



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# Modelo del Transformador de Distribución para el Análisis de Respuesta en Frecuencia

**David Leonardo Alvarez Alvarez**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ingeniería, Programa de Maestría en Ingeniería Eléctrica  
Bogotá, Colombia  
2013



# Modelo del Transformador de Distribución para el Análisis de Respuesta en Frecuencia

David Leonardo Alvarez Alvarez, Ing.

Tesis de grado presentada como requisito parcial para optar al título de:  
**Magister en Ingeniería - Ingeniería Eléctrica**

Director:  
Javier Rosero García, Ph.D.

Línea de Investigación:  
Modelado y Control de Sistemas de Electrónica de Potencia y Maquinas Eléctricas  
Grupo de Investigación:  
Electrical Machines & Drives - EM&D

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ingeniería, Programa de Maestría en Ingeniería Eléctrica  
Bogotá, Colombia  
2013



A mis padres: Gustavo Alvarez y Maria E.  
Alvarez y hermanos Gustavo, Claudia e Ivan.

Lo último que uno sabe, es por donde empezar.  
- **Blaise Pascal** (1623 – 1661)



# Agradecimientos

Este trabajo de investigación se desarrolló en la Universidad Nacional de Colombia dentro del programa de Maestría en Ingeniería Eléctrica.

Deseo expresar mis mas sinceros agradecimientos al Profesor Javier Rosero por su aporte como director de este trabajo, quien siempre estuvo disponible para atender requerimientos, dudas y discusiones sobre temas que hicieron posible este trabajo.

Al Profesor Enrique E. Mombello deseo dar un agradecimiento especial por los aportes que hizo durante la etapa mas critica del trabajo, así como al personal del Instituto de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de San Juan por permitir mi estadía y poder compartir con grandes personas como fue el Doctor Guillermo Diaz, con quien realice discusiones fructíferas, Ricardo Media, Andrés Romero, Diana Jimenez, Martha Camargo quienes hicieron muy grato mi paso en la ciudad de San Juan-Argentina.

A los estudiantes de pregrado Laura Betancourt, Guillermo Martínez, Sandro Zárate y Rafael Kerguelen quienes con su trabajo hicieron un importante apoyo a la culminación de este proyecto.

Finalmente a los miembros del grupo de investigación Electrical Machines & Drives - EM&D por su valioso y desinteresado aporte, William Mejia, Sandra Tellez y Martha Hernández.

Este trabajo fue soportado por el programa Jóvenes Investigadores e Innovadores de Colciencias y la Vicedecanatura de Investigación de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia sede Bogota.





---

## Resumen:




---

Proponente:	David Leonardo Alvarez Alvarez
Cédula:	1032387043
e-mail:	dlalvareza@unal.edu.co
Programa:	Maestría en Ingeniería - Ingeniería Eléctrica
Director:	Javier Rosero García, Ph.D.
Título de la Investigación:	Modelo del Transformador de Distribución para el Análisis de Respuesta en Frecuencia
Duración del Proyecto:	18 Meses
Entidad:	Universidad Nacional de Colombia
Dirección:	Cra 30 45-03 edificio 453 oficina 208, Bogotá D.C.
e-mail:	emd.bog@unal.edu.co
Teléfono:	+57 316 5000 Ext 10696
Línea de Investigación:	Modelado y Control de Sistemas de Electrónica de Potencia y Maquinas Eléctricas
Grupo de Investigación:	Electrical Machines & Drives, EM&D -COL0120979
Url:	<a href="http://www.ing.unal.edu.co/grupos/emd/index.html">www.ing.unal.edu.co/grupos/emd/index.html</a>

---

**Resumen:** En este documento se presenta el resultado del modelamiento de devanados de transformadores para el análisis de respuesta en frecuencia *FRA*. La dependencia frecuencial de las resistencias e inductancias es analizada y se estudia su influencia en el modelamiento de devanados. Para el modelamiento de bobinas se utiliza el circuito equivalente Mombello en el que los parámetros  $R$  y  $L$  son calculados mediante el algoritmo vector fitting. En un transformador bajo prueba son calculadas las resonancias y respuesta en frecuencia con ayuda de elementos finitos *FEM* y se comparan con mediciones. Finalmente se hace un análisis de la influencia del núcleo y los desplazamientos axiales en el devanado. Como resultado de este trabajo se encuentra que el circuito equivalente utilizado y el algoritmo vector fitting representan la resonancias en devanados de transformadores, la utilización de *FEM* es una buena aproximación al comportamiento de campos electromagnéticos, por otra parte esta herramienta permite analizar la influencia de la geometría y de los materiales en la respuesta en frecuencia.

**Palabras Claves:** Transformador, Vector Fitting, Análisis de Respuesta en Frecuencia *FRA*, Método de Elementos Finitos *FEM*, Circuito Equivalente.

## Abstract:



---

Author:	David Leonardo Alvarez Alvarez
I.D:	1032387043
e-mail:	dlalvareza@unal.edu.co
Program:	Magister in Engineering - Electrical Engineering
Advisor:	Javier Rosero García, Ph.D.
Research Title:	Distribution Transformer Modeling for Frequency Response Analysis <i>FRA</i>
Project Duration:	18 Months
Organization:	Universidad Nacional de Colombia
Address:	Cra 30 45-03 edificio 453, office 208, Bogotá D.C.
e-mail:	emd_bog@unal.edu.co
Phone:	+57 316 5000 Ext 10696
Research Area:	Modeling and Control of Power Electronics Systems and Electrical Machines
Research Group:	Electrical Machines & Drives, EM&D -COL0120979
Url:	<a href="http://www.ing.unal.edu.co/grupos/emd/index.html">www.ing.unal.edu.co/grupos/emd/index.html</a>

---

**Abstract:** This document presents the results of modeling transformers windings for Frequency response Analysis. The frequency dependence of inductances and resistances is analyzed and core influence in windings models is studied. For windings model is used the Mombello's equivalent circuit in that R and L parameters are calculated by means of vector fitting algorithm. In a transformers under test are calculated the resonances and frequency response with the helps of Finite Element Method and it is compare with measurements. Finally is made an analysis of core influence and axial displacement of the windings. How results of this work is show that the equivalent circuit and vector fitting algorithm represent property the resonances and anti-resonances in transformers windings. The used of FEM gives a good approximation to the behavior of electromagnetic fields, in the way this tool allows analyze the geometry and materials influence in Frequency Response.

**Keywords:** Transformers, Vector Fitting, Frequency Response Analysis *FRA*, Finite Element Method *FEM*, Equivalent Circuit.

## Publicaciones Realizadas:

L. Betancourt, G. Martinez, D. Alvarez, and J. Rosero, “Losses characterization on distribution transformer windings in frequency domain by means of finite element method (fem): Part i.” in *Power Engineering, Energy and Electrical Drives (POWERENG), 2013 International Conference on*, Istambul, 2013

—, “Losses characterization on distribution transformer windings in frequency domain by mean of finite element method (fem): Part ii,” in *Power Engineering, Energy and Electrical Drives (POWERENG), 2013 International Conference on*, Istambul, 2013

D. Alvarez, J. Rosero, and E. Mombello, “Circuit model of transformers windings using vector fitting for frequency response analysis (fra),” in *Workshop on Power Electronics and Power Quality Applications (PEPQA), 2013 International Conference on*, Bogota, 2013

—, “Circuit model of transformers windings using vector fitting, for frequency response analysis (fra) part ii: Core influence,” in *Workshop on Power Electronics and Power Quality Applications (PEPQA), 2013 International Conference on*, Bogota, 2013



# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>Lista de Figuras, Tablas y Símbolos</b>	<b>XVIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Estado del Arte</b>	<b>6</b>
2.1. Modelos Circuitales Propuestos para <i>FRA</i> . . . . .	6
2.2. Cálculo de Parámetros <i>R</i> , <i>L</i> y <i>C</i> en el Modelamiento de los Devanados . . . . .	7
2.3. Modelos Circuitales Basados en Mediciones . . . . .	8
<b>3. Perdidas e Inductancias en Transformadores</b>	<b>10</b>
3.1. Comportamiento de Resistencias e Inductancias en la Frecuencia . . . . .	10
3.1.1. Efecto Skin . . . . .	11
3.1.2. Efecto de Proximidad . . . . .	13
3.2. Variación de <i>R</i> y <i>L</i> para una Espira Conductora . . . . .	14
3.3. Representación del Núcleo . . . . .	17
3.3.1. Permeabilidad Compleja de Núcleo . . . . .	17
<b>4. Modelamiento de Devanados</b>	<b>21</b>
4.1. Modelo Circuitual . . . . .	21
4.2. Elementos Variables con la Frecuencia . . . . .	21
4.3. Influencia de los Parámetros <i>R</i> y <i>L</i> Constantes con la Frecuencia . . . . .	22
<b>5. Linealización del Modelo de Devanados</b>	<b>26</b>
5.1. Vector Fitting . . . . .	26
5.2. Circuito de Mombello . . . . .	27
5.3. Circuito Mombello para Múltiples Bobinas . . . . .	30
5.4. Interpretación Física del Modelo . . . . .	33
<b>6. Análisis de Resultados</b>	<b>35</b>
6.1. Análisis de la Espira Conductora Usando Circuito Mombello . . . . .	35
6.2. Análisis de los Devanados de Transformadores . . . . .	39
6.2.1. Influencia de Elementos Constantes . . . . .	41

---

6.2.2. Influencia del Número de Loops . . . . .	42
6.2.3. Modelamiento Mediante FEM . . . . .	43
<b>7. Conclusiones</b>	<b>59</b>
<b>8. Trabajos Futuros</b>	<b>61</b>
<b>A. Prueba FRA</b>	<b>62</b>
<b>B. Método de los Elementos Finitos</b>	<b>64</b>
B.1. Planteamiento Matemático . . . . .	64
B.1.1. Formulación de FEM 2D . . . . .	65
B.2. Geometría . . . . .	66
B.3. Materiales . . . . .	67
B.4. Condiciones de Frontera . . . . .	67
B.5. Pos-Proceso . . . . .	68
<b>C. Representación del Núcleo en 2D</b>	<b>70</b>
C.1. Modelo 2D con Simetría de Rotación . . . . .	71
<b>D. Parámetros del Circuito Equivalente</b>	<b>74</b>

# Lista de Figuras

1-1. Proceso del proyecto Modelo del Transformador de Distribución para FRA . . . . .	5
3-1. Comportamiento de $\vec{J}$ y $\vec{H}$ para $i$ DC en un Conductor . . . . .	11
3-2. Distribución de $ J $ y $ H $ en un conductor . . . . .	12
3-3. Comportamiento de $\vec{J}$ y $\vec{H}$ para $i(t)$ . . . . .	12
3-4. Distribución de $ J $ y $ H $ para $i(t)$ . . . . .	13
3-5. Efecto de Proximidad . . . . .	13
3-6. Geometría Espira Conductoras Bajo Resonancia . . . . .	14
3-7. $\delta(f)$ para un Conductor de $Cu$ . . . . .	15
3-8. Variación de $L(f)$ y $\vec{H}(f)$ en una Espira Conductoras . . . . .	16
3-9. Variación de $R(f)$ y $\vec{J}(f)$ en una Espira Conductoras . . . . .	16
3-10. Lámina Magnética Sometida a un Campo $\vec{H}$ . . . . .	18
3-11. Modelamiento del Transformador Mediante $\mu$ y $\epsilon$ Complejas . . . . .	19
3-12. Variación de $R$ y $L$ con Núcleo de Aire y Hierro . . . . .	20
3-13. Variación de $Z$ con Núcleo de Aire y Hierro . . . . .	20
4-1. Circuito Equivalente de un Devanado . . . . .	21
4-2. Circuito $RLC$ Resonante de una Espira Conductoras . . . . .	22
4-3. Resonancia del Circuito $RLC$ de una Espira Conductoras . . . . .	23
4-4. Resonancia con Núcleo de Hierro y Aire . . . . .	24
5-1. Parte Real de la Ecuación (5-1) . . . . .	27
5-2. Modelo con Dependencia Frecuencial de la impedancia $Z$ . . . . .	27
5-3. Parte Real de la Ecuación (5-9) . . . . .	29
5-4. Circuito Equivalente para Múltiples Bobinas Acopladas . . . . .	30
5-5. Elementos no Nulos del Circuito Mombello . . . . .	32
5-6. Interpretación Física del Modelo Mombello . . . . .	34
6-1. Circuito Mombello de Una Espira . . . . .	35
6-2. $ J $ en una Espira [ $A/mm^2$ ]. a) 1 [ $Hz$ ], b) 10 [ $KHz$ ], c) 100 [ $KHz$ ], d) 1 [ $MHz$ ] . . . . .	36
6-3. $ H $ en una Espira [ $A/m$ ]. a) 1 [ $Hz$ ], b) 10 [ $KHz$ ], c) 100 [ $KHz$ ], d) 1 [ $MHz$ ] . . . . .	37
6-4. Fitting de $R$ y $L$ para Diferentes Loops Adicionales . . . . .	38
6-5. Fitting de $Z$ para Diferentes Loops Adicionales . . . . .	38
6-6. Tensión en la Espira Conductoras para Diferentes Loops . . . . .	39

