejemplo particular de la colisión de dos puntos tangentes invisibles. Adaptada de Kuznetsov et al. (2003).	21
Fig. 2.10. Bifurcación Cusp-Regular: ejemplo particular de la colisión de dos puntos tangentes con su posterior desaparición de la zona de deslizamiento. Adaptada de Kuznetsov et al (2003).	21
Fig. 2.11. Se observa la desaparición catastrófica de Pseudoequilibrios. Adaptada de Kuznetsov et al. (2003).	22
Fig. 2.12 Colisión de un nodo estable con la superficie de conmutación (Boundary-node). Adaptada de Kuznetsov et al. (2003).	22
Fig. 2.13. (a) Órbita homoclínica planar, (b) Órbita heteroclínica planar. Adaptada de Kuznetsov et al. (2004).	23
Fig. 2.14. (a) cruce de variedades a través de un punto p <i>tangente visible</i> . (b) variedades a través de un punto p <i>tangente invisible</i> . Adaptada de Guardia et al. (2011).	24
Fig. 2.15. Ejemplos particulares de bifurcaciones globales no-suaves. (a) Órbita homoclínica deslizante hacia un punto silla. (b) Órbita heteroclínica entre una pseudo-silla (tipo de punto silla formado sobre zona de deslizamiento) y un punto silla. (c) Órbita homoclínica deslizante hacia una pseudo-silla. Adaptada de Kuznetsov et al. (2003).	25
Fig. 3.1. Diagrama causal que explica el modelo básico de relaciones causales para un actor	29
Fig. 3.2. Diagrama de niveles y flujos de un solo actor	30

Fig. 3.3. Diagrama causal de la competición entre dos actores.	32
Fig. 3.4. Diagrama de niveles y de flujos para el escenario de competencia.	33
Fig. 3.5. Forma de la afectación de un actor sobre otro. La abscisa es el bienestar de un actor y la ordenada es la afectación causada sobre el otro actor. Al aumentar su bienestar interno relativo, se reduce la afectación positiva sobre el otro.	33
Fig. 3.6. Análisis de órbitas. Retrato de fase y curva solución del sistema dado por las Ecuaciones (3.12) en la condición inicial $x_0 = 1$ y $y_0 = 2$ cuando: (a) $c_i \leq m_i$, (b) $c_i > m_i$	37
Fig. 3.7. Nulclinas (en azul) del sistema de la definición 3.3.1. Las intersecciones son acercamientos asintóticos a los equilibrios.	38
Fig. 3.8. Nulclinas (en azul), las superficies de conmutación (trazo grueso) y la definición de sus intervenciones.	41
Fig. 3.9. Geometría de las órbitas y el cruce alrededor del punto tangente T_{F_1} para $b_2 = 0$. $\varphi_{T_{F_1}}(x)$ es composición de dos aplicaciones de involución φ_{F_1} y φ_{F_2}	51
Fig. 3.10. Aplicaciones de retorno alrededor de T_{F_1} (denotado $\varphi_{T_{F_1}}(x)$) y T_{F_2} (como $\varphi_{T_{F_2}}(x)$) ..	52
Fig. 4.1. Retratos de fase y diagrama de continuación para el conflicto intratable moderado a alto.....	61
Fig. 4.2. Retratos de fase y diagrama de continuación para el conflicto intratable bajo a moderado.	62
Fig. 4.3. Retratos de fase para el conflicto intratable con intervención del medio y de las afectaciones para un conflicto intratable moderado a alto.....	64
Fig. 4.4. Retratos de fase para el conflicto intratable con intervención del medio y de las afectaciones para un conflicto intratable bajo a moderado.....	65
Fig. 4.5. Retratos de fase para el conflicto intratable con intervención completa	66

Lista de Tablas

	Pag.
Tabla 2.1. Clasificación general de los puntos de equilibrio de un sistema dinámico a tiempo continuo, planar y no lineal, según sus valores propios.....	13
Tabla 3.1. Definición de las variables y parámetros del modelo de competición.....	34
Tabla 3.2. Campos vectoriales asociados a los sistemas no suaves referentes a la intervención de la competición en el medio $m_1 > 0, c_1 > 0, m_2 > 0, c_2 > 0; b_1$ y $b_2 \in \mathbb{R}$ $c_1 > m_1, c_2 > m_2$	44
Tabla 3.3. Análisis de deslizamientos según Tabla 3.2. $b_2 \leq b_1$	45
Tabla 3.4. Análisis de puntos tangentes: Intervención de la competición en el medio	46
Tabla 3.5. Sistemas para el análisis de zonas de deslizamiento: Intervención del medio y las afectaciones entre actores.	47
Tabla 3.6. Análisis de zonas de deslizamiento: Intervención del medio y las afectaciones entre actores.....	47
Tabla 3.7. Análisis de zonas de deslizamiento: Intervención del medio y las afectaciones entre actores.....	48
Tabla 3.8. Análisis de puntos tangentes: Intervención del medio y las afectaciones entre actores.....	48
Tabla 3.9. Análisis del campo de Filippov: Intervención del medio y las afectaciones entre actores.....	49
Tabla 3.10. Casos de bifurcaciones globales: intervención del medio	55
Tabla 3.11. Casos de bifurcaciones globales y locales: intervención del medio y de las afectaciones.	57

Contenido	pag.
RESUMEN	V
ABSTRACT	VII
LISTA DE FIGURAS	IX
LISTA DE TABLAS	XI
CONTENIDO	XIII
1. ENFOQUE DE LA TESIS	1
1.1 CONTEXTUALIZACIÓN	1
1.2 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA	3
1.3 OBJETIVO GENERAL Y OBJETIVOS ESPECÍFICOS	4
1.4 METODOLOGÍA.....	4
1.5 ALCANCE Y APORTE ESPERADO DEL ESTUDIO	5
1.6 ESTRUCTURA DE LA TESIS	5
2. FUNDAMENTOS DE SISTEMAS DINÁMICOS NO-SUAVES	7
2.1 INTRODUCCIÓN	7
2.2 SISTEMA DINÁMICO	7
2.2.1 Espacio de estado.....	7
2.2.2 Tiempo	7
2.2.3 Operador evolución.....	7
2.2.4 Sistema dinámico	8
2.2.5 Órbitas y retratos de fase	8
2.2.6 Punto de equilibrio.....	9
2.2.7 Ciclo.....	9
2.2.8 Retrato de fase.....	9
2.2.9 Conjunto invariante	9
2.2.10 Variedades estables y no estables	9
2.2.11 Ecuaciones diferenciales y Sistemas dinámicos a tiempo continuo.....	10
2.2.12 Existencia, unicidad, y dependencia suave (Teorema)	10
2.2.13 Curva solución	11
2.2.14 Órbita (en sistemas dinámicos en ecuaciones diferenciales).....	11
2.2.15 Estabilidad de un equilibrio (Segundo Teorema de Lyapunov, 1892)	12
2.2.16 Equivalencia topológica.....	13
2.2.17 Sección de Poincaré	13
2.3 SISTEMAS DE FILIPPOV.....	14
2.3.1 Sistema de Filippov	15
2.3.2 Sliding	16
2.3.3 Escaping	16
2.3.4 Crossing.....	16
2.3.5 Puntos tangentes	16
2.3.6 Puntos tangentes visibles (invisibles) cuadráticos	16
2.3.7 Aplicación de involución	17
2.3.8 Campo de Filippov	19
2.3.9 Equivalencia topológica en sistemas no-suaves (Definición estricta)	19
2.3.10 Bifurcación	20
2.3.11 Tipos de bifurcaciones locales no-suaves	20

2.3.12 Tipos de bifurcaciones globales no-suaves	23
2.3.13 Órbita homoclínica	23
2.3.14 Órbita heteroclínica	23
2.4 CONCLUSIONES	26
3. MODELO DE COMPETICIÓN ENTRE DOS ACTORES Y LA INTERVENCIÓN DE UN MEDIADOR	27
3.1 INTRODUCCIÓN	27
3.2 APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE DINÁMICA DE SISTEMAS PARA LA MODELACIÓN DEL PROBLEMA DE CONFLICTO	27
3.2.1 Relaciones causales y planteamiento del modelo básico (un actor)	28
3.2.2 Relaciones causales y planteamiento del modelo para dos actores	31
3.3 FORMULACIÓN DEL INDICADOR DE INTERVENCIÓN DEL MEDIADOR EN EL CONFLICTO	36
3.3.1 Conflicto intratable (definición)	38
3.3.2 Superficie de intervención	39
3.3.3 Intervención de la competición en el medio	39
3.3.4. Intervención del medio y de las afectaciones de los actores	41
3.4 APLICACIÓN A LOS SISTEMAS NO SUAVES (SISTEMAS DE FILIPPOV).....	43
3.4.1 Cálculo de zonas de deslizamiento: Intervención de la competición en el medio	44
3.4.2 Cálculo de puntos tangentes: Intervención de la competición en el medio	45
3.4.3 Cálculo de zonas de deslizamiento: Intervención del medio y las afectaciones entre actores	46
3.4.4 Análisis de puntos tangentes.....	48
3.4.5 Análisis del campo de Filippov	49
3.5 BIFURCACIONES LOCALES: INTERVENCIÓN DEL MEDIO.....	50
3.5.1 Bifurcación Fold-Fold	50
3.5.2 Bifurcación Boundary-Node.....	53
3.6 BIFURCACIONES GLOBALES: INTERVENCIÓN DEL MEDIO	54
3.7 BIFURCACIONES LOCALES Y GLOBALES: INTERVENCIÓN DEL MEDIO Y DE LAS AFECTACIONES	56
3.8 CONCLUSIONES	58
4. SIMULACIONES DEL SISTEMA DINÁMICO Y ANÁLISIS DEL PROBLEMA DEL CONFLICTO.....	59
4.1 INTRODUCCIÓN	59
4.2 SIMULACIÓN DE RETRATOS DE FASE: INTERVENCIÓN DEL MEDIO.....	59
4.2.1 Conflicto intratable moderado a alto	59
4.2.2 Conflicto intratable bajo a moderado	61
4.3 SIMULACIÓN DE RETRATOS DE FASE: INTERVENCIÓN DEL MEDIO Y DE LAS AFECTACIONES	63
4.3.1 Conflicto intratable moderado a alto	63
4.3.2 Conflicto intratable bajo a moderado	64
4.3.3 Conflicto intratable a intervención completa	65
5. RECOMENDACIONES PARA EL TRABAJO A FUTURO	67
6.ANEXOS	69
ANEXO 1. JACOBIANO DE UN SISTEMA PLANAR	69
ANEXO 2. ANÁLISIS DE PUNTOS TANGENTES: INTERVENCIÓN EN EL MEDIO	71
ANEXO 3. ANÁLISIS DEL CAMPO DE FILIPPOV: INTERVENCIÓN DEL MEDIO	77

ANEXO 4. CÁLCULO DE LAS APLICACIONES DE INVOLUCIÓN JUNTO A LAS APLICACIONES DE RETORNO PARA VERIFICAR BIFURCACIÓN FOLD-FOLD.....	81
BIBLIOGRAFÍA.....	89

1. Enfoque de la Tesis

1.1 Contextualización

En el contexto de los estudios psicosociales, es de interés comprender como lidiar con los conflictos que pueden surgir entre diversos actores, sean estos individuos, grupos de gente y/o naciones. El estudio de los conflictos es importante ya que permite comprender de qué forma se puede llegar a escenarios de bienestar y estabilidad para los actores, es decir a la solución del conflicto, el cual es un elemento característico de las relaciones humanas en todas las épocas y culturas.

La palabra conflicto designa una situación compleja que se define por una determinada estructura de las relaciones sociales (Touzard, 1981) . El conflicto puede enfrentar a individuos (conflicto interpersonal), a grupos (conflicto intergrupal), organizaciones sociales (conflicto social) o a naciones (conflicto internacional). Un tipo de conflicto es aquel en el cual las partes persiguen fines antagónicos, apuntan a metas opuestas o tienen intereses divergentes; por otra parte existen situaciones conflictivas en las que los adversarios persiguen el mismo fin, aunque de manera competitiva (por ejemplo el caso del territorio deseado por dos naciones). En este caso se habla de rivalidad o competencia. Algunos autores no diferencian entre los términos competición y conflicto. También es de destacar que en el caso de la competición siempre hay asociado un poder, entendido como la posibilidad que tiene un actor de influir sobre la conducta de otro, de modificar o controlar su comportamiento, sus actitudes o sentimientos. Si la búsqueda del control sobre el otro es lo fundamental para las partes o es el único medio de lograr la meta, se habla de conflicto (Touzard, 1981).

Los conflictos de la vida real pueden tener muchas causas que poseen interdependencia entre sí, no obstante, muchos conflictos comparten factores elementales comunes. Uno de tales factores básicos es la respuesta que un actor presenta ante otro (Touzard, 1981). Deutsch (1973, 2006) desarrolló la idea inicial de que muchos tipos diferentes de conflictos reflejan los efectos de la competición o cooperación entre actores. Citando al propio Deutsch: “para ponerlo coloquialmente, si usted está relacionado positivamente con otro, entonces ustedes se hunden o nadan juntos; con una relación negativa, si el otro se hunde usted puede nadar, si el otro nada usted se hunde”. Teniendo en cuenta esta idea, es posible desarrollar un modelo matemático que describa una situación conflictiva entre dos o más actores, esto es, la descripción de alguna variable que caracterice al estado de los actores (ej. índice de bienestar, entre otros), en su evolución temporal, dependiente de factores de influencia en el conflicto, tales como la interacción entre los actores, la influencia del medio externo y la inercia al cambio de estado.

La descripción de los fenómenos biológicos y en particular de los comportamientos sociales por medio de modelos matemáticos recibe el nombre de *Biología Matemática*¹ o *biomatemática*, la cual incluye entre otros los estudios de dinámica de poblaciones, modelado en biología

¹ Por su objeto de estudio y por el método científico que se aplica, el área de conocimiento denominado *Biología Matemática*, puede clasificarse dentro de la *matemática aplicada*.

celular y molecular, así como modelado de sistemas fisiológicos y comportamientos sociales (Murray, 2001). La solución de las ecuaciones de estos modelos, ya sea por medios analíticos o numéricos, describe cómo el sistema biológico se comporta dinámicamente o cuáles son sus estados de equilibrio. En el caso de los fenómenos psicosociales, la aplicación más mencionada de la biología matemática es el estudio de la interacción y el conflicto marital (Gottman et al., 1999; 2002a). Los modelos de conflicto se han basado en funciones de reacción entre los actores, definidas cualitativamente (Boulding, 1962; Pruitt, 2006), o mediante una aplicación metafórica de los conceptos de sistemas dinámicos (Vallacher & Nowak, 2005; Bui-Wrzosinska, 2005), o basados en modelos matemáticos lineales (Richardson, 1960) o en modelos lineales a trozos (Gottman et al., 2002a, 2002b).

La teoría de sistemas de actores que interactúan entre sí, históricamente se remonta al periodo previo a la Segunda Guerra Mundial, durante el cual, el psicólogo alemán Kurt Lewin (Lewin, 1973; Schellenberg, 1985), mediante la “teoría de campo” planteó que los grupos de personas son elementos de comportamiento que se pueden describir como campos vectoriales, donde la conducta no es efecto del individuo, sino de las fuerzas psíquicas alrededor que tienen influencia sobre él. Estos trabajos condujeron al surgimiento de la llamada “psicología social” (Schellenberg, 1985).

Otra teoría sobre los sistemas de actores interactuantes fue concebida por el biólogo Ludwig Von Bertalanffy, quién en su Teoría General de Los Sistemas (1968), mostró la posibilidad de pensar las relaciones humanas como una aplicación básica de un sistema dinámico, es decir, como un sistema cuyos cambios se describen en términos de una variable temporal. En términos generales, esto aportó a la unificación epistemológica de las ciencias sociales y las naturales, logrando un consenso dentro del pensamiento sistémico. Sin embargo, Bertalanffy no desarrolló un modelo concreto, ni puso sus ideas en términos de variables observables experimentalmente.

Posteriormente, el psicólogo John Mordecai Gottman, entre los años 1980-1999, adelantó estudios de disolución marital, siendo el primero en desarrollar un modelo matemático de un sistema de conflicto, que podría ser validado experimentalmente. Para esto, usó autoreportes controlados de parejas que poseían problemas maritales. Empleando la escala del Sistema Rápido de Puntaje de Interacción de Parejas (en inglés *Rapid Couples Interaction Scoring System*, RCISS) (Gottman et al., 2002a), llegó a un modelo de la interacción entre parejas por medio de un sistema dinámico a tiempo discreto, trabajo con el cual pudo demostrarse que es posible poner el estudio de las relaciones interpersonales sobre una base matemática sólida y sugerir recomendaciones para una matrimonio perdurable (esto es, acorde a unos niveles preestablecidos de indicadores de felicidad y estabilidad, en condiciones de equilibrio o no-equilibrio de la relación) con base en las predicciones del modelo.

La psicopsicología del conflicto es un área de estudio relativamente reciente, ya que los primeros trabajos se remontan alrededor de 1960; por lo tanto es incapaz aún de proponer una concepción sólidamente establecida y general de los conflictos y la forma de intervención en ellos para solucionarlos. Sin embargo, los estudios de modelación y simulación de sistemas de actores en competición en situaciones de conflicto, es cada vez más útil para comprender la dinámica de estos procesos, e identificar la influencia de los diferentes factores y los posibles mecanismos para la mediación y solución de los conflictos (Rey, 2010).

En situaciones de resolución de conflictos se pueden presentar dos mecanismos (Touzard, 1981): la *negociación*, que consiste en la discusión de las partes para llegar a un acuerdo entre ellas, y la *mediación*, que trata de la negociación entre las partes adversas en presencia de una tercera parte neutral cuyo papel consiste en facilitar la búsqueda de una solución para el conflicto. El peor escenario del conflicto es aquel en el cual éste se vuelve intratable, imposibilitándose la negociación directa entre las partes, por lo cual es indispensable para su resolución la mediación de un actor externo (exógeno). Esto significa también que se trata de una situación de competición en la que no existe cooperación entre las partes. Los modelos que se han empleado para describir conflictos intratables sin mediador, muestran que generalmente se presentan situaciones de ganador-perdedor o exterminador-exterminado (Volterra, 1931; Boyce & DiPrima, 2000).

En particular, es de notar que no se cuenta con suficientes estudios (en el área de la *biología matemática*) reportados sobre la influencia que puede tener la intervención de un mediador en el desarrollo de un conflicto intratable entre dos actores (Liebovitch et al., 2008; Vallacher et al., 2010), en un medio controlado, es decir, bajo la influencia de un conjunto determinado de factores. Específicamente, no se ha estudiado como la intervención de un mediador puede facilitar la obtención de un estado de bienestar para ambos actores, evitando el típico fin catastrófico de uno de ellos. El escenario de conflicto será descrito matemáticamente; el análisis del modelo y su re-solución numérica (para un conjunto de especificaciones dadas) podrá ser interpretado a su vez en términos del escenario de conflicto. El presente trabajo apunta al tratamiento de este problema, como se describe a continuación.

1.2 Definición del problema

Matemáticamente, el problema consiste en estudiar la dinámica descrita por un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias, acopladas y autónomas, dadas de forma general por:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f_1(x, y, p_1, p_2, p_3) \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x, y, p_1, p_2, p_3)\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde x y y se interpretan como el impacto emocional que caracteriza el estado de dos actores en conflicto. Los términos p_1, p_2, p_3 , son tres parámetros del modelo que representan respectivamente: la influencia del medio (acción del mediador), la afectación de un actor sobre el otro y la inercia al cambio de comportamiento de cada actor. Este tipo de sistema dinámico, como se mostrará posteriormente, es del tipo no-suave.

Desde el punto de vista interpretativo, el problema anterior se puede formular así:

Construyendo escenarios donde se presenta la interacción de dos actores en conflicto, se busca responder la pregunta ¿cuál es la dinámica que genera la influencia que tiene la intervención de un mediador en un conflicto intratable entre dos actores, y qué estrategias de

intervención del mediador se pueden prever, para lograr un estado de bienestar para ambos actores?

1.3 Objetivo General y objetivos específicos

El objetivo general de este trabajo es analizar teóricamente los conflictos intratables desde la mirada de la competición entre los actores y la forma de intervención de un mediador, usando teoría de sistemas dinámicos no-suaves.

Los objetivos específicos son:

- Describir mecanismos de intervención del conflicto.
- Caracterizar la estabilidad del sistema al someterlo a intervenciones.
- Hallar bifurcaciones del sistema no-suave.
- Proponer indicadores que sirvan para predecir conductas de actores.

1.4 Metodología

La respuesta al problema formulado se busca mediante la descripción del sistema de conflicto con un modelo dinámico, y la aplicación de la teoría de los sistemas dinámicos. El objetivo central es el estudio de la dinámica generada en el estado de los actores debido a la intervención del mediador. En términos teóricos, el cambio de conducta viene representado por una superficie de conmutación del sistema de ecuaciones. Cómo se mostrará más adelante, este tipo de sistema dinámico se caracteriza por ser no-suave, razón por la cual se aplicará el análisis de los sistemas de Filippov; esto previendo que el sistema pueda presentar deslizamientos sobre la superficie de conmutación.

Se representa matemáticamente la situación de conflicto intratable entre los actores en competición, mediante un modelo dinámico que incluye factores como: flujos de influencia emocional del medio, funciones de influencia (afectación) de un actor sobre el otro y factores de inercia al cambio del comportamiento. Para ello se usará la teoría de dinámica de sistemas para establecer las relaciones causales y los fundamentos de la modelación propuestos por Liebovitch et al. (2008).

El modelo obtenido se analiza conceptualmente para formular indicadores de intervención del mediador, teniendo en consideración que el conflicto es de competición y formulando diferentes escenarios en los que se incluya o no la influencia del medio sobre los actores.

Previa definición de la superficie de conmutación usando el indicador seleccionado, se realiza el cálculo de los deslizamientos sobre la superficie de conmutación usando la teoría de los sistemas de Filippov, siguiendo los planteamientos propuestos por Kuznetsov et al. (2003) y

Guardia et al. (2010). Las ecuaciones de los respectivos campos de Filippov dentro de las zonas de deslizamiento, se obtuvieron usando el software Maple[®].

El análisis de bifurcaciones no-suaves se realiza de manera analítica, considerando los intervalos de deslizamiento para posteriormente representar conceptualmente los retratos de fase de los sistemas que presentan bifurcación.

Los retratos de fase del sistema dinámico se computaron numéricamente usando el software MatLab[®] y la función pre-programada *ode45* junto con programación para la identificación de eventos (Piiroinen & Kuznetsov, 2008). De esta forma también se pueden identificar las bifurcaciones.

1.5 Alcance y aporte esperado del estudio

El estudio se propone caracterizar este tipo de sistemas dinámicos (no-suaves, autónomos), desde el punto de vista matemático, además se busca poder realizar interpretaciones teóricas sobre la forma en la que se desarrolla un conflicto entre dos actores en condiciones de competencia y bajo la influencia de un mediador. El desarrollo de un nuevo modelo, la validación del modelo y de sus predicciones, esta fuera del alcance de esta investigación.

El aporte esperado del estudio en el área de la matemática aplicada, se centra en la aplicación de la teoría de los sistemas de Filippov a la resolución del problema propuesto, sobre lo cual no existen antecedentes en la literatura, según se pudo establecer aquí. Esto junto con la aplicación de otras herramientas de la teoría de los sistemas dinámicos al análisis del problema (ej. análisis de bifurcaciones y retratos de fase), ha permitido la formulación de un conjunto de consideraciones teóricas sobre la dinámica que caracteriza este tipo de conflicto y las posibilidades para intervenirlo de tal forma que se logre un estado de bienestar para ambos actores, lo cual puede resultar de interés en el contexto de los estudios psicosociales.

1.6 Estructura de la tesis

En el capítulo dos el lector encontrará una revisión no-exhaustiva de los conceptos y teorías de los sistemas dinámicos no-suaves, fundamentales para la comprensión del estudio. Seguidamente, en el capítulo tres, se realiza la aplicación de los conceptos presentados en el capítulo dos al problema de conflicto propuesto, presentando el planteamiento matemático del problema y las técnicas de análisis de bifurcación y superficies de conmutación que conducen al análisis de diversos escenarios del conflicto, los cuales se simulan y analizan mediante el retratos de fase en el capítulo cuatro. El capítulo quinto presenta las perspectivas de esta investigación.

2. Fundamentos de sistemas dinámicos no-suaves

2.1 Introducción

En este capítulo se presentan los elementos básicos de la teoría de sistemas dinámicos no-suaves que resultan esenciales para el tratamiento del problema propuesto. Esta revisión, que sirve como marco teórico de la investigación, no pretende ser exhaustiva y se proporcionan las referencias complementarias necesarias para mayores detalles.

2.2 Sistema dinámico

Un sistema dinámico puede entenderse de acuerdo lo propuesto por Kuznetsov (2004): “la noción de un sistema dinámico es la formalización matemática del concepto científico general de un proceso determinístico. El futuro y el pasado de muchos sistemas pueden ser predichos hasta una cierta extensión, conociendo el estado presente y las leyes que gobiernan su evolución. Provistos de esas leyes que cambian su evolución en el tiempo, el comportamiento de tal sistema podría ser completamente definido por su estado inicial. Así, la noción de un sistema dinámico incluye un conjunto de sus posibles estados (Espacio de estados) y una ley de evolución del estado en el tiempo”. Es decir, un sistema dinámico: “es una combinación de unidades (o componentes) que actúan juntos para realizar un objetivo específico, donde su salida presente depende de una entrada del pasado” (Ogata, 2004). Para precisar mejor esta idea, se describen a continuación algunos conceptos necesarios.

2.2.1 Espacio de estado: todos los posibles estados de un sistema son caracterizados por los puntos de un conjunto X . Este conjunto es llamado el espacio de estados del sistema. Realmente, la especificación de un punto $x \in X$ debería ser suficiente, no solo para describir la posición del sistema si no, para determinar su evolución. Frecuentemente, el espacio de estado es llamado espacio de fase, siguiendo la tradición de la mecánica clásica.

2.2.2 Tiempo: la evolución de un sistema dinámico significa un cambio en el estado del sistema con el tiempo $t \in T$, donde T es un conjunto de números. Se consideran dos tipos de sistemas dinámicos: aquellos con tiempo continuo (real) $T = \mathbb{R}^1$, y aquellos con tiempo discreto (entero) $T = \mathbb{Z}$. Sistemas del primer tipo son llamados sistemas dinámicos a tiempo continuo, mientras que los segundos son definidos como sistemas dinámicos a tiempo discreto.

2.2.3 Operador evolución: la componente principal de un sistema dinámico es su ley de evolución, que determina el espacio x_t del sistema en el tiempo t , en el estado inicial x_0 .

conocido. El camino más general para especificar la evolución es asumir que para $t \in T$, una aplicación φ^t es definida en el espacio de estado X , según la ecuación (2.1):

$$\varphi^t : X \rightarrow X \quad (2.1)$$

la cual transforma un estado inicial $x_0 \in X$ dentro de algún estado $x_t \in X$ en el tiempo t , según la ecuación (2.2):

$$x_t = \varphi^t x_0 \quad (2.2)$$

La aplicación es frecuentemente llamada el operador evolución del sistema dinámico. Éste sería conocido explícitamente; sin embargo, en muchos casos, se define indirectamente y puede ser calculado solo aproximadamente. En el caso de tiempo continuo, la familia de operadores de evolución $\{\varphi^t\}_{t \in T}$ es llamada Flujo.

2.2.4 Sistema dinámico: es una tripla $\{T, X, \varphi^t\}$, donde T es el conjunto del tiempo, X es un espacio de estado y $\varphi^t : X \rightarrow X$ es una familia de operadores evolución parametrizada por $t \in T$ y satisfaciendo las siguientes propiedades:

$$\varphi^0 = id \quad (2.3)$$

$$\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s \quad (\text{donde } \varphi^{t+s} = \varphi^t(\varphi^s x)) \quad (2.4)$$

donde id es la aplicación identidad sobre x , $id(x) = x$ para todo $x \in X$. Cuando la ley de evolución del sistema dinámico no depende del tiempo, se dirá que es *autónomo*.

2.2.5 Órbitas y retratos de fase: una órbita comenzando en x_0 es un subconjunto ordenado de un espacio de estado X ,

$$Or(x_0) = \{x \in X : x = \varphi^t x_0, \text{ para todo } t \in T \text{ tal que } \varphi^t x_0 \text{ es definido}\} \quad (2.5)$$

como se observa en la Figura 2.1, las órbitas de un sistema a tiempo continuo con un operador de evolución continuo son curvas en el espacio de estado X , parametrizado por el tiempo t y orientado por su dirección de incremento. Para un sistema a tiempo discreto, las orbitas son sucesiones de puntos en el espacio de estado X enumerado por el incremento de los enteros. Las órbitas son frecuentemente llamadas trayectorias. Las órbitas más simples son equilibrios.

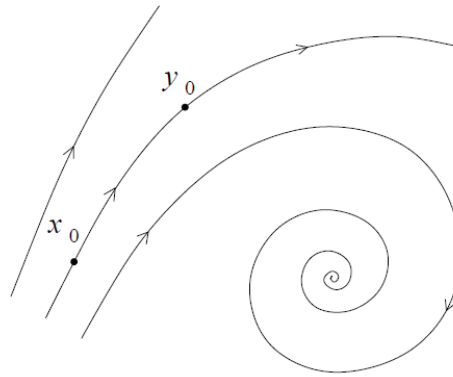


Fig. 2.1 Órbitas de un sistema a tiempo continuo. Figura adaptada de Kuznetsov (2004)

2.2.6 Punto de equilibrio: un punto $x^0 \in X$ es llamado un equilibrio (punto fijo) si $\varphi^t x^0 = x^0$ para todo $t \in T$. Se utiliza el término equilibrio para sistemas dinámicos a tiempo continuo.