6-7. Tensión en el Nodo 2 . . . . .	40
6-8. Tensión en el Nodo 9 . . . . .	40
6-9. Influencia de Elementos Constantes en la Tensión del Nodo 2 . . . . .	41
6-10. Influencia de Elementos Constantes en la Tensión del Nodo 2, Diagrama de Bode . . . . .	42
6-11. Tensión en el Nodo 2 para Diferentes Número de Loops . . . . .	43
6-12. $R_{1i}$ y $L_{1i}$ con Diferentes Número de Loops en Función de la Frecuencia . . . . .	43
6-13. Permeabilidad Compleja $\mu^*$ . . . . .	44
6-14. Tensión en el Nodo 2 Mediante <i>FEM</i> . . . . .	45
6-15. $R_{1i}$ Medidas y Calculadas en Función de la Frecuencia . . . . .	45
6-16. $L_{1i}$ Medidas y Calculadas en Función de la Frecuencia . . . . .	46
6-17. Influencia de $\mu_r$ en $\mu^*$ . . . . .	47
6-18. Influencia de la Permeabilidad en la Tensión del Nodo 2 . . . . .	47
6-19. Influencia de la permeabilidad en $R_{1i}$ . . . . .	48
6-20. Influencia de la permeabilidad en $L_{1i}$ . . . . .	48
6-21. Influencia de $\sigma$ en $\mu^*$ . . . . .	49
6-22. Influencia de la Conductividad en la Tensión del Nodo 2 . . . . .	50
6-23. Influencia de la Conductividad en $R_{1i}$ . . . . .	50
6-24. Influencia de la Conductividad en $L_{1i}$ . . . . .	51
6-25. Segundo Eigenvalor de $\mathbf{Z}^{-1}$ en función de $\omega$ . . . . .	52
6-26. Determinante de $\mathbf{Z}^{-1}(\omega)$ . . . . .	53
6-27. Circuito Resonante Acoplado Magnéticamente . . . . .	53
6-28. Influencia de $\omega$ y $L_{core}$ en Circuitos Resonantes . . . . .	54
6-29. Influencia de $L_{stray}$ y $L_{core}$ en Circuitos Resonantes . . . . .	55
6-30. Influencia de los Desplazamientos Axiales en la Tensión del Nodo 2 . . . . .	56
6-31. Influencia de los Desplazamientos Axiales en $R_{1i}$ y $L_{1i}$ . . . . .	57
6-32. Procedimiento para el Calculo de Resonancias . . . . .	58
A-1. Función de Transferencia en Pruebas <i>FRA</i> . . . . .	62
A-2. Prueba end-to-end en Circuito Abierto para un Transformador Trifásico . . . . .	63
B-1. Elemento Finito Triangular . . . . .	65
B-2. Geometría Modelada en <i>FEM</i> . . . . .	67
C-1. Dimensiones del Núcleo Apilado . . . . .	70
C-2. Reluctancias en un Núcleo Apilado . . . . .	71
C-3. Cricuito Magnético Equivalente para Simetría de Rotación . . . . .	72



# Lista de Tablas

<b>1-1.</b> Causa de Fallas en Transformadores . . . . .	2
<b>1-2.</b> Comparación entre Métodos Avanzados en Diagnóstico de Transformadores .	3
<b>3-1.</b> Variación de $R$ y $L$ en una Espira Conductora para Diferentes Frecuencias .	15
<b>3-2.</b> Valores Típicos de $\mu_r$ , $\sigma$ y $L$ en Laminas Magnéticas . . . . .	19
<b>6-1.</b> Parámetros del Circuito Acoplado Resonante . . . . .	55
<b>B-1.</b> Propiedades de los Materiales Usados en $FEM$ . . . . .	67

# Lista de símbolos

## Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad SI
$\vec{A}$	Vector Potencial Magnético	$\frac{Wb}{m}$
$\vec{B}$	Densidad de Flujo Magnético	T
$C$	Capacitancia Eléctrica	F
$\mathbf{C}$	Matriz de Capacitancias	F
$\vec{D}$	Densidad de Flujo Eléctrico	$\frac{C}{m^2}$
$d\vec{l}$	Diferencial de Longitud	m
$d\vec{S}$	Diferencial de Superficie	$m^2$
$\vec{E}$	Intensidad de Campo Eléctrico	$\frac{V}{m}$
$\mathbf{e}$	Vector de Tensiones de Malla	V
$f$	Frecuencia	Hz
$\vec{H}$	Intensidad de Campo Magnético	$\frac{A}{m}$
$i$	Intensidad de Corriente Eléctrica	A
$\mathbf{i}$	Vector de Intensidades de Corriente de Malla	A
$j$	Unidad Imaginaria	$\sqrt{-1}$
$\vec{J}$	Densidad de Corriente	$\frac{A}{m^2}$
$L$	Inductancia Eléctrica	H
$\mathbf{L}$	Matriz de Inductancias	H
$l$	Longitud	m
$M$	Inductancia Mutua	H
$\mathbf{M}$	Matriz de Inductancias Mutuas	H
$R$	Resistencia Eléctrica	$\Omega$
$\mathbf{R}$	Matriz de Resistencias	$\Omega$

Símbolo	Término	Unidad SI
$S$	Superficie	$m^2$
$s$	Operador Laplaciano	$j\omega$
$t$	Tiempo	$s$
$Z$	Impedancia	$\Omega$
$\mathbf{Z}$	Matriz de Impedancias	$\Omega$

## Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad SI
$\delta$	Profundidad de Penetración	m
$\epsilon$	Permitividad Eléctrica	$\frac{F}{m}$
$\epsilon_0$	Permitividad del Vacío	$\frac{F}{m}$
$\epsilon_r$	Permitividad Relativa	1
$\epsilon^*$	Permitividad Compleja	$\frac{F}{m}$
$\epsilon'$	Parte Real de la Permitividad Relativa	1
$\epsilon''$	Parte Imaginaria de la Permitividad Relativa	1
$\lambda$	Eigenvalores	1
$\mu$	Permeabilidad Magnética	$\frac{H}{m}$
$\mu_0$	Permeabilidad del Vacío	$\frac{H}{m}$
$\mu_r$	Permeabilidad Relativa	1
$\mu^*$	Permeabilidad Compleja	$\frac{H}{m}$
$\mu'$	Parte Real de la Permeabilidad Relativa	1
$\mu''$	Parte Imaginaria de la Permeabilidad Relativa	1
$\sigma$	Conductividad Eléctrica	$\frac{S}{m}$
$\phi_M$	Flujo Magnético	Wb
$\omega$	Frecuencia Angular	$\frac{rad}{s}$

## Subíndices

Subíndice	Término
<i>eddy</i>	Corrientes de Eddy
<i>k</i>	Secciones del Devanado
<i>r</i>	Loops Adicionales del Circuito Mombello

## Superíndices

Superíndice	Término
T	Matriz Transpuesta
-1	Matriz Inversa

## Abreviaturas

Abreviatura	Término
<i>CIGRE</i>	International Council on Large Electric Systems
<i>FEM</i>	Finite Element Method
<i>FRA</i>	Frequency Response Analysis
<i>IEEE</i>	Institute of Electrical and Electronics Engineers
<i>DC</i>	Corriente Directa
<i>AC</i>	Corriente Alterna

# 1. Introducción

Con el constante crecimiento en la demanda de energía eléctrica en los últimos años y su dependencia por parte de la sociedad se hace necesario incrementar los recursos destinados a mantenimiento y diagnóstico de equipos incluyendo transformadores como elementos esenciales en todo sistema de energía. La intempestiva salida de funcionamiento del transformador genera traumatismos dentro del sistema, especialmente en redes de distribución cuya principal característica es la de poseer topologías radiales. Esta topología normalmente no tienen un respaldo en el flujo de energía. Para mitigar este impacto las técnicas de diagnóstico juegan un papel fundamental por su capacidad de estimar la vida útil de un transformador. Las técnicas de diagnóstico analizan las diferentes variables y aspectos como deterioro de componentes, sobrecargas, contaminación, envejecimiento, vibraciones, cortocircuitos, defectos de diseño, excesivas cantidades de agua o oxígeno, elevaciones de temperatura, etc. La técnica de diagnóstico puede establecer el estado del transformador (Normal, Envejecido, Anormal, Defectuoso y condición de falla ) [5]. En base en los resultados del diagnóstico y el análisis se toman medidas con el fin de mitigar el impacto de una falla, generando beneficios en cuanto a calidad del servicio y en la reducción de costos.

Las fallas en transformadores generan grandes costos y pérdidas al año, no solo por su valor, sino por el costo de la interrupción. La principal causa de falla en los transformadores se asocia al aislamiento, como consecuencia del envejecimiento, defectos del material y corto circuitos [6]. La frecuencia de estas fallas se muestran en la tabla 1-1. Si se analizan estos resultados se puede observar que gran parte de las fallas están relacionadas con el estado de la parte activa del transformador, (devanados y núcleo); esto es cerca de 50 casos estudiados (Aislamiento, diseño y aceite) sobre 94.

Nuevas técnicas de diagnóstico [7] se han venido desarrollando recientemente con el fin de conocer el estado y el nivel de confiabilidad del transformador. Dentro de los métodos de diagnóstico avanzado encontramos:

**Descargas Parciales PD:** Este método es capaz de identificar zonas donde el aislamiento es muy débil como consecuencia del sometimiento a estrés eléctrico.

**Análisis de Respuesta en frecuencia FRA:** Se usa para el diagnóstico de deformaciones mecánicas causadas por cortos circuitos, se basa en la representación del transformador

Causas de Falla	Número
Falla de Aislamiento	24
Diseño/Materiales/Manufactura	22
Desconocida	15
Contaminación del Aceite	4
Sobrecarga	5
Incendio/Explosión	3
Sobre tensiones	4
Mantenimiento/Operación inadecuada	5
Saturación	2
Perdida de conexión	6
Descargas Atmosféricas	3
Humedad	1
Total:	94

**Tabla 1-1.:** Causa de Fallas en Transformadores [6]

como una red de elementos pasivos RLC, los cuales dependen de la geometría y los materiales del equipo.

**Corrientes de Polarización-Despolarización PDC:** Este método se usa para evaluar los defectos causados por estrés térmico ayudando a la localización de puntos calientes.

En la tabla 1-2 se presenta un resumen de las principales características de cada una de las técnicas de diagnóstico.

Las tres técnicas avanzadas de diagnóstico perciben cierta característica o condición específica del transformador, aunque recientes estudios experimentales muestran que el análisis **FRA** puede detectar cambios en el estado del aislamiento [8] y en componentes no activos del transformador como pasatapas y tanque [9]. Por esta razón en los últimos años se han intensificado los estudios acerca del análisis de respuesta en frecuencia **FRA** como método de diagnóstico en transformadores debido a su alta sensibilidad para detectar cambios en los devanados y los materiales del transformador.

FRA es una importante técnica de diagnóstico en transformadores [10], esta fue propuesta inicialmente por Dick y Erven [11], y consiste en medir externamente mediante un barrido en frecuencia la impedancia para detectar deformaciones en los devanados de transformadores.

	Descargas Parciales <i>PD</i>	Respuesta en Frecuencia <i>FRA</i>	Respuesta Dieléctrica <i>DRA</i>
Ventajas	Medición Acústica o Dieléctrica. Normas Establecidas. No necesita medición de referencia.	Sensible a Cambios en los devanados. No se afecta por interferencia electromagnética.	Detecta humedad y envejecimiento de aislamiento. Varias metodologías de medición.
Desventajas	Sensible a interferencia electromagnética.	Necesita medición de referencia. No hay normas establecidas.	Necesita medición de referencia. No hay normas establecidas.
Características	Mide descargas parciales en zonas débiles del aislamiento.	El transformador es representado por elementos pasivos R,L,C e impedancias mutuas.	Medición de la respuesta dieléctrica en dominio de la frecuencia o el tiempo.
Aplicación	Encontrar defectos causados por estrés eléctrico y humedad en el aislamiento.	Establecer el estado del transformador debido al estrés mecánico o movimientos de los devanados.	Determinar el estado del transformador respecto al estrés térmico.

**Tabla 1-2.:** Comparación entre Métodos Avanzados en Diagnóstico de Transformadores [7]

El análisis *FRA* es capaz de detectar [10]:

- Cortocircuito entre espiras
- Cortocircuitos entre el núcleo y devanados
- Cambios radiales y axiales en los devanados
- Cambio en las propiedades de los materiales del núcleo y devanados

Debido a las ventajas de este método las diferentes organizaciones internacionales han trabajado en normas y recomendaciones acerca de la medición, modelamiento e interpretación de los resultados obtenidos mediante la pruebas de FRA [12, 13, 14].

Para el modelamiento de transformadores existen en general dos modelos [15], el primero consiste en un modelo de caja negra, donde los parámetros se basan en mediciones *FRA* hechas externamente al transformador. El segundo modelo consiste en un modelo físico, en el que se modelan los componentes del transformador en detalle y para esto se utiliza una red de parámetros equivalentes de resistencias, inductancias y capacitancias.

En la actualidad el modelo de la caja negra es el mas utilizado debido a la dificultad para conocer las características constructivas y los materiales del transformador. Existen tres técnicas comparativas que utilizan este modelo, la primera consiste en comparaciones de

medidas del mismo transformador antes (cuando se sabe que esta en condición normal ) y después de una falla, esta comparación puede verse afectada por cambios en la permitividad del aislamiento como consecuencia del envejecimiento del aceite y los aislamientos [10]. Con el modelo físico del transformador este problema es fácilmente solucionado ya que cambian las propiedades del material dentro del parámetro. El segundo método consiste en comparar las mediciones de diferentes fases del transformador, aunque las medidas difieran no es fácil concluir cual de ellas está en condición de falla. El tercer método consiste en comparar mediciones hechas a transformadores idénticos, diferentes respuestas pueden indicar cambios internos en el transformador. Los tres métodos anteriores de comparación entre mediciones *FRA* poseen el problema de ser subjetivos a la interpretación, y para solucionar este problema se han intentado desarrollar métodos de comparación estadística que permiten comparar de manera objetiva las señales [10].

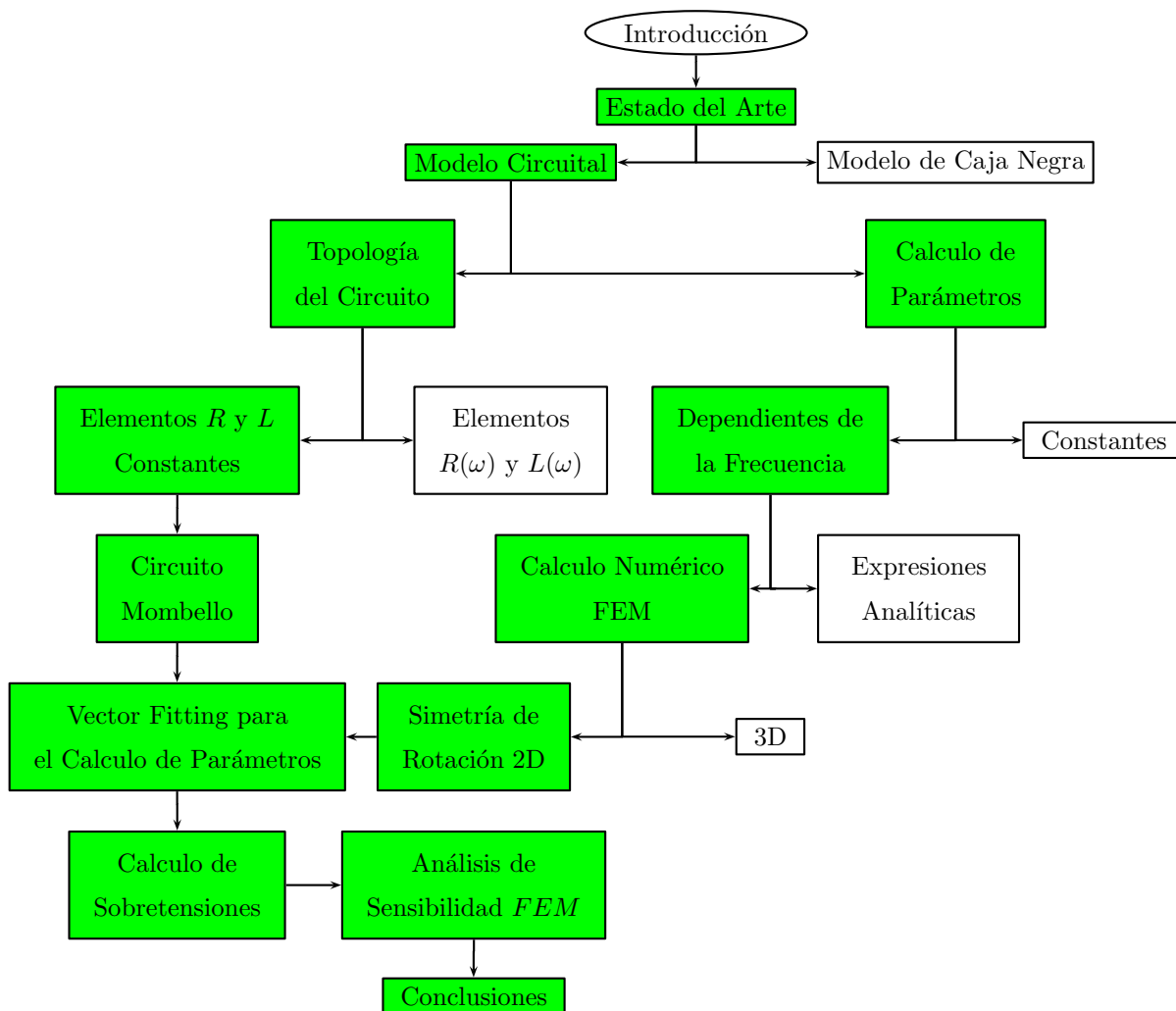
El modelo físico del transformador soluciona algunos de los problemas que se presentan al comparar dos mediciones, siempre y cuando se conozcan las características constructivas y las propiedades de los materiales.

En la actualidad se han desarrollado trabajos con el fin de modelar circuitualmente devanados de transformadores. Los primeros modelos consisten en utilizar elementos constantes con la frecuencia con el objetivo de simplificar cálculos y poder analizar la distribución de sobretensiones en las diferentes secciones del devanado, como consecuencia de esta simplificación los resultados entre mediciones y cálculos varían. En recientes trabajos se tiene en cuenta la dependencia frecuencial a través de matrices de resistencias e inductancias en las cuales los elementos varían para cada frecuencia. Los valores de estas matrices son calculados en base a expresiones analíticas o con la ayuda de *FEM*, este tipo de circuitos solo pueden ser utilizados para señales armónicas. El objetivo de este trabajo es utilizar un nuevo circuito equivalente calculado a partir de la geometría que modele la dependencia frecuencial de las resistencias e inductancias y que pueda ser aplicado para cualquier tipo de señal.

En este trabajo se estudia el modelo circuital del transformador, en el capítulo 2 se hace un estudio de estado del arte acerca de la técnica *FRA*, en el capítulo 3 se hace énfasis en la distribución de campos magnéticos en el dominio de la frecuencia, como estos campos afectan los valores de resistencias e inductancias propias y mutuas en el dominio de la frecuencia y la influencia del núcleo. En el capítulo 4 se estudia el modelo circuital de devanados utilizados para el análisis de transitorios electromagnéticos y se analiza la influencia de utilizar elementos constantes con la frecuencia en el circuito equivalente. En el capítulo 5 se estudia el circuito equivalente propuesto por Mombello que representa la variación frecuencial de las impedancias mediante elementos constantes y se analiza el algoritmo vector Fitting el cual se adapta para calcular los valores de los elementos del circuito. Luego en el capítulo 6 se simula mediante *FEM* un transformador para calcular los parámetros del circuito equivalente y se



compara con resultados de mediciones de impedancias y barridos en frecuencia. Finalmente en el capítulo 7 se analizan los resultados obtenidos en el presente trabajo. En la figura 1-1 se muestra el proceso de desarrollo del proyecto Modelo del Transformador de Distribución para el Análisis de Respuesta en Frecuencia.



**Figura 1-1.:** Proceso de desarrollo del proyecto Modelo del Transformador de Distribución para el Análisis de Respuesta en Frecuencia

Como resumen, en este proyecto se muestra que es posible modelar la distribución de campos electromagnéticos en la frecuencia mediante resistencias e inductancias constantes con la ayuda del algoritmo vector fitting. La utilización de *FEM* permite conocer la redistribución de estos campos, analizar la influencia de la geometría y los materiales dentro de *FRA*.

## 2. Estado del Arte

En este capítulo se presenta una breve descripción de los modelos circuitales más relevantes que se han utilizado y desarrollado para el análisis de respuesta en frecuencia junto con sus principales ventajas y desventajas. Una introducción acerca de las pruebas *FRA* se encuentra en el anexo [A](#).

El análisis de respuesta en frecuencia se ha enfocado en analizar la señal obtenida mediante una prueba de respuesta en frecuencia [10], y en modelar y caracterizar el transformador a partir de las características constructivas, geometría y de materiales.

El modelamiento de transformadores se ha venido trabajado desde dos tópicos, el primero consiste en un modelo eléctrico y magnético del transformador que se representa a través de un circuito eléctrico mediante resistencias, capacitancias e inductancias que modelan los acoples entre campos electromagnéticos que puedan existir entre los diferentes elementos de los que está compuesto el transformador [8, 16]. El segundo foco de estudio ha sido el cálculo de los parámetros resistivos, inductivos y capacitivos del circuito [17].

### 2.1. Modelos Circuitales Propuestos para *FRA*

En la literatura se encuentra una variedad de modelos del transformador que representan el comportamiento de este en el dominio de la frecuencia debido a que el modelo clásico del transformador no funciona adecuadamente.

Se han desarrollado modelos basados en mediciones que se realizan a transformadores y los resultados obtenidos en la prueba *FRA* se aproximan a una función de transferencia [18]. Las frecuencias de resonancia se modelan mediante bloques compuestos por circuitos, estos representan el comportamiento del núcleo y devanados. La variación de la función de transferencia después de un cambio en la geometría o en las características de la máquina se pueden asociar a los cambios en uno de los parámetros de los bloques.

Para el desarrollo de un circuito equivalente del transformador que representa el comportamiento en el dominio de la frecuencia, es indispensable tener en cuenta los acoples magnéticos y eléctricos que se presenten dentro del transformador. En la actualidad se han desarrollado diferentes modelos circuitales que describen la respuesta en frecuencia en transformadores

mediante redes compuestas por elementos  $R$ ,  $L$ , y  $C$  [19, 20, 21].

Mombello, propone un nuevo circuito equivalente con elementos lineales que incorporan loops adicionales acoplados magnéticamente, sin embargo dentro del alcance de este trabajo no se incluye el cálculo de las impedancias sino que por el contrario son medidas, haciendo un importante aporte en la medición de impedancias mutuas [19].

Bjerkkan modela un transformador de potencia circuitalmente con base en su geometría, calculando los parámetros mediante FEM en 2D, se utilizan permeabilidades complejas en el núcleo y devanados. Las permeabilidades son calculadas de forma analítica permitiendo reducir el número de elementos de la malla del problema. Las capacitancias son calculadas mediante expresiones analíticas. El autor hace un análisis de la influencia del núcleo en **FRA** y el efecto de las propiedades de los materiales aislantes. Finalmente el autor hace una comparación entre una respuesta FRA medida y simulada a partir de inductancias, resistencias y capacitancias basadas en formulas analíticas obteniendo como resultado una gran diferencia entre mediciones y la respuesta calculada [20].

En [21] se modelan transformadores trifásicos y monofásicos mediante un circuito equivalente que tiene en cuenta la dependencia frecuencial de los elementos  $R, L, C$  del circuito. Esta dependencia se modela mediante una variación en cada frecuencia de las matrices que se utilizan para el modelamiento del circuito mediante variables de estado. Dentro de las principales características de este modelo en alta frecuencia esta la inclusión de los factores que afectan la permitividad eléctrica (temperatura, envejecimiento, ect.), y la anisotropía en la permeabilidad del núcleo. Para el cálculo de los elementos del circuito mediante *FEM* utiliza un modelo híbrido entre *2D* y *3D*.

## 2.2. Cálculo de Parámetros $R$ , $L$ y $C$ en el Modelamiento de los Devanados

Para el cálculo de parámetros de los devanados en los modelos de respuesta en frecuencia se tiende a caracterizar por partes el devanado, mediante modelos matemáticos cuyas soluciones propuestas son de carácter analíticas o numéricas. En estas soluciones la dependencia frecuencial de los elementos resistivos e inductivos, se debe tener en cuenta para obtener resultados acertados [17].

Para la estimación de inductancias y resistencias de manera analítica generalmente se utilizan las expresiones propuestas por Wilcox [22], en donde la influencia del núcleo y la frecuencia es tenida en cuenta. En los años recientes, con el desarrollo de supercomputadores el

método de Elementos Finitos *FEM* se ha utilizado para estimar los parámetros *RLC* [20]. Esto permite calcular la distribución de campos electromagnéticos para cualquier tipo de geometría. *FEM* ofrece ventajas en el modelamiento de transformadores en el dominio de la frecuencia, donde se considera la influencia del núcleo. Otra ventaja significativa de *FEM* es la posibilidad del cálculo de impedancias propias y mutuas. En el anexo B se encuentra una breve descripción de *FEM* en electromagnetismo.

### 2.3. Modelos Circuitales Basados en Mediciones

Los últimos estudios se han enfocado a determinar los parámetros del circuito equivalente a partir de mediciones *FRA*, sin conocimiento de la geometría interna del transformador mediante complejos algoritmos de optimización. Estos algoritmos requieren grandes recursos computacionales, utilizan expresiones analíticas para el cálculo de los elementos *R, L, C* del circuito equivalente y necesitan de parámetros iniciales que limiten el espacio de búsqueda del algoritmo, como por ejemplo: número de secciones del circuito, límites inferiores y superiores de los valores de los elementos del circuito, entre otros. A continuación se muestran los trabajos más relevantes.

En [23] se propone una metodología para determinar el circuito equivalente y sus parámetros a partir de nueve diferentes mediciones *FRA*, tres por cada fase y aplicando las pruebas: end-to-end en alta tensión en circuito abierto, end-to-end en baja tensión circuito abierto y capacitancia entre devanados. Los parámetros son calculados a partir de expresiones analíticas (teniendo en cuenta la influencia del núcleo) donde la dependencia frecuencial de las resistencias es tenida en cuenta [24]. El algoritmo de optimización es no lineal y consiste en minimizar el error entre todas las mediciones y el modelo propuesto. El circuito es analizado mediante ecuaciones de estado.