2.2.7 Ciclo: un ciclo es una órbita periódica, es decir una órbita L_0 de no equilibrio, tal que cada punto $x_0 \in L_0$ satisface que $\varphi^{t+T_0} x_0 = \varphi^t x_0$ con $T_0 > 0$, para todo $t \in T$. Un ciclo de un sistema dinámico a tiempo continuo, en una vecindad de la cual no hay otros ciclos, se llama *ciclo límite*.

2.2.8 Retrato de fase: de un sistema dinámico, es un particionamiento del espacio de estado en órbitas.

2.2.9 Conjunto invariante: de un sistema dinámico $\{T, X, \varphi^t\}$ es un subconjunto $S \subset X$ tal que $x_0 \in S$, implica $\varphi^t x_0 \in S$ para todo $t \in T$. Los equilibrios y ciclos son los ejemplos más simples de conjuntos invariantes. Un conjunto invariante S_0 es llamado estable si:

- (1). Para cualquier vecindad pequeña $U \supset S_0$ existe una vecindad $V \supset S_0$ tal que $\varphi^t x \in U$ para todo $x \in V$ y todo $t > 0$.
- (2). Existe una vecindad $U_0 \supset S_0$ tal que $\varphi^t x \rightarrow S_0$ para todo $x \in U_0$, cuando $t \rightarrow +\infty$.

2.2.10 Variedades estables y no estables: los conjuntos estables e inestables son colecciones de órbitas que son asintóticas hacia adelante o hacia atrás, para una órbita dada. Un conjunto estable, también llamado cuenca de atracción o variedad estable, de un conjunto invariante Λ , es el conjunto de puntos asintóticos hacia adelante a Λ :

$$W^s(\Lambda) = \{x \notin \Lambda : \varphi^t x \rightarrow \Lambda \text{ cuando } t \rightarrow +\infty\} \quad (2.6)$$

Se define una cuenca hacia atrás o variedad inestable de Λ como el conjunto de puntos que son asintóticos hacia atrás:

$$W^s(\Lambda) = \{x \notin \Lambda : \varphi^t x \rightarrow \Lambda \text{ cuando } t \rightarrow -\infty\} \quad (2.7)$$

Generalmente, los conjuntos estables e inestables son invariantes, donde Λ puede ser un equilibrio o un ciclo aislado.

2.2.11 Ecuaciones diferenciales y Sistemas dinámicos a tiempo continuo: el camino más común para definir un sistema dinámico a tiempo continuo es mediante el uso de ecuaciones diferenciales. Supóngase que el espacio de estados de un sistema es $X = \mathbb{R}^n$ con coordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) . Si el sistema es definido sobre una variedad, esas pueden ser consideradas como coordenadas locales sobre éste. Muchas de las leyes de evolución del sistema pueden darse implícitamente, en términos de las velocidades \dot{x}_i como funciones de las coordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) :

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (2.8)$$

o en la forma vectorial:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.9)$$

donde la función vectorial $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se supone diferenciable suficientemente (suave). La función en el miembro derecho de la Ecuación (2.9) equivale a un campo vectorial, puesto que ésta asigna un vector $f(x)$ para cada x . La Ecuación (2.9) representa un *sistema de n Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) autónomas*.

2.2.12 Existencia, unicidad, y dependencia suave (Teorema): considérese un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ donde $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es suave en una región abierta $U \subset \mathbb{R}^n$. Entonces existe una única función $x = x(t, x_0)$, $x: \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, esto es, suave en (t, x_0) , y que satisface, para cada $x_0 \in U$, las siguientes condiciones:

$$x(0, x_0) = x_0 \quad (2.10)$$

Existe un intervalo $J = (-\delta_1, \delta_2)$, donde $\delta_{1,2} = \delta_{1,2}(x_0) > 0$, tales que, para todo $t \in J$,

$$y(t) = x(t, x_0) \in U \quad \text{y} \quad \dot{y}(t) = f(y(t)). \quad (2.11)$$

El grado de suavidad de $x(t, x_0)$ con respecto a x_0 en este teorema es el mismo como el de f como una función de x . La función $x = x(t, x_0)$, considerada como una función del tiempo t , se llama una solución que empieza en x_0 . Esto define para cada $x_0 \in U$, dos objetos: una curva solución y una órbita.

2.2.13 Curva solución:

$$Cr(x_0) = \{(t, x) : x = x(t, x_0), t \in \gamma\} \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \quad (2.12)$$

2.2.14 Órbita (en sistemas dinámicos en ecuaciones diferenciales): es una proyección de $Cr(x_0)$ sobre el espacio de estados,

$$Or(x_0) = \{x : x = x(t, x_0), t \in \gamma\} \subset \mathbb{R}^n \quad (2.13)$$

Ambas curvas (la solución y la órbita) son parametrizadas por el tiempo t y orientadas por la dirección del avance temporal, tal como se observa en la Figura 2.2.

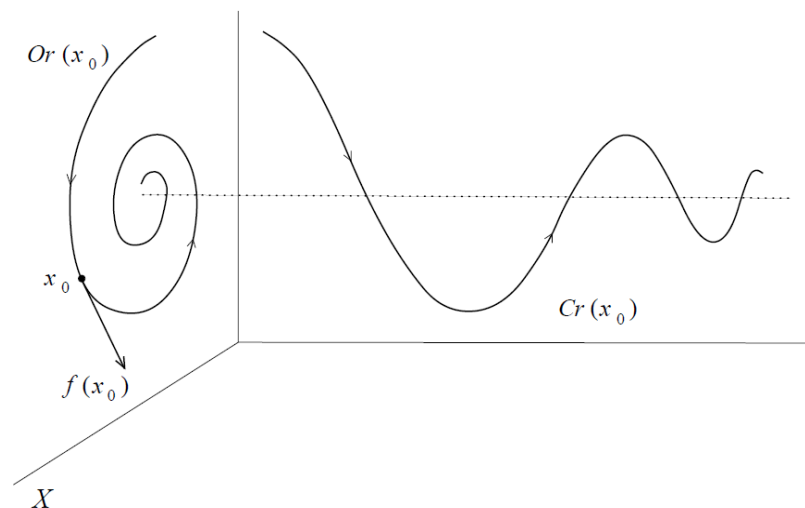


Fig. 2.2. Curva solución y órbita en el espacio X . Adaptada de Kuznetzov (2004).

Un vector $f(x_0)$ es tangente a la órbita $Or(x_0)$ en x_0 . Existe una única órbita que pasa a través de un punto $x_0 \in U$. Bajo las condiciones del teorema, la órbita deja U en $t = -\delta_1$ (y/o $t = -\delta_2$), o permanece en U para siempre; en el último caso se toma $\gamma = (-\infty, +\infty)$.

Ahora definiendo el operador evolución $\varphi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por la formula:

$$\varphi^t x_0 = x(t, x_0) \quad (2.14)$$

la cual asigna a x_0 un punto sobre la órbita que pasa por x_0 , pasadas t unidades de tiempo. Cada operador evolución φ^t es definido por $x \in U$ y $t \in \gamma$, donde γ depende de x_0 y es suave en x . En la práctica, el operador φ^t corresponde a un sistema de EDO que puede ser computado numéricamente sobre intervalos de tiempo fijo, dentro de una precisión deseada.

Una de las tareas de la teoría de sistemas dinámicos es analizar el comportamiento de los sistemas definidos por ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Aun cuando en algunas ocasiones se pueden resolver dichas ecuaciones por métodos analíticos, el aspecto más útil de la teoría, es que se puede predecir el retrato de fase de un sistema en EDO sin realmente resolverlo. El ejemplo más útil de tal información es el número de posiciones en el equilibrio. Realmente, el equilibrio de un sistema definido en la Ecuación (2.9), son los ceros del campo vectorial dado en su miembro derecho:

$$f(x) = 0 \quad (2.15)$$

Claramente si $f(x^0) = 0$, entonces $\varphi^t x_0 = x_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. La estabilidad de un equilibrio puede ser detectada sin resolver el sistema, por ejemplo, las condiciones suficientes para que llegue a ser estable un equilibrio x^0 , se muestran en el siguiente teorema:

2.2.15 Estabilidad de un equilibrio (Segundo Teorema de Lyapunov, 1892): considérese un sistema dinámico definido por $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, donde f es suave. Suponga que éste tiene un equilibrio x^0 (ej., $x^0 = f(x^0)$), y denotando por A una matriz jacobiana de $f(x)$ evaluada en el equilibrio, $A = J_x(f(x^0))$. Entonces x^0 es estable si todos los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de A cumplen que $\text{Re}(\lambda) < 0$.

Los puntos de equilibrio pueden clasificarse de diferentes formas dependiendo del signo de la parte real de los valores propios y de si existe o no su parte imaginaria. En particular para sistemas planares $x \in \mathbb{R}^2$, si x^0 fuera un equilibrio con los valores propios λ_1, λ_2 , ocurrirían los casos que se presentan en la Tabla 2.1, en la cual se muestra la clasificación de los puntos fijos correspondientes. Cuando la parte real de ambos valores propios es diferente de cero y la parte imaginaria nula, dichos puntos de equilibrio se clasifican como equilibrios hiperbólicos; en caso contrario se clasifican como no-hiperbólicos.

El sentido que se quiere dar con la definición de “estabilidad” aquí presentada, va ligado con la famosa función de Lyapunov. Por motivos de longitud del documento se omiten detalles. Para más información véase Wiggins (1990) y Meiss (2007).

En los casos donde no se pueda determinar la estabilidad del sistema, se utiliza usualmente el método de la variedad central. Para más detalles véase Wiggins (1990).

Tabla 2.1. Clasificación general de los puntos de equilibrio de un sistema dinámico a tiempo continuo, planar y no lineal, según sus valores propios.

Valores propios	Tipo de equilibrio
$\text{Re}(\lambda_1) < 0$ y $\text{Re}(\lambda_2) < 0$ parte imaginaria nula	Nodo Estable
$\text{Re}(\lambda_1) < 0$ y $\text{Re}(\lambda_2) > 0$ ó $\text{Re}(\lambda_1) > 0$ y $\text{Re}(\lambda_2) < 0$	Silla
$\text{Re}(\lambda_1) > 0$ y $\text{Re}(\lambda_2) > 0$ parte imaginaria nula	Nodo Inestable
$\text{Re}(\lambda_1) < 0$ y $\text{Re}(\lambda_2) < 0$ λ_1 y λ_2 complejos conjugados	Espiral estable (Foco)
$\text{Re}(\lambda_1) > 0$ y $\text{Re}(\lambda_2) > 0$ λ_1 y λ_2 complejos conjugados	Espiral inestable (Foco)
$\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = 0$ λ_1 y λ_2 complejos conjugados	Posible Centro u Órbita periódica aislada,
$\text{Re}(\lambda_1) = 0$ ó $\text{Re}(\lambda_2) = 0$ y $\text{Im}(\lambda_1) = \text{Im}(\lambda_2) = 0$	No hay criterio de estabilidad

2.2.16 Equivalencia topológica: un sistema dinámico $\{T, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ es llamado equivalente topológicamente a otro sistema dinámico $\{T, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$ si existe un homeomorfismo $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de órbitas aplicadas en el primer sistema sobre órbitas del segundo sistema, preservando la dirección en el tiempo.

2.2.17 Sección de Poincaré: una aplicación de Poincaré o aplicación de primer retorno es una aplicación definida no en el espacio de estados del sistema, sino en un subespacio de dimensión inferior llamado sección de Poincaré. Dicha aplicación lleva cada punto de dicha sección en el primer punto en el que la órbita que lo contiene retorna a la misma. Considérese la Ecuación (2.9), y asúmase que posee una órbita periódica L_o . Tomando un punto $x_o \in L_o$ e introduciendo una sección de cruce Σ para el ciclo en este punto, como se ilustra en la Figura 2.3.

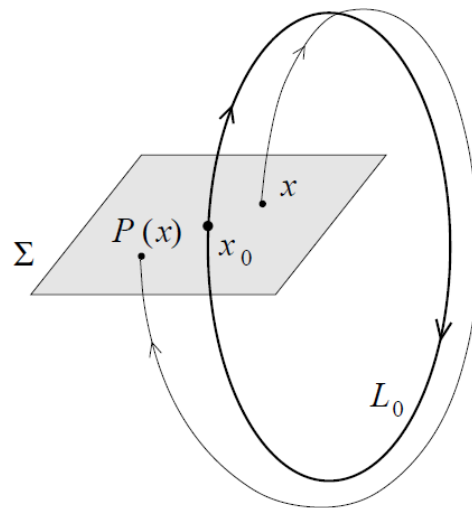


Fig. 2.3 Aplicación de Poincaré asociada a una órbita cíclica. Adaptada de Kuznetzov (2004).

La sección de cruce Σ es una hipersuperficie de dimensión $n-1$, intersectando L_0 en un ángulo distinto de cero. El ciclo por si mismo es una órbita que comienza en un punto sobre Σ y retorna a Σ en el mismo punto ($x_0 \in \Sigma$). Puesto que las soluciones de la Ecuación (2.9) dependen suavemente de sus puntos iniciales (Teorema 2.2.12) una órbita que comienza en un punto $x \in \Sigma$ suficientemente cercano a x_0 también retorna a Σ en algún punto $\tilde{x} \in \Sigma$ cerca de x_0 , lo cual implica estabilidad de la órbita. Más aún, orbitas cercanas también intersectarán a Σ transversalmente. Así, se puede construir una aplicación $P: \Sigma \rightarrow \Sigma$ de la siguiente manera:

$$x \mapsto \tilde{x} = P(x) \quad (2.16)$$

Cabe aclarar que esta aplicación de la sección de Poincaré corresponde a un sistema dinámico a tiempo discreto.

2.3 Sistemas de Filippov

Un tipo de sistemas que comparten muchísimas semejanzas con los sistemas dinámicos suaves, son los sistemas no-suaves. Los sistemas no-suaves son aquellos formados por más de un campo vectorial. Dichos campos están particionados mediante zonas de conmutación, sobre las cuales pueden existir tres tipos de fenómenos: impactos, continuo a trozos y deslizamientos, según se ilustra en la Figura 2.4. Un sistema no-suave en el que se presentan deslizamientos, se conoce como Sistema de Filippov. El tipo de sistema no-suave que se utiliza en esta investigación, poseerá zonas de deslizamiento, como se mostrará más adelante (ver

Capítulo 3). Para mayores detalles sobre los demás tipos de sistemas no-suaves véase Di Bernardo et al (2008).

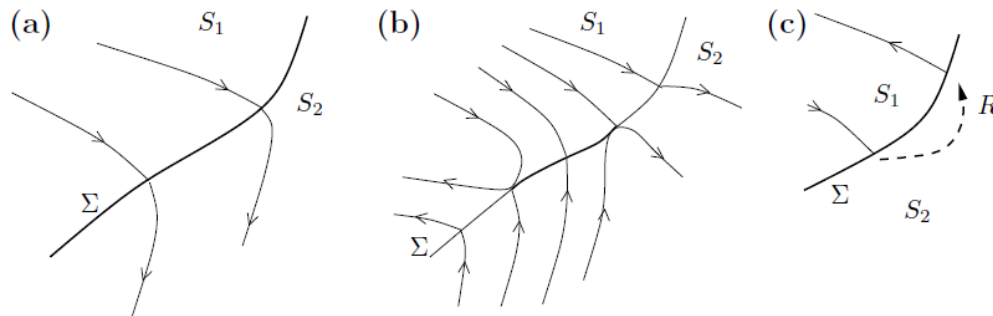


Fig. 2.4. (a) sistema continuo a trozos, (b) sistemas de Filippov, (c) sistemas con impactos. Adaptada de Di Bernardo et al. (2008).

2.3.1 Sistema de Filippov: la definición para campos planares (Piiroinen et al., 2008) -análoga para campos vectoriales de tres dimensiones en adelante-, se puede presentar de la siguiente manera: sea

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x), & x \in S_1 \\ F_2(x), & x \in S_2 \end{cases} \quad (2.17)$$

donde $F_1(x)$ es un campo vectorial asociado a un sistema dinámico definido en S_1 y $F_2(x)$ un campo vectorial del mismo tipo asociado a S_2 . Además van a estar separados por una superficie de conmutación dada por $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 / H(x) = 0\}$. Entonces

$$\begin{aligned} S_1 &= \{x \in \mathbb{R}^2 / H(x) < 0\} \\ S_2 &= \{x \in \mathbb{R}^2 / H(x) > 0\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

De lo anterior salen tres clases de conjuntos que pueden existir en alguna región de la superficie de conmutación, denominados *sliding* (deslizamiento estable), *escaping* (deslizamiento inestable) y *crossing* (cruce), los cuales se describen a continuación y que se ilustran en la Figura 2.5.

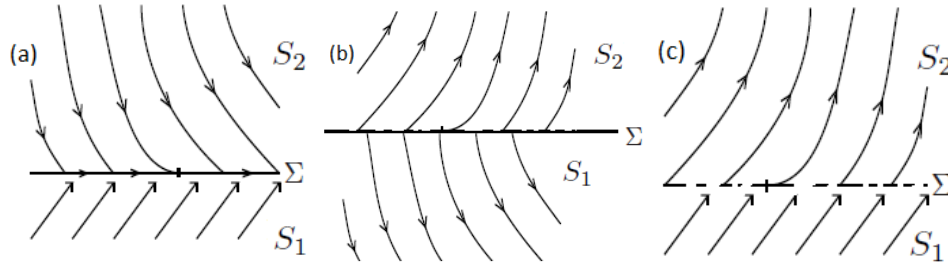


Fig. 2.5. Representación gráfica del (a) Sliding, (b) Escaping, y (c) Crossing. Adaptada de Guardia et al. (2011).

2.3.2 Sliding: conjunto donde está el deslizamiento estable, es decir, la zona donde el sistema trata de estabilizarse sobre la superficie de conmutación. Este conjunto se define matemáticamente como:

$$\Sigma_{sliding} = \{(x, y) \in \Sigma / \mathcal{L}_{F_1} H(x, y) > 0 \wedge \mathcal{L}_{F_2} H(x, y) < 0\} \quad (2.19)$$

$$\text{donde } \mathcal{L}_{F_1} H(x, y) = \langle F_1, \nabla H \rangle \text{ y } \mathcal{L}_{F_2} H(x, y) = \langle F_2, \nabla H \rangle \quad (2.20)$$

y el símbolo $\nabla H = (H_x, H_y)$ es el gradiente de la superficie de conmutación.

2.3.3 Escaping: conjunto donde está el deslizamiento inestable, es decir, el sistema tiene una zona repulsora dentro de la superficie de conmutación. Este conjunto se define como:

$$\Sigma_{Escaping} = \{(x, y) \in \Sigma / \mathcal{L}_{F_1} H(x, y) < 0 \wedge \mathcal{L}_{F_2} H(x, y) > 0\} \quad (2.21)$$

2.3.4 Crossing: conjunto donde no existe deslizamiento y por ende cruzan órbitas de un campo vectorial sobre el otro. Su definición es:

$$\Sigma_{crossing} = \{(x, y) \in \Sigma / \mathcal{L}_{F_1} H(x, y) \cdot \mathcal{L}_{F_2} H(x, y) > 0\} \quad (2.22)$$

2.3.5 Puntos tangentes: hay un punto tangente en S_1 si existe un punto sobre la superficie de conmutación tal que $\mathcal{L}_{F_1} H = 0$ (similarmente en S_2).

2.3.6 Puntos tangentes visibles (invisibles) cuadráticos: un punto tangente es visible (invisible) cuadrático en S_1 si en ese punto ocurre $\mathcal{L}_{F_1}^2 H < 0$ ($\mathcal{L}_{F_1}^2 H > 0$). Para S_2 la condición sería $\mathcal{L}_{F_2}^2 H > 0$ ($\mathcal{L}_{F_2}^2 H < 0$). Una ilustración de estos tipos de puntos se presenta en la Figura 2.6.

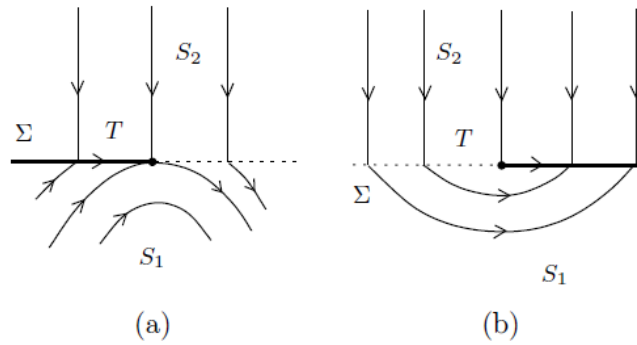


Fig. 2.6. (a) punto tangente visible en S_1 , (b) punto tangente invisible en S_1 .
Adaptada de Kunetsov et al. (2003).

Si un mismo punto tangente fuese invisible en ambos campos, es posible que exista una órbita cerrada y aislada, o que se establezca o desestablezca alrededor del punto tangente. Por consiguiente, se puede crear una aplicación de involución.

2.3.7 Aplicación de involución: supóngase que la superficie de conmutación estuviera ubicada en el origen ($y = 0$) y que en $p = (0,0)$ existe un punto que es tangente invisible en S_1 y S_2 . Entonces se definen los campos vectoriales:

$$F_1(x) = \begin{pmatrix} P_1(x, y) \\ Q_1(x, y) \end{pmatrix}; F_2(x) = \begin{pmatrix} P_2(x, y) \\ Q_2(x, y) \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Si $P_2(0,0) > 0$, por el hecho de la tangencia, se obtiene lo siguiente (Filippov, 1988): para $q < 0$ la aplicación de involución sobre S_2 será:

$$\varphi_x(q) = -q + A_x q^2 - A_x^2 q^3 + O(q^4) \quad (2.24)$$

donde:

$$A_x = \frac{2}{3} \left(\frac{P_x(0,0) + Q_y(0,0)}{P(0,0)} - \frac{Q_{xx}(0,0)}{2Q_x(0,0)} \right) \quad (2.25)$$

La aplicación de involución se ilustra en la Figura 2.7.

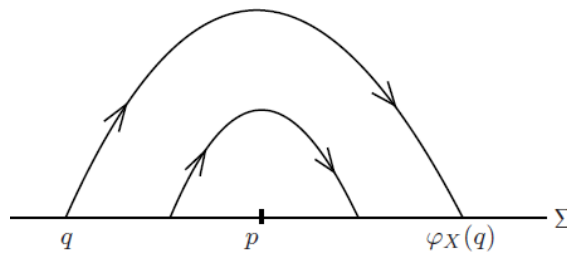


Fig. 2.7. Aplicación de involución. Adaptada de Guardia et al. (2011).

Por otro lado, si $P_1(0,0) < 0$ se puede aplicar la involución φ_Y asociada al campo S_1 . Entonces al hacer la composición $\varphi(x) = \varphi_Y \circ \varphi_X(x)$, se llega a la llamada sección de Poincaré o *aplicación de retorno* (Kuznetsov, 2003; Guardia et al., 2011):

$$\varphi(x) = x + kx^2 + O(x^3) \quad (2.26)$$

donde

$$k = A_Y - A_X \quad (2.27)$$

Dicha sección (o aplicación) de retorno será estable (inestable) si se cumple que:

$$k < 0 \text{ (} k > 0 \text{)}. \quad (2.28)$$

Si $k = 0$ existe una bifurcación no-suave (Guardia et al., 2011).

Con la aplicación de retorno se pueden estudiar singularidades del tipo focos difusos (*fused-focus*) (Kuznetsov et al, 2003), las cuales se ilustran en la Figura 2.8.

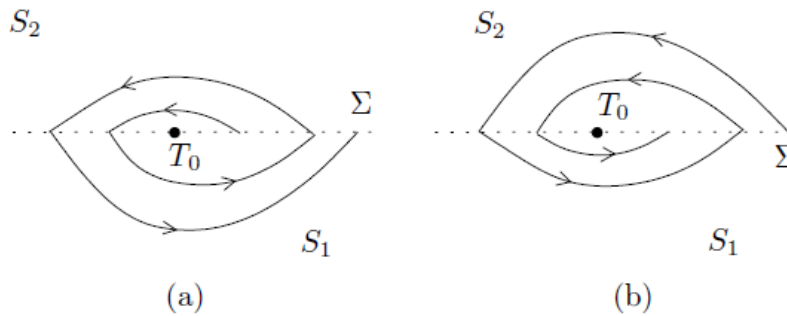


Fig. 2.8. (a) Foco difuso inestable, (b) Foco difuso estable.
Adaptada de Kuznetsov et al (2003).

Considérese que para el caso particular de esta investigación, se hallaron puntos tangentes diferentes al nulo, razón por la cual las consideraciones anteriores deben modificarse. Con el propósito de dar tratamiento a este tipo de puntos tangentes no nulos $p = (x_T, y_T)$, se propone aquí aplicar un desarrollo análogo al de la ecuación (2.26), pero centralizar alrededor del valor que se requiera. Esto conduce a la expresión:

$$\varphi(x) = x_T + (x - x_T) + k(p)(x - x_T)^2 + O((x - x_T)^3) \quad (2.29)$$

Esto se justifica ya que las traslaciones en x son homeomorfismos y no alteran la dinámica de la aplicación (Wiggins, 1990).

2.3.8 Campo de Filippov: es el sistema asociado a la región de deslizamiento. Este sistema siempre es de una dimensión menos que la de los campos vectoriales y está definida por la siguiente representación vectorial:

$$\dot{x} = z(x), \quad x \in \Sigma_{Sliding} \cup \Sigma_{Escaping} \quad (2.30)$$

donde:

$$z(x) = \frac{F_1 + F_2}{2} + B(x) \left(\frac{F_1 - F_2}{2} \right) \quad (2.31)$$

y

$$B(x) = - \frac{\mathcal{L}_{F_1+F_2} H}{\mathcal{L}_{F_1-F_2} H}, \text{ es decir, } B(x) = - \frac{\langle \nabla H, F_1 + F_2 \rangle}{\langle \nabla H, F_1 - F_2 \rangle} \quad (2.32)$$

Este campo posee las mismas características de un sistema dinámico a tiempo continuo, con la diferencia de que si los campos vectoriales F_1 y F_2 son continuos de dimensión n el campo de Filippov es de dimensión $n-1$.

Por otra parte, el campo de Filippov posee también equilibrios. A los $\tilde{x} \in \Sigma_{Sliding} \cup \Sigma_{Escaping}$ tales que

$$z(\tilde{x}) = 0 \quad (2.33)$$

se les denomina *Pseudoequilibrios*. Dicha diferencia se hace para no confundirlos con los equilibrios de cada campo vectorial F_1 y F_2 . Por otro lado, cuando haya puntos dentro de la zona de conmutación donde $\mathcal{L}_{F_1-F_2} H = 0$, dichos puntos se denominan *puntos de deslizamiento aislados*, que serán equilibrios aislados del sistema de Filippov.

2.3.9 Equivalencia topológica en sistemas no-suaves (Definición estricta): dos campos vectoriales Z y \tilde{Z} definidos sobre conjuntos abiertos U y \tilde{U} , donde Z tiene incluida la superficie de conmutación $\Sigma \subset U$ y \tilde{Z} tiene incluida la superficie de conmutación $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{U}$ son Σ -equivalentes si existe un homeomorfismo que preserva la orientación $h: U \rightarrow \tilde{U}$ el cual envía Σ a $\tilde{\Sigma}$ y envía órbitas de Z a órbitas de \tilde{Z} .

Dado que la anterior definición resulta demasiado estricta, se dará una definición de equivalencia topológica que ha sido aplicada al estudio de sistemas de Filippov (Guardia et al., 2010):

Dos campos vectoriales Z y \tilde{Z} definidos sobre conjuntos abiertos U y \tilde{U} , donde Z tiene incluida la superficie de conmutación $\Sigma \subset U$ y \tilde{Z} tiene incluida la superficie de conmutación

$\tilde{\Sigma} \subset \tilde{U}$ son equivalentes topológicamente si existe un homeomorfismo $h: U \rightarrow \tilde{U}$ que preserva la orientación, el cual envía órbitas de Z a órbitas de \tilde{Z} .

2.3.10 Bifurcación: la aparición de un retrato de fase no equivalente topológicamente bajo variación de parámetros, es llamado una bifurcación. Un diagrama de bifurcación de un sistema dinámico es una estratificación de su espacio de parámetros inducido por la equivalencia topológica, junto con retratos de fase representativos para cada estrato.

Las bifurcaciones suceden cuando existen in-equivalencias topológicas, esto es, que al variar al menos un parámetro dentro del sistema, la geometría cambia de manera no prevista. En los sistemas suaves aparecen por ejemplo: colisiones de puntos de equilibrio, aparición de orbitas aisladas, etc. En los sistemas no-suaves ocurre por ejemplo: colisión de puntos tangentes, colisión de equilibrios sobre la superficie de conmutación, conexiones homoclínicas entre equilibrios, etc.

2.3.11 Tipos de bifurcaciones locales no-suaves: las bifurcaciones locales son aquellas que cumplen ciertas condiciones de no-degenericidad (condiciones analíticas suficientes), siguiendo alguna forma normal que podrá ser calculada según sea el caso. Ésta misma definición aplica para las bifurcaciones locales en sistemas a tiempo continuo suaves, siendo éstas las más estudiadas de acuerdo a la literatura (Wiggins, 1990; Kuznetsov, 2004).