En [25] se propone un circuito equivalente de un devanado de un transformador que representa el comportamiento de la respuesta en frecuencia que se obtiene a partir de mediciones. Los valores de inductancia, resistencia y capacitancias se consideran constantes con la frecuencia y se determinan a partir de un algoritmo iterativo propuesto por los autores. El criterio de selección de los parámetros es un error menor al 2%.

El algoritmo bioinspirado BSA (Bacterial Swarming Algorithm) es utilizado [26] para determinar los parámetros de un circuito equivalente que modela el comportamiento en el dominio de la frecuencia. Los valores iniciales de los elementos *R, L, C* son asumidos y calculados a partir de ecuaciones analíticas teniendo en cuenta la dependencia frecuencial. La función a optimizar son los puntos de resonancia y antiresonancia de mediciones *FRA*.

---

Los modelos desarrollados hasta el momento cumplen con el objetivo de representar devanados de transformadores mediante un circuito equivalente, pero difieren en la forma como representan la variación frecuencial de los elementos y como se calculan. En este trabajo se representa la variación frecuencial mediante elementos constantes y se utiliza el método de Elementos Finitos para el cálculo de los elementos del circuito.

# 3. Perdidas e Inductancias en Transformadores

El transformador es una máquina eléctrica estática donde se presentan fenómenos del tipo magnético y eléctrico que generan perdidas en los componentes activos y pasivos. Las perdidas se clasifican en perdidas en vacío y perdidas bajo carga [27]. Las perdidas en vacío se asocian principalmente al núcleo, que está bajo la presencia de un campo magnético generado a partir de la energización del transformador, estas perdidas son independientes de la carga de la máquina. En las laminas del núcleo las perdidas en vacío son producidas por histéresis y corrientes de eddy generadas como consecuencia de la variación del flujo magnético  $\phi_M$  en el tiempo.

Las perdidas en carga se generan cuando fluye una intensidad de corriente a través de los terminales del transformador, estas perdidas en los conductores son clasificadas en dos grupos  $i^2R$  y pérdidas por flujo disperso. Las perdidas  $i^2R$  son debidas al efecto Joule producto de la intensidad de corriente que fluye por un conductor. La perdidas por flujo disperso se presentan por corrientes de eddy que se inducen en los conductores, prensas, tanque, accesorios y salidas, en general en todas las partes metálicas del transformador. Las perdidas por flujo disperso son proporcionales a la frecuencia y tienen su origen en la redistribución de los campos eléctricos y magnéticos dentro de conductores, los cuales generan una variación del valor de las resistencias e inductancias.

## 3.1. Comportamiento de Resistencias e Inductancias en la Frecuencia

El comportamiento de la resistencia esta asociado con las perdidas y las inductancias se asocian con la energía almacenada en forma de campo magnético, estos fenómenos se explican a partir de las ecuaciones de Maxwell, la Ley de Faraday (ecuación 3-1) y la Ley de Ampere-Maxwell (ecuación 3-2).

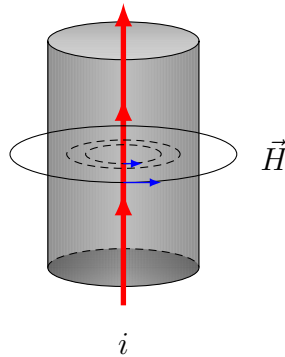
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{3-1}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3-2)$$

La distribución de la densidad de corriente  $\vec{J}$  y la intensidad de campo magnético  $\vec{H}$  en conductores se puede explicar mediante dos fenómenos conocidos como el efecto skin y efecto de proximidad [28], [29].

### 3.1.1. Efecto Skin

Supongamos que un cilindro conductor de longitud infinita lleva una intensidad de corriente continua  $i$ , generando una intensidad de campo magnético  $\vec{H}$  como se muestra en la figura 3-1.



**Figura 3-1.:** Comportamiento de  $\vec{J}$  y  $\vec{H}$  para  $i$  DC en un Conductor

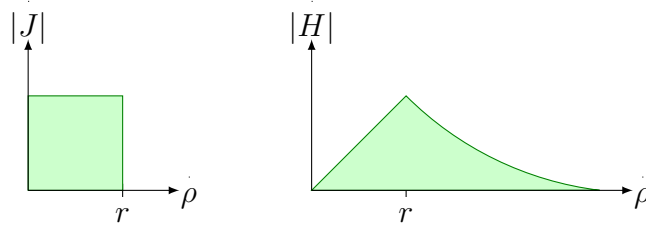
Para campos estáticos existe un desacoplamiento entre las ecuaciones de campo magnético (3-2) y eléctrico (3-1) debido a que  $\partial/\partial t = 0$ .

Si el conductor es suficientemente delgado, la resistencia  $R$  es función de la conductividad  $\sigma$ , la longitud del conductor  $l$  y la sección transversal  $A$  [30]. Como se muestra en la ecuación (3-3).

$$R = \frac{l}{\sigma A} \quad (3-3)$$

La anterior expresión es cierta siempre y cuando la sección del conductor  $A$  sea constante. De esta forma la densidad de corriente se distribuye uniformemente en el conductor [28].

En la figura 3-2 se puede observar la distribución de densidad de corriente constante en toda la sección del conductor, caso diferente para la intensidad de campo que se comporta de



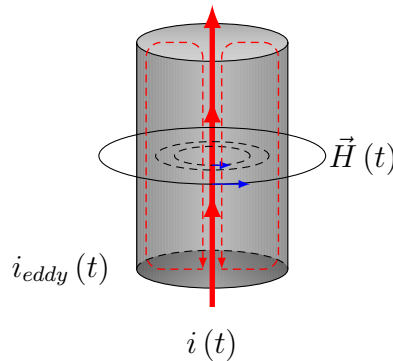
**Figura 3-2.:** Distribución de  $|J|$  y  $|H|$  en un conductor

forma lineal, siendo cero en el centro del conductor y su máximo se presenta en la superficie del conductor.

Para el caso de la inductancia interna  $L$  de un alambre esta es función solamente de la longitud del cable  $l$  y de la permeabilidad del material  $\mu$ , según la ecuación (3-4).

$$L = \frac{\mu l}{8\pi} \quad (3-4)$$

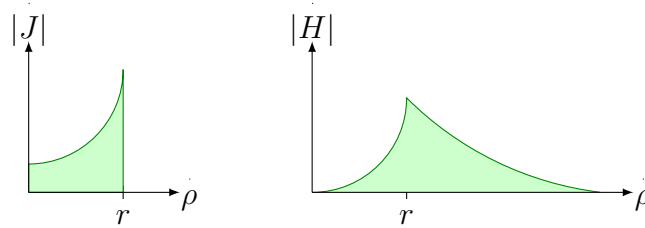
Cuando una intensidad de corriente variante en el tiempo  $i(t)$  pasa a través de un conductor tal como se muestra en la figura 3-3, genera un campo magnético  $\vec{H}(t)$ , la derivada parcial de este campo  $\partial/\partial t \neq 0$  genera un campo eléctrico según la ley de Faraday (3-1) que tiende a cancelar la intensidad de corriente  $i(t)$  mediante corrientes de eddy.



**Figura 3-3.:** Comportamiento de  $\vec{J}$  y  $\vec{H}$  para  $i(t)$

Estas corrientes de eddy inducidas hacen que la densidad de corriente  $\vec{J}$  se distribuya de forma no homogénea, causando que en el centro del conductor la intensidad de corriente tienda a cancelarse y en la parte más externa se suma. Por esta razón se tiene una alta concentración de densidad de corriente en la superficie del conductor. Este fenómeno se hace más fuerte a medida que aumenta la frecuencia.



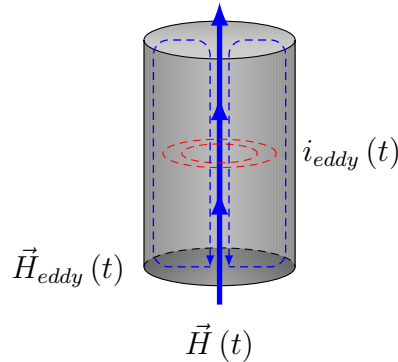


**Figura 3-4.:** Distribución de  $|J|$  y  $|H|$  para  $i(t)$

Comparando las figuras 3-2 y 3-4 se puede observar como la influencia de la frecuencia en el interior del conductor genera una redistribución de los campos  $\vec{J}$  y  $\vec{H}$  desplazándolos hacia la superficie del conductor.

### 3.1.2. Efecto de Proximidad

Cuando un conductor es atravesado por un campo magnético variable en el tiempo  $\vec{H}(t)$ , este campo induce un campo eléctrico  $\vec{E}(t)$  según la ley de Faraday (3-1), con este campo y la conductividad del material  $\sigma$  se generan unas corrientes de eddy  $i_{eddy}$ , como consecuencia de estas corrientes aparece un campo magnético  $\vec{H}_{eddy}$  que se opone al campo que lo genera, tal como se puede observar en la figura 3-5.



**Figura 3-5.:** Efecto de Proximidad

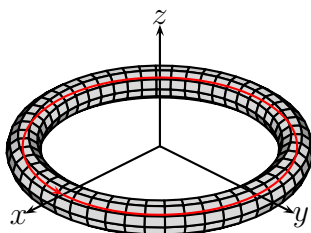
Este campo  $\vec{H}_{eddy}$  genera un efecto similar al efecto skin, ya que tiende a rechazar el campo en el interior del conductor y aumenta el campo en las fronteras debido a que en esta parte se suman. Esta es una explicación del fenómeno de skin depth  $\delta$  [30], que hace referencia a la capacidad de un campo magnético para penetrar un conductor. Como se define en la ecuación (3-5).

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (3-5)$$

## 3.2. Variación de $R$ y $L$ para una Espira Conductor

En esta sección se va a analizar el comportamiento de la resistencia  $R$  y la inductancia  $L$  en el dominio de la frecuencia de una espira conductora por la cual fluye una intensidad de corriente.

La geometría de la espira se presenta en la figura 3-6, esta se simuló por el método de elementos finitos mediante el software Comsol<sup>TM</sup>[31].



**Figura 3-6.:** Geometría Espira Conductor Bajo Resonancia

Tomando como punto de partida el valor de  $R$  y  $L$  para una señal de corriente continua  $DC$ , el valor de la resistencia se calcula mediante la ecuación (3-3). Para el cálculo de la inductancia se utilizó la aproximación de la ecuación (3-6) [30].

$$L \approx \mu b \left( \ln \left( \frac{8b}{r} \right) - \frac{7}{4} \right) \quad (3-6)$$

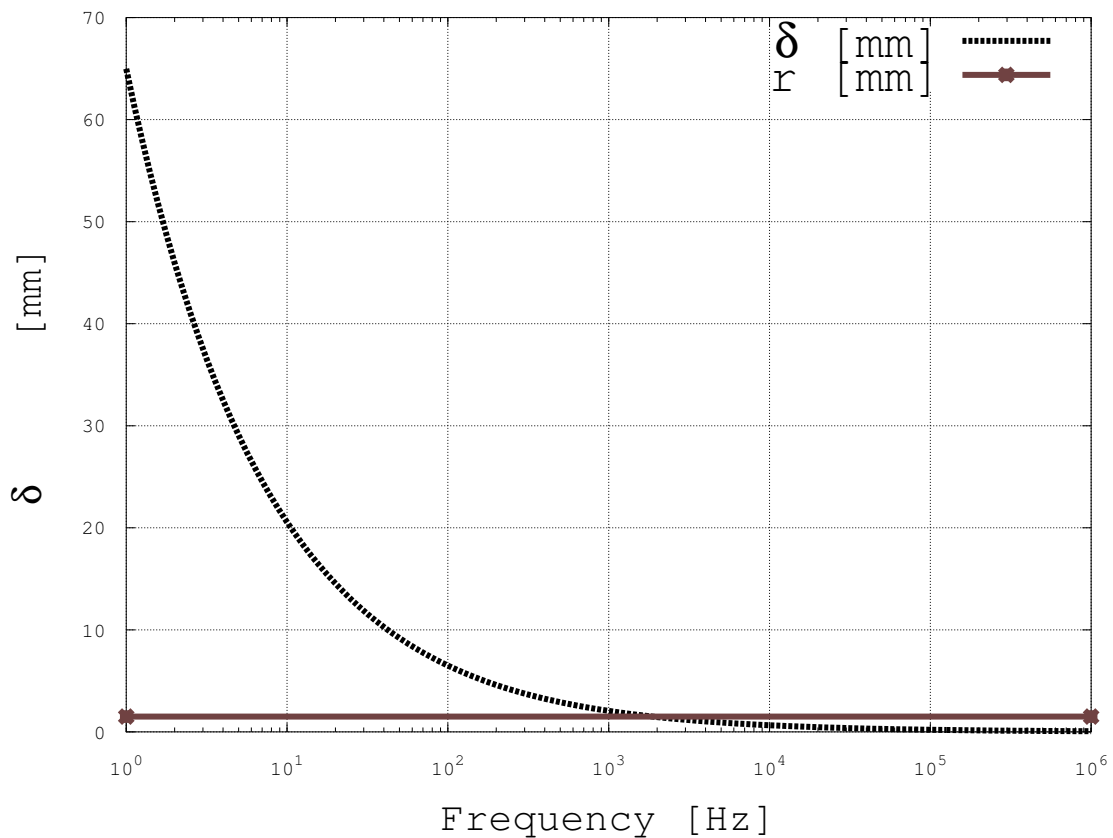
La espira conductora de la figura 3-6 tiene un radio de  $d = 100[mm]$  y el conductor tiene un radio de  $r = 1,5[mm]$ . Para esta geometría se calcula la resistencia  $R$  e inductancia  $L$  analítica y numéricamente. Los resultados se muestran en la tabla 3-1.