Considerando que en el presente estudio solo se realizaron variaciones uni-paramétricas (codimension-1), se tratará a continuación brevemente de la tipología de estas bifurcaciones.

Se considera el sistema de Filippov dependiendo de un parámetro α , como sigue:

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x, \alpha), & x \in S_1(\alpha) \\ F_2(x, \alpha), & x \in S_2(\alpha) \end{cases} \quad (2.34)$$

donde $F_1(x, \alpha)$ es un campo vectorial continuo asociado a un sistema dinámico definido en $S_1(\alpha)$ y $F_2(x, \alpha)$ un campo vectorial del mismo tipo asociado a $S_2(\alpha)$. Además, van a estar separados por una superficie de conmutación dada por $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 / H(x, \alpha) = 0\}$. Entonces:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{x \in \mathbb{R}^2 / H(x, \alpha) < 0\} \\ S_2 &= \{x \in \mathbb{R}^2 / H(x, \alpha) > 0\} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Se consideran entonces las siguientes bifurcaciones:

- Bifurcación *Fold-Fold*: ambos campos vectoriales tienen un mismo punto tangente cuadrático $p \in \Sigma$. Como se observa en la Figura 2.9, se aprecia la colisión de puntos tangentes.

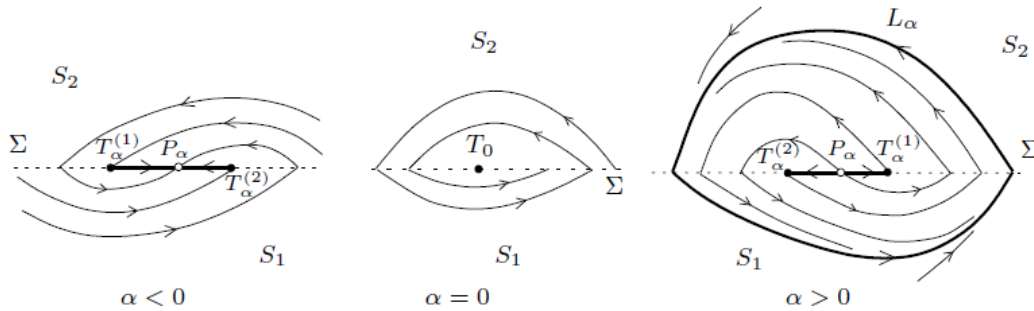


Fig. 2.9. Bifurcación *Fold-Fold*: un ejemplo particular de la colisión de dos puntos tangentes invisibles. Adaptada de Kuznetsov et al. (2003).

- Bifurcación *Cusp-Regular*: llamada *bifurcación de doble tangencia*, en la cual p es un punto tangente a F_2 , mientras que el campo F_1 es transversal a Σ . Esto es, $\mathcal{L}_{F_2}^2 H = 0$, $\mathcal{L}_{F_2}^3 H \neq 0$ y $\mathcal{L}_{F_1} H \neq 0$. En la Figura 2.10 se observa la colisión de puntos tangentes con la desaparición catastrófica de la zona de deslizamiento, siendo este tipo de bifurcación un caso degenerado de la bifurcación *Fold-Fold* (Guardia et al. 2011)

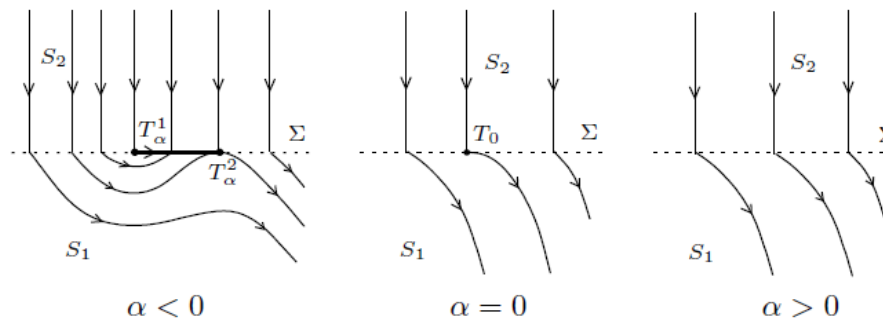


Fig. 2.10. Bifurcación *Cusp-Regular*: ejemplo particular de la colisión de dos puntos tangentes con su posterior desaparición de la zona de deslizamiento. Adaptada de Kuznetsov et al (2003).

- Bifurcación *Pseudosilla-Nodo*: $z(x)$ tiene una singularidad silla-nodo en $p \in \Sigma_{\text{escaping}} \cup \Sigma_{\text{sliding}}$. Esto es, $z(p) = 0$, $z'(p) = 0$, $z''(p) \neq 0$. Como se aprecia en la

Figura 2.11, Un Pseudoequilibrio estable colisiona con otro inestable produciendo una desaparición catastrófica de los pseudoequilibrios sobre la superficie de conmutación.

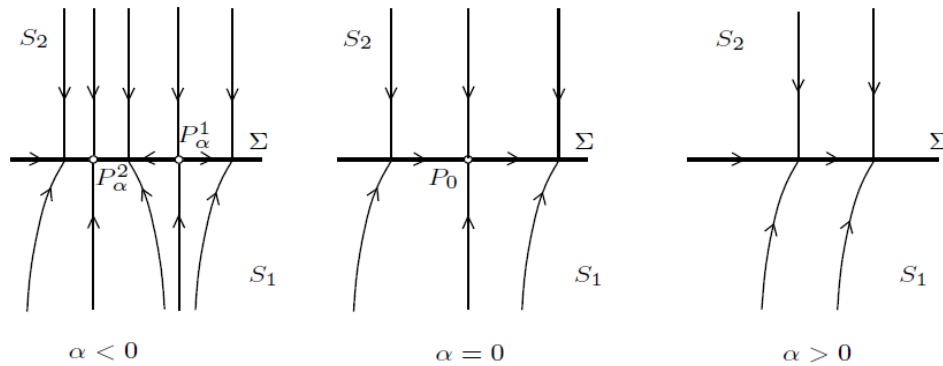


Fig. 2.11. Se observa la desaparición catastrófica de Pseudoequilibrios. Adaptada de Kuznetsov et al. (2003).

- *Bifurcación de Colisión de Frontera:* F_2 tiene un punto crítico hiperbólico no-degenerado $p \in \Sigma$, mientras que F_1 es transversal a Σ . Esto es, $F_2(p) = 0$; los valores propios de $J_x(F_1)(p)$ tienen parte real diferente de cero y $\mathcal{L}_{F_1}H \neq 0$. Kuznetsov (2003) clasificó estas bifurcaciones como *Boundary-Focus*, *Boundary-Node*, *Boundary-Saddle*, y son llamadas *Boundary-equilibrium* en Di Bernardo et al (2008). Se aprecia en la Figura 2.12 la colisión de un punto de equilibrio hiperbólico de un campo vectorial sobre la superficie de conmutación, formándose una nueva dinámica.

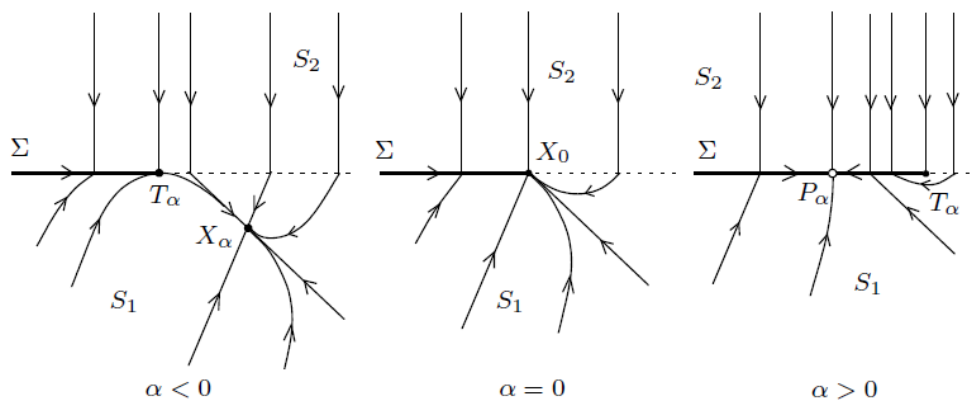


Fig. 2.12 Colisión de un nodo estable con la superficie de conmutación (Boundary-node). Adaptada de Kuznetsov et al. (2003).

2.3.12 Tipos de bifurcaciones globales no-suaves: los tipos de bifurcaciones globales se presentarán tanto en sistemas dinámicos suaves como en los no-suaves, como conexiones entre equilibrios mediante órbitas, colisiones de órbitas aisladas, etc., al hacer variaciones de al menos un parámetro del sistema. Frecuentemente una de las claves para encontrar dichas bifurcaciones son los teoremas, pero estos solo garantizan la existencia, por consiguiente, queda de forma puramente descriptiva la localización de dichas bifurcaciones al hacer retratos de fase o diagramas de bifurcaciones. Para el presente trabajo solo se hizo dicho estudio descriptivo de las mismas, dado que las condiciones analíticas para los sistemas no-suaves generalizados aparecen como un problema abierto en la literatura (Colombo et al., 2012).

A continuación, se define en sistemas dinámicos en tiempo continuo (suaves) lo que son las órbitas homoclínicas y las órbitas heteroclínicas. Sea el sistema definido por la Ecuación (2.9) y sean $x_0, x_{(1)},$ y $x_{(2)}$ equilibrios del sistema, entonces se define:

2.3.13 Órbita homoclínica: una órbita Γ_0 comenzando en un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es llamada homoclínica para el punto de equilibrio x_0 del sistema (2.9) si $\varphi^t x \rightarrow x_0$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

2.3.14 Órbita heteroclínica: una órbita Γ_0 comenzando en un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es llamada heteroclínica para los puntos de equilibrio $x_{(1)},$ y $x_{(2)}$ del sistema (2.9) si $\varphi^t x \rightarrow x_{(1)}$ cuando $t \rightarrow -\infty$ y $\varphi^t x \rightarrow x_{(2)}$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

En la Figura 2.13 se muestra en el inciso (a) la conexión que tiene la variedad estable $W^s(x_0)$ e inestable $W^u(x_0)$ en x_0 ($W^s(x_0) \equiv W^u(x_0)$), formándose una órbita periódica. En el inciso (b) de la misma figura existe una conexión entre los dos equilibrios $x_{(1)},$ y $x_{(2)}$ mediante la variedad inestable $W^u(x_{(1)})$ y la variedad estable $W^s(x_{(2)})$ ($W^u(x_{(1)}) \equiv W^s(x_{(2)})$).

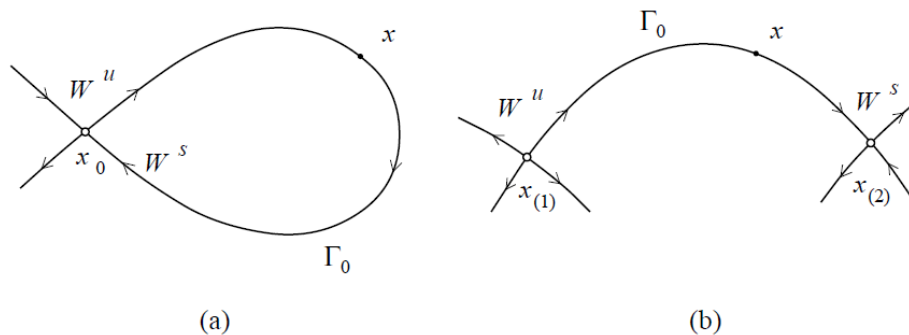


Fig. 2.13. (a) Órbita homoclínica planar, (b) Órbita heteroclínica planar. Adaptada de Kuznetsov et al. (2004).

La hipótesis que se supone de estos equilibrios, es que deben ser hiperbólicos, por ende, en sistemas planares, los equilibrios se relaciona con *puntos silla*.

Para los sistemas no suaves las definiciones de órbitas son equivalentes. Si se usa el sistema definido por las Ecuaciones (2.18) ó (2.33), solamente basta tomar el espacio de estados X como la unión de las adherencias de S_1 y S_2 dispuestos como $X = \bar{S}_1 \cup \bar{S}_2$ (Guardia et al., 2011), para tener definiciones congruentes con los sistemas suaves a tiempo continuo.

Las consideraciones debidas a conexiones entre equilibrios de un sistema no suave dependerán de las variedades estables o inestables que lleguen o salgan de la superficie de conmutación y que toquen a una singularidad distinguida como un pseudoequilibrio o un punto tangente sobre la superficie de conmutación, o que unan equilibrios de los campos vectoriales (Guardia et al., 2011).

Se puede ver en la Figura 2.14 - (a) y (b)- como la variedad (separatriz) llega al punto tangente, que se tomará como estable y si sale de éste, se torna inestable independientemente de cualquiera de los campos dados.

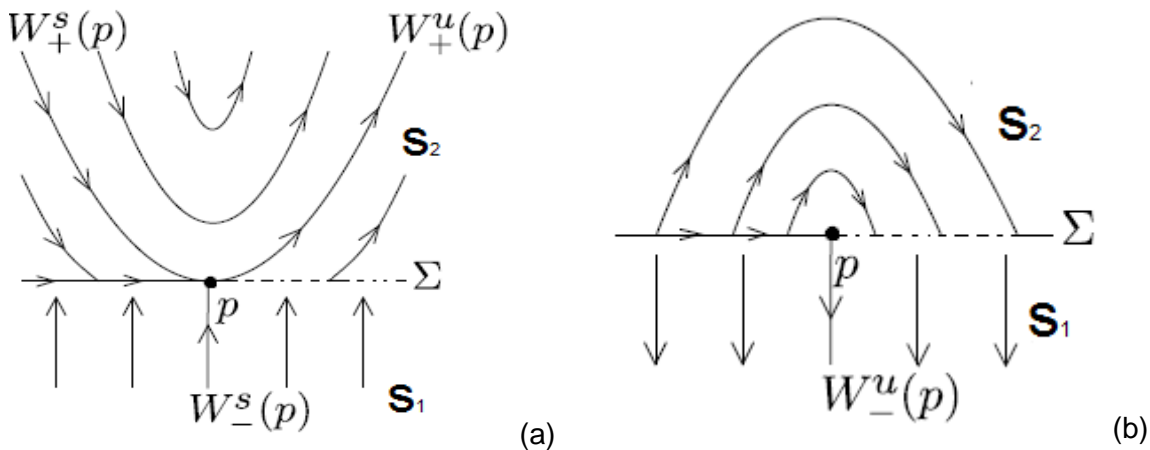


Fig. 2.14. (a) cruce de variedades a través de un punto p *tangente visible*. (b) variedades a través de un punto p *tangente invisible*. Adaptada de Guardia et al. (2011).

En sistemas no suaves planares, cuando las conexiones persisten en órbitas periódicas, bajo una variación uniparamétrica, o se presenta conexiones de pseudoequilibrios con equilibrios, u órbitas dentro de S_1 (o S_2) que unan puntos tangentes dentro de S_1 (o S_2); en tal caso se puede con seguridad afirmar la existencia de *bifurcaciones globales no suaves* (Kuznetsov et al., 2003; Guardia et al., 2011).

En la Figura 2.15, inciso (a), hay una órbita periódica L_α y se puede apreciar la variedad estable que entra en la superficie de deslizamiento y coincide con su variedad inestable ($W^s_-(T_0) \equiv W^u_-(T_0)$). Para valores de $\alpha > 0$ colapsa la órbita homoclínica. Un argumento similar se puede aplicar a lo que se observa en el inciso (c) de la misma figura. Por otro lado, en el inciso (b) de la figura, se observa una conexión entre un punto silla y un pseudoequilibrio en $\alpha = 0$ ($W^u_+(P_1^0) \equiv W^s_+(X_0)$), dando así una conexión heteroclínica no suave, para terminar en una desconexión abrupta para $\alpha > 0$ de dichos equilibrios.

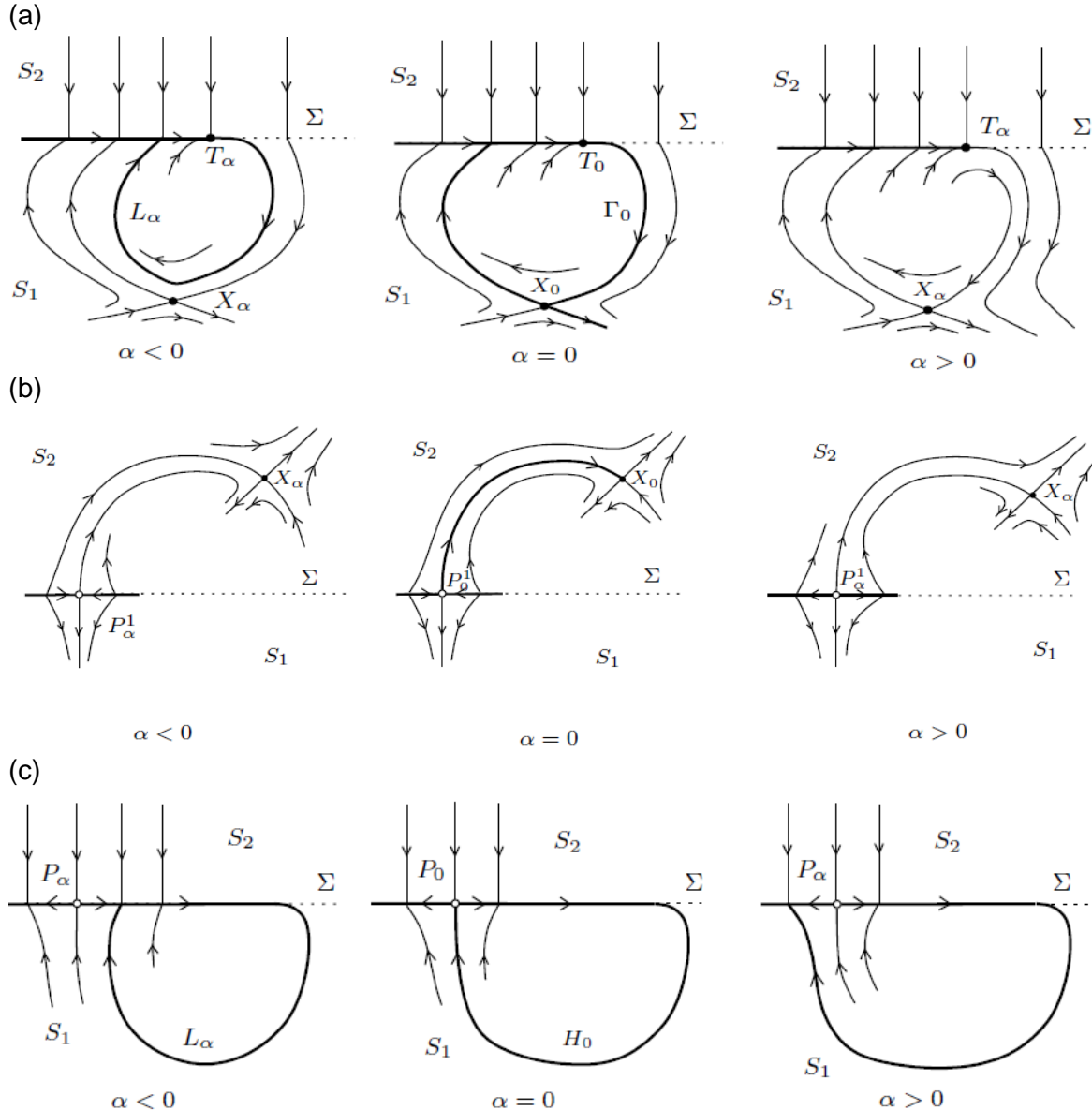


Fig. 2.15. Ejemplos particulares de bifurcaciones globales no-suaves. (a) Órbita homoclínica deslizante hacia un punto silla. (b) Órbita heteroclínica entre una pseudo-silla (tipo de punto silla formado sobre zona de deslizamiento) y un punto silla. (c) Órbita homoclínica deslizante hacia una pseudo-silla. Adaptada de Kuznetsov et al. (2003).

2.4 Conclusiones

Se presentó una revisión de la literatura, en la que se destacaron los aspectos básicos del estudio de sistemas dinámicos, en particular, enfocándose en los sistemas dinámicos a tiempo continuo suave y no-suave.

Se estableció el marco de referencia para el estudio descriptivo de órbitas, tanto para el análisis de bifurcaciones como para el análisis de estabilidad de los sistemas dinámicos no-suaves tratados en esta investigación.

Se propuso que la teoría de sistemas de Filippov resulta ser la herramienta necesaria para el estudio de los sistemas dinámicos no suaves en los que se presentan deslizamientos.

Como se verá en los capítulos posteriores, los elementos teóricos que cobran mayor importancia para el estudio del problema propuesto, son aquellos que permiten comprender que en los sistemas no-suaves se presentan cambios de forma simultánea (al variar un parámetro del sistema) en las zonas de deslizamiento, en los puntos tangentes, en el número de pseudoequilibrios y en las conexiones entre equilibrios.

3. Modelo de competición entre dos actores y la intervención de un mediador

3.1 Introducción

En este capítulo se presenta el estudio del modelo de competición, se hace la modelación matemática de la situación de conflicto intratable (alta competición) entre los actores, mediante un modelo dinámico que incluye: flujos de influencia emocional del medio, funciones de influencia de un actor sobre el otro (afectación de un actor sobre otro) y factores de inercia al cambio del comportamiento. Para ello se usó la teoría de dinámica de sistemas con el propósito de establecer las relaciones causales, junto con los fundamentos de la modelación propuestos por Liebovitch et al. (2008). Además se hace la propuesta del indicador de intervención del mediador como estrategia para la resolución de dicho conflicto; se calculan las zonas de deslizamiento y demás singularidades usando la Teoría de Sistemas de Filippov presentada en el capítulo dos. El capítulo termina haciendo un análisis descriptivo de las bifurcaciones encontradas.

3.2 Aplicación de la teoría de dinámica de sistemas para la modelación del problema de conflicto

En los escenarios de conflicto, la situación que tiene más importancia es el nivel de pérdida del “bienestar” que posee el actor cuando interactúa con otro. Se tomará la “competición” como la situación de estudio; la competición ha sido estudiada en el contexto de conflictos sociales (Francisco, 2009) y es referente de el modelo aquí presentado.

Para estudiar el problema básico de la competición se procura mantener el enfoque que desde la Teoría General de Sistemas propuso Berthalanfy (1968): encontrar una expresión matemática que modele un comportamiento dinámico de dos actores que interactúan entre sí, entendiéndose al actor de la forma que se definió en el capítulo uno.

La finalidad será la búsqueda de “un bienestar de los actores” y un equilibrio que caracterice el tipo de conflicto, lo cual será decisivo para dicho bienestar. Esto se ha trabajado en los estudios de Gottman (2002a), relacionados con matrimonios estables o relaciones maritales próximas a disolverse. En dichas investigaciones se encontró que existe mucha inercia emocional de los actores (la pareja), incluso antes de que un actor sea influenciado por el otro. No obstante, cuando la interacción comienza, la pareja influye entre sí para hacer la relación más negativa

que positiva. Con el tiempo, las interacciones negativas continúan y caracterizan esa relación marital, y la pareja puede perder catastróficamente su estado positivo como “equilibrio estable” de la relación.

Por otro lado, hay supuestos necesarios para dar claridad en la definición del problema de competición entre dos actores (Liebovitch et al., 2008):

- Es necesario tomar una medida de la capacidad de inercia frente al cambio.
- Existe un parámetro que puede ser medido como una afectación del medio para cada uno de los actores.
- Entre actores lo que define las condiciones finales de conducta en su comportamiento, solo es atribuible a los niveles de afectación entre los mismos.

3.2.1 Relaciones causales y planteamiento del modelo básico (un actor)

Basándose en lo anterior, se puede desarrollar un modelo básico que busca explicar las unidades o escalas básicas del sistema: el actor (Gottman et al 2002a). Dado que el actor en su naturaleza puede ser influenciado por el medio, tiene una relación intrínseca con éste, lo que a su vez define un sistema que establece una relación de causa y efecto (relaciones causales) con su propio bienestar. Dicho bienestar varía según las entradas del sistema; para estudiarlas se utiliza la dinámica de sistemas, metodología empleada en estudios sociales y económicos (Forrester, 1969; Aracil et al., 1997).

Para el trabajo realizado en éste capítulo, se hicieron los diagramas causales y diagramas de niveles y flujos utilizando el programa VENSIM®. Primero se establecen las relaciones causales del propio actor, para ello se adoptan las siguientes definiciones.

Supóngase que se toma una variable de estado positiva X :

- **X**: mide el “bienestar interno” del actor; ésta variable mide de manera macroscópica el bienestar, según el sistema. Es decir, dicha variable es una medida del nivel de estrés o esfuerzo de sobrevivencia del actor.
- **Flujo de influencia positiva**: es medido por un parámetro b (positivo). Dicho flujo se define como la influencia positiva que está recibiendo el actor del medio y que aumenta el estado de bienestar interno de dicho actor.
- **Flujo de resistencia al medio**: representa el flujo de resistencia que tiene un actor para cambiar su comportamiento (cambiar su nivel de bienestar) al ser influenciado por el

medio. Este índice es interno al actor y caracteriza que tan fácil es influenciado por lo externo.

Teniendo en cuenta lo anterior las relaciones causales son:

- A más influencia positiva del medio habrá mayor bienestar interno

Influencia positiva del medio \rightarrow^+ Bienestar interno .

- A mayor bienestar interno habrá más flujo de resistencia al medio

Bienestar interno \rightarrow^+ Flujo de resistencia al medio .

- A más flujo de resistencia al medio menor bienestar interno

Flujo de resistencia al medio \rightarrow^- Bienestar interno .

Al conectar estas relaciones causales, se obtiene un diagrama causal como se muestra en la Figura 3.1. Al poseer más influencia positiva del medio, el bienestar interno del actor aumenta. A más bienestar interno más resistencia se tendrá al medio, y a más flujo de resistencia al medio, menor será el bienestar.

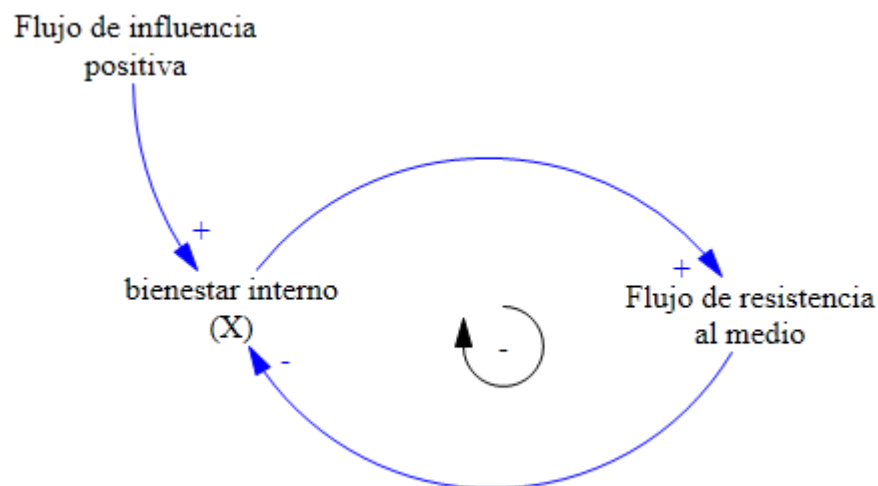


Fig. 3.1. Diagrama causal que explica el modelo básico de relaciones causales para un actor

En este caso, el flujo de influencia positiva del medio será medido por un parámetro b (positivo) y el flujo de resistencia al cambio será proporcional al bienestar del actor. El flujo

positivo comenzará a influenciar poco a poco al actor y la tasa de salida (la resistencia que el actor presenta ante el medio) será proporcional al nivel de bienestar que éste posea en cada momento. El flujo de resistencia al cambio será entonces un factor de retraso o inercia al cambio de la influencia, medido según un parámetro m (positivo). Si m tiende a cero, habrá mucha resistencia al cambio. Al hacer el diagrama de flujos y niveles, se obtiene la representación de la Figura 3.2.

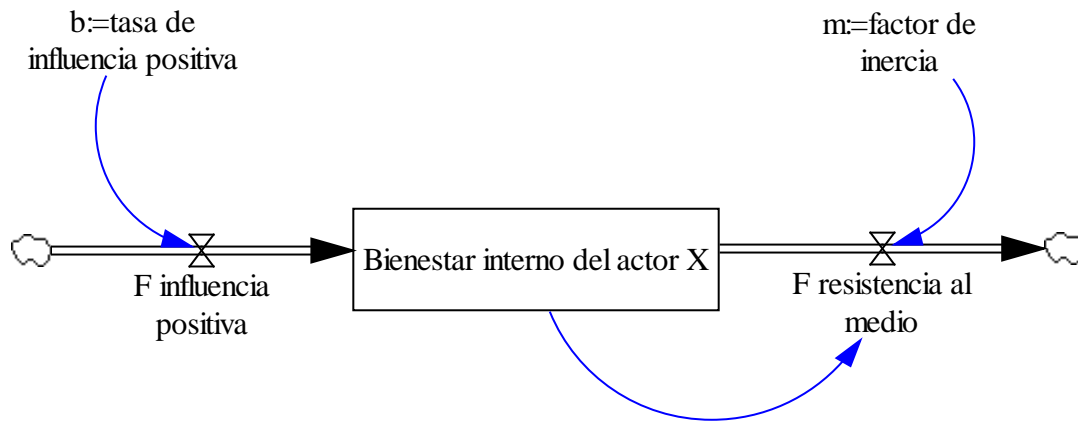


Fig. 3.2. Diagrama de niveles y flujos de un solo actor

De acuerdo a lo anterior se plantea el siguiente modelo:

$$\frac{dX}{dt} = F_{\text{influencia_positiva}} - F_{\text{resistencia_al_medio}} \quad (3.1)$$

donde $F_{\text{influencia_positiva}} = b$ y $F_{\text{resistencia_al_medio}} = mX$. Simplificando:

$$\frac{dX}{dt} = b - mX \quad (3.2)$$

Este modelo posee un equilibrio estable en $X = \frac{b}{m}$. Se afirma que el equilibrio del nivel de bienestar depende de las afectaciones del medio y del nivel de resistencia del actor, pero, es necesario analizar el equilibrio interno relativo de ajuste que posee el actor.

Obsérvese que el término “equilibrio interno relativo de ajuste” puede compararse con el término “homeóstasis” del actor, empleado por Berthalanfy (1968). Cabe aclarar que siempre es necesario definir un punto de referencia para poder establecer un comparativo entre niveles de bienestar, situación que no aclaran los investigadores citados, dada la dificultad de una definición objetiva del problema de “autoregulación” y equilibrio interno de un actor (Gottman et al., 2002b). No obstante, al tomar en cuenta la manifestación del “conflicto” como un intercambio de energías, aun cuando se desconozcan algunas variables internas que influyen en cada uno de los actores, el nivel de evolución del bienestar del actor permanecerá

directamente en la medida de la influencia que sufra. Lo que se busca es formar la variable de bienestar como aquel nivel de “temperatura” de las fuerzas psicológicas o sociológicas del actor, que miden el progreso en algún nivel de organización.

Gottman (2002a, 2002b) utilizó escalas de medida como el *Sistema Rápido de Puntaje de Interacción de Parejas* (en inglés *Rapid Couples Interaction Scoring System*, RCISS) con el cual establecía como variable un impacto emocional de un actor sobre otro y a dicha variable se le permitía tomar valores tanto positivos como negativos. Por ello, aquí se definirán las variables del problema como niveles de ganancia (emocional), siendo esto una medida del impacto interno relativo, generado por las afectaciones tanto del medio como de los demás actores. Se definen entonces las variables de impacto de la siguiente forma:

$$x = \text{impacto emocional (Actor } x) = \text{Bienestar interno}(X) - \text{Equilibrio relativo de ajuste} \quad (3.3)$$

3.2.2 Relaciones causales y planteamiento del modelo para dos actores

Se ilustran primero las relaciones causales cuando dos actores interactúan en un escenario de competición. Para ello, una de la hipótesis que se debe considerar es que el nivel de bienestar de un actor estará relacionado con el nivel de bienestar del otro, esto es, el bienestar va a estar determinado no solo por la influencia del medio, sino por la retroalimentación o afectación que reciba del otro actor. Por esta razón, debe considerarse que la medida del bienestar es relativa.

Sea el actor 1 con un nivel de bienestar interno relativo X_1 , y el actor 2 con un nivel de bienestar relativo X_2 . Para cada actor se aplican las mismas relaciones causales (dinámica intra-actor) descritas en la sección anterior; sin embargo, se debe mostrar como las retroalimentaciones negativas entre actores influyen en el modelo en conjunto. Sea

T_1 := la afectación del actor 2 sobre el actor 1

T_2 := La afectación del actor 1 sobre el actor 2

Estas afectaciones o influencias son las que determinan la competición. Aplicando las relaciones causales en dicho escenario, queda que:

- A mayor bienestar interno relativo del actor 1, más afectación de éste sobre el actor 2; a mayor afectación del actor 1 sobre el actor 2 menor será el bienestar interno del actor 2.

Bienestar interno relativo(X_1) \rightarrow^+ Afectación del actor 1 sobre el actor 2

Afectación del actor 1 sobre el actor 2 \rightarrow^- Bienestar interno relativo(X_2)

Similarmente:

- A mayor bienestar interno relativo del actor 2, más afectación de éste sobre el actor 1; a mayor afectación del actor 2 sobre el actor 1, menor será el bienestar interno del actor 1.

Bienestar interno relativo (X2) \rightarrow^+ Afectación del actor 2 sobre el actor 1
 Afectación del actor 2 sobre el actor 1 \rightarrow^- Bienestar interno relativo(X1)

Luego, el diagrama causal completo incluye el acoplamiento de dos sistemas de actores, más las afectaciones que hay entre ellos, tal como se muestra en la Figura 3.3. También se observa la formación de un bucle de retroalimentación positiva, produciéndose así un bucle inestable, lo que conduce (desde la interpretación de la dinámica de sistemas) a la existencia de un “círculo vicioso” entre dichos actores cuando hay competencia.

Para representar el respectivo diagrama de niveles y flujos, considérese la siguiente pregunta: ¿cómo definir la afectación entre actores, sabiendo que no existe un equilibrio absoluto de ajuste? (en otras palabras, no existe una escala absoluta para la medida del bienestar). Para tener en cuenta esto, las funciones de afectación entre actores se tomarán como funciones “*tabla*”², de acuerdo con lo propuesto por Pruitt (2006). Dichas funciones de aprendizaje asintóticas son del tipo sigmodal (*s-shape*), las cuales permiten representar como se estabiliza el bienestar a medida que aumenta el valor de la afectación, y que se adecuan a la condición: a mayor bienestar de algún actor, menor será la afectación positiva con el otro (recuérdese que se trata de un escenario de competencia entre los actores).

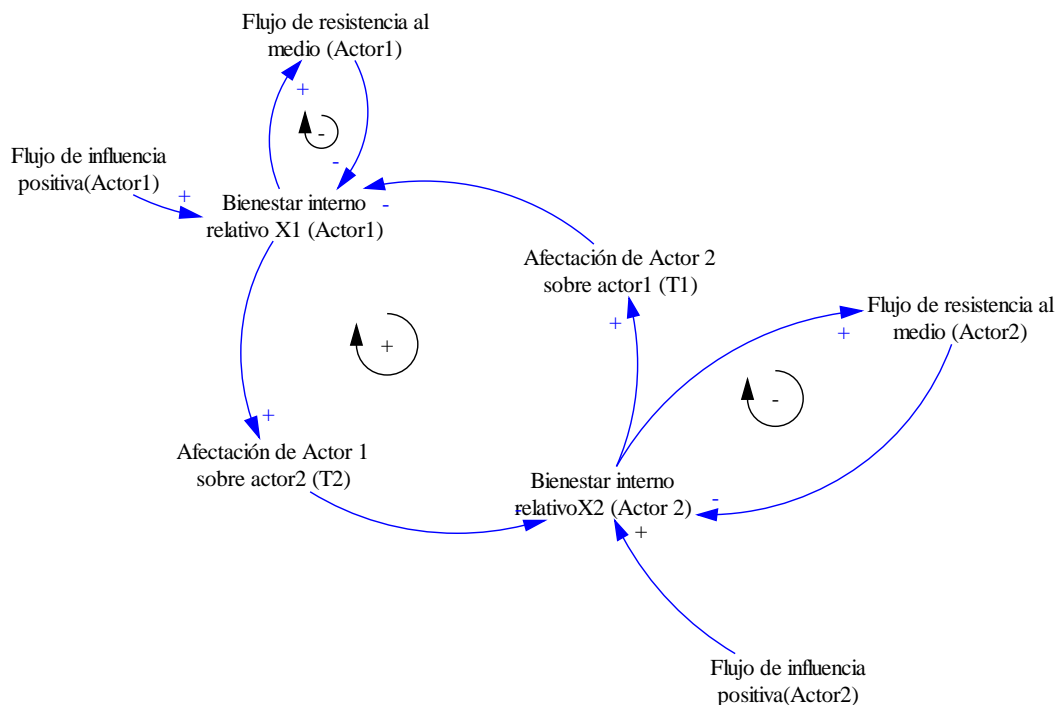


Fig. 3.3. Diagrama causal de la competencia entre dos actores.

² Las funciones tipo *tabla* se utilizan en dinámica de sistemas y son las que se caracterizan por poseer una forma definida que es acorde a la descripción de algún problema.

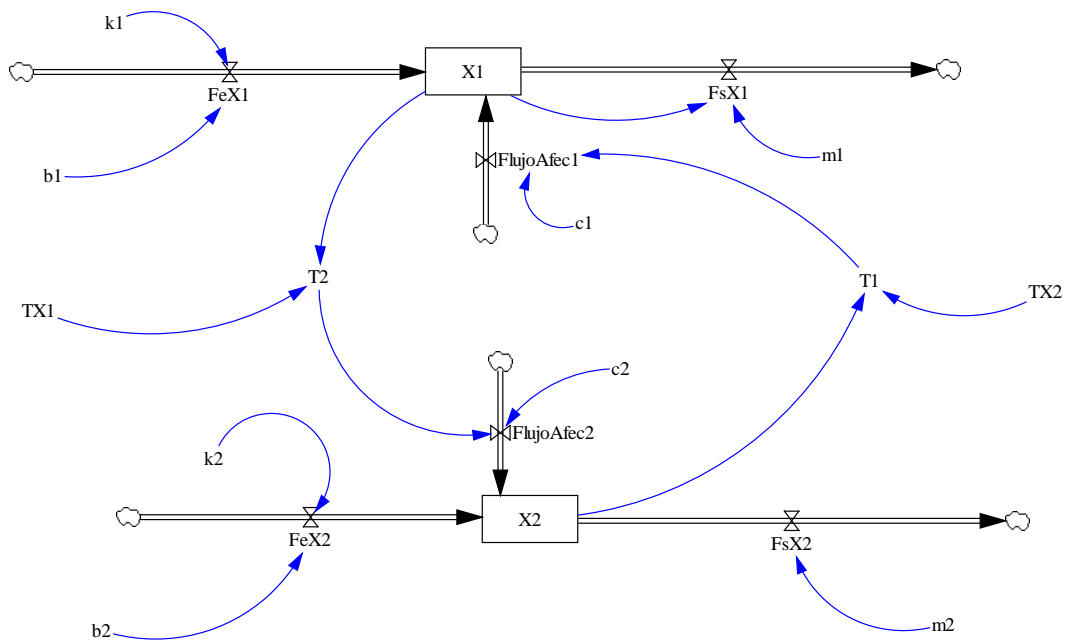


Fig. 3.4. Diagrama de niveles y de flujos para el escenario de competencia.

Teniendo en cuenta lo anterior, se obtiene el diagrama de niveles y de flujos presentado en la Figura. 3.4. Las funciones *tabla* T1 y T2 son tales que influyen las variables de estado de manera inversamente proporcional, es decir, cuando un actor tenga un máximo de bienestar habrá un mínimo de afectación positiva. Dicha función de afectación tendrá la forma presentada esquemáticamente en la Figura 3.5, teniendo presente que debe ser “calibrada” alrededor de un punto de referencia que se denominará *equilibrio relativo de ajuste* (T_x).

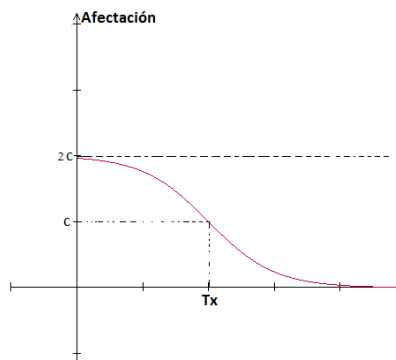


Fig. 3.5. Forma de la afectación de un actor sobre otro. La abscisa es el bienestar de un actor y la ordenada es la afectación causada sobre el otro actor. Al aumentar su bienestar interno relativo, se reduce la afectación positiva sobre el otro.

Aunque existen diferentes posibilidades para la selección de dichas funciones *tabla*, las seleccionadas aquí serán:

$$T1=1 - \tanh(X2-TX2) \quad (3.4)$$

$$T2=1 - \tanh(X1-TX1) \quad (3.5)$$

Los respectivos equilibrios relativos de ajuste TX1 y TX2 se definen tomando en cuenta la tasa de las afectaciones sobre la resistencia del actor, así (ver Tabla 3.1):

$$TX1 = \frac{\text{Suma de las Afectaciones que sufre actor 1}}{\text{factor inercial del actor 1}} = \frac{b_1 + c_1}{m_1} \quad (3.6)$$

$$TX2 = \frac{\text{Suma de las Afectaciones que sufre actor 2}}{\text{factor inercial del actor 2}} = \frac{b_2 + c_2}{m_2} \quad (3.7)$$

De acuerdo a lo anterior se plantea el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} \frac{dX1}{dt} &= FeX1 - FsX1 + \text{FlujoAfec1} \\ \frac{dX2}{dt} &= FeX2 - FsX2 + \text{FlujoAfec2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde FeX1, FeX2, FsX1, FsX2, FlujoAfec1 y FlujoAfec2 son funciones de flujo definidas en la Tabla 3.1. Lo característico de este modelo reside en sus parámetros o variables auxiliares y en sus funciones tipo “*tabla*”.

Tabla 3.1. Definición de las variables y parámetros del modelo de competición

Variable	Definición	Equivalencias según diagrama de niveles y flujos
FeX1	Flujo positivo del medio para X1	FeX1= k1·b1 k1= factor de bienestar (actor 1) b1= parametro de influencia del medio para el actor 1
FeX2	Flujo positivo del medio para X2	FeX2= k2·b2 k2= factor de bienestar(actor 2) b2= parámetro de influencia del medio para el actor 2
FlujoAfec1	Flujo de afectación para el actor 1	FlujoAfec1= c1·T1 c1= parametro de afectacion del actor 2 sobre actor 1

FlujoAfec2	Flujo de afectación para el actor 2	FlujoAfec2= $c_2 \cdot T_2$ c_2 = parámetro de afectacion del actor 2 sobre actor 1
FsX1	Flujo de resistencia al medio del actor 1	FsX1= $m_1 \cdot X_1$ m_1 = factor de inercia (resistencia) del actor 1
FsX2	Flujo de resistencia al medio del actor 2	FsX2= $m_2 \cdot X_2$ m_2 = factor de inercia (resistencia) del actor 2
TX1	Equilibrio relativo de ajuste para el actor 1	TX1= Equilibrio relativo de ajuste del actor 1
TX2	Equilibrio relativo de ajuste para el actor 2	TX2= Equilibrio relativo de ajuste del actor 2
T1	Función tabla de afectación de actor 1 por el actor 2	$T_1 = f(X_2, TX_2)$; (funcion "tabla 1")
T2	Función tabla de afectación de actor 2 por el actor 1	$T_2 = g(X_1, TX_1)$; (funcion "tabla 2")

Todos los parámetros o variables auxiliares son positivos.

Los factores de bienestar (k_1 y k_2) forman parte importante de los niveles de interacción; para este trabajo se han tomado como $k_1 = k_2 = 2$, ya que esto permite una representación ilustrativa del modelo. Al reemplazar las variables de la Tabla 3.1 en las Ecuaciones (3.8), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 2b_1 - m_1 x_1 + c_1 \left[1 - \tanh \left(x_2 - \frac{b_2 + c_2}{m_2} \right) \right] \\ \frac{dx_2}{dt} &= 2b_2 - m_2 x_2 + c_2 \left[1 - \tanh \left(x_1 - \frac{b_1 + c_1}{m_1} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Haciendo el siguiente cambio de variable:

$$\text{Para el actor 1: } x = x_1 - \frac{b_1 + c_1}{m_1} \quad (3.10)$$

$$\text{Para el actor 2: } y = x_2 - \frac{b_2 + c_2}{m_2} \quad (3.11)$$

y reemplazando en la Ecuación (3.9), se llega al sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= b_1 - m_1 x - c_1 \tanh(y) \\ \frac{dy}{dt} &= b_2 - m_2 y - c_2 \tanh(x)\end{aligned}\tag{3.12}$$

donde b_1 es la influencia del medio para el actor x , b_2 es la influencia del medio para el actor y , m_1 es la inercia al cambio del actor x , m_2 es la inercia al cambio del actor y , c_1 es la afectación (influencia) del actor y sobre el actor x , c_2 es la afectación (influencia) del actor x sobre el actor y . Los parámetros mencionados son mayores o iguales que cero.

El sistema presentado en las Ecuaciones (3.12) es semejante al propuesto por Liebovitch et al (2008) cuando hay retroalimentación negativa-negativa entre los actores (téngase en cuenta que aun el modelo no incluye intervención de un mediador). Por lo tanto, se puede concluir que las variables de emocionalidad x , y que proponen Liebovitch et al. (2008) y Gottman et al. (2002) representan las variables de impacto relativo respecto a un índice interno (TX1 y TX2), con lo que x , y ilustran niveles de pérdida o ganancia respecto a una constante relativa, que involucra tanto las afectaciones del individuo como su nivel de inercia.

3.3 Formulación del indicador de intervención del mediador en el conflicto

Liebovitch et al (2008), describen la competición entre actores como la retroalimentación negativa entre estos, presentándose fenómenos de interés cuando los parámetros de influencia del medio b_1 y b_2 son cercanos a cero o nulos. Cuando las afectaciones c_i son mayores a los niveles de inercia m_1 y m_2 , es posible definir escenarios donde el conflicto no pueda tener resolución.

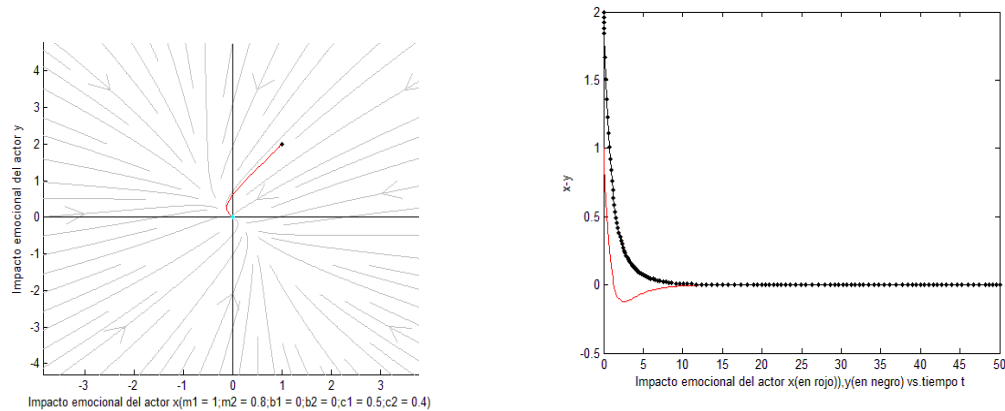
Mediante la aplicación del análisis dinámico para este sistema (Ecuaciones 3.12), se han presentado en la literatura bifurcaciones suaves (bifurcación Horquilla -*Pitchfork Bifurcation*-), (Wiggins .1990) para $c = m$ (tomando $m_1 = m_2 = m$ y $c_1 = c_2 = c$), donde cambia de un equilibrio hiperbólico estable a dos equilibrios estables y uno inestable cuando $c > m$.

En la Figura 3.6 se presenta la simulación del sistema (3.12) para dos actores en conflicto intratable, representando los retratos de fase y las curvas solución. En dicha figura se observa en (a) que cuando la afectación entre actores es inferior o igual a sus inercias, el sistema evoluciona a un punto neutral (impacto emocional nulo). En (b) se observa que cuando la afectación entre actores es superior a sus inercias el sistema se desestabiliza y se establece un ganador (impacto emocional positivo) y un perdedor (impacto emocional negativo) dentro del conflicto. Según el análisis realizado en este trabajo hasta este punto, la resolución del conflicto en el caso (b) debe brindarse mediante una intervención, tratando de que el actor ganador no

afecte o destruya el otro. Para ello se define una superficie de conmutación, la cual activa los mecanismos de influencia positiva del medio, ayudando en la solución del conflicto

En este punto surge la siguiente pregunta: ¿cuál condición es al menos necesaria para que la propia evolución del sistema pueda resolver sus asuntos e impacte positivamente a los actores? Para responder, es necesario representar la intervención en el sistema (3.12) mediante “superficies” o “zonas”, que serán intervenciones del mediador bajo un umbral preestablecido, que permitirán evitar que se refuercen las conductas del conflicto, especialmente en los conflictos intratables (altos valores de afectación entre actores). Este planteamiento se basa en el modelo ecosistémico de cosecha en una comunidad de predadores-presas, propuesto por Kuznetsov et al. (2003). Para tal fin, se proponen a continuación varios escenarios basados en la teoría de Sistemas de Filippov, donde se conmutarán dos campos vectoriales apreciando sus dinámicas y la superficie de conmutación que los separa será el indicador prevalente que ilustra cuando el mediador interviene frente al conflicto. Dos tipos de intervención se estudian en este trabajo: *Intervención del medio (donde están los actores)* e *Intervención del medio y de las afectaciones de los actores*.

(a)



(b)

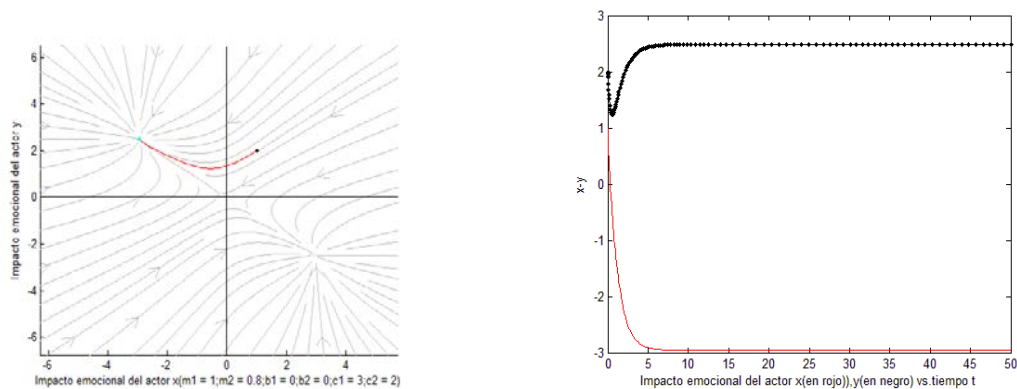


Fig. 3.6. Análisis de órbitas. Retrato de fase y curva solución del sistema dado por las Ecuaciones (3.12) en la condición inicial $x_0 = 1$ y $y_0 = 2$ cuando: (a) $c_i \leq m_i$, (b) $c_i > m_i$.

Antes de comenzar a definir los sistemas no suaves, se dará una motivación para la superficie de conmutación y el conflicto intratable:

3.3.1 Conflicto intratable (definición): cuando el sistema (3.12) presente $m_i < c_i$ y $b_i \approx 0$ para $i \in \{1, 2\}$, se dirá que el tipo de competición es un *conflicto intratable*.

El análisis de los equilibrios de (3.12) proporciona pistas para tratar este problema. Es de notar que cuando se busca determinar los equilibrios de un sistema no lineal y con funciones asínticas (como la tangente hiperbólica), no es fácil calcular las soluciones en el equilibrio. En tales casos, al calcular los equilibrios (x_0, y_0) del sistema de la definición 3.3.1, dados por:

$$\begin{aligned} 0 &= -m_1 x_0 - c_1 \tanh(y_0) \\ 0 &= -m_2 y_0 - c_2 \tanh(x_0) \end{aligned} \quad (3.13)$$

las soluciones de los equilibrios se aproximan asíntoticamente, como puede verse en la Figura 3.7.

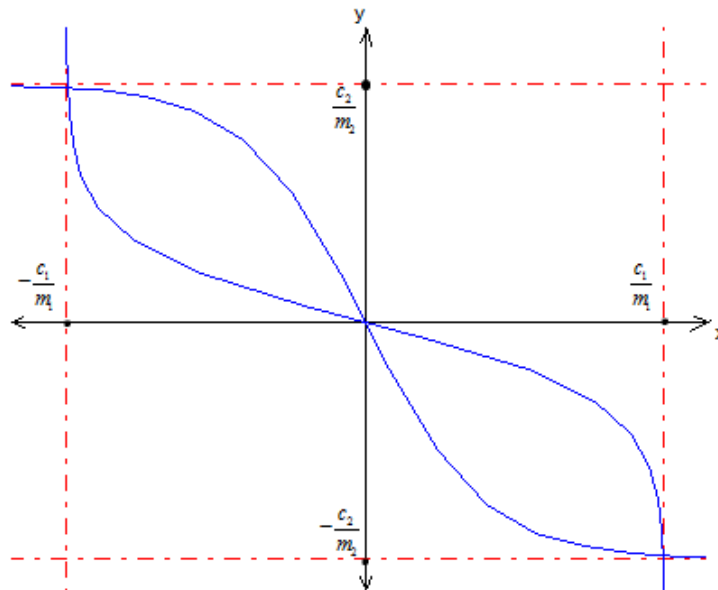


Fig. 3.7. Nulclinas (en azul) del sistema de la definición 3.3.1. Las intersecciones son acercamientos asíntóticos a los equilibrios.

Los equilibrios correspondientes son:

$$\triangleright (x_{(1)}, y_{(1)}) \text{ donde } x_{(1)} \approx -\frac{c_1}{m_1}, \quad y_{(1)} \approx \frac{c_2}{m_2}.$$

- La solución nula (0,0).
- $(x_{(2)}, y_{(2)})$ donde $x_{(2)} \approx \frac{c_1}{m_1}$, $y_{(2)} \approx \frac{c_1}{m_1}$.

Por lo tanto el máximo valor de la evolución del impacto positivo va a estar relacionado con el cociente de las afectaciones del otro actor y la inercia propia.

3.3.2 Superficie de intervención: es una superficie de conmutación que estará definida como:

$$x = \alpha \frac{c_1}{m_1} \quad y = \alpha \frac{c_2}{m_2} \quad (3.14)$$

donde α es la *proporción relativa del flujo emocional de salida del actor sobre la afectación del otro*. Según cuál sea el actor que esté en ventaja sobre el otro, ese es el que se intervendrá. Este parámetro es exógeno al modelo y sirve para estudiar las posibles dinámicas que surgen en la intervención.

3.3.3 Intervención de la competición en el medio: aparece cuando se influencia positivamente el medio de los actores, tomando como superficie de intervención al actor que está sometiendo al otro.

- **Intervención para y (en la condición inicial $y > x$)**

$$\begin{array}{l} \text{(sin intervención)} \\ \frac{dx}{dt} = -m_1 x - c_1 \tanh(y) \\ \frac{dy}{dt} = -m_2 y - c_2 \tanh(x) \end{array} \quad \left(y < \alpha \frac{c_2}{m_2} \right) \quad (3.15)$$

$$\begin{array}{l} \text{(con intervención)} \\ \frac{dx}{dt} = b_1 - m_1 x - c_1 \tanh(y) \\ \frac{dy}{dt} = b_2 - m_2 y - c_2 \tanh(x) \end{array} \quad \left(y > \alpha \frac{c_2}{m_2} \right) \quad (3.16)$$

Así, el sistema quedará:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (b_1) \delta_{ly}(y) - m_1 x - c_1 \tanh(y) \\ \frac{dy}{dt} &= (b_2) \delta_{ly}(y) - m_2 y - c_2 \tanh(x)\end{aligned}\tag{3.17}$$

donde

$$\delta_{ly}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq \frac{\alpha c_2}{m_2} \\ 0 & \text{si } y < \frac{\alpha c_2}{m_2} \end{cases}\tag{3.18}$$

es una función de activación de la intervención en y .

➤ **Intervención para x (en la condición inicial $x > y$)**

$$\begin{aligned}(\text{sin intervención}) \quad \frac{dx}{dt} &= -m_1 x - c_1 \tanh(y) \\ \frac{dy}{dt} &= -m_2 y - c_2 \tanh(x)\end{aligned}\quad \left(x < \alpha \frac{c_1}{m_1}\right)\tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}(\text{con intervención}) \quad \frac{dx}{dt} &= b_1 - m_1 x - c_1 \tanh(y) \\ \frac{dy}{dt} &= b_2 - m_2 y - c_2 \tanh(x)\end{aligned}\quad \left(x > \alpha \frac{c_1}{m_1}\right)\tag{3.20}$$

Adaptando en funciones no suaves, queda:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (b_1) \delta_{lx}(x) - m_1 x - c_1 \tanh(y) \\ \frac{dy}{dt} &= (b_2) \delta_{lx}(x) - m_2 y - c_2 \tanh(x)\end{aligned}\tag{3.21}$$

donde

$$\delta_{lx}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq \frac{\alpha c_1}{m_1} \\ 0 & \text{si } x < \frac{\alpha c_1}{m_1} \end{cases}\tag{3.22}$$

es una función de activación de la intervención en x .

- **Intervención completa del medio:** sucede cuando los dos actores tienen definido dos superficies de intervención conjuntas que intervienen el medio de ambos actores.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (b_1)M(x, y) - m_1x - c_1 \tanh(y) \\ \frac{dy}{dt} &= (b_2)M(x, y) - m_2y - c_2 \tanh(x)\end{aligned}\quad (3.23)$$

donde $M(x, y) = \max\{\delta_{lx}(x), \delta_{ly}(y)\}$ y $\delta_{lx}(x), \delta_{ly}(y)$ definidas en (3.18) y (3.22) (3.24)

El modelo de intervención completa del medio es el modelo ideal porque interviene de forma directa el conflicto, sin embargo, el tipo de superficie de conmutación que se genera tiene forma de "L" invertida como se aprecia en la Figura 3.8, lo que hace un poco más complejo su análisis.