De la tabla 3-1 los parámetros  $DC$  fueron calculados con la ayuda de las ecuaciones (3-3) y (3-6), para los demás se utilizó calculo numérico. Se puede observar que las expresiones analíticas son bastantes acertadas para bajas frecuencias, mas específicamente cuando  $\delta > r$ , en este caso  $r = 1,5[mm]$ .

	$DC$	$1[Hz]$	$10^4[Hz]$	$10^5[Hz]$	$10^6[Hz]$
R [ $m\Omega$ ]	1.482	1.482	2.09	5.82	19.04
L [ $\mu H$ ]	0.5377	0.5381	0.532	0.515	0.509

**Tabla 3-1.:** Variación de  $R$  y  $L$  en una Espira Conductor para Diferentes Frecuencias

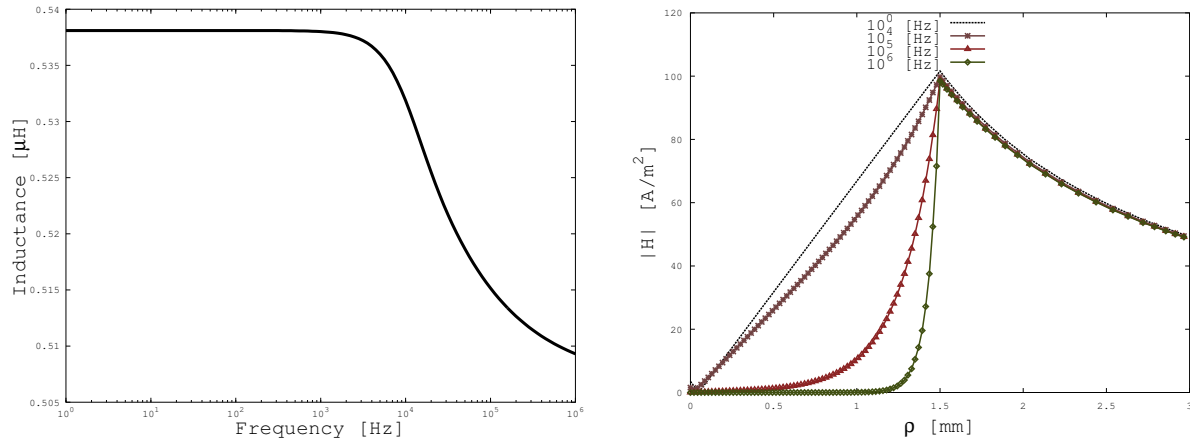
En la figura 3-7 se muestra la variación de  $\delta$  calculado a partir de la ecuación (3-5) respecto a la frecuencia. El valor de la frecuencia  $f$  para el cual  $\delta$  es igual a  $r$  es  $1877[Hz]$ , lo que significa que el campo no se rechaza en el interior del conductor para frecuencias menores a esta.



**Figura 3-7.:**  $\delta(f)$  para un Conductor de  $Cu$

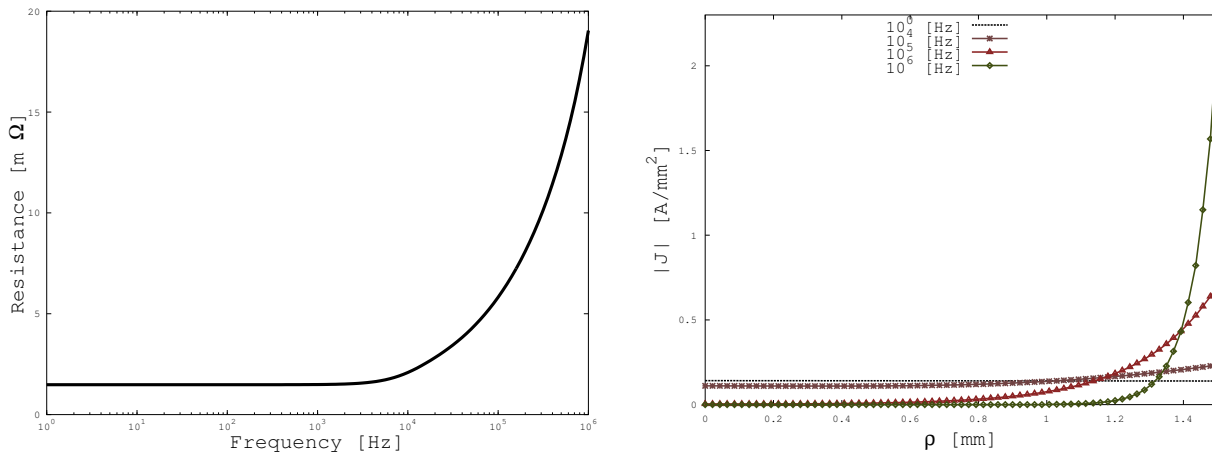
A medida que la frecuencia va aumentando y el valor de  $\delta$  supera el radio del conductor, el campo magnético empieza a redistribuirse en el interior del conductor. Esta redistribución hace que la energía almacenada en forma de campo magnético sea menor y por lo tanto se presente una disminución de la inductancia. Debido a que solo se afecta el campo dentro

del conductor, la inductancia varia levemente siempre y cuando  $d \gg r$  (caso común en el devanado de un transformador), ya que la distribución de campo tiende a mantenerse constante en el exterior, tal como se puede observar en la figura 3-8.



**Figura 3-8.:** Variación de  $L(f)$  y  $\vec{H}(f)$  en una Espira Conductor

Al presentarse una redistribución de  $\vec{H}$  producto del aumento en la frecuencia y las corrientes de eddy, la intensidad de corriente  $\vec{J}$  tiende a distribuirse por la superficie del conductor generando que la resistencia de este aumente (ver figura 3-9). Al igual que en el caso de la inductancia, las variaciones de resistencia empiezan a ser significativas cuando  $\delta > r$ . A diferencia de la inductancia el valor de la resistencia varía significativamente a medida que se aumenta la frecuencia.



**Figura 3-9.:** Variación de  $R(f)$  y  $\vec{J}(f)$  en una Espira Conductor

Del análisis de la espira conductora se puede observar la importancia de la frecuencia en los valores de resistencias e inductancias, por lo que es necesario tener en cuenta esta dependencia en el circuito que modele devanados en *FRA*.

### 3.3. Representación del Núcleo

En esta sección se estudia la simplificación del núcleo del transformador con el objetivo de reducir el problema a dos dimensiones con simetría de rotación donde no se modelen en detalle cada lamina magnética.

#### 3.3.1. Permeabilidad Compleja de Núcleo

El objetivo del núcleo en los transformadores es encerrar el flujo magnético  $\vec{B}$ . En pruebas *FRA*, la tensión de entrada es menor que la tensión nominal del transformador, por esta razón la intensidad de campo magnético  $\vec{H}$  tiende a 0 a medida que aumenta la frecuencia, como se puede observar en la ecuación (3-7). En [17, 32] se han estudiado las permeabilidades iniciales de núcleos utilizados en transformadores y su influencia en pruebas *FRA* para bajos flujos magnéticos como se describe en la ecuación (3-7).

$$\mu_r \mu_0 = \lim_{H \rightarrow 0} \left( \frac{B}{H} \right) \quad (3-7)$$

Los núcleos están contruidos con laminas magnéticas de espesores menores a un 1 [mm], simular esta geometría mediante *FEM* es una tarea compleja y demanda una gran cantidad de recursos computacionales, por esta razón se ha utilizado el concepto de permeabilidad compleja [20] con el objetivo de reducir el tamaño del problema.

Las laminas magnéticas se ven influenciadas por campos magnéticos. El comportamiento de estos campos esta descrito por las ecuaciones (3-1) y (3-2).

Las ecuaciones constitutivas que relacionan campos eléctricos y magnéticos con los materiales se encuentra en las ecuaciones (3-8) y (3-9).

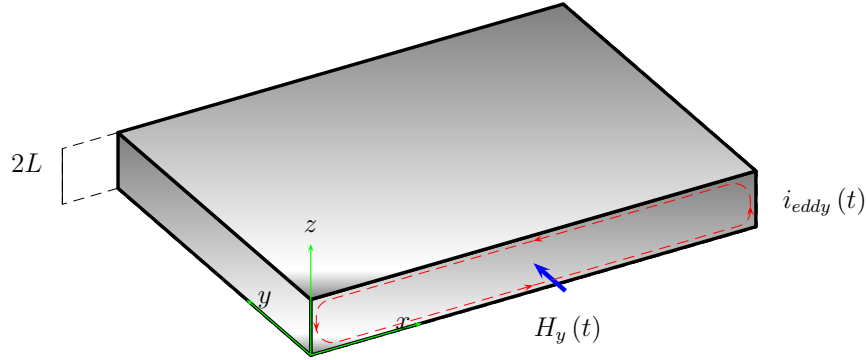
$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (3-8)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (3-9)$$

Tomando las anteriores expresiones y reemplazándolas en las ecuaciones (3-1) y (3-2) se obtiene la ecuación de onda, expresada en la ecuación (3-10).

$$\nabla^2 \vec{H} = -j\omega\mu\sigma \vec{H} \quad (3-10)$$

El núcleo se trata como un problema de corrientes de eddy en una dimensión [33] según la figura 3-10, si se desprecian las uniones del núcleo con el objetivo de reducir al complejidad del problema [23] la ecuación diferencial (3-10) es reducida a la ecuación (3-11).



**Figura 3-10.:** Lamina Magnética Sometida a un Campo  $\vec{H}$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = -j\omega\mu\sigma H_y \quad (3-11)$$

La ecuación diferencial (3-11) tiene la solución estándar de la ecuación (3-12).

$$H_y(x) = H_1 e^{kz} + H_2 e^{-kz} \quad (3-12)$$

El valor de  $k$  en la ecuación (3-12) es igual a  $k = \frac{1+j}{\delta}$  donde  $\delta$  es el skin depth (3-5).

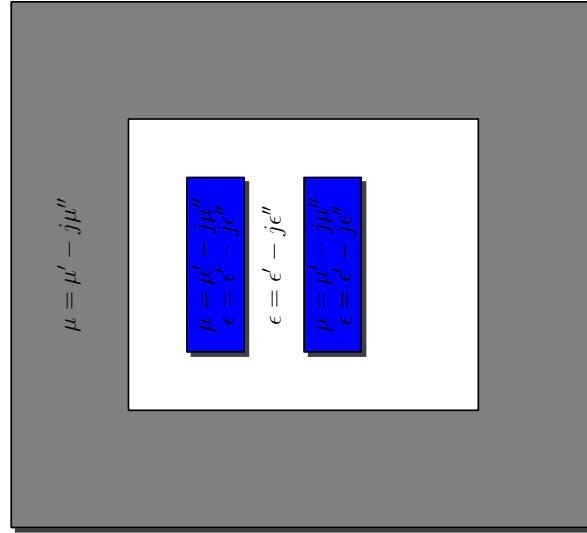
Aplicando condiciones de frontera para encontrar las constantes  $H_1$  y  $H_2$  de la ecuación (3-12) se obtiene el campo magnético como se puede observar en la ecuación (3-13).

$$H_y(x) = H_0 \frac{\cosh kz}{\cosh kL} \quad (3-13)$$

La permeabilidad compleja definida en la ecuación (3-14) se deriva de las expresiones (3-13) y (3-7).

$$\mu^* = \mu_r \mu_0 \frac{\tanh(kz)}{kL} = \mu_0 (\mu' - j\mu'') \quad (3-14)$$

Un transformador se puede modelar mediante permeabilidades y permitividades complejas dependiendo de las características de los materiales [3, 4] tal como se puede observar en la figura 3-11. En [34, 35] calculan los valores de las permeabilidades y permitividades complejas a partir de simulaciones mediante *FEM*.



**Figura 3-11.:** Modelamiento del Transformador Mediante  $\mu$  y  $\epsilon$  Complejas

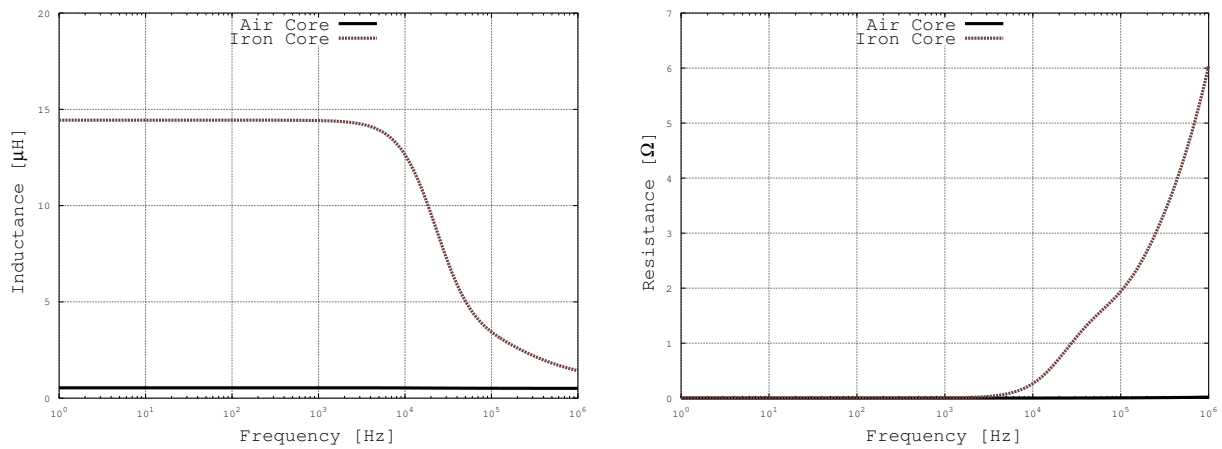
El valor de  $u_r$  no es fácilmente conocido por parte de los fabricantes y por esta razón algunos autores han tenido que calcularla [20, 32, 33]. Valores típicos son mostrados en la tabla 3-2.

Author	$\mu_r$	$\sigma$ [S/m]	$2L$ [mm]
Bjerkan [20]	300	$2e6$	0,35
Abeywickrama[32]	488	$4e6$	0,35
Mitchell [33]	835	$1,72e6$	0,35

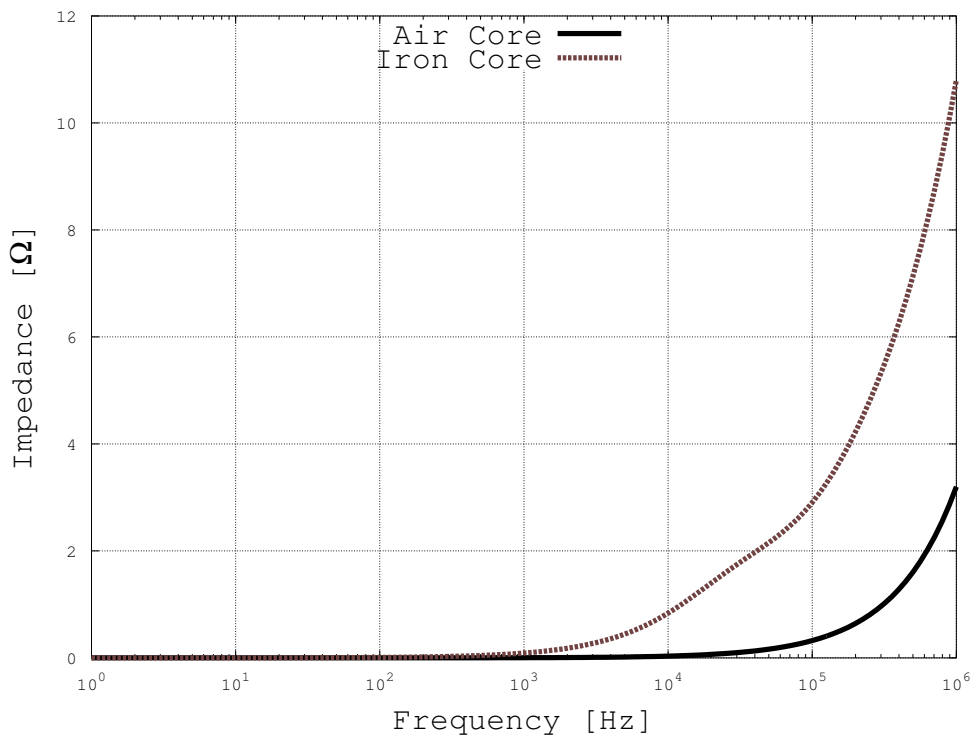
**Tabla 3-2.:** Valores Típicos de  $\mu_r$ ,  $\sigma$  y  $L$  en Laminas Magnéticas

En la figura 3-12 la resistencia e inductancia de la espira de la fig. 3-6 es simulada mediante *FEM* con y sin núcleo. Se puede observar la influencia del núcleo para modelos *FRA*. Los valores de permeabilidad y conductividad inicial del núcleo se tomarón de [20].

El comportamiento de la impedancia  $Z$  de la espira conductora se observa en la figura 3-13 donde el núcleo de hierro genera un crecimiento de  $Z$ . Esta variación de la impedancia trae como consecuencia que la frecuencia y la amplitud de la resonancia cambien como se analizara mas adelante.



**Figura 3-12.:** Variación de  $R$  y  $L$  con Núcleo de Aire y Hierro



**Figura 3-13.:** Variación de  $Z$  con Núcleo de Aire y Hierro

El núcleo de transformadores influye en los valores  $R$  y  $L$ . La representación detallada de todos los fenómenos que ocurren dentro del núcleo requiere de esfuerzos computacionales por lo que es necesario aplicar simplificaciones que permitan reducir la complejidad del problema.



## 4. Modelamiento de Devanados

En este capítulo se analiza la influencia de la frecuencia en los parámetros de circuito comúnmente usados para modelar devanados de transformadores bajo fenómenos transitorios.

### 4.1. Modelo Circuitual

El modelamiento de devanados de transformadores propuesto [11, 19, 36] se ha desarrollado para representar la distribución de tensiones en las diferentes secciones, esta red está compuesta por inductancias  $L$ , resistencias  $R$  y capacitancias  $C$ . La topología de este circuito se muestra en la figura 4-1.

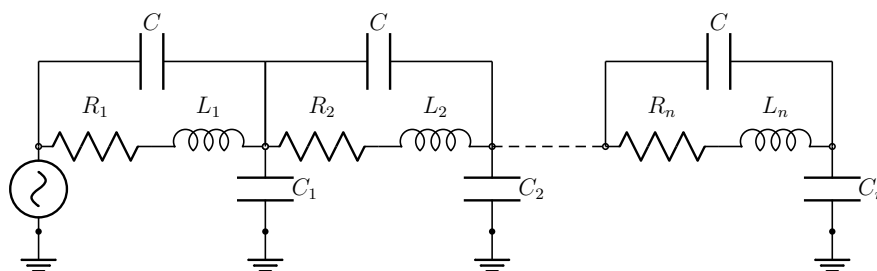


Figura 4-1.: Circuito Equivalente de un Devanado

### 4.2. Elementos Variables con la Frecuencia

Aunque en el circuito de la figura 4-1 no se representan las impedancias mutuas de los elementos, estas son vitales para la correcta representación de los fenómenos electromagnéticos. La exactitud de este modelo depende de la correcta representación de la dependencia frecuencial de los elementos resistivos, inductivos y capacitivos [12, 19].

La matriz de impedancias que describe el circuito a partir de las ecuaciones de malla según la ley de Faraday se describe en la ecuación (4-1).

$$\mathbf{Z} = \mathbf{R} + s\mathbf{L} + \frac{1}{s}\mathbf{Y} \quad (4-1)$$

Donde  $\mathbf{Z}$  es la matriz de impedancias y  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{Y}$  son las matrices de resistencias, inductancias e inversa de la capacitancia. La anterior ecuación en forma matricial con dependencia frecuencial de sus elementos se expresa mediante la ecuación (4-2).

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_{11}(\omega) & Z_{12}(\omega) & \dots & Z_{1n}(\omega) \\ Z_{12}(\omega) & Z_{22}(\omega) & \dots & Z_{2n}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{1n}(\omega) & Z_{2n}(\omega) & \dots & Z_{nn}(\omega) \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

Finalmente para el calculo de tensiones y corrientes en el circuito utilizamos el sistema de ecuaciones de la expresión (4-3).

$$\mathbf{e} = \mathbf{Z}(\omega) \cdot \mathbf{i} = \left( \mathbf{R}(\omega) + s\mathbf{L}(\omega) + \frac{1}{s}\mathbf{Y}(\omega) \right) \cdot \mathbf{i} \quad (4-3)$$

La expresión (4-3) es usada como modelo para el calculo de resonancias en secciones de devanados, con la desventaja que solo es aplicable para señales AC.

### 4.3. Influencia de los Parámetros $R$ y $L$ Constantes con la Frecuencia

Ahora se analiza el comportamiento de la espira conductora vista en la sección 3.2 en el circuito resonante de la figura 4-2.

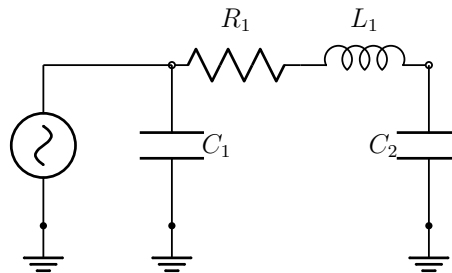
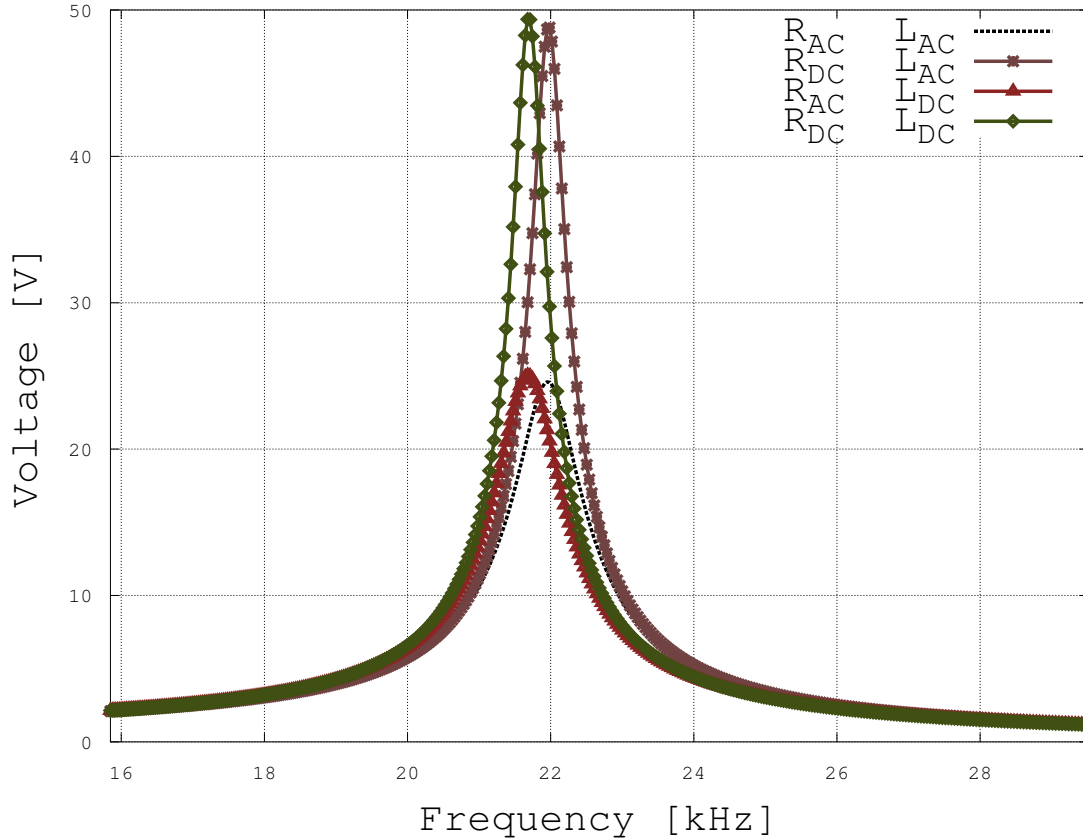


Figura 4-2.: Circuito  $RLC$  Resonante de una Espira Conductora

La fuente de tensión del circuito es de 1 [V] y las capacitancias a tierra se les asigno un valor de  $C_1 = C_2 = 100 [\mu F]$ . Para poder apreciar la importancia de la variación de  $R$  y  $L$  respecto a la frecuencia se hace un barrido con combinaciones de  $R$  y  $L$  AC y DC, como se puede

observar en la figura 4-3.