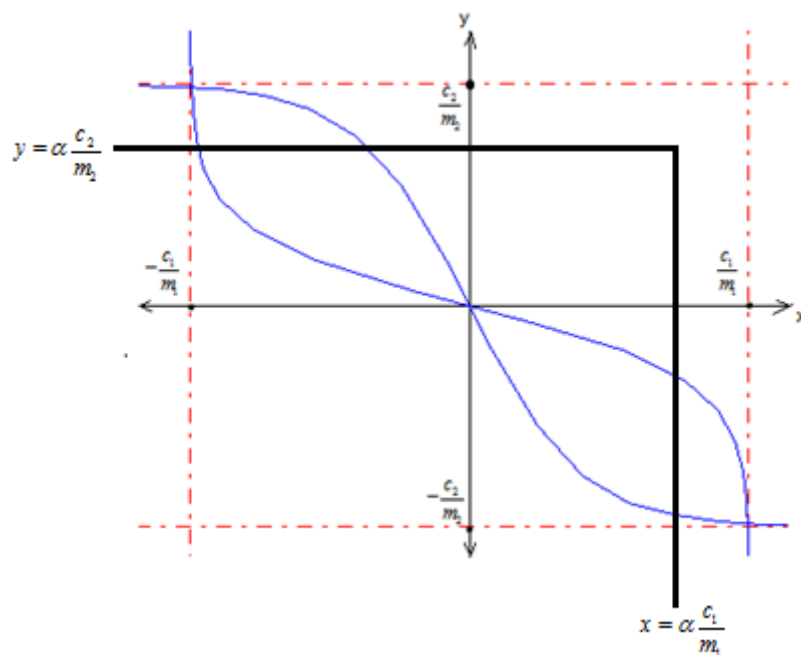


Fig. 3.8. Nulclinas (en azul), las superficies de conmutación (trazo grueso) y la definición de sus intervenciones.

3.3.4. Intervención del medio y de las afectaciones de los actores: aparece cuando se influencia positivamente el medio y se atenúa la afectación entre actores, tomando

como superficie de intervención al actor que está sometiendo al otro. A diferencia del anterior, éste tipo de intervención involucra un parámetro propio c_I , que atenúa de manera proporcional la afectación que sufren los actores.

Intervención para y (en la condición inicial $y > x$)

$$\begin{aligned} \text{(sin intervención)} \quad \frac{dx}{dt} &= -m_1 x - c_1 \tanh(y) \\ \frac{dy}{dt} &= -m_2 y - c_2 \tanh(x) \end{aligned} \quad \left(y < \alpha \frac{c_2}{m_2} \right) \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \text{(con intervención)} \quad \frac{dx}{dt} &= b_1 - m_1 x - c_1 \tanh(y) \\ \frac{dy}{dt} &= b_2 - m_2 y - c_2 \tanh(x) + c_I \tanh(x) \end{aligned} \quad \left(y > \alpha \frac{c_2}{m_2} \right) \quad (3.26)$$

el sistema formado queda:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (b_1) \delta_{Iy}(y) - m_1 x - c_1 \tanh(y) \\ \frac{dy}{dt} &= (b_2 + c_I \tanh(x)) \delta_{Iy}(y) - m_2 y - c_2 \tanh(x) \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde $\delta_{Iy}(y)$ definida en (3.18) es una función de activación de la intervención en y .

Intervención para x (en la condición inicial $x > y$)

$$\begin{aligned} \text{(sin intervención)} \quad \frac{dx}{dt} &= -m_1 x - c_1 \tanh(y) \\ \frac{dy}{dt} &= -m_2 y - c_2 \tanh(x) \end{aligned} \quad \left(x < \alpha \frac{c_1}{m_1} \right) \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \text{(con intervención)} \quad \frac{dx}{dt} &= b_1 - m_1 x - c_1 \tanh(y) + c_I \tanh(y) \\ \frac{dy}{dt} &= b_2 - m_2 y - c_2 \tanh(x) \end{aligned} \quad \left(x > \alpha \frac{c_1}{m_1} \right) \quad (3.29)$$

Adaptando en funciones no suaves, queda

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (b_1 + c_1 \tanh(y)) \delta_{I_x}(x) - m_1 x - c_1 \tanh(y) \\ \frac{dy}{dt} &= (b_2) \delta_{I_x}(x) - m_2 y - c_2 \tanh(x)\end{aligned}\tag{3.27}$$

donde $\delta_{I_x}(x)$ definida en (3.22), es una función de activación de la intervención en x .

- **Intervención completa del medio y las afectaciones:** ocurre cuando los dos actores tienen definidas dos superficies de intervención conjuntas, en las que son intervenidos tanto el medio como las afectaciones que sufren entre sí, atenuando las retroalimentaciones negativas que surjan durante la evolución de alguno de sus estados.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (b_1 + c_1 \tanh(y)) M(x, y) - m_1 x - c_1 \tanh(y) \\ \frac{dy}{dt} &= (b_2 + c_1 \tanh(x)) M(x, y) - m_2 y - c_2 \tanh(x)\end{aligned}\tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}\text{donde } M(x, y) &= \max \{ \delta_{I_x}(x), \delta_{I_y}(x) \} \text{ y } \delta_{I_x}(x), \delta_{I_y}(x) \\ &\text{definidas en (3.18) y (3.22)}\end{aligned}\tag{3.29}$$

3.4 Aplicación a los sistemas no suaves (Sistemas de Filippov)

Se presenta un resumen de resultados de los cálculos de las zonas de deslizamiento, puntos tangentes y demás características del sistema bajo estudio, para los modelos de *intervención del medio* y de la *intervención del medio y las afectaciones*, en solo una superficie de intervención. En los casos en los que se presenta más de una superficie de intervención, se procede de forma análoga.

3.4.1 Cálculo de zonas de deslizamiento: Intervención de la competición en el medio

Sea la zona de conmutación $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / H(x, y) = 0\}$ donde $H(x, y) = y - \alpha \frac{c_2}{m_2}$, además

$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / H(x, y) < 0\}$ y $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / H(x, y) > 0\}$.

El campo vectorial asociado al sistema se presenta en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2. Campos vectoriales asociados a los sistemas no suaves referentes a la intervención de la competición en el medio

$m_1 > 0, c_1 > 0, m_2 > 0, c_2 > 0; b_1$ y $b_2 \in \mathbb{R}$ $c_1 > m_1, c_2 > m_2$

Conjunto asociado	Ecuación	Campo vectorial asociado
$S_1 (H(x, y) < 0)$	$\frac{dx}{dt} = -m_1 x - c_1 \tanh(y)$ $\frac{dy}{dt} = -m_2 y - c_2 \tanh(x)$	$F_1 = \begin{pmatrix} -m_1 x - c_1 \tanh(y) \\ -m_2 y - c_2 \tanh(x) \end{pmatrix}$
$\Sigma (H(x, y) = 0)$	$H(x, y) = y - \alpha \frac{c_2}{m_2}$	<p style="text-align: center;">Campo de Filippov de dimensión 1</p> $\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha c_2 b_1}{b_2} - c_1 \tanh\left(\frac{\alpha c_2}{m_2}\right) - m_1 x + \frac{b_1 c_2 \tanh(x)}{b_2}$
$S_2 (H(x, y) > 0)$	$\frac{dx}{dt} = b_1 - m_1 x - c_1 \tanh(y)$ $\frac{dy}{dt} = b_2 - m_2 y - c_2 \tanh(x)$	$F_2 = \begin{pmatrix} b_1 - m_1 x - c_1 \tanh(y) \\ b_2 - m_2 y - c_2 \tanh(x) \end{pmatrix}$

Se calcula:

$$\mathcal{L}_{F_1} H(x, y) = \langle F_1, \nabla H \rangle \text{ y } \mathcal{L}_{F_2} H(x, y) = \langle F_2, \nabla H \rangle \quad (3.30)$$

$$\mathcal{L}_{F_1} H(x, y) = -m_2 y - c_2 \tanh(x) \quad (3.31)$$

$$\mathcal{L}_{F_2} H(x, y) = b_2 - m_2 y - c_2 \tanh(x) \quad (3.32)$$

Para el deslizamiento estable (*Sliding*), deslizamiento inestable (*Escaping*) y la zona de cruce (*Crossing*), se hallan dichas zonas (o intervalos) reemplazando

$$y = \alpha \frac{c_2}{m_2} \quad (3.33)$$

En las ecuaciones:

$$\Sigma_{sliding} = \{(x, y) \in \Sigma / \mathcal{L}_{F_1} H(x, y) > 0 \wedge \mathcal{L}_{F_2} H(x, y) < 0\} \quad (3.34)$$

$$\Sigma_{Escaping} = \{(x, y) \in \Sigma / \mathcal{L}_{F_1} H(x, y) < 0 \wedge \mathcal{L}_{F_2} H(x, y) > 0\} \quad (3.35)$$

$$\Sigma_{crossing} = \{(x, y) \in \Sigma / \mathcal{L}_{F_1} H(x, y) \cdot \mathcal{L}_{F_2} H(x, y) > 0\} \quad (3.36)$$

con lo que se obtienen los resultados de la Tabla 3.3.

Tabla 3.3. Análisis de deslizamientos según Tabla 3.2. $b_2 \leq b_1$

$\left \frac{b_2 - \alpha}{c_2} \right < 1$	$\Sigma_{sliding} = \emptyset$
	$\Sigma_{crossing} = (-\infty, -\text{arc tanh}(\alpha)) \cup \left(\text{arc tanh}\left(\frac{b_2 - \alpha}{c_2}\right), +\infty \right)$
	$\Sigma_{Escaping} = \left(-\arctan h(\alpha), \text{arc tanh}\left(\frac{b_2 - \alpha}{c_2}\right) \right)$
$b_2 = 0$	$\Sigma_{Sliding} = \emptyset$
	$\Sigma_{crossing} = (-\infty, -\text{arc tanh}(\alpha)) \cup (-\text{arc tanh}(\alpha), +\infty)$
	$\Sigma_{Escaping} = \emptyset$
$\left \frac{b_2 - \alpha}{c_2} \right \geq 1$	$\Sigma_{Sliding} = \emptyset$
	$\Sigma_{crossing} = (-\infty, -\text{arc tanh}(\alpha))$
	$\Sigma_{Escaping} = (-\arctan h(\alpha), +\infty)$

3.4.2 Cálculo de puntos tangentes: Intervención de la competición en el medio

Aplicando lo presentado en el capítulo 2, los puntos tangentes son aquellos que pertenecen a la superficie de conmutación tales que $\mathcal{L}_{F_i} H = 0$. En los cálculos que se realizaron en todo el capítulo se encontró que todos son puntos tangentes cuadráticos $\mathcal{L}_{F_i}^2 H \neq 0$. Los resultados se presentan en la Tabla 3.4. Más detalles en el anexo 2.

Tabla 3.4. Análisis de puntos tangentes: Intervención de la competición en el medio

$\left \frac{b_2}{c_2} - \alpha \right < 1$	$T_{F_1} = \left(-\operatorname{arc\,tanh}(\alpha), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right)$	Invisible en S_1
	$T_{F_2} = \left(\operatorname{arc\,tanh}\left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha\right), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right)$	Invisible en S_2
$b_2 = 0$	$T_{F_1} = T_{F_2} = \left(-\operatorname{arc\,tanh}(\alpha), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right)$	Invisible en S_1 y S_2
$\left \frac{b_2}{c_2} - \alpha \right \geq 1$	$T_{F_2} = \left(-\operatorname{arc\,tanh}(\alpha), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right)$	Invisible en S_1
	$T_{F_1} = \left(-\operatorname{arc\,tanh}(\alpha), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right)$	Invisible en S_2 .

3.4.3 Cálculo de zonas de deslizamiento: Intervención del medio y las afectaciones entre actores

Se muestra el análisis de deslizamientos para los casos donde se interviene un solo actor, específicamente aquel que esté ganando (en base a lo que se ha hecho con “y” en el ejemplo anterior). Los modelos de este escenario se someten al mismo análisis realizado para las regiones de deslizamiento (*Sliding, Escaping, Crossing*), pero teniéndose en cuenta las diferencias en el cálculo del campo de Filippov.

Calculando las derivadas $\mathcal{L}_{F_1} H$ y $\mathcal{L}_{F_2} H$ en (3.33) y considerando los sistemas presentados en la Tabla 3.5, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\mathcal{L}_{F_1} H \left(x, \alpha \frac{c_2}{m_2} \right) = -\alpha c_2 - c_2 \tanh(x) = -c_2 (\alpha + \tanh(x)) \quad (3.37)$$

$$\mathcal{L}_{F_2} H \left(x, \alpha \frac{c_2}{m_2} \right) = b_2 - \alpha c_2 - c_2 \tanh(x) + c_1 \tanh(x) = b_2 - \alpha c_2 - (c_2 - c_1) \tanh(x) \quad (3.38)$$

El análisis realizado para las zonas de deslizamiento se presenta en la Tabla 3.6.

Tabla 3.5. Sistemas para el análisis de zonas de deslizamiento: Intervención del medio y las afectaciones entre actores.

Conjunto asociado	Ecuación	Campo vectorial asociado
$S_1(H(x, y) < 0)$	$\frac{dx}{dt} = -m_1x - c_1 \tanh(y)$ $\frac{dy}{dt} = -m_2y - c_2 \tanh(x)$	$F_1 = \begin{pmatrix} -m_1x - c_1 \tanh(y) \\ -m_2y - c_2 \tanh(x) \end{pmatrix}$
$\sum (H(x, y) = 0)$	$H(x, y) = y - \alpha \frac{c_2}{m_2}$	Véase el análisis sección 3.4.5
$S_2(H(x, y) > 0)$	$\frac{dx}{dt} = b_1 - m_1x - c_1 \tanh(y)$ $\frac{dy}{dt} = b_2 - m_2y - c_2 \tanh(x) + c_1 \tanh(x)$ <p style="text-align: center;">ó</p> $\frac{dx}{dt} = b_1 - m_1x - c_1 \tanh(y) + c_1 \tanh(y)$ $\frac{dy}{dt} = b_2 - m_2y - c_2 \tanh(x) + c_1 \tanh(x)$	$F_2 = \begin{pmatrix} b_1 - m_1x - c_1 \tanh(y) \\ b_2 - m_2y - c_2 \tanh(x) + c_1 \tanh(x) \end{pmatrix}$ <p style="text-align: center;">ó</p> $F_2 = \begin{pmatrix} b_1 - m_1x - c_1 \tanh(y) + c_1 \tanh(x) \\ b_2 - m_2y - c_2 \tanh(x) + c_1 \tanh(x) \end{pmatrix}$

Tabla 3.6. Análisis de zonas de deslizamiento: Intervención del medio y las afectaciones entre actores.

	$\left \frac{b_2 - \alpha c_2}{c_2 - c_1} \right < 1, c_1 > c_2$
	$\sum_{Sliding} = (-\infty, -\arctan h(\alpha))$
$b_2 < \alpha c_1$	$\sum_{Crossing} = \left(-\arctan h(\alpha), \arctan h\left(\frac{b_2 - \alpha c_2}{c_2 - c_1}\right) \right)$
	$\sum_{Escaping} = \left(\arctan h\left(\frac{b_2 - \alpha c_2}{c_2 - c_1}\right), +\infty \right)$
$b_2 = \alpha c_1$	$\sum_{Sliding} = (-\infty, -\arctan h(\alpha))$
	$\sum_{Crossing} = \emptyset$
	$\sum_{Escaping} = (-\arctan h(\alpha), +\infty)$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{Sliding} = \left(-\infty, \arctan h \left(\frac{b_2 - \alpha c_2}{c_2 - c_1} \right) \right) \\
 b_2 > \alpha c_1 & \sum_{Crossing} = \left(\arctan h \left(\frac{b_2 - \alpha c_2}{c_2 - c_1} \right), -\arctan h(\alpha) \right) \\
 & \sum_{Escaping} = (-\arctan h(\alpha), +\infty)
 \end{aligned}$$

Tabla 3.7. Análisis de zonas de deslizamiento:
Intervención del medio y las afectaciones entre actores.

	$\left \frac{b_2 - \alpha c_2}{c_2 - c_1} \right \geq 1, c_1 > c_2$
$\frac{b_2 - \alpha c_2}{c_2 - c_1} \leq -1$	$\sum_{Sliding} = \emptyset$ $\sum_{Crossing} = (-\infty, -\arctan h(\alpha))$ $\sum_{Escaping} = (-\arctan h(\alpha), +\infty)$
$\frac{b_2 - \alpha c_2}{c_2 - c_1} \geq 1$	$\sum_{Sliding} = (-\infty, -\arctan h(\alpha))$ $\sum_{Crossing} = (-\arctan h(\alpha), +\infty)$ $\sum_{Escaping} = \emptyset$

3.4.4 Análisis de puntos tangentes

Mediante el mismo tipo de análisis aplicado previamente, se realizó el estudio de las características de los puntos tangentes, los cuales se presentan en la Tabla 3.8.

Tabla 3.8. Análisis de puntos tangentes:
Intervención del medio y las afectaciones entre actores.

$\left \frac{b_2 - \alpha c_2}{c_2 - c_1} \right < 1, c_1 > c_2$	$\left \frac{b_2 - \alpha c_2}{c_2 - c_1} \right \geq 1, c_1 > c_2$
$b_2 < \alpha c_1$ o $b_2 > \alpha c_1$	
$T_{F_1} = \left(-\arctan h(\alpha), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right)$ invisible en S_1	$T_{F_1} = \left(-\arctan h(\alpha), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right)$ invisible en S_1

$T_{F_2} = \left(\arctan h \left(\frac{b_2 - \alpha c_2}{c_2 - c_1} \right), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right)$		visible en S_2
$b_2 = \alpha c_1$	$T_{F_1} = T_{F_2} = \left(-\arctan h(\alpha), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right)$	$T_{F_1} = \left(-\arctan h(\alpha), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right)$
invisible en ambos		invisible en S_1

3.4.5 Análisis del campo de Filippov

Aplicando la definición presentada en el capítulo 2, se calcularon los campos de Filippov, los cuales se presentan en la Tabla 3.9. Para más detalles de la metodología de cálculo véase el anexo 3.

Tabla 3.9. Análisis del campo de Filippov:
Intervención del medio y las afectaciones entre actores.

Campo superior asociado (sistema intervenido en $y = \frac{\alpha c_2}{m_2}$)	Campo de Filippov calculado con
	$F_1 = \begin{pmatrix} -m_1 x - c_1 \tanh(y) \\ -m_2 y - c_2 \tanh(x) \end{pmatrix}$
(a) $F_2 = \begin{pmatrix} b_1 - m_1 x - c_1 \tanh(y) \\ b_2 - m_2 y - c_2 \tanh(x) \end{pmatrix}$	$x' = \frac{\alpha c_2 b_1}{b_2} - c_1 \tanh\left(\frac{\alpha c_2}{m_2}\right) - m_1 x + \frac{b_1 c_2 \tanh(x)}{b_2}$
(b) $F_2 = \begin{pmatrix} b_1 - m_1 x - c_1 \tanh(y) \\ b_2 - m_2 y - c_2 \tanh(x) + c_1 \tanh(x) \end{pmatrix}$	$x' = -c_1 \tanh\left(\frac{\alpha c_2}{m_2}\right) - m_1 x + \frac{b_1 c_2 (\alpha + \tanh(x))}{(b_2 + c_1 \tanh(x))}$
(c) $F_2 = \begin{pmatrix} b_1 - m_1 x - c_1 \tanh(y) + c_1 \tanh(x) \\ b_2 - m_2 y - c_2 \tanh(x) + c_1 \tanh(x) \end{pmatrix}$	$x' = -c_1 \tanh\left(\frac{\alpha c_2}{m_2}\right) - m_1 x + \left(\left(c_1 - \frac{c_2}{2} \right) \tanh\left(\frac{\alpha c_2}{m_2}\right) + \frac{b_2}{2} \right) \left(\frac{2c_2 (\alpha + \tanh(x))}{b_2 + c_1 \tanh(x)} \right)$

En el inciso (a) de la Tabla 3.9 se aprecia que, mediante el análisis de deslizamientos hecho en la Tabla 3.3, sobre el campo de Filippov existen equilibrios inestables sobre la zona de conmutación para una variación del parámetro b_2 tales que:

$$\left| \frac{b_2}{c_2} - \alpha \right| < 1 \quad (3.39)$$

En los incisos (b) y (c) de la Tabla 3.9 se aprecia que, por análisis de deslizamientos realizado en las Tablas 3.6 y 3.7, se puede afirmar que existen equilibrios del campo de Filippov que no están sobre la superficie de conmutación, cuando se cumpla:

$$c_2(\alpha + 1) - c_1 < b_2 \quad (3.40)$$

3.5 Bifurcaciones Locales: Intervención del medio

3.5.1 Bifurcación *Fold-Fold*

También denominada bifurcación del tipo Pseudo-Hopf Supercrítica, según Kuznetzov et al. (2003) y Guardia et al. (2011). Aparece formándose un ciclo aislado alrededor de la zona de *Crossing* que conecta los campos vectoriales. Este ciclo puede comprobarse tomando la sección de Poincaré (aplicación de retorno) y estudiando su estabilidad, para lo cual se requiere conocer de antemano las condiciones suficientes de no degenericidad, las cuales son:

- a) Mostrar previamente la posible *Colisión* (condición suficiente) de puntos tangentes invisibles.
- b) Entre los puntos tangentes está definido el Campo de Filippov y la zona de "*Escaping*".
- c) Ambos puntos tangentes están entre la frontera de la región de "*Escaping*" y "*Crossing*".
- d) La superficie de deslizamiento donde está el campo de Filippov debe contener un equilibrio inestable (en sistemas no suaves se conoce como Pseudo-nodo inestable).
- e) La sección de Poincaré (aplicación de retorno) alrededor de cada punto tangente, debe poseer estabilidades distintas (Kuznetzov et al., 2003).

Por consiguiente, los incisos a), b) y c) se cumplen para $\left| \frac{b_2}{c_2} - \alpha \right| < 1$.

Supóngase $b_1 > m_1 + c_1$ y además $b_2 > m_2 + c_2$ donde $b_1 > b_2$ para cualquier caso. No obstante, aparece una órbita periódica para $b_2 = 0$, siendo $T_{F_1} = T_{F_2} = \left(-\text{arc tanh}(\alpha), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right)$ punto tangente (*Two-fold*) invisible para ambos campos vectoriales, como se representa esquemáticamente en la Figura 3.9.

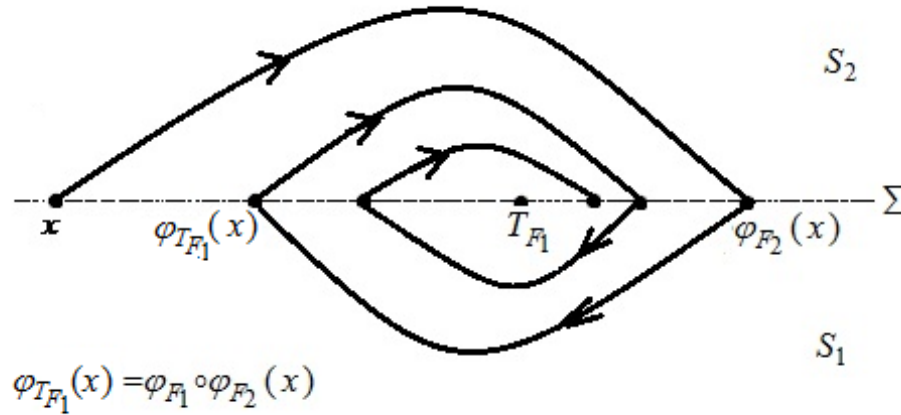


Fig. 3.9. Geometría de las órbitas y el cruce alrededor del punto tangente T_{F_1} para $b_2 = 0$.

$\varphi_{T_{F_1}}(x)$ es composición de dos aplicaciones de involución φ_{F_1} y φ_{F_2}

Al tomar un valor inicial en el campo vectorial F_2 sobre la superficie $y = \frac{\alpha c_2}{m_2}$ para valores $x < -\text{arc tanh}(\alpha)$, $x \in \Sigma_{\text{crossing}}$ (Tabla 3.3) la órbita como condición suficiente de periodicidad garantizaría el cruce para los $x > -\text{arc tanh}(\alpha)$.

De acuerdo con el capítulo 2, Ecuaciones (2.26), (2.27) y (2.29), la *aplicación de retorno* (sección de Poincaré) $\varphi_{T_{F_1}}(x)$ alrededor de T_{F_1} será:

$$\varphi_{T_{F_1}}(x) = -\text{arc tanh}(\alpha) + (x + \text{arc tanh}(\alpha)) + A_p^{(1)}(T_{F_1})(x + \text{arc tanh}(\alpha))^2 + O\left((x + \text{arc tanh}(\alpha))^3\right) \quad (3.41)$$

Afirmamos que la aplicación es estable (inestable) si $A_p^{(1)} < 0$ ($A_p^{(1)} > 0$).

$$A_p^{(1)}(T_{F_1}) = -\frac{2}{3}(m_1 + m_2) \left(\frac{-b_1}{\left(b_1 + m_1 \cdot \arctan h(\alpha) - c_1 \tanh\left(\alpha \frac{c_2}{m_2}\right) \right) \left(m_1 \cdot \arctan h(\alpha) - c_1 \tanh\left(\alpha \frac{c_2}{m_2}\right) \right)} \right) \quad (3.42)$$

Luego, $A_p^{(1)} < 0$, entonces la aplicación es estable hacia el punto tangente. En conclusión la órbita periódica es estable alrededor de T_{F_1} . Este punto comúnmente se conoce como *foco difuso* (ver Figura 3.9).

Cuando $b_2 > 0$ y $\left| \frac{b_2}{c_2} - \alpha \right| < 1$; se crean dos puntos tangentes donde se ubica la región de “Escaping”, siendo:

$$T_{F_1} = \left(-\operatorname{arc\,tanh}(\alpha), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right) \text{ y } T_{F_2} = \left(\operatorname{arc\,tanh}\left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha\right), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right) \quad (3.43)$$

Tal como se observa esquemáticamente en la Figura 3.10.

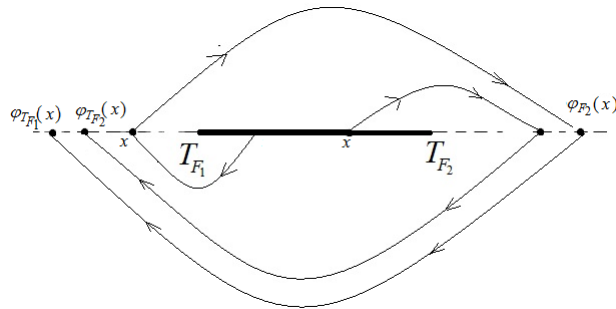


Fig. 3.10. Aplicaciones de retorno alrededor de T_{F_1} (denotado $\varphi_{T_{F_1}}(x)$) y T_{F_2} (como $\varphi_{T_{F_2}}(x)$)

Se conserva la misma definición de la aplicación de retorno y la estabilidad de $\varphi_{T_{F_1}}(x)$ para $x < -\operatorname{arc\,tanh}(\alpha)$; solo queda por mostrar cual es la estabilidad de dicha aplicación cuando:

$$x \in \sum_{Escaping} \text{ donde } \sum_{Escaping} = \left(-\operatorname{arctan} h(\alpha), \operatorname{arc\,tanh}\left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha\right) \right) \quad (3.44)$$

Esta órbita tendrá la estabilidad según la siguiente aplicación: $\varphi_{T_{F_2}}(x) = \varphi_{F_1} \circ \varphi_{F_2}(x)$ para $x \in \sum_{Escaping}$ siendo dada por:

$$\varphi_{T_{F_2}}(x) = \operatorname{arc\,tanh}\left(\frac{b_2 - \alpha}{c_2}\right) + \left(x - \operatorname{arc\,tanh}\left(\frac{b_2 - \alpha}{c_2}\right)\right) + A_p^{(2)}(T_{F_2}) \left(x - \operatorname{arc\,tanh}\left(\frac{b_2 - \alpha}{c_2}\right)\right)^2 + O\left(\left(x - \operatorname{arc\,tanh}\left(\frac{b_2 - \alpha}{c_2}\right)\right)^3\right) \quad (3.45)$$

$$A_p^{(2)}(T_{F_2}) = -\frac{2}{3}(m_1 + m_2) \left(\frac{-b_1}{\left(b_1 - m_1 \cdot \operatorname{arc\,tanh}\left(\frac{b_2 - \alpha}{c_2}\right) - c_1 \tanh\left(\alpha \frac{c_2}{m_2}\right)\right) \left(m_1 \cdot \operatorname{arc\,tanh}\left(\frac{b_2 - \alpha}{c_2}\right) + c_1 \tanh\left(\alpha \frac{c_2}{m_2}\right)\right)} \right) \quad (3.46)$$

En consecuencia, utilizando los resultados ya comprobados, se prueba que $A_p^{(2)}(T_{F_2}) > 0$, entonces dicha órbita es inestable, por consiguiente hay una órbita periódica aislada en la zona de *Crossing*. Esto implica que existe una bifurcación en $b_2 = 0$ (Kuznetsov et al., 2003). Para más detalles véase el anexo 4.

3.5.2 Bifurcación *Boundary-Node*

Para encontrar la posible *colisión en la frontera* (di Bernardo et al., 2008) se debe considerar lo siguiente:

Definiendo $F_2 = \begin{pmatrix} P_2 \\ Q_2 \end{pmatrix}$ bajo un valor del parámetro $b = b_*$ y un equilibrio \vec{x}_* , debe cumplirse:

$$1. F_2(\vec{x}_*, b_*) = 0, \text{ o bien } P_2(\vec{x}_*, b_*) = 0 \text{ y } Q_2(\vec{x}_*, b_*) = 0 \quad (3.47)$$

$$2. H(\vec{x}_*, b_*) = 0 \quad (3.48)$$

$$3. \det(J_x(F_2(\vec{x}_*, b_*))) = \begin{vmatrix} (P_2)_x & (P_2)_y \\ (Q_2)_x & (Q_2)_y \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3.49)$$

Lo que quiere decir que existe un equilibrio \vec{x}_* del campo vectorial F_2 que está por encima de la zona de conmutación y que colisiona contra la superficie de conmutación al variar el parámetro b_2 .

Se verifica que al hacer la variación de parámetro b (del sistema de la Tabla 3.2), de tal manera que cuando $b_2 = c_2(\alpha + 1) = b_*$, existen equilibrios \vec{x}_* , que cumplen las tres condiciones anteriores. Dichos equilibrios garantizan que:

$$1. \begin{cases} 0 = b_1 - m_1 x_* - c_1 \tanh(y_*) \\ 0 = b_2 - m_2 y_* - c_2 \tanh(x_*) \end{cases} \quad (3.50)$$

$$2. H(\vec{x}_*, b_*) = y_* - \frac{\alpha c_2}{m_2} = 0 \quad (3.51)$$

$$3. \det(J_x(F_2(\bar{x}_*, b_*))) = \begin{vmatrix} -m_1 & -c_1 \sec h(y_*) \\ -c_2 \sec h(x_*) & -m_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3.52)$$

Por otro lado, nótese que:

$$\frac{\alpha c_2}{m_2} > 1 \text{ si y solamente si } b_2 > c_2 + m_2. \quad (3.53)$$

Al tomar en cuenta el valor de la superficie de conmutación, el valor de b y la hipótesis:

$$y_* = \frac{\alpha c_2}{m_2} = \frac{b_2 - c_2}{m_2} > 1. \quad (3.54)$$

Luego, sobre la Ecuación (3.50) se tiene que $0 = b_1 - m_1 x_* - c_1 \tanh(y_*) \approx b_1 - m_1 x_* - c_1$ porque $\tanh(y_*) \sim 1$. Entonces $x_* = \frac{b_1 - c_1}{m_1} > 1$, así el equilibrio $\bar{x}_* = \left(\frac{b_1 - c_1}{m_1}, \frac{b_2 - c_2}{m_2} \right)$ cumple las primeras dos condiciones. Ahora se verifica la última condición:

$$\det(J_x(F_2(\bar{x}_*, b_*))) = \begin{vmatrix} -m_1 & -c_1 \sec h^2(y_*) \\ -c_2 \sec h^2(x_*) & -m_2 \end{vmatrix} = m_1 m_2 - c_2 c_1 \sec h^2(x_*) \sec h^2(y_*) \quad (3.55)$$

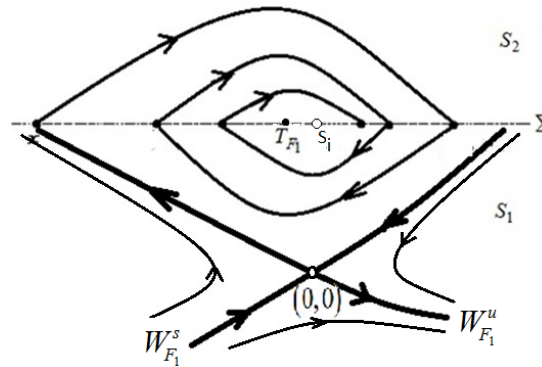
Pero, $\sec h(x_*) \sim 0$ y $\sec h(y_*) \sim 0$, mostrando que $\det(J_x(F_2(\bar{x}_*, b_*))) > 0$, cumpliéndose así la tercera condición. Por lo demostrado en Liebovitch et al. (2008) sobre la estabilidad de este sistema, análogamente se demuestra que en \bar{x}_* hay un nodo estable en F_2 .

3.6 Bifurcaciones Globales: Intervención del medio

Las bifurcaciones globales se presentaron en el sistema a consecuencia de la variación de los parámetros α y b_2 . Tomando un valor fijo de α (superior a 0.5) y al variar b_2 , se presentaron conexiones homoclínicas no suaves en $b_2 = 0$ y conexiones heteroclínicas no suaves en $b_2 = c_2(\alpha + 1) = b_*$. Por el hecho que el campo inferior a la superficie de conmutación tiene un punto silla en $(0,0)$, entre los campos vectoriales las órbitas cruzan la superficie. Los diferentes casos encontrados se ilustran esquemáticamente en la Tabla 3.10.

Tabla 3.10. Casos de bifurcaciones globales: intervención del medio

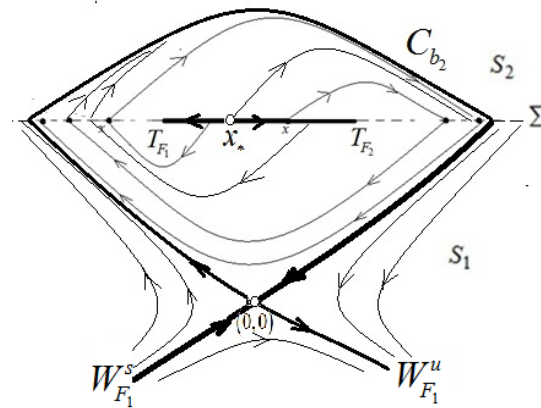
Cuando $b_2 = 0$ aparecen órbitas periódicas alrededor de un punto tangente formando un foco difuso (*fused-focus*), junto con un punto singular ($\mathcal{L}_{F_1-F_2}H = 0$) en $x=0$



Para $b_2 > 0$ siendo

$$\left| \frac{b_2}{c_2} - \alpha \right| < 1, \text{ se genera un ciclo}$$

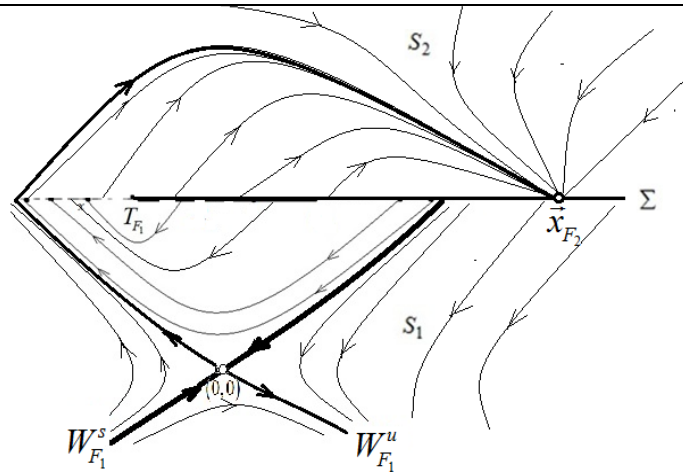
homoclínico no suave, uniendo la variedad estable $W_{F_1}^s$ y la variedad inestable $W_{F_1}^u$ del campo inferior.



Para $b_2 > 0$ siendo

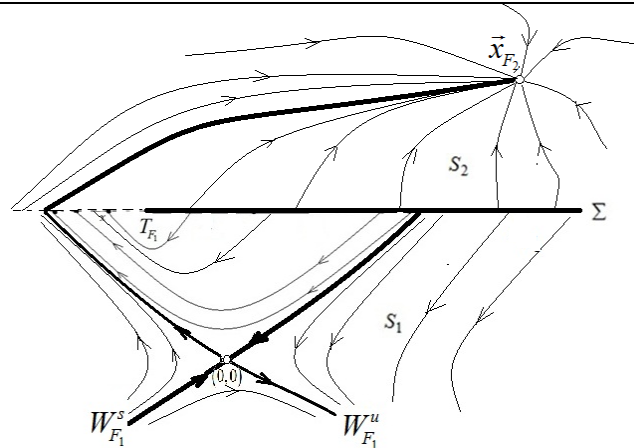
$$\frac{b_2}{c_2} - \alpha = 1, \text{ cambia}$$

catastróficamente la conexión homoclínica a heteroclínica.



Para $b_2 > 0$ siendo

$\frac{b_2}{c_2} - \alpha > 1$, se mantiene dicha
conexión entre equilibrios.



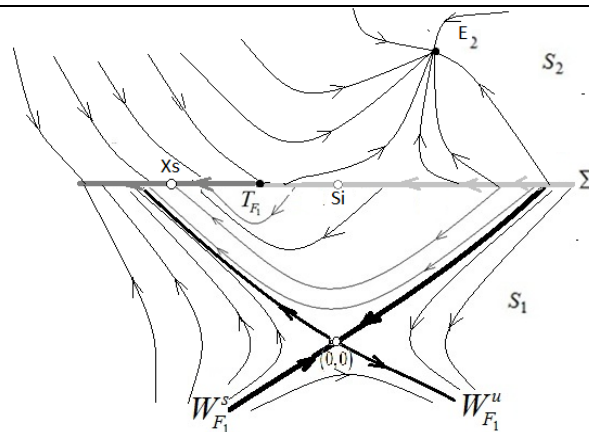
3.7 Bifurcaciones Locales y Globales: Intervención del medio y de las afectaciones

Suceden bifurcaciones no suaves de forma análoga a las presentadas anteriormente, pero presentándose tanto colisiones de equilibrios, como colisiones de puntos tangentes sobre la superficie de conmutación. Aunque la colisión de equilibrios no es de interés para la explicación del modelo, ya que no hay órbitas periódicas, ocurre una colisión de un punto tangente visible con uno invisible (*fold-fold bifurcation*, Guardia et al. 2011) variando el parámetro b_2 . Esta variación es de interés para representar una bifurcación global, tal como la conexión heteroclínica que sufre el modelo cuando dicho parámetro de flujo de influencia sobre el actor ("y") aumente, al tomar un valor fijo de α (superior a 0.5). Los diferentes casos encontrados se ilustran esquemáticamente en la Tabla 3.11.

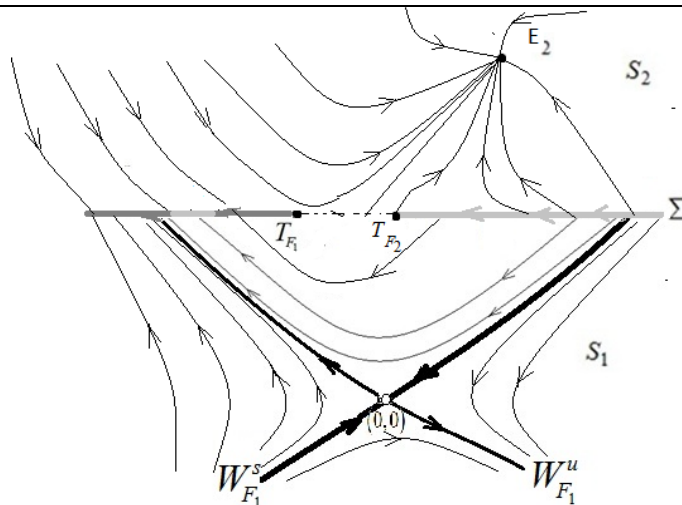
Cuando la intervención es completa en ambos actores se llega a situaciones equivalentes al realizar la misma clase de análisis, dado que este caso posee las mismas zonas de deslizamiento dentro de la superficie de conmutación. Cabe destacar que de forma análoga a lo presentado, se encontró los mismo tipos de bifurcaciones para $\alpha < 0.5$.

Tabla 3.11. Casos de bifurcaciones globales y locales: intervención del medio y de las afectaciones.

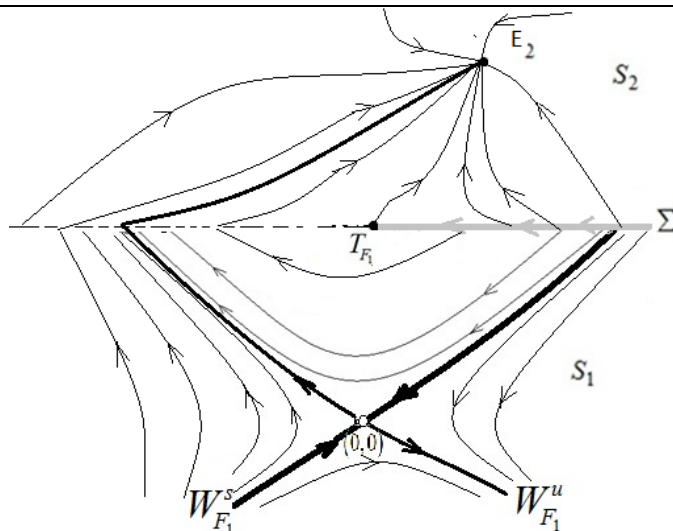
Cuando $b_2 = 0$ aparecen órbitas con deslizamiento estable antes del punto tangente invisible T_{F_1}



Para $b_2 > 0$, siendo $1 > \frac{b_2 - \alpha c_2}{c_1 - c_2} \geq -1$, hacen la aparición dos puntos tangentes: uno invisible (T_{F_1}) y otro visible (T_{F_2} .)



Para $b_2 > 0$, siendo $\frac{b_2 - \alpha c_2}{c_1 - c_2} \geq 1$, cambia catastróficamente la conexión a heteroclínica (si $\frac{b_2 - \alpha c_2}{c_1 - c_2} = 1$) y se mantiene para valores cada vez más grandes de b_2 .



3.8 Conclusiones

Se aplicó la teoría de dinámica de sistemas para la modelación del problema de conflicto, usando los diagramas causales y los diagramas de niveles y flujos. Esto condujo a la formulación de un modelo que incluye: influencia positiva del medio, inercia de los actores y los niveles de afectación entre ellos.

Se propuso un indicador de intervención del mediador en el conflicto. Para que un conflicto sea considerado como intratable, se requiere que los actores tengan una afectación positiva del medio que sea despreciable. Se identificó a la superficie de conmutación del sistema no suave como la zona de intervención del mediador. Con ello se definió que solo son posibles dos tipos de intervenciones: iintervención del medio y la intervención combinada del medio y de las afectaciones entre los actores.

Se efectuó el análisis de los sistemas no suaves obtenidos mediante la teoría de sistemas de Filippov, lo que permitió obtener expresiones para las zonas de deslizamiento y los puntos tangentes en los dos casos de intervención. También se realizó el análisis de los tipos de bifurcaciones globales y locales presentes en el sistema, encontrándose bifurcaciones Fold-Fold y Boundary-Node.

En el caso de la intervención del medio se pudo observar que al aumentar el valor de b_2 , tal que $b_2 < (\alpha + 1)c_2$ (siendo α un valor fijo superior a 0.5), ocurren órbitas periódicas. Esto a su vez puede interpretarse en términos del problema de conflicto intratable entre dos actores, diciendo que si el actor que posee un impacto emocional más positivo (el actor "y"), (siendo α un valor fijo superior a 0.5) (nivel de intratabilidad del conflicto), la conducta de ambos actores puede transformarse en un bucle desestabilizador. Solo cuando $b_2 = (\alpha + 1)c_2$ la evolución del impacto emocional de los actores es positiva bajo la superficie de intervención.

En el caso de la intervención del medio y la afectación de los actores, se observó que cuando al actor "y" se le intervino su retroalimentación negativa y se mejoró su influencia del ambiente, existe la posibilidad de que no se resuelva el conflicto, dependiendo de la afectación c_1 y la influencia del medio, más no del parámetro de intervención α . Esto se debe a que las zonas de conmutación generan deslizamientos. La interpretación en términos del problema de conflicto es que el actor x quiere mejorar su impacto emocional, pero esto puede consumir demasiado tiempo. Solo cuando $b_2 = \alpha c_2 + (c_1 - c_2)$ la competición evoluciona de manera exitosa para ambas partes.

4. Simulaciones del sistema dinámico y análisis del problema del conflicto

4.1 Introducción

En el presente capítulo se presentan las simulaciones de los retratos de fase de los modelos matemáticos no suaves planteados en el capítulo tres para el problema del conflicto entre dos actores. Los algoritmos aplicados para éstas simulaciones se basan en lo propuesto por Piironen (2008), los cuales fueron codificados en el software MatLab[®]. Se realizan variaciones del parámetro de la influencia del medio para el actor y , con el objeto de evaluar la influencia de la mediación con el actor más hostil sobre la dinámica y los equilibrios del sistema. Se realiza una descripción de las bifurcaciones del sistema y se elaboran consideraciones interpretativas acerca de las dinámicas del problema del conflicto entre dos actores con intervención del mediador para diferentes escenarios.

4.2 Simulación de retratos de fase: Intervención del medio

Basándose en Tabla 3.2, supóngase un escenario de conflicto intratable entre dos actores, donde la influencia del medio es cercana a cero (despreciable), tomando los parámetros $m_1 = 0.5$, $m_2 = 0.3$, $c_1 = 2$, $c_2 = 3$. El análisis con el parámetro de intervención α se supondrá no intencionado, dado que el mediador no está siendo árbitro del conflicto sino actuando para generar condiciones favorables, de tal forma que la propia competición de los actores sea atenuada por una influencia positiva, que será medida como una estimulación positiva del mediador al actor más hostil.

Para ello considérese que α es la *Proporción relativa del flujo emocional de salida del actor sobre la afectación del otro* ($\alpha < 1$). Esto se puede interpretar como el porcentaje de intratabilidad u hostilidad del sistema para la intervención, lo que significa que si $\alpha = 1$, el conflicto debido a la competición jamás podrá ser resuelto y podrá tornarse destructivo, si $\alpha = 0.7$ el nivel de intratabilidad es alto, si $\alpha = 0.3$ el nivel de intratabilidad es bajo. Los análisis aquí efectuados toman la intratabilidad de moderada a alta ($\alpha > 0.5$) y de baja a moderada ($\alpha < 0.5$)

4.2.1 Conflicto intratable moderado a alto ($\alpha > 0.5$) Refiriéndose a la Figura 4.1, se fijó como condición inicial $x = -2.59$, $y = 2.76$. De acuerdo a lo estudiado en los capítulos previos, el impacto emocional del actor x va a empeorar y el de el actor y va a llegar a su máximo valor.

Por ende, el mediador influye de manera indirecta, es decir toma un nivel de intratabilidad del 60% ($\alpha = 0.6$), y si influencia positivamente al actor x ($b_1 = 5$), se analizan las siguientes dinámicas después de superar el umbral de la superficie de conmutación (intervención), al hacer la variación uni-paramétrica de la influencia del actor que está sometiendo hostilmente al otro, al variar el parámetro b_2 :

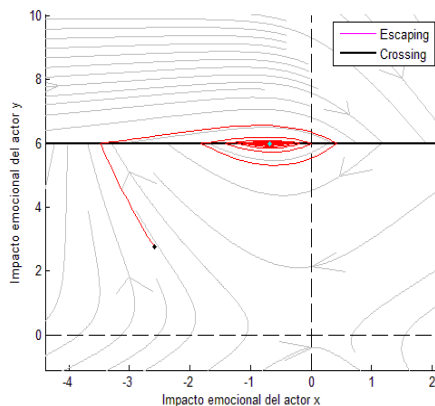
$b_2 = 0$: Bajo ese nivel de intratabilidad del sistema, el actor que somete no reconoce la influencia positiva que hace el mediador al actor más débil, lo que atenúa el conflicto pero lo hace más duradero, ocasionando órbitas periódicas estables en un punto (foco difuso).

$b_2 = 3$: Nótese que para este valor ($b_2 < (\alpha + 1)c_2$) el conflicto se vuelve indefinible en su estabilidad asintótica, es decir el impacto emocional de los actores se vuelve una situación cíclica, oscilatoria, donde no hay perdedor ni ganador, pero desestabilizante.

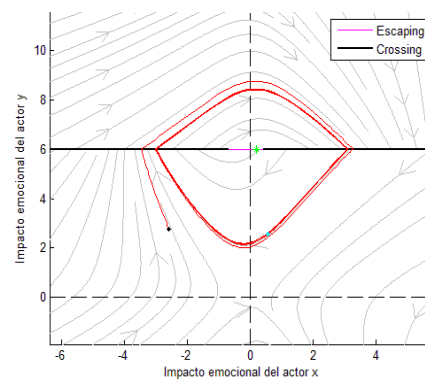
$b_2 = 4.8$: ($b_2 = (\alpha + 1)c_2$) Aquí hay un cambio catastrófico en las órbitas pero beneficioso para ambos actores, dado que aunque la competición está presente, la influencia del medio los impacta de manera positiva, de tal forma que el conflicto intratable llega a su fin.

$b_2 = 6$: ($b_2 > (\alpha + 1)c_2$) El conflicto intratable se torna en una resolución completa del conflicto, dado que se unen dos equilibrios de ambos campos.

En la última gráfica de la Figura 4.1 se aprecia el diagrama de continuación del parámetro b_2 contra sus puntos tangentes, sus pseudoequilibrios y el cruce de las variedades estables e inestables. En esta gráfica se puede apreciar en las líneas negras el corte de las variedades que inducen la conexión homoclinica no suave. Las líneas azules representan la continuación de los puntos tangentes. Por último, la línea roja rrepresenta la continuación de los equilibrios del sistema de Filippov (conocidos como pseudoequilibrios). Nótese la creación de la órbita periódica en $b_2 = 0$ y su posterior desaparición catastrófica en $b_2 = 4.8$.



$b_2=0$



$b_2=3$

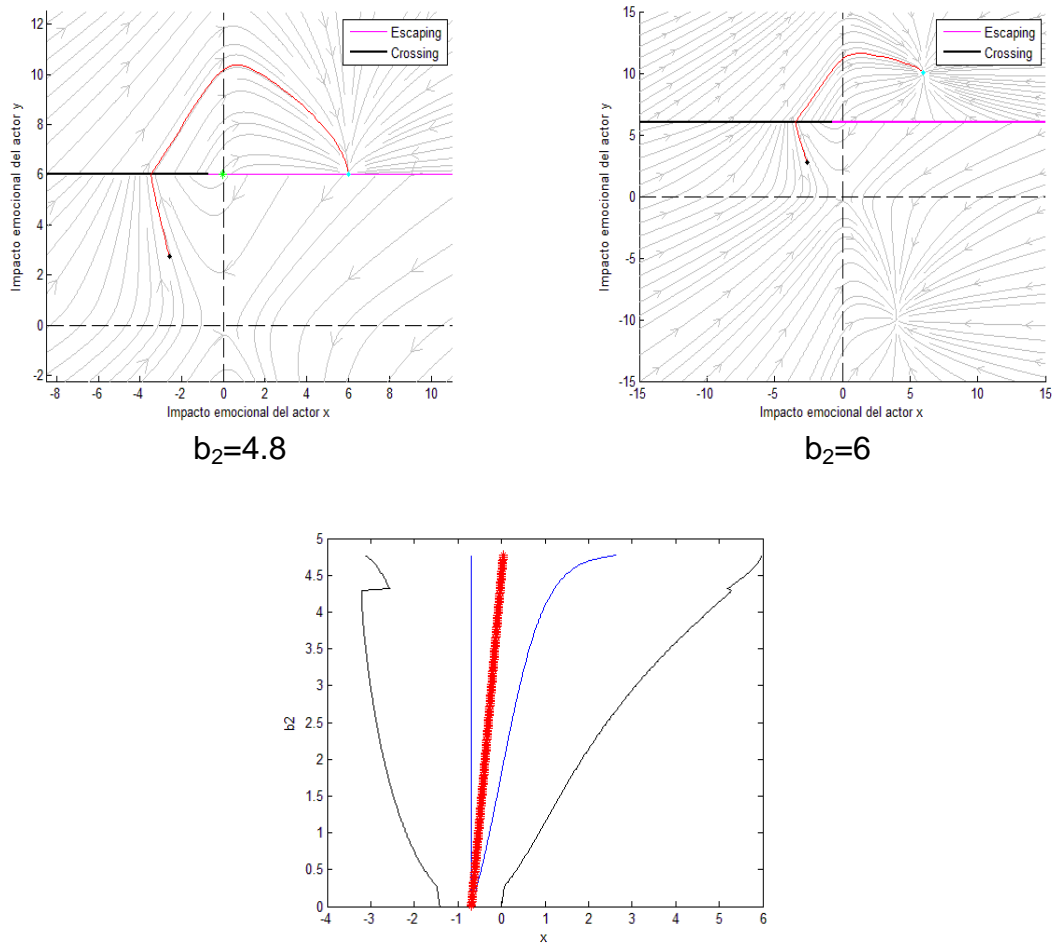


Diagrama de continuación de pseudoequilibrios (en rojo), puntos tangentes (en azul) y la colisión de las variedades (en negro)

Fig. 4.1. Retratos de fase y diagrama de continuación para el conflicto intratable moderado a alto.

4.2.2 Conflicto intratable bajo a moderado ($\alpha < 0.5$).

Refiriéndose a la Figura 4.2, se utilizó $x = -2$, $y = 2$ (cuando $\alpha = 0.3$) haciéndose el mismo análisis de 4.2.1, como sigue:

$b_2 = 0$: Aunque el nivel de intratabilidad del sistema es bajo, el actor que somete no reconoce la influencia positiva y prosigue en la misma situación cíclica.

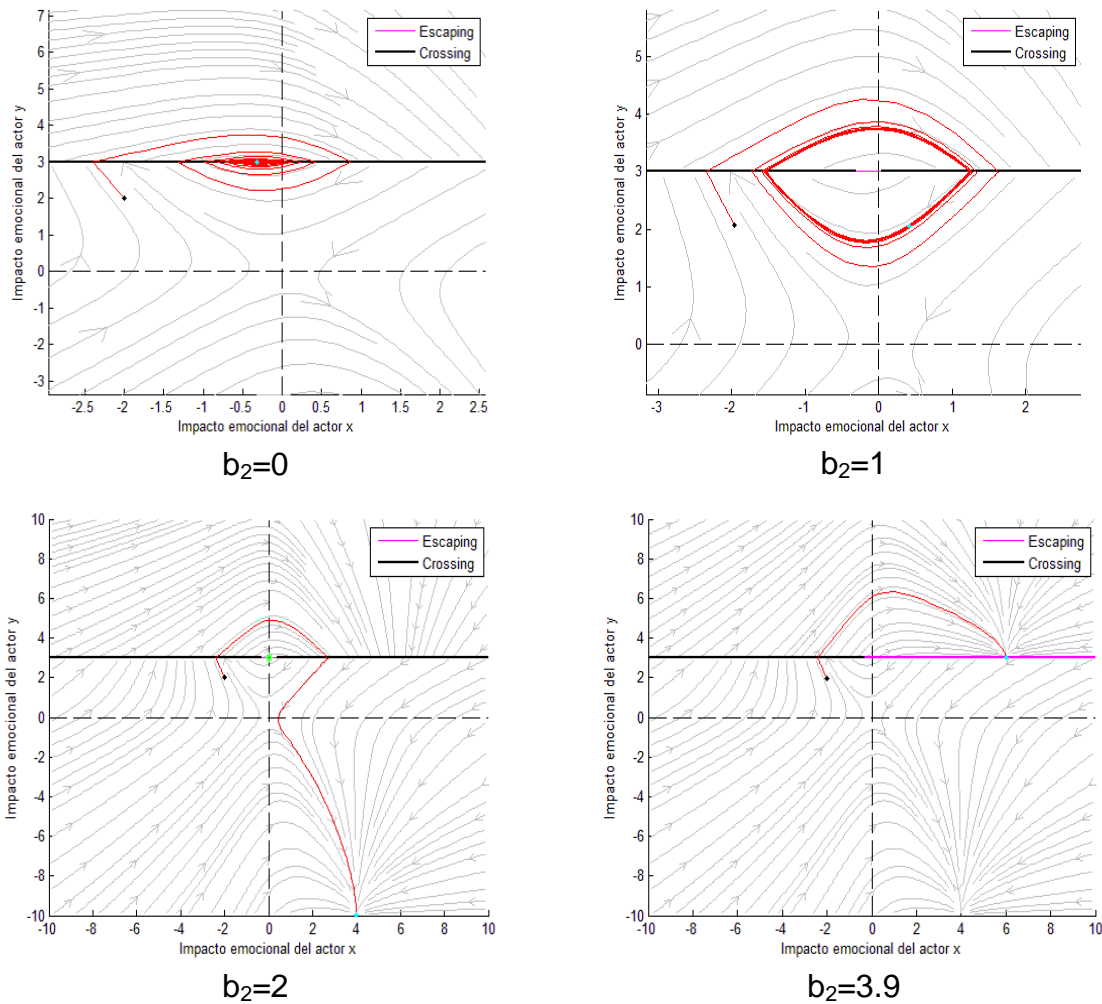


Fig. 4.2. Retratos de fase y diagrama de continuación para el conflicto intratable bajo a moderado.

$b_2 = 1$: Se repite la periodicidad, eso quiere decir que el conflicto así intervenido en bajos niveles de intratabilidad puede ser cíclico de forma desestabilizante.

$b_2 = 2$: La competición se torna en una situación de conflicto intratable al cambiar de roles. Esto se debe a que hay conexiones entre las variedades estables e inestables, produciendo la necesidad de intervenir al actor x. Es decir, es posible que en un conflicto en el que alguno de los actores fuera un posible perdedor, tome la ventaja sobre el rival.

$b_2 = 3.9$: Después de ocurrir lo anterior, al aumentar el parámetro (nótese que $b_2 < b_1$) se observa que en un conflicto intratable, cuando el nivel de intratabilidad es bajo, el flujo de la influencia del medio al actor más fuerte o más hostil, puede ser menor que el que se le debe dar al más débil.

4.3 Simulación de retratos de fase: Intervención del medio y de las afectaciones

Basándose en Tabla 3.2, en éste escenario se procedió tomando como condición inicial $x = -2$, $y = 2$, y tomando el sistema intratable con los mismos parámetros de la sección anterior $m_1 = 0.5$, $m_2 = 0.3$, $c_1 = 2$, $c_2 = 3$. En la intervención del medio y de las afectaciones, la retroalimentación del actor y va a ser atenuada por una afectación positiva ($c_1 = 3.5$) del mediador. $b_1 = 2.3$ para el actor x y para el actor y se estudia la variación de parámetros de la influencia del medio b_2 .