**Figura 4-3.:** Resonancia del Circuito  $RLC$  de una Espira Conductora

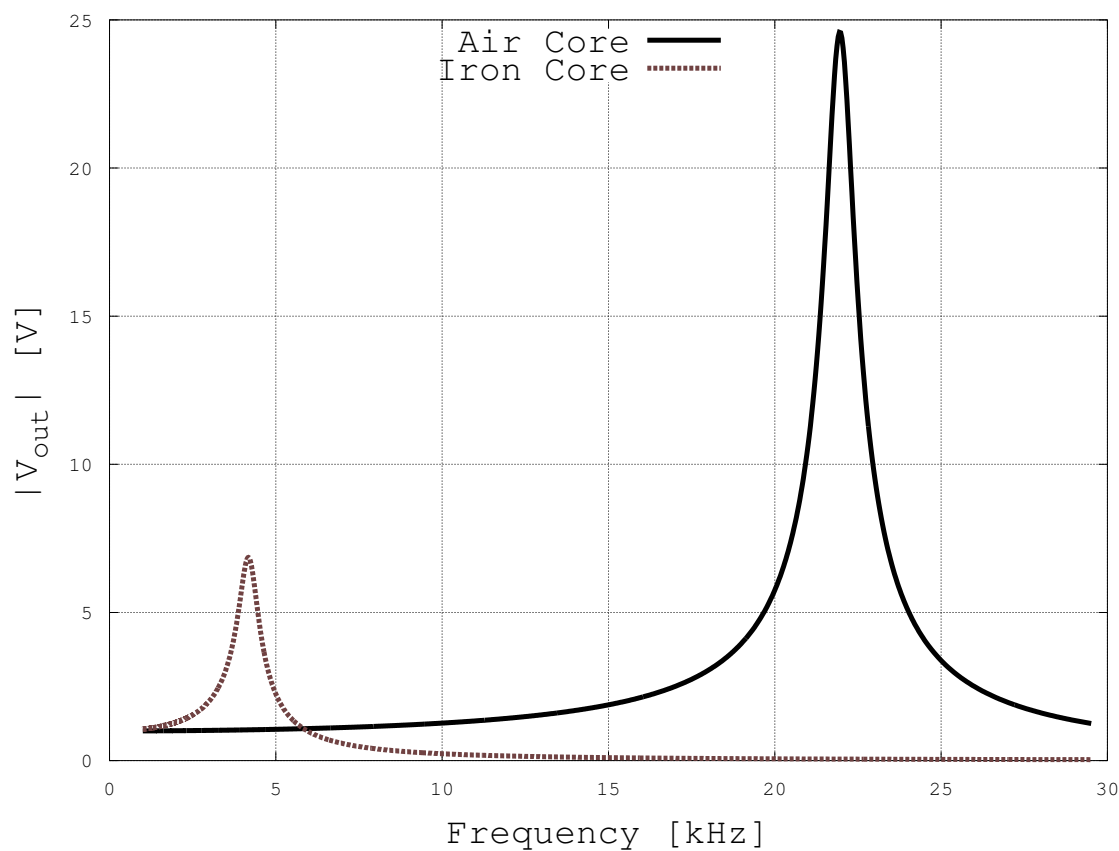
La primera simulación consiste en elementos  $R$  y  $L$  dependientes con la frecuencia, que se denomina  $AC$ , este es el caso real del comportamiento del circuito 4-2. Para el segundo caso se toma una resistencia  $R_{DC}$ , que significa que es constante con la frecuencia. Para el caso de la frecuencia de resonancia, el único elemento que va a limitar la intensidad de corriente es la resistencia, y por tanto la tensión en el condensador y el pico de la resonancia dependen del valor de  $R$ . Según la tabla 3-1 el valor de la resistencia varía hasta en 10 veces a medida que se aumenta la frecuencia. En este caso se puede observar que como consecuencia de una resistencia constante, el valor de la tensión durante la resonancia es aproximadamente el doble respecto a considerar  $R_{DC}$ , aunque la frecuencia de resonancia se mantiene.

El tercer caso consiste en tomar una resistencia  $R_{AC}$  y una inductancia  $L_{DC}$ , donde se puede observar que el valor de la tensión máxima en el condensador se mantiene respecto al valor real pero la frecuencia a la que ocurre esta resonancia varía.

El ultimo caso consiste en tomar valores de  $R_{DC}$  y  $L_{DC}$ , donde se puede observar como se afecta tanto la frecuencia, como al valor máximo de la tensión durante la resonancia.

Según lo anterior y de la figura 4-3 se puede concluir que la máxima tensión de la resonancia esta asociada al valor de la resistencia, y el valor de la frecuencia a la que ocurre la resonancia, esta asociado al valor de la inductancia. Según lo estudiado en el capítulo 3, la resistencia tiene una mayor variación que la inductancia respecto a la frecuencia. Como resultado se afectan en mayor proporción los picos de resonancia.

En la figura 4-4 se puede observar la influencia del núcleo de hierro durante la resonancia, debido a que la inductancia y la resistencia aumentan con núcleo de hierro, la resonancia ocurre a frecuencias mas bajas y con una tensión menor si se compara con un núcleo de aire.



**Figura 4-4.:** Resonancia con Núcleo de Hierro y Aire

A pesar que la frecuencia a la que ocurre la resonancia es menor con núcleo de hierro, la re-

sistencia en este nuevo punto es mayor que la resistencia del núcleo de aire en una frecuencia mayor.

En esta sección se pudo observar la influencia que tiene en núcleo de hierro en el valor de los parámetros  $R$  y  $L$  de devanados de transformadores y como esta afecta la respuesta en frecuencia, tanto en magnitud como en frecuencia. También se demostró la necesidad de usar los parámetros variantes con la frecuencia en el análisis *FRA*.

# 5. Linealización del Modelo de Devanados

En esta sección se linealiza el circuito usado para modelar fenómenos a altas frecuencias visto en el capítulo 4, transformando la matriz de impedancias (4-2) con elementos que varían con la frecuencia en una matriz con elementos constantes que representen la variación frecuencial. Para lograr este objetivo se utiliza el algoritmo vector fitting [37] que representa mediante funciones racionales el comportamiento de las resistencias e inductancias. Luego se transformó la función racional del vector fitting en otra función propuesta [19]. Esta nueva función permite calcular los parámetros de un circuito equivalente que modela la variación frecuencial de la matriz de impedancias  $\mathbf{Z}$ .

## 5.1. Vector Fitting

Vector fitting [37] es un algoritmo que inicialmente se desarrolló para aproximar respuestas en el dominio de la frecuencia, aunque con el avance del tiempo este algoritmo ha sufrido cambios y se ha aplicado a la solución de diferentes problemas [38]. El vector fitting utiliza funciones racionales que poseen la forma de la ecuación (5-1).

$$Z(s) = b_0 + b_\infty s + \sum_{i=1}^r \frac{b_i}{s + \lambda_i} \quad (5-1)$$

Donde  $b_0$  y  $b_\infty$  son números reales,  $b_i$ ,  $\lambda_i$  son residuos y los polos ya sean reales o complejos conjugados y  $r$  es el número de polos. Debido a que las funciones que se van a optimizar son suaves y se requiere que los polos sean reales como se verá mas adelante, para este trabajo se debe cumplir adicionalmente que  $b_i$  sean residuos reales negativos y  $s_i = \lambda_i$  sean polos reales negativos [39], esto con el fin de que el circuito equivalente tenga elementos consistentes.

Adicionalmente, el algoritmo presenta algunas ventajas facilitando su adaptación al modelo propuesto por Mombello [40] que se verá mas adelante. En la figura 5-1 se puede observar la parte real de la descomposición de la función (5-1), para la espira conductora vista en la sección 3.2 (Resistencia  $R$ ).

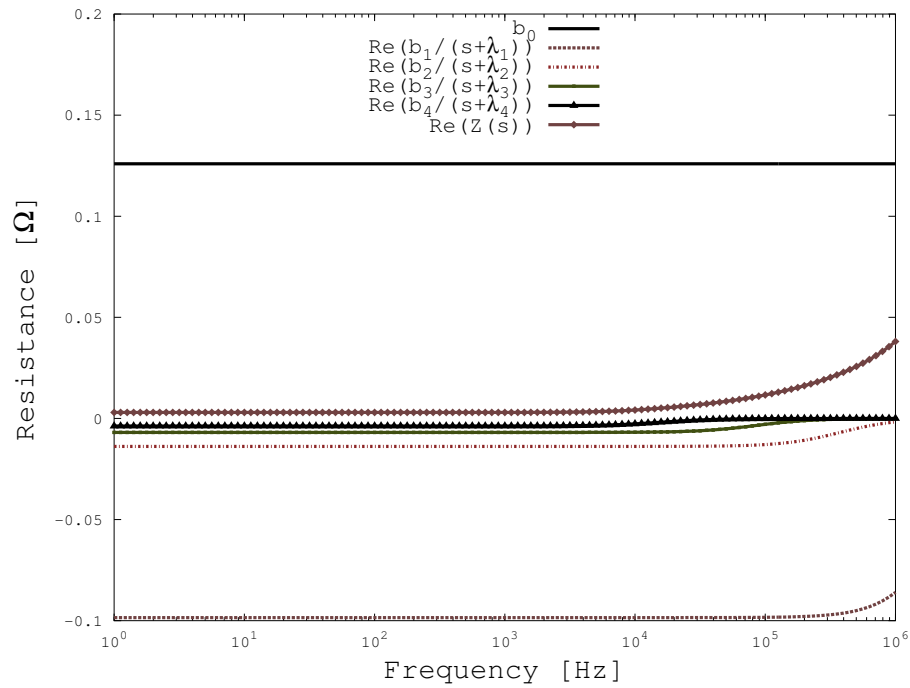


Figura 5-1.: Parte Real de la Ecuación (5-1)

## 5.2. Circuito de Mombello

En [40] el autor propone una nueva metodología y un nuevo circuito para la representación de un conjunto de bobinas acopladas magnéticamente teniendo en cuenta la variación de la frecuencia mediante un conjunto de loops de resistencias e inductancias constantes acopladas magnéticamente [41], modeladas a partir del circuito de la figura 5-2.

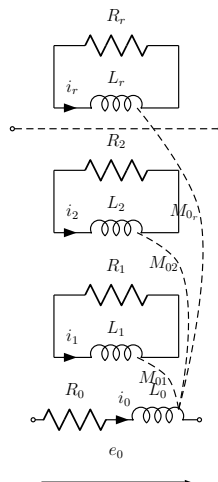


Figura 5-2.: Modelo con Dependencia Frecuencial de la impedancia  $Z$  [39]

Las ecuaciones de malla del circuito de la figura 5-2 en el dominio de la frecuencia y en forma matricial se expresan en la ecuaciones (5-2,5-3,5-4,5-5).

$$e_0 = (R_0 + sL_0) i_0 + sM_{01}i_1 + sM_{02}i_2 + \dots + sM_{0r}i_r \quad (5-2)$$

$$0 = sM_{01}i_0 + (R_1 + sL_1) i_1 \quad (5-3)$$

$$0 = sM_{02}i_0 + (R_2 + sL_2) i_2 \quad (5-4)$$

$$\vdots$$

$$0 = sM_{0r}i_0 + (R_r + sL_r) i_r \quad (5-5)$$

Despejando las ecuaciones (5-3), (5-4), (5-5) en función de (5-2) se obtiene la tensión  $e_0$  según la expresión de la ecuación (5-6).

$$e_0 = \left( R_0 + sL_0 - s^2 \frac{M_{01}^2}{R_1 + sL_1} - s^2 \frac{M_{02}^2}{R_2 + sL_2} \dots - s^2 \frac{M_{0r}^2}{R_r + sL_r} \right) i_0 \quad (5-6)$$

En base en la ecuación anterior se aplica álgebra y se calcula la impedancia según la ecuación (5-7).

$$Z = \frac{e_0}{i_0} = R_0 + sL_0 + \frac{s^2 \frac{-M_{01}^2}{L_1}}{\frac{R_1}{L_1} + s} + \frac{s^2 \frac{-M_{02}^2}{L_2}}{\frac{R_2}{L_2} + s} \dots \frac{s^2 \frac{-M_{0r}^2}{L_r}}{\frac{R_r}{L_r} + s} \quad (5-7)$$

Finalmente para  $r$  loops la impedancia se puede escribir mediante la expresión (5-8).

$$Z = R_0 + sL_0 + s^2 \sum_{i=1}^r \frac{-\frac{M_{0i}^2}{L_i}}{\frac{R_i}{L_i} + s} \quad (5-8)$$

Dentro de las formas racionales que se pueden expresar una impedancia RL según [41], la anterior expresión coincide con la ecuación (5-9).

$$Z(s) = k_0 + k_\infty s + s^2 \sum_{i=1}^r \frac{k_i}{s + \lambda_i} \quad (5-9)$$

Donde:

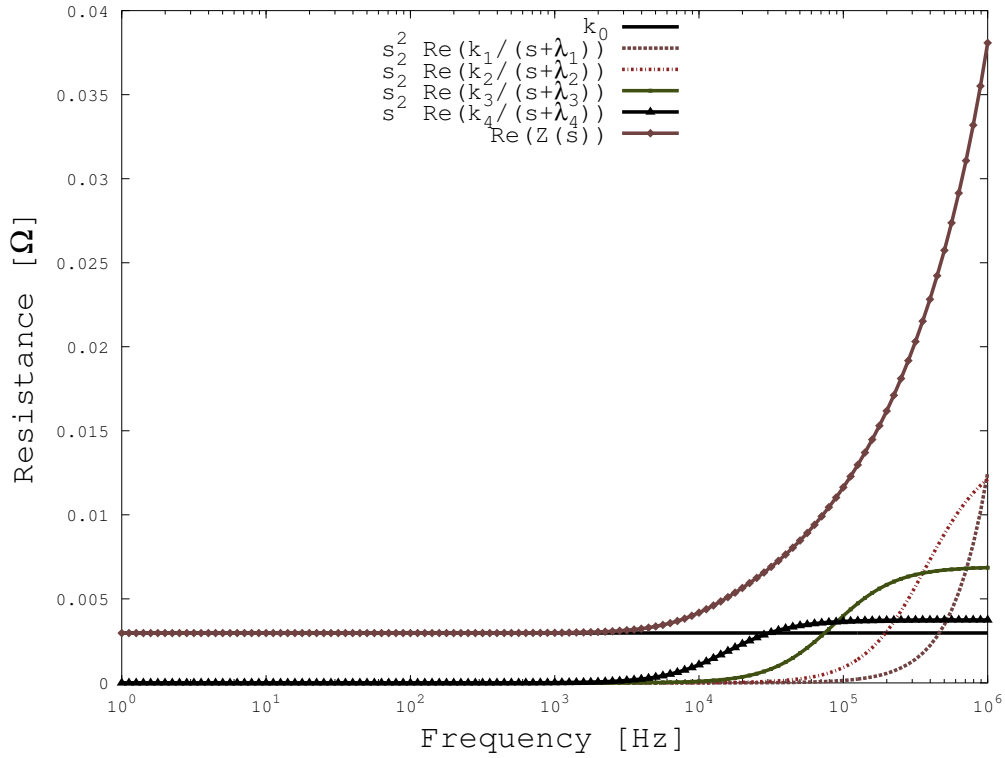
$$k_0 = R_0$$

$$k_\infty = L_0$$

$$k_i = -\frac{M_{0i}^2}{L_i} \quad (5-10)$$

$$\lambda = \frac{R_i}{L_i}$$





**Figura 5-3.:** Parte Real de la Ecuación (5-9)

En la sección anterior se describió brevemente el algoritmo vector fitting [37] para aproximar respuestas frecuenciales mediante funciones racionales. En [41] se encuentran las expresiones para las constantes de (5-9) en función de (5-1), estas se encuentran en la ecuación (5-11).