4.3.1 Conflicto intratable moderado a alto ($\alpha > 0.5$)

Este modelo aparece con retroalimentaciones positivas de las afectaciones de los actores, logrando atenuar aquí la afectación del actor hostil y del medio (se interviene solo y). Refiriéndose a la Figura 4.3, supóngase $\alpha = 0.6$, entonces se tiene que:

$b_2 = 0$: Bajo ese nivel de intratabilidad del sistema el actor que somete, no reconoce la influencia positiva que hace el mediador al actor más débil, lo que atenua el conflicto.

$b_2 = 1.8$: El sistema pasa un tiempo muy prolongado sobre la superficie de conmutación. Hay un deslizamiento estable; lo que ocurre es que el actor y trata de estabilizar su impacto emocional dentro de la superficie de intervención, pero el conflicto no se resuelve.

$b_2 = 2.3$: Para este valor se presenta un cambio sin contratiempo, dado que la afectación del mediador más la influencia del medio impacta positivamente sobre ambos actores. Nótese que dicho conflicto tiene su resolución en este escenario cuando $b_2 > c_2(\alpha + 1) - c_1$.

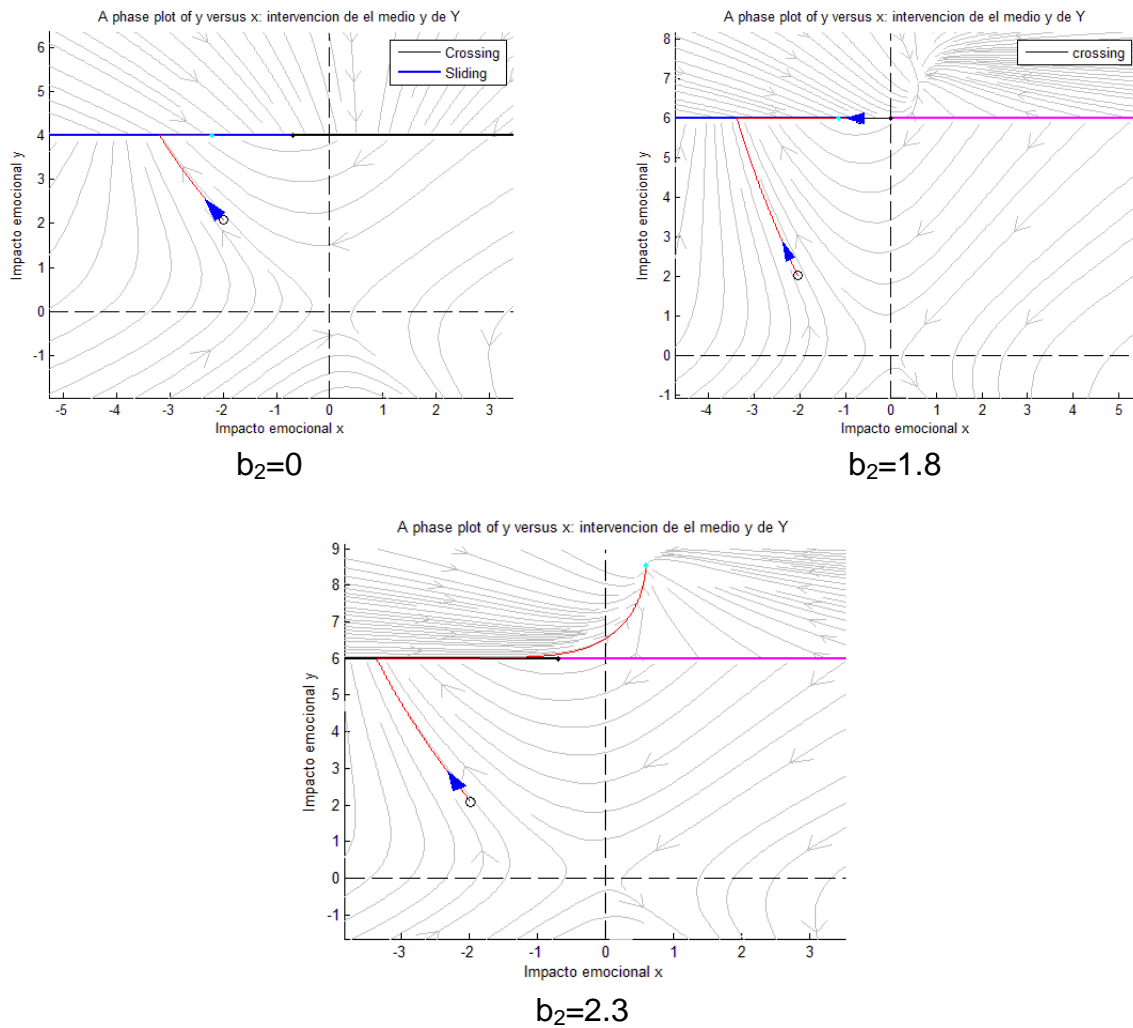


Fig. 4.3. Retratos de fase para el conflicto intratable con intervención del medio y de las afectaciones para un conflicto intratable moderado a alto.

4.3.2 Conflicto intratable bajo a moderado ($\alpha < 0.5$)

Este caso representa un nivel de intervención a menos del 50 por ciento de su intratabilidad ($\alpha = 0.3$). Los resultados son los mismos que los obtenidos en la sección precedente, solo que se presenta más rápidamente la conexión heteroclínica entre los equilibrios. Refiriéndose a la Figura 4.4, supóngase $\alpha = 0.3$, entonces se tiene que:

$b_2 = 0$: El actor más hostil no reconoce la influencia positiva que hace el mediador al actor más débil, lo que atenúa el conflicto.

$b_2 = 1.4$: Hay una fácil resolución del conflicto, no hay superficie de deslizamiento.

$b_2 = 2.3$: Se refuerza el impacto positivo debido a las afectaciones positivas del mediador.

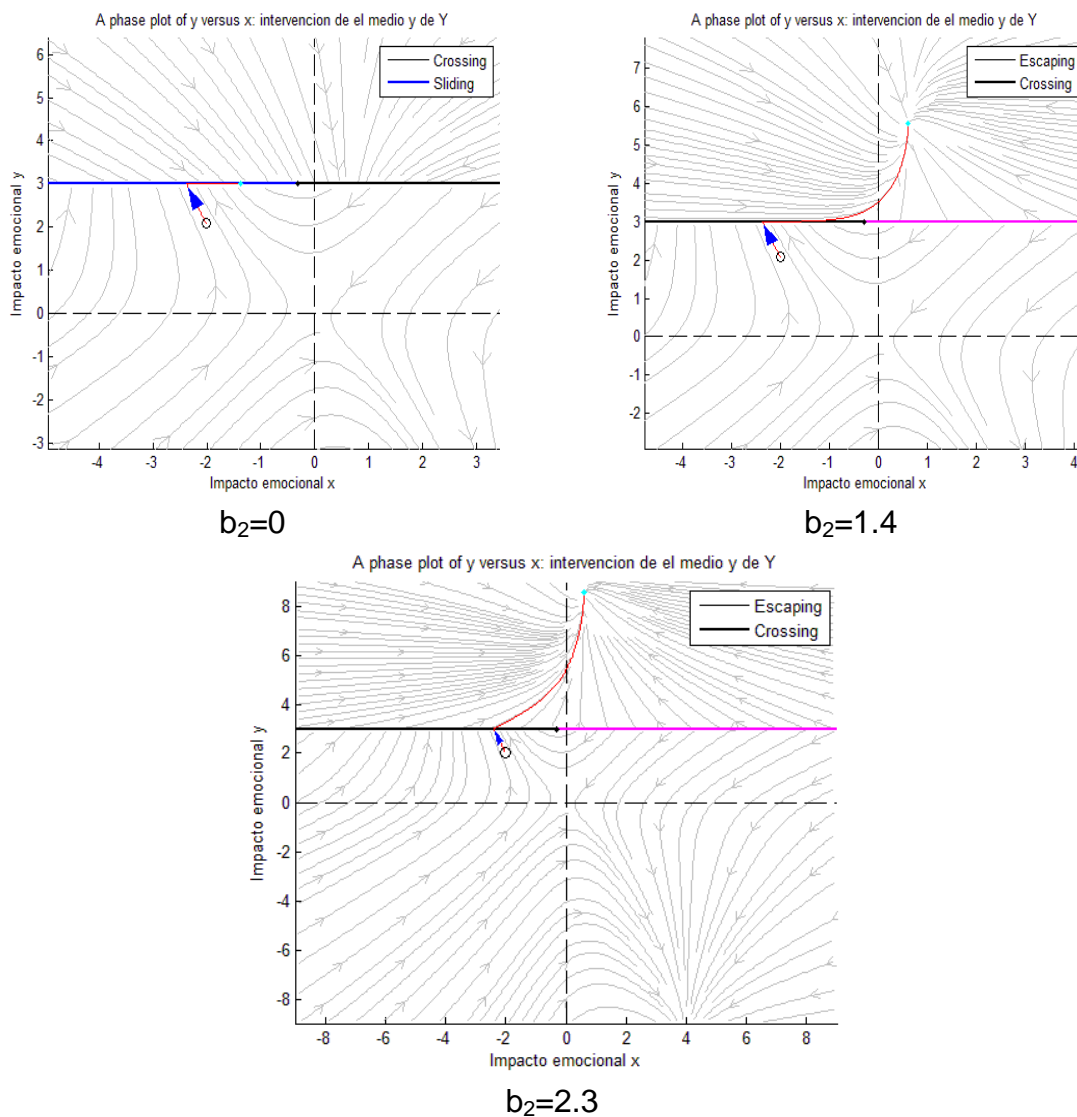
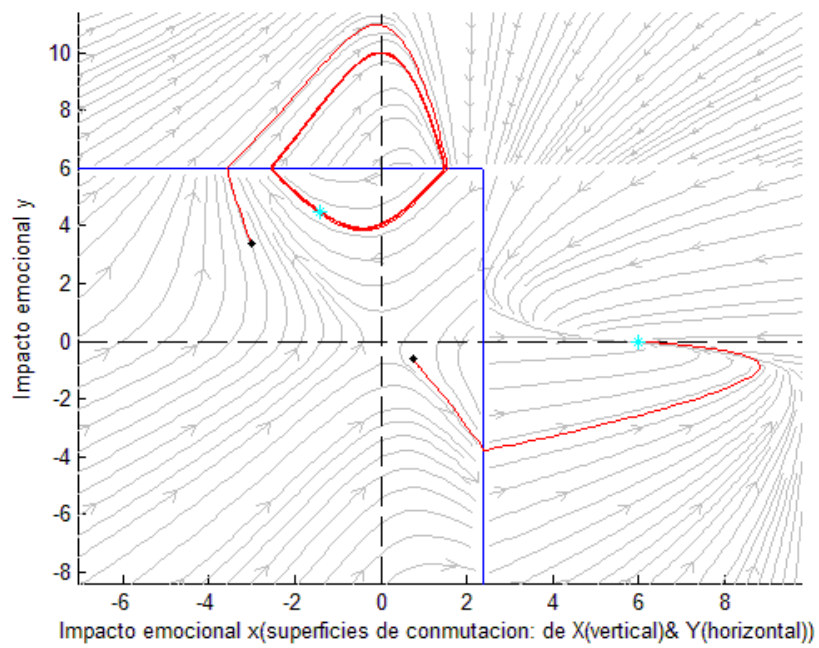


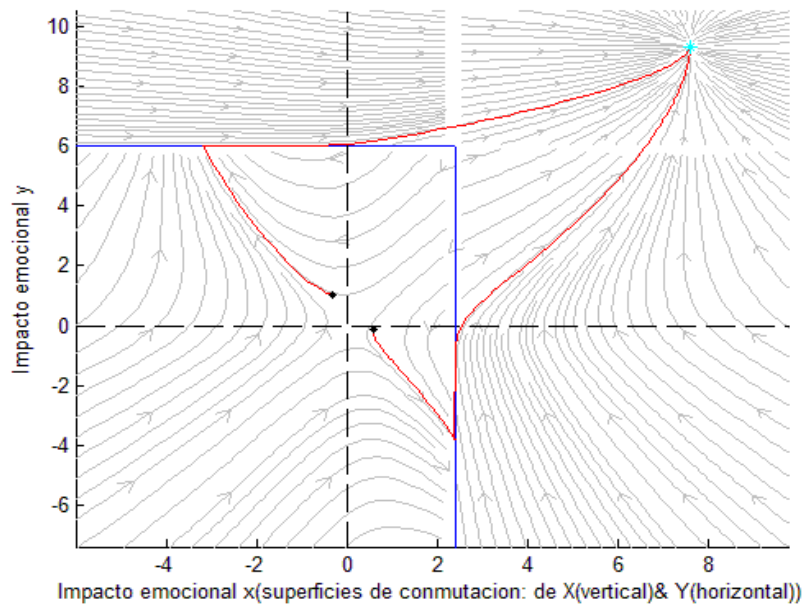
Fig. 4.4. Retratos de fase para el conflicto intratable con intervención del medio y de las afectaciones para un conflicto intratable bajo a moderado.

4.3.3 Conflicto intratable a intervención completa

Para los sistemas definidos con intervención completa, se presentan los resultados obtenidos en la Figura 4.5. Se aprecia que se presentan las mismas características de los escenarios anteriores, con la diferencia de que para intervenir completamente a los dos actores de un conflicto, la influencia del medio ($b_1=b_2$) debe ser la misma.



Intervención conjunta del medio ($\alpha > 0.5$), $b_1=b_2=3$



Intervención conjunta del medio y las afectaciones:
 $b_1=b_2=2.3$ y $C_1=3.5$

Fig. 4.5. Retratos de fase para el conflicto intratable con intervención completa

5.Recomendaciones para el trabajo a futuro

Como recomendaciones para continuar con esta investigación en una etapa posterior, se presentan las siguientes sugerencias:

- El estudio teórico aquí realizado podría ser validado experimentalmente utilizando un caso de estudio real de conflicto. Por ejemplo, empleando parejas sentimentales sometidas a algún tipo de encuesta o entrevista que permita medir el nivel de bienestar durante su interacción. Para ello se requerirá utilizar la Estadística del Diseño de Experimentos.
- Realizar un análisis exhaustivo de los sistemas de Filippov para tres o más actores en competición. Aunque el fenómeno de competición ya tiene carácter complejo, en los sistemas de tres o más dimensiones, la concepción de simetría que se ha estudiado hasta ahora, puede que ya no exista. Como problema abierto se requiere encontrar una metodología de intervención que permita predecir eficazmente la evolución del impacto emocional de los actores. Un ejemplo de dicho problema es el siguiente:

Siguiendo el modelo de Liebovitch et al (2008), se puede proponer que el peor escenario de competición que se pudiera tener entre tres actores en un ambiente controlado estaría dado por el modelo:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -m_1x - c_{12} \tanh(y) - c_{13} \tanh(z) \\ \frac{dy}{dt} &= -m_2y - c_{21} \tanh(x) - c_{23} \tanh(z) \\ \frac{dz}{dt} &= -m_3z - c_{31} \tanh(x) - c_{32} \tanh(y)\end{aligned}$$

Siendo c_{ij} las afectaciones de los actores y m_i las inercias de cada uno. Si suponemos que el actor "z" está en una posición de ventaja respecto a los actores, la proporción α

$$\frac{m_3z}{c_{31} + c_{32}} = \frac{\text{Flujo Emocional Saliente del Actor } z}{\text{Flujo de Afectación de los Actores } x \text{ \& } y \text{ sobre el Actor } z} = \alpha$$

se puede definir como la proporción del flujo emocional sobre la sumas de las afectaciones de los otros actores. Induciendo la superficie de conmutación:

$$z = \frac{\alpha(c_{31} + c_{32})}{m_3}$$

Por lo tanto, la pregunta fundamental a responder sería: ¿cuál será la mejor estrategia de intervención completa, que permita a los actores evolucionar hacia un estado “eficaz” en sus impactos emocionales?

6.Anexos

Anexo 1. Jacobiano de un sistema Planar

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y)\end{aligned}\tag{A1.1}$$

$$J_x(F) = \begin{pmatrix} (P)_x & (P)_y \\ (Q)_x & (Q)_y \end{pmatrix}\tag{A1.2}$$

Anexo 2. Análisis de puntos tangentes: intervención en el medio

En base a lo ilustrado en subsecciones 2.3.5, 2.3.6 del capítulo 2 , subsecciones 3.4.1 y 3.4.2 del capítulo 3.

Los puntos tangentes son los valores sobre la superficie de conmutación

$$y = \frac{\alpha c_2}{m_2} ; H(x, y) = y - \frac{\alpha c_2}{m_2} = 0 \quad (\text{A2.1})$$

tales que

$$\text{Para el campo } F_1 \text{ (debajo de la superficie de conmutación): } \mathcal{L}_{F_1} H = 0. \quad (\text{A2.2})$$

$$\text{Para el campo } F_2 \text{ (arriba de la superficie de conmutación): } \mathcal{L}_{F_2} H = 0. \quad (\text{A2.3})$$

Aplicando la definición de $\mathcal{L}_F H = \langle F, \nabla H \rangle$ en el campo F_1 definido en la Tabla 3.2

$$\mathcal{L}_{F_1} H(x, y) = -m_2 y - c_2 \tanh(x) = 0 \quad (\text{A2.4})$$

reemplazando el valor y de (A2.4). obtenemos despejando x :

$$x = -\arctan h(\alpha) \text{ dado que } \alpha < 1 \quad (\text{A2.5})$$

Entonces el punto tangente para F_1 estará en la coordenada.

$$T_{F_1} = \left(-\text{arc tanh}(\alpha), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right) \quad (\text{A2.6})$$

Similarmente, haciendo el proceso para F_2 , se obtiene :

para $\left| \frac{b_2}{c_2} - \alpha \right| < 1$, existe un punto tangente en

$$x = \text{arc tanh} \left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha \right) \quad (\text{A2.7})$$

, es decir, en la coordenada

$$T_{F_2} = \left(\operatorname{arc\,tanh} \left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha \right), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right) \quad (\text{A2.8})$$

Para demás variaciones de parámetro de b_2 tales que $\left| \frac{b_2}{c_2} - \alpha \right| \geq 1$ existe punto tangente

$$T_{F_2} = \left(-\operatorname{arc\,tanh}(\alpha), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right) \quad (\text{A2.9})$$

Se presenta a continuación la verificación si puntos tangentes visibles o invisibles (cuadráticos).

Recordando la definición 2.3.6 del cap.2 :

Un punto tangente es invisible (visible) cuadrático en S_1

$$\mathcal{L}_{F_1}^2 H > 0 \quad (\mathcal{L}_{F_1}^2 H < 0) \quad (\text{A2.10})$$

(esta definición solo sirve para el campo vectorial inferior a la superficie de conmutación)

Donde $\mathcal{L}_F^2 H$ representa la segunda derivada de Lie. Para ello procedemos

$$\mathcal{L}_{F_1}^2 H = \mathcal{L}_{F_1} (\mathcal{L}_{F_1} H) = \langle F_1, \nabla(\mathcal{L}_{F_1}) \rangle \quad (\text{A2.11})$$

siendo $\nabla(\mathcal{L}_{F_1})$ el gradiente de \mathcal{L}_{F_1} .

Recordando lo anterior en (A2.4)

$$\nabla(\mathcal{L}_{F_1}) = (-c_2 \operatorname{sech}^2(x), -m_2) \quad (\text{A2.12})$$

Entonces

$$\mathcal{L}_{F_1}^2 H = -c_2 \operatorname{sech}^2(x) (-m_1 x - c_1 \tanh(y)) - m_2 (-m_2 y - c_2 \tanh(x)) \quad (\text{A2.13})$$

$$\mathcal{L}_{F_1}^2 H(T_{F_1}) = -c_2 \operatorname{sech}^2(-\operatorname{arctan} h(\alpha)) \left(m_1 \operatorname{arctan} h(\alpha) - c_1 \tanh \left(\alpha \frac{c_2}{m_2} \right) \right) \quad (\text{A2.14})$$

Arreglando signos

$$\mathcal{L}_{F_1}^2 H(T_{F_1}) = c_2 \sec h^2(\arctan h(\alpha)) \left(-m_1 \arctan h(\alpha) + c_1 \tanh\left(\alpha \frac{c_2}{m_2}\right) \right) \quad (\text{A2.15})$$

Ahora como el factor que involucra la secante hiperbólica (función par) siempre es positivo, debemos analizar el signo de

$$-m_1 \arctan h(\alpha) + c_1 \tanh\left(\alpha \frac{c_2}{m_2}\right) \quad (\text{A2.16})$$

Para ello es importante a hacer el estudio tomando en cuenta el análisis asintótico, y numérico de las funciones hiperbólicas según el caso.

➤ Caso 1: $\alpha \frac{c_2}{m_2} \gg 1$ donde $c_1 > m_1$ y $c_2 > m_2$, $\alpha < 0.8$

Numéricamente puede observarse que si $\alpha < 0.8$ implica $\arctan h(\alpha) < 1$.

Aplicando ésta condición numérica y las hipótesis

$$-m_1 \arctan h(\alpha) + c_1 \tanh\left(\alpha \frac{c_2}{m_2}\right) > -m_1 + c_1 \tanh\left(\alpha \frac{c_2}{m_2}\right) \approx -m_1 + c_1 > 0 \quad (\text{A2.17})$$

debido a que $\tanh\left(\alpha \frac{c_2}{m_2}\right) \sim 1$, se llega a que (A2.11) es mayor que cero.

➤ Caso2: $\alpha \frac{c_2}{m_2} \leq 1$ donde $c_1 > m_1$ y $c_2 > m_2$

Para este caso de estudio se calcula la expansión asintótica correspondiente

$$-m_1 \arctan h(\alpha) + c_1 \tanh\left(\alpha \frac{c_2}{m_2}\right) = \left(-m_1 + c_1 \frac{c_2}{m_2}\right) \alpha + \mathcal{O}(\alpha^3) \quad (\text{A2.18})$$

Es de notar que $\alpha \leq \frac{m_2}{c_2}$, pero, se supone que la afectación es muy superior que el nivel de

inercia ($\frac{m_2}{c_2} \ll 1$), se concluye entonces que $\alpha \ll 1$. Con esto, queda que los términos en potencias de α tienden a cero

$$-m_1 \arctan h(\alpha) + c_1 \tanh\left(\alpha \frac{c_2}{m_2}\right) \approx \left(-m_1 + c_1 \frac{c_2}{m_2}\right) \alpha \quad (\text{A2.19})$$

No obstante , $-m_1 + c_1 \frac{c_2}{m_2} > -m_1 + c_1 > 0$. En consecuencia (A2.11) es mayor que cero.

En resumen podemos ver que $\mathcal{L}_{F_1}^2 H(T_{F_1}) > 0$, para cualquier variación de parámetro de $\alpha < 0.8$, el punto tangente es invisible en S_1 .

Manteniendo el mismo tipo de planteamiento para S_2 :

El punto tangente T_{F_2} es invisible (visible) cuadrático en S_2 . Si

$$\mathcal{L}_{F_2}^2 H(T_{F_2}) < 0 \quad (\mathcal{L}_{F_2}^2 H(T_{F_2}) > 0) \quad (\text{A2.20})$$

(esta definición solo sirve para el campo vectorial superior a la superficie de conmutación)

Fácilmente se puede verificar que

$$\nabla(\mathcal{L}_{F_1}) = \nabla(\mathcal{L}_{F_2}) \quad (\text{A2.21})$$

Calculando se obtienen dos casos importantes en dos puntos tangentes distintos :

➤ Caso1: $\left| \frac{b_2}{c_2} - \alpha \right| < 1$, $b_1 \geq b_2$, $b_1 \geq m_1 + c_1$, y $T_{F_2} = \left(\text{arc tanh} \left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha \right), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right)$ punto tangente .

El parámetro que involucra la influencia del medio b_2 es superior a las afectaciones entre los actores, no obstante

$$\frac{b_2}{c_2} \geq 1, \text{ entonces } \left| \frac{b_2}{c_2} - \alpha \right| = \frac{b_2}{c_2} - \alpha < 1 \quad (\text{A2.22})$$

numéricamente se puede verificar que para $\frac{b_2}{c_2} - \alpha < 0.8$ ocurre que $\text{arctan} h \left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha \right) < 1$.

Expresando la segunda derivada de Lie $\mathcal{L}_{F_2}^2 H$ y evaluando sobre el punto tangente

$$\mathcal{L}_{F_2}^2 H = -c_2 \sec h^2(x) (b_1 - m_1 x - c_1 \tanh(y)) - m_2 (b_2 - m_2 y - c_2 \tanh(x)) \quad (\text{A2.23})$$

$$\mathcal{L}_{F_2}^2 H(T_{F_2}) = -c_2 \sec h^2 \left(\operatorname{arc} \tanh \left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha \right) \right) \left(b_1 - m_1 \left(\operatorname{arc} \tanh \left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha \right) \right) - c_1 \tanh \left(\alpha \frac{c_2}{m_2} \right) \right) \quad (\text{A2.24})$$

Analizando el signo de

$$\left(b_1 - m_1 \left(\operatorname{arc} \tanh \left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha \right) \right) - c_1 \tanh \left(\alpha \frac{c_2}{m_2} \right) \right) \quad (\text{A2.25})$$

suponiendo $0.5 < \frac{b_2}{c_2} - \alpha < 0.8$:

$$b_1 - m_1 \left(\operatorname{arc} \tanh \left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha \right) \right) - c_1 \tanh \left(\alpha \frac{c_2}{m_2} \right) > b_1 - m_1 - c_1 \tanh \left(\alpha \frac{c_2}{m_2} \right) \quad (\text{A2.26})$$

Pero, la función tangente hiperbólica siempre es acotada en 1 ($\tanh(u) < 1$, para todo $u \in \mathbb{R}$). Así

$$b_1 - m_1 - c_1 \tanh \left(\alpha \frac{c_2}{m_2} \right) > b_1 - m_1 - c_1 > 0 \quad (\text{A2.27})$$

Entonces, haciendo transitividad de la desigualdad

$$\left(b_1 - m_1 \left(\operatorname{arc} \tanh \left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha \right) \right) - c_1 \tanh \left(\alpha \frac{c_2}{m_2} \right) \right) > 0 \quad (\text{A2.28})$$

y como

$$-c_2 \sec h^2 \left(\operatorname{arc} \tanh \left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha \right) \right) < 0 \quad (\text{A2.29})$$

llegamos a que $\mathcal{L}_{F_2}^2 H(T_{F_2}) < 0$. Implica que

$T_{F_2} = \left(\operatorname{arc} \tanh \left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha \right), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right)$ es un punto tangente invisible de F_2 en S_2 .

➤ Caso 2: $\left| \frac{b_2}{c_2} - \alpha \right| \geq 1$, $b_1 > c_1$, $T_{F_2} = \left(-\operatorname{arc} \tanh(\alpha), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right)$

Usando la expresión $\mathcal{L}_{F_2}^2 H$ previamente calculada, reemplazando

$$\mathcal{L}_{F_2}^2 H(T_{F_2}) = -c_2 \sec h^2 \left(-\operatorname{arc} \tanh(\alpha) \right) \left(b_1 + m_1 \cdot \operatorname{arc} \tanh(\alpha) - c_1 \tanh \left(\alpha \frac{c_2}{m_2} \right) \right) - b_2 m_1 \quad (\text{A2.30})$$

Nada mas falta averiguar el signo de

$$\left(b_1 + m_1 \cdot \operatorname{arc} \tanh(\alpha) - c_1 \tanh\left(\alpha \frac{c_2}{m_2}\right) \right) \quad (\text{A2.31})$$

$$b_1 + m_1 \cdot \operatorname{arc} \tanh(\alpha) - c_1 \tanh\left(\alpha \frac{c_2}{m_2}\right) = \left(b_1 - c_1 \tanh\left(\alpha \frac{c_2}{m_2}\right) \right) + m_1 \cdot \operatorname{arc} \tanh(\alpha) \quad (\text{A2.32})$$

Además

$$\left(b_1 - c_1 \tanh\left(\alpha \frac{c_2}{m_2}\right) \right) + m_1 \cdot \operatorname{arc} \tanh(\alpha) > (b_1 - c_1) + m_1 \cdot \operatorname{arc} \tanh(\alpha) > 0 \quad (\text{A2.33})$$

Entonces

$$-c_2 \operatorname{sech}^2(-\operatorname{arc} \tanh(\alpha)) \left(b_1 + m_1 \cdot \operatorname{arc} \tanh(\alpha) - c_1 \tanh\left(\alpha \frac{c_2}{m_2}\right) \right) < 0 \quad (\text{A2.34})$$

De nuevo $\mathcal{L}_{F_2}^2 H(T_{F_2}) < 0$. En conclusión $T_{F_2} = \left(-\operatorname{arc} \tanh(\alpha), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right)$ es un punto tangente invisible para S_2 .

Anexo 3. Análisis del campo de Filippov: intervención del medio

El campo de Filippov será calculado mediante lo visto en 2.3.8 en el Capítulo 2

$$\dot{x} = z(x), \quad x \in \Sigma_{Sliding} \cup \Sigma_{Escaping} \quad (2.30)$$

Donde:

$$z(x) = \frac{F_1 + F_2}{2} + B(x) \left(\frac{F_1 - F_2}{2} \right) \quad (2.31)$$

Y

$$B(x) = - \frac{\mathcal{L}_{F_1+F_2} H}{\mathcal{L}_{F_1-F_2} H}, \text{ es decir, } B(x) = - \frac{\langle \nabla H, F_1 + F_2 \rangle}{\langle \nabla H, F_1 - F_2 \rangle} \quad (2.32)$$

Desarrollando (2.31) y (2.32) sobre la superficie de conmutación y los campos F_1 y F_2

$$B(x) = \frac{-2m_2 y - 2c_2 \tanh(x) + b_2}{b_2} = \frac{-2\alpha c_2 - 2c_2 \tanh(x) + b_2}{b_2} \quad (A3.1)$$

el campo de Filippov queda

$$z(x) = \begin{pmatrix} -m_1 x - c_1 \tanh\left(\frac{\alpha c_2}{m_2}\right) + \frac{b_1}{2} \\ -\alpha c_2 - c_2 \tanh(x) + \frac{b_2}{2} \end{pmatrix} + \left(\frac{-2\alpha c_2 - 2c_2 \tanh(x) + b_2}{b_2} \right) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{b_1}{2} \\ -\frac{b_2}{2} \end{pmatrix} \quad (A3.2)$$

Simplificando se llega a

$$z(x) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha c_2 b_1}{b_2} - c_1 \tanh\left(\frac{\alpha c_2}{m_2}\right) - m_1 x + \frac{b_1 c_2 \tanh(x)}{b_2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A3.3)$$

Y por definición (3.30), la dinámica del campo de Filippov será en la variable de estado x . El sistema dinámico asociado a la superficie e de deslizamiento es

$$\dot{x} = \frac{\alpha c_2 b_1}{b_2} - c_1 \tanh\left(\frac{\alpha c_2}{m_2}\right) - m_1 x + \frac{b_1 c_2 \tanh(x)}{b_2} \quad (\text{A3.4})$$

donde $x \in \Sigma_{Sliding} \cup \Sigma_{Escaping}$

Es de observar que $z(x)$ es continua en algun intervalo I

Tomando el análisis para $b_1 \geq b_2$, se ve aprecia la Existencia de Puntos de equilibrio:

Recordando lo que es un punto de equilibrio. Es de resaltar que esta función $z(x)$ es continua, utilizaremos el siguiente teorema para demostrar que para ciertas variaciones de parámetro de b_2 existe un equilibrio inestable .

Teorema de Bolzano-Weierstrass(Apostol.1988): Sea una función f de dominio real continua en cada punto de un intervalo $[a, b]$ y supongamos que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Entonces existe por lo menos un $x^+ \in (a, b)$, tal que $f(x^+) = 0$

Se define $x_1 = -\text{arc tanh}(\alpha)$, al reemplazar teniendo en cuenta las propiedades de las funciones inversas llegamos a

$$z(x_1) = m_1 \cdot \text{arc tanh}(\alpha) - c_1 \tanh\left(\frac{\alpha c_2}{m_2}\right) < 0 \quad (\text{A3.5})$$

Por otro lado, puede encontrarse analíticamente un valor máximo de la función $z(x)$ mediante el criterio de las segundas derivadas, para esto derivamos

$$z'(x) = -m_1 + c_2 \left(\frac{b_1}{b_2}\right) \text{sec h}^2(x) \quad (\text{A3.6})$$

Igualando a cero $z(x) = 0$, y despejando, existe un valor crítico en

$$\tilde{x} = \text{arc sec h}\left(\sqrt{\frac{b_2 m_1}{b_1 c_2}}\right) \quad (\text{A3.7})$$

Calculando segunda derivada

$$z''(x) = -2c_2 \left(\frac{b_1}{b_2}\right) \text{sec h}(x) \cdot \tan h(x) \quad (\text{A3.8})$$

Se evalúa $z(\tilde{x})$

$$z(\tilde{x}) = -2m_2 \cdot \left(\frac{b_1}{b_2} \right) \tan h(\tilde{x}) < 0 \quad (\text{A3.9})$$

dado que siempre $\tilde{x} > 0$ y $\tan h(\tilde{x}) > 0$, en \tilde{x} existe máximo local.

Asignemos $x_2 = \tilde{x}$, por lo tanto $z(x_1) < z(x_2)$

En efecto

$$m_1 \cdot \text{arc tanh}(\alpha) - c_1 \tanh\left(\frac{\alpha c_2}{m_2}\right) < \alpha c_2 \left(\frac{b_1}{b_2}\right) - c_1 \tanh\left(\frac{\alpha c_2}{m_2}\right) - m_1 \cdot \text{arc sec h}\left(\sqrt{\frac{b_1 m_1}{b_2 c_2}}\right) + c_2 \left(\frac{b_1}{b_2}\right) \tanh\left(\text{arc sec h}\left(\sqrt{\frac{b_1 m_1}{b_2 c_2}}\right)\right) \quad (\text{A3.10})$$

Cancelando llegamos a

$$0 < m_1 \cdot \text{arc tanh}(\alpha) < \alpha c_2 \left(\frac{b_1}{b_2}\right) - c_1 \tanh\left(\frac{\alpha c_2}{m_2}\right) - m_1 \cdot \text{arc sec h}\left(\sqrt{\frac{b_1 m_1}{b_2 c_2}}\right) + c_2 \left(\frac{b_1}{b_2}\right) \tanh\left(\text{arc sec h}\left(\sqrt{\frac{b_1 m_1}{b_2 c_2}}\right)\right) \quad (\text{A3.11})$$

Pero, para que exista superficie de deslizamiento, b_2 tiene que cumplir $\left| \frac{b_2}{c_2} - \alpha \right| < 1$

En efecto, b_2 debe seguir

$$b_2 < \alpha(c_2 + 1), \quad b_2 < b_1 \quad \text{y} \quad b_1 - m_1 \cdot \text{arc sec h}\left(\sqrt{\frac{b_1 m_1}{b_2 c_2}}\right) > c_1 \tanh\left(\frac{\alpha c_2}{m_2}\right) \quad (\text{A3.11})$$

Gracias a que $m_1 < c_1$, tenemos

$$\text{arc sec h}\left(\sqrt{\frac{b_2 m_1}{b_1 c_2}}\right) > 1 \quad \text{y} \quad \tanh\left(\text{arc sec h}\left(\sqrt{\frac{b_2 m_1}{b_1 c_2}}\right)\right) \sim 1 \quad (\text{A3.12})$$

Por otro lado

$$\alpha c_2 \left(\frac{b_1}{b_2}\right) - m_1 \cdot \text{arc sec h}\left(\sqrt{\frac{b_1 m_1}{b_2 c_2}}\right) + c_2 \tanh\left(\text{arc sec h}\left(\sqrt{\frac{b_1 m_1}{b_2 c_2}}\right)\right) > (b_2 - c_2) \left(\frac{b_1}{b_2}\right) - m_1 \cdot \text{arc sec h}\left(\sqrt{\frac{b_1 m_1}{b_2 c_2}}\right) + c_2 \tanh\left(\text{arc sec h}\left(\sqrt{\frac{b_1 m_1}{b_2 c_2}}\right)\right) \quad (\text{A3.13})$$

Y

$$(b_2 - c_2) \left(\frac{b_1}{b_2}\right) - m_1 \cdot \text{arc sec h}\left(\sqrt{\frac{b_1 m_1}{b_2 c_2}}\right) + c_2 \tanh\left(\text{arc sec h}\left(\sqrt{\frac{b_1 m_1}{b_2 c_2}}\right)\right) \approx b_1 - m_1 \cdot \text{arc sec h}\left(\sqrt{\frac{b_1 m_1}{b_2 c_2}}\right) \quad (\text{A3.14})$$

Por lo tanto, por (A3.11) $z(x_2) > 0$, implica que existe al menos un x_* en el intervalo $[x_1, x_2]$ tal que $z(x_*) = 0$, es decir existe al menos un pseudoequilibrio sobre la zona de deslizamiento (Escaping).

El análisis de Estabilidad de este equilibrio, será estudiando el signo la derivada de $z(x)$:

Por el hecho que en \tilde{x} exista máximo, para los

$$x < \operatorname{arc\,sech} \left(\sqrt{\frac{b_1 m_1}{b_2 c_2}} \right) \text{ se cumplirá } z'(x) > 0 \quad (\text{A3.15})$$

En conclusión el punto de equilibrio sobre la superficie siempre será un

inestable cuando $\left| \frac{b_2}{c_2} - \alpha \right| < 1$

Anexo 4. Cálculo de las aplicaciones de involución junto a las aplicaciones de retorno para verificar Bifurcación *fold-fold*

Sea $\left| \frac{b_2}{c_2} - \alpha \right| < 1$. Supongamos $b_1 > m_1 + c_1$ y además $b_2 > m_2 + c_2$ donde $b_1 > b_2$.

➤ Caso 1: $b_2 = 0$

$$T_{F_1} = T_{F_2} = \left(-\operatorname{arc\,tanh}(\alpha), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right) \quad (\text{A4.1})$$

Existe un punto tangente (Two-fold) invisible para ambos campos vectoriales en S_1 y S_2 como se aprecia en la figura A1

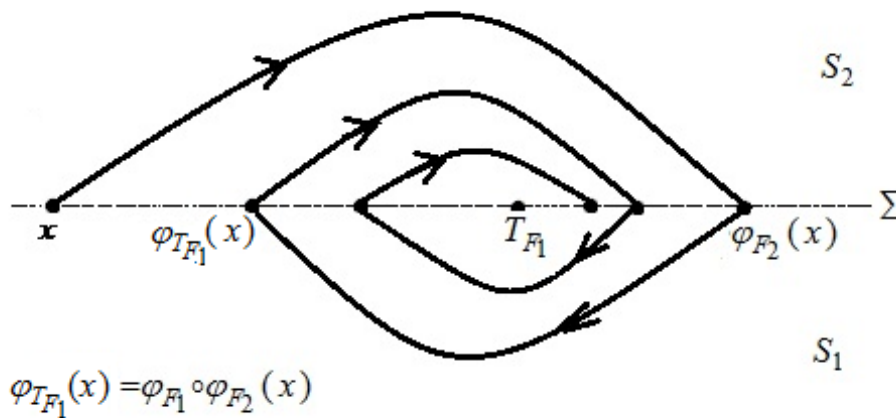


Fig.A1 geometría de las órbitas y el cruce alrededor del punto tangente T_{F_1} para $b_2 = 0$

En S_1 y S_2 asignamos

$$F_1 = \begin{pmatrix} -m_1 x - c_1 \tanh(y) \\ -m_2 y - c_2 \tanh(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(x, y) \\ Q_1(x, y) \end{pmatrix} \text{ y} \quad (\text{A4.2})$$

y

$$F_2 = \begin{pmatrix} b_1 - m_1 x - c_1 \tanh(y) \\ b_2 - m_2 y - c_2 \tanh(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2(x, y) \\ Q_2(x, y) \end{pmatrix} \quad (\text{A4.3})$$

Evaluando en el punto tangente en las P's:

$$P_1 \left(-\text{arc tanh}(\alpha), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right) = m_1 \cdot \arctan h(\alpha) - c_1 \tanh \left(\alpha \frac{c_2}{m_2} \right) < 0, \quad (\text{A4.4})$$

$$P_2 \left(-\text{arc tanh}(\alpha), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right) = b_1 + m_1 \cdot \arctan h(\alpha) - c_1 \tanh \left(\alpha \frac{c_2}{m_2} \right) > 0 \quad (\text{A4.5})$$

utilizando el “teorema de conservación de signos” existe un intervalo $x \in (-\text{arc tanh}(\alpha) - \delta, -\text{arc tanh}(\alpha) + \delta)$ para algún $\delta > 0$ donde

$$P_1 \left(x, \frac{\alpha c_2}{m_2} \right) < 0 \text{ y } P_2 \left(x, \frac{\alpha c_2}{m_2} \right) > 0 \quad (\text{A4.6})$$

.

Para un valor inicial $x \in \Sigma_{\text{crossing}}$ sobre la superficie $y = \frac{\alpha c_2}{m_2}$ tales que

$$x < -\text{arc tanh}(\alpha), \quad (\text{A4.7})$$

La órbita sobre el campo vectorial F_2 como condición suficiente garantizaría el cruce de la superficie de conmutación en $x > -\text{arc tanh}(\alpha)$ ya que por (A3.18), hay una vecindad de orbitas alrededor del punto tangente invisible T_{F_2} .

Al calcular la aplicación de involución (Filippov, 1988) alrededor del punto tangente sobre el conjunto S_2

$$\tilde{x}_1 = \varphi_{F_2}(x) = -\operatorname{arc\,tanh}(\alpha) - (x + \operatorname{arc\,tanh}(\alpha)) + A_{F_2}(x + \operatorname{arc\,tanh}(\alpha))^2 + O\left((x + \operatorname{arc\,tanh}(\alpha))^3\right) \quad (\text{A4.8})$$

$$\text{Donde } A_{F_2} = \frac{2}{3} \left(\frac{(P_2)_x + (Q_2)_y}{P_2} - \frac{(Q_2)_{xx}}{2(Q_2)_x} \right) = A_{F_2}(T_{F_1}) = A_{F_2} \left(-\operatorname{arc\,tanh}(\alpha), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right)$$

Aplicando derivadas parciales y evaluando las en el punto tangente

$$\begin{aligned} (P_2)_x &= -m_1, & (Q_2)_y &= -m_2, & (Q_2)_x &= -c_2 \sec h^2(x) \\ (Q_2)_{xx} &= -2c_2 \sec h^2(x) \tan h(x), \\ P_2 \left(-\operatorname{arc\,tanh}(\alpha), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right) &= b_1 + m_1 \cdot \arctan h(\alpha) - c_1 \tanh \left(\alpha \frac{c_2}{m_2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A4.9})$$

Se Reemplaza lo anterior obteniendo

$$A_{F_2}(T_{F_1}) = \frac{2}{3} \left(\frac{(-m_1) + (-m_2)}{b_1 + m_1 \cdot \arctan h(\alpha) - c_1 \tanh \left(\alpha \frac{c_2}{m_2} \right)} - \frac{(-2c_2 \sec h^2(-\operatorname{arc\,tanh}(\alpha))) \cdot \tan h(-\operatorname{arc\,tanh}(\alpha))}{2(-c_2 \sec h^2(-\operatorname{arc\,tanh}(\alpha)))} \right) \quad (\text{A4.10})$$

$$A_{F_2}(T_{F_1}) = \frac{2}{3} \left(\frac{-(m_1 + m_2)}{b_1 + m_1 \cdot \arctan h(\alpha) - c_1 \tanh \left(\alpha \frac{c_2}{m_2} \right)} + \alpha \right) \quad (\text{A4.11})$$

De forma paralela la aplicación de involución para los $\hat{x} > -\arctan h(\alpha)$ sobre S_1

$$\varphi_{F_1}(\hat{x}) = -\operatorname{arc\,tanh}(\alpha) + (\hat{x} + \operatorname{arc\,tanh}(\alpha)) + A_{F_1}(\hat{x} + \operatorname{arc\,tanh}(\alpha))^2 + O\left((\hat{x} + \operatorname{arc\,tanh}(\alpha))^3\right) \quad (\text{A4.12})$$

Donde $A_{F_1} = \frac{2}{3} \left(\frac{(P_1)_x + (Q_1)_y}{P_1} - \frac{(Q_1)_{xx}}{2(Q_1)_x} \right) = A_{F_1}(T_{F_1}) = A_{F_1} \left(-\text{arc tanh}(\alpha), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right)$

De manera análoga se llega a

$$A_{F_1}(T_{F_1}) = \frac{2}{3} \left(\frac{-(m_1 + m_2)}{m_1 \cdot \arctan h(\alpha) - c_1 \tanh \left(\alpha \frac{c_2}{m_2} \right)} + \alpha \right) \quad (\text{A4.13})$$

No obstante, el ciclo completo será $\varphi_{T_{F_1}}(x) = \varphi_{F_1} \circ \varphi_{F_2}(x) = \varphi_{F_1} \left[\varphi_{F_2}(x) \right] = \varphi_{F_1}(\tilde{x}_1)$.

De acuerdo con Filippov(1988), la aplicación de retorno (sección de Poincaré) $\varphi_{T_{F_1}}(x)$ alrededor de $x = -\text{arc tanh}(\alpha)$

$$\varphi_{T_{F_1}}(x) = -\text{arc tanh}(\alpha) + (x + \text{arc tanh}(\alpha)) + A_p^{(1)}(x + \text{arc tanh}(\alpha))^2 + O\left((x + \text{arc tanh}(\alpha))^3\right) \quad (\text{A4.14})$$

Siendo $A_p^{(1)} = A_{F_2} - A_{F_1}$, se afirma que la aplicación es estable (inestable) si

$$A_p^{(1)} < 0 \quad (A_p^{(1)} > 0). \quad (\text{A4.15})$$

Vemos entonces que

$$\begin{aligned} A_p^{(1)} &= A_{F_2} - A_{F_1} = A_{F_2}(T_{F_1}) - A_{F_1}(T_{F_1}) \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{-(m_1 + m_2)}{b_1 + m_1 \cdot \arctan h(\alpha) - c_1 \tanh \left(\alpha \frac{c_2}{m_2} \right)} + \alpha \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{-(m_1 + m_2)}{m_1 \cdot \arctan h(\alpha) - c_1 \tanh \left(\alpha \frac{c_2}{m_2} \right)} + \alpha \right) \end{aligned} \quad (\text{A4.16})$$

Queda la expresión

$$(\text{A4.17})$$

$$A_p^{(1)} = -\frac{2}{3}(m_1 + m_2) \left(\frac{-b_1}{\left(b_1 + m_1 \cdot \arctan h(\alpha) - c_1 \tanh\left(\alpha \frac{c_2}{m_2}\right) \right) \left(m_1 \cdot \arctan h(\alpha) - c_1 \tanh\left(\alpha \frac{c_2}{m_2}\right) \right)} \right)$$

Luego $A_p^{(1)} < 0$, de inmediato la sección de Poincaré es Estable en torno al punto tangente.

➤ Caso 2: Cuando $b_2 > 0$ y además $\left| \frac{b_2}{c_2} - \alpha \right| < 1$

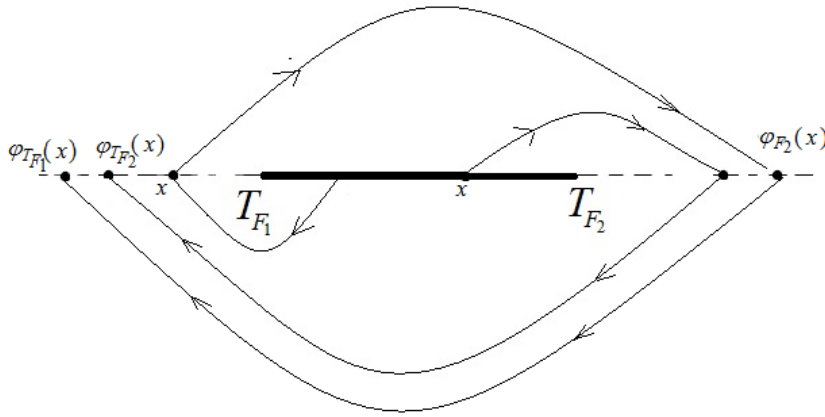


Fig.A2 Aplicaciones de retorno alrededor de T_{F_1} (denotado $\varphi_{T_{F_1}}(x)$) y T_{F_2} (como $\varphi_{T_{F_2}}(x)$)

Poseemos dos puntos tangentes donde se ubica la región de “Escaping” como se observa en la figura A2.

$$T_{F_1} = \left(-\arctan h(\alpha), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right) \text{ y } T_{F_2} = \left(\arctan h\left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha\right), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right) \quad (\text{A4.18})$$

Se preserva la misma definición de la aplicación de retorno y la estabilidad de $\varphi_{T_{F_1}}(x) = \varphi_{F_1} \circ \varphi_{F_2}(x)$ para $x < -\arctan h(\alpha)$ donde $x \in \sum_{\text{crossing}}$, por lo demás solo queda mostrar cual es la estabilidad de dicha aplicación cuando $x \in \sum_{\text{Escaping}}$ donde

$$\sum_{\text{Escaping}} = \left(-\arctan h(\alpha), \arctan h\left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha\right) \right) \quad (\text{A4.19})$$

Para ello es de notar que se garantiza la aplicación (en concordancia con lo hecho):

$$P_1 \left(\operatorname{arc\,tanh} \left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha \right), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right) = -m_1 \cdot \operatorname{arctan} h \left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha \right) - c_1 \tanh \left(\alpha \frac{c_2}{m_2} \right) < 0 \quad (\text{A4.20})$$

$$P_2 \left(\operatorname{arc\,tanh} \left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha \right), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right) = b_1 - m_1 \cdot \operatorname{arctan} h \left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha \right) - c_1 \tanh \left(\alpha \frac{c_2}{m_2} \right) > 0 \quad (\text{A4.21})$$

Se deduce (teorema de conservación de signos) que existe un intervalo con centro en $\hat{x} = \operatorname{arc\,tanh} \left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha \right)$ donde se garantiza bajo la región de Crossing una órbita periódica. Esta tendrá la estabilidad según la siguiente aplicación

$$\varphi_{T_{F_2}}(x) = \varphi_{F_1} \circ \varphi_{F_2}(x) \quad \text{para } x \in \sum_{\text{Escaping}} \quad (\text{A4.22})$$

siendo calculada por

$$\begin{aligned} \varphi_{T_{F_2}}(x) &= \operatorname{arc\,tanh} \left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha \right) + \left(x - \operatorname{arc\,tanh} \left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha \right) \right) \\ &\quad + A_p^{(2)} \left(x - \operatorname{arc\,tanh} \left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha \right) \right)^2 + O \left(\left(x - \operatorname{arc\,tanh} \left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha \right) \right)^3 \right) \end{aligned} \quad (\text{A4.23})$$

$$\text{Donde } A_p^{(2)} = A_{F_2}(T_{F_2}) - A_{F_1}(T_{F_2}).$$

Derivando y reemplazando

$$A_{F_2}(T_{F_2}) = A_{F_2} \left(\operatorname{arc\,tanh} \left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha \right), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{-(m_1 + m_2)}{b_1 - m_1 \cdot \operatorname{arc\,tanh} \left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha \right) - c_1 \tanh \left(\alpha \frac{c_2}{m_2} \right)} + \alpha \right) \quad (\text{A4.24})$$

De forma similar

$$A_{F_1}(T_{F_2}) = A_{F_1} \left(\operatorname{arc\,tanh} \left(\frac{b_2}{c_2} - (m_1 + m_2)\alpha \right), \frac{\alpha c_2}{m_2} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{-(m_1 + m_2)}{-m_1 \cdot \operatorname{arc\,tanh} \left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha \right) - c_1 \tanh \left(\alpha \frac{c_2}{m_2} \right)} + \alpha \right) \quad (\text{A4.25})$$

En efecto

$$A_{F_2}(T_{F_2}) - A_{F_1}(T_{F_2}) = -\frac{2}{3}(m_1 + m_2) \left(\frac{-b_1}{\left(b_1 - m_1 \cdot \operatorname{arc\,tanh} \left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha \right) - c_1 \tanh \left(\alpha \frac{c_2}{m_2} \right) \right) \left(m_1 \cdot \operatorname{arc\,tanh} \left(\frac{b_2}{c_2} - \alpha \right) + c_1 \tanh \left(\alpha \frac{c_2}{m_2} \right) \right)} \right) \quad (\text{A4.26})$$

En consecuencia, utilizando los resultados ya vistos $A_p^{(2)} = A_{F_2}(T_{F_2}) - A_{F_1}(T_{F_2}) > 0$ dicha orbita es inestable.

BIBLIOGRAFÍA

- Apostol, T. M. *Calculus* Vol1, Vol2. Editorial Reverté, **1988**.
- Aracil, J., Gordillo F. *Dinámica de Sistemas*. Alianza Editorial S. A., Madrid, **1997**.
- Bender, E. *An Introduction to Mathematical Modeling*. Wiley, **1978**.
- Bertalanffy, Ludwig Von. *Teoría General de Los Sistemas: Fundamentos, Desarrollo, Aplicaciones*. Séptima reimpresión (1989). Fondo de cultura económica, **1968**.
- Boulding K.E. *Conflict and Defense*, Harper, New York, **1962**.
- Boyce, W. E, DiPrima R. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera* 4ª Edición, Editorial Limusa S.A., Grupo Noriega Editores, **2000**.
- Bui-Wrzosinska L. *The Dynamics of Conflict in a School Setting*. Unpublished Masters Thesis, Warsaw School for Social Psychology, **2005**.
- Colombo A., di Bernardo M., Hogan S.J, Jeffrey M.R. Bifurcations of piecewise smooth flows: perspectives, methodologies and open problems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 241, 22, (**2012**), 1845-1860.
- Deutsch, M. *The Resolution of Conflict: Constructive and Destructive Processes*, Yale University Press, New Haven, **1973**.
- Deutsch, M. Cooperation and Competition, en: M. Deutsch, P.T. Coleman, E.C. Marcus (Eds.). *The Handbook of Conflict Resolution: Theory and Practice*. John Wiley & Sons, San Francisco, pp. 23-42, **2006**.
- Di Bernardo M., Budd C.J., Champneys A.R., Kowalczyk P., Nordmark A.B., Olivar G. Bifurcations in Nonsmooth Dynamical Systems. *SIAM review* 50, 4, (**2008**), 629-701.
- Edwards D., Hamson M. *Mathematical Modelling Skills*. Macmillan college work out series, Macmillan press ltd, London, **1996**.
- Filippov A.F. *Differential Equations with Discontinuous Righth-Hand*. Kluwer Academic, Dardrecht, Netherlands, **1988**.

-
- Francisco, R. A. *Dynamics of Conflict*. Springer Science+Business Media, LLC, New York, **2009**.
- Forrester J. Industrial Dynamics- -A Major Breakthrough for Decision Makers. *Harvard Business Review*, 36, 4, (**1958**), 37-66.
- Forrester, J. *Urban Dynamics*. Pegasus Communications, **1969**.
- Gottman, J., Swanson, C., Murray, J. The mathematics of marital conflict: dynamic mathematical nonlinear modeling of newlywed marital interaction. *Journal of Family Psychology* 13, 1, (**1999**), 3-19.
- Gottman J., Swanson C., Swanson K. A general systems theory of marriage: nonlinear difference equation modeling of marital interaction. *Personality and Social Psychology Review* 4 (**2002a**), 326-340.
- Gottman J.M., Murray J.D., Swanson C.C., Tyson R., Swanson K.R. *The Mathematics of Marriage*, MIT Press, Cambridge, **2002b**.
- Guardia M., Seara T.M., Teixeira M.A. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems. *Journal of Differential Equations*, 250, 4, (**2011**), 1967-2023.
- Kuznetsov Y..A., Rinaldi S., Gagnani A. One-parameter bifurcations in planar Filippov systems. *Int. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Eng.* 13, 8, (**2003**), 2157-2188.
- Kuznetsov, Y.A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, New York, **2004**.
- Lewin, K. *Dinámica de la Personalidad* (Selección de Artículos). Ediciones Morata S.A., Reimpresión, **1973**.
- Liebovitch, L. S., Vallacher, R., Nowak, A., Bui-Wrzosinska L., Coleman, P. T. Dynamics of two-actor cooperation-competition conflict models. *Physica A*, 387, 25, (**2008**) 6360-6378.
- Liebovitch, L.S. Vallacher, M,J. *Dynamics of Cooperation-Competition: Peace and Conflict*. Taylor & Francis Group, **2010**.
- Meiss J.D. *Differential Dynamical Systems*, SIAM, **2007**.
- Murray, J.D. *Mathematical Biology: I. An Introduction*. Third Edition. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, **2001**.

-
- Ogata, K., *Systems Dynamics*. 4ª Edición. Pearson-Prentice Hall, **2004**.
- Piironen, P. T., Kuznetsov Y. A. An Event-Driven method to simulate Filippov Systems with Accurate Computing of Sliding motions. *ACM Transactions on Mathematical Software* 34, 3, May **2008**, Article No. 13.
- Pruitt, D. G. Stability and sudden change in interpersonal and international affairs. *Journal of Conflict Resolution*, 13, (**1969**), 18-38.
- Pruitt D.G. A graphical interpretation of escalation and de-escalation. Presented at *Dynamics and Complexity of Intractable Conflicts*, Kamimierz, Poland, Oct. 19-22, **2006**.
- Rey, J.M. *A Mathematical Model of Sentimental Dynamics Accounting for Marital Dissolution*. PLoS ONE 5(3): e9881. doi:10.1371/journal.pone.0009881, **2010**.
- Richardson L.F. *Statistics of Deadly Quarrels*. Boxwood Press, Pittsburg, **1960**.
- Schellenberg, J A. *Los Fundadores de la Psicología Social: Freud, Mead, Lewin, Skinner*. 2ª Edición, Alianza Editorial, España, **1985**.
- Touzard, H. *La Mediación y la Solución de los Conflictos: Estudio Psicosociológico*. Herder, S.A., Barcelona, **1981**.
- Vallacher R.R., Nowak A. Dynamical social psychology: finding order in the flow of human experience, en: A.W. Kruglanski, E.T. Higgins (Eds.), *Social Psychology: Handbook of Basic Principles*, Guilford Publications, New York, **2005**.
- Vallacher, R. R.; Coleman, P. T.; Nowak, A.; Bui-Wrzosinska, L. Rethinking intractable conflict: the perspective of dynamical systems. *American Psychologist* 65, 4, (**2010**), 262-278.
- Volterra, V. Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together. En *Animal Ecology*, Chapman, R.N. (ed), McGraw-Hill, **1931**.
- Wiggins, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer, **1990**.