$$\begin{aligned}
 k_0 &= b_0 + \sum_{i=1}^r \frac{b_i}{\lambda_i} \\
 k_\infty &= b_\infty - \sum_{i=1}^r \frac{b_i}{\lambda_i^2} \\
 k_i &= \frac{b_i}{\lambda_i^2}
 \end{aligned} \tag{5-11}$$

En la figura 5-3 se representa la parte real de la función racional (5-9) para la espira conductora vista en el capítulo 3.2. Esta función está compuesta por un valor constante  $k_0$  y funciones que tienen la siguiente forma  $s^2 \frac{k_i}{s+\lambda_i}$ . Se puede ver como el valor de  $k_0 = 1,482 [m\Omega]$  coincide con el valor de  $R_{DC} = 1,482 [m\Omega]$ , de la misma forma que  $k_\infty = 0,5382 [\mu H]$  coincide con  $L = 0,5381 [\mu H]$ , según la tabla 3-1.

Finalmente la ecuación (5-8) puede escribirse de forma matricial según lo describe el sistema de ecuaciones (5-12).

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} R_0 + sL_0 & sM_{01} & sM_{02} & \dots & sM_{0r} \\ sM_{01} & R_1 + sL_1 & 0 & \dots & 0 \\ sM_{02} & 0 & R_2 + sL_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ sM_{0r} & 0 & 0 & \dots & R_r + sL_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0 \\ i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_r \end{bmatrix} \quad (5-12)$$

En forma general, el anterior sistema de ecuaciones lineal se puede expresar según la ecuación (5-13).

$$\mathbf{u} = \mathbf{Z}(s) \cdot \mathbf{i} \quad (5-13)$$

Una mayor explicación de este modelo y las demostraciones matemáticas se puede consultar en [19, 39, 40, 41].

### 5.3. Circuito Mombello para Múltiples Bobinas

El procedimiento anterior para el modelamiento de la dependencia frecuencial de una impedancia se puede aplicar para un conjunto de bobinas acopladas magnética y circuitalmente, según se plantea en [19]. El circuito equivalente se muestra en la figura 5-4.

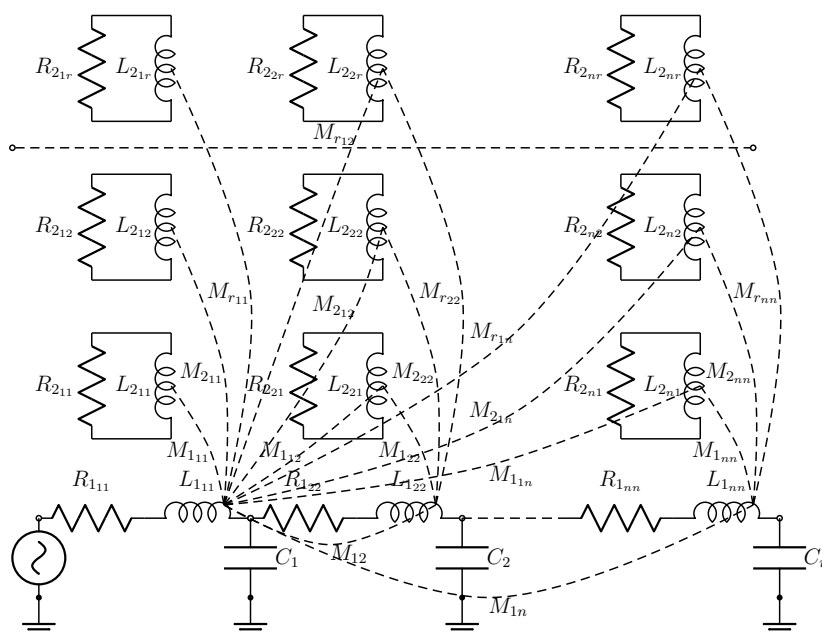


Figura 5-4.: Circuito Equivalente para Múltiples Bobinas Acopladas

El sistema de ecuaciones del circuito de la figura 5-4 tiene la misma forma de (5-8), donde las matrices  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{L}$  se describen en la ecuación (5-14).

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \quad (5-14)$$

Las matrices  $\mathbf{R}_1$  y  $\mathbf{L}_1$  están compuestas por los elementos resistivos e inductivos del circuito principal de tamaño  $n \times n$ , teniendo la forma de la ecuación (5-15).

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} R_{111} & R_{112} & \dots & R_{11n} \\ R_{121} & R_{122} & \dots & R_{12n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{1n1} & R_{1n2} & \dots & R_{1nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} L_{111} & L_{112} & \dots & L_{11n} \\ L_{121} & L_{122} & \dots & L_{12n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{1n1} & L_{1n2} & \dots & L_{1nn} \end{bmatrix} \quad (5-15)$$

Las matrices  $\mathbf{R}_2$  y  $\mathbf{L}_2$  están compuestas por los elementos adicionales y tienen un tamaño de  $n \cdot r \times n \cdot r$  según la ecuación (5-16).

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{21} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{R}_{2r} \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{21} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{L}_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{L}_{2r} \end{bmatrix} \quad (5-16)$$

Donde las submatrices  $\mathbf{R}_{2_k}$  y  $\mathbf{L}_{2_k}$  son de tamaño  $n \times n$  y diagonales, cuyos elementos son las resistencias e inductancias de cada loop adicional, tal como se puede observar en la ecuación (5-17).

$$\mathbf{R}_{2_k} = \begin{bmatrix} R_{2_{1k}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{2_{2k}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_{2_{kn}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}_{2_k} = \begin{bmatrix} L_{2_{1k}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_{2_{2k}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & L_{2_{kn}} \end{bmatrix} \quad (5-17)$$

Finalmente la matriz de inductancias mutuas  $\mathbf{M}$  de la ecuación (5-18), posee un tamaño de  $n, n \times r$ .

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \dots & \mathbf{M}_r \end{bmatrix} \quad (5-18)$$

Donde las submatrices  $\mathbf{M}_k$  tienen un tamaño  $n \times n$  y están compuestas por los elementos de la ecuación (5-19).

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} M_{k11} & M_{k12} & \dots & M_{k1n} \\ M_{k12} & M_{k22} & \dots & M_{k2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k1n} & M_{k2n} & \dots & M_{knn} \end{bmatrix} \quad (5-19)$$

Finalmente la impedancia global del sistema se puede escribir según la expresión (5-20) tal como se hace en [19].

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 + s\mathbf{L}_1 & s\mathbf{M}_1 & s\mathbf{M}_2 & \dots & s\mathbf{M}_r \\ \mathbf{M}_1^T & \mathbf{R}_{21} + s\mathbf{L}_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{M}_2^T & 0 & \mathbf{R}_{22} + s\mathbf{L}_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ \mathbf{M}_r^T & 0 & 0 & \dots & \mathbf{R}_{2r} + s\mathbf{L}_{2r} \end{bmatrix} \quad (5-20)$$

Los elementos no nulos de la matriz (5-20) aplicada al devanado estudiado en la sección 6 con 4 loops adicionales se presenta en la figura 5-5.

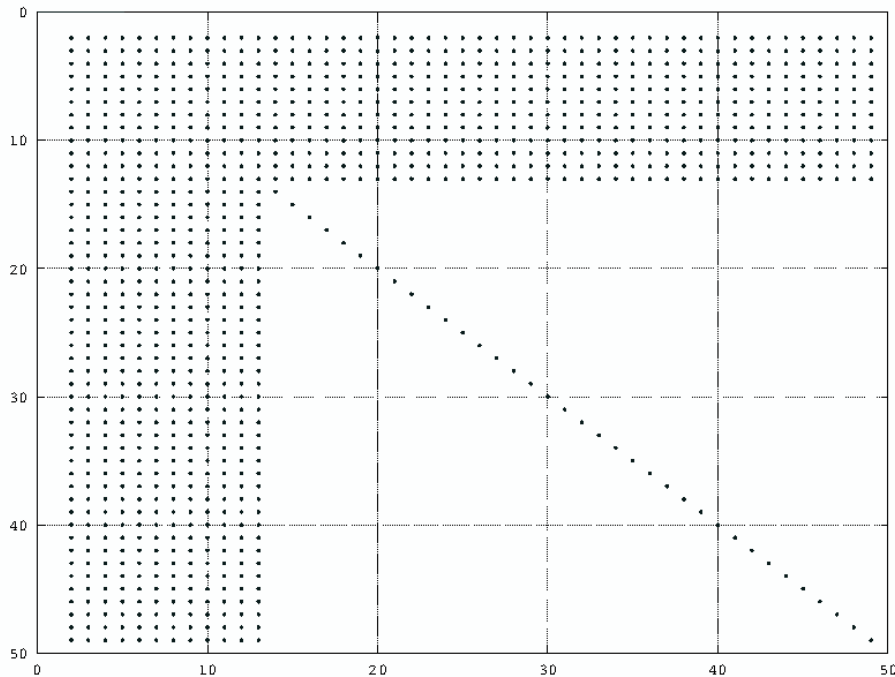


Figura 5-5.: Elementos no Nulos del Circuito Mombello

Las submatrices de impedancias mutuas  $\mathbf{M}_i$  se calculan en base en las ecuaciones (5-10) después de haber hecho la optimización de inductancias e impedancias mediante vector fitting, como se muestra en la ecuación (5-21).

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{N}_k^{1/2} \quad (5-21)$$

Donde:

$$\mathbf{N}_k = \begin{bmatrix} -K_{11}L_{11} & -K_{21}L_{21} & \dots & -K_{n1}L_{n1} \\ -K_{21}L_{21} & -K_{22}L_{22} & \dots & -K_{n2}L_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -K_{n1}L_{n1} & -K_{n2}L_{n2} & \dots & -K_{nn}L_{nn} \end{bmatrix} \quad (5-22)$$

## 5.4. Interpretación Física del Modelo

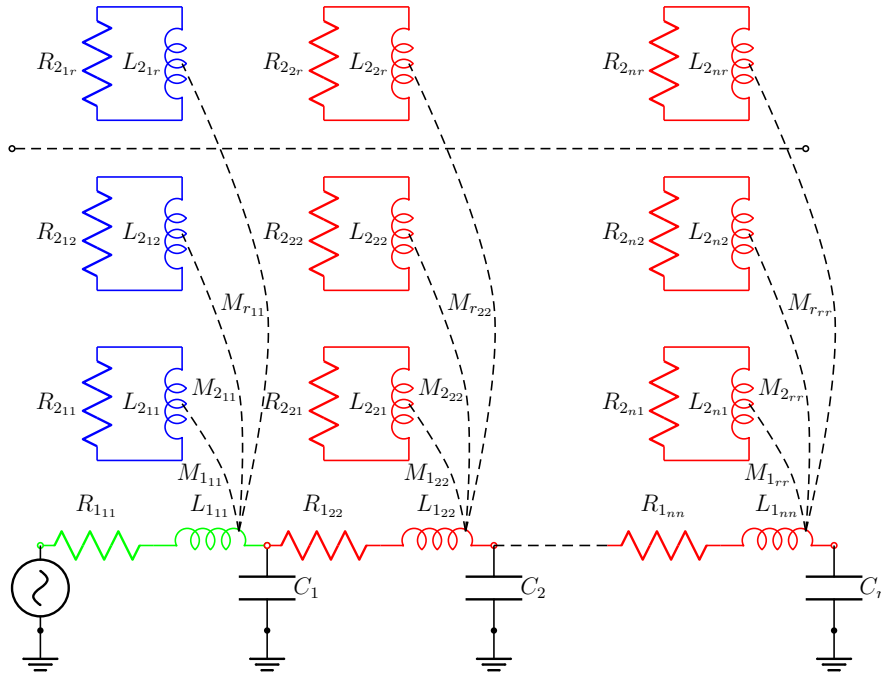
Según lo estudiado en el capítulo 3 las pérdidas en devanados en transformadores se pueden clasificar en tres: pérdidas *DC*, pérdidas por efecto skin y pérdidas por proximidad.

El circuito propuesto por Mombello permite obtener la siguiente interpretación física:

- La redistribución de campo magnético genera corrientes de eddy circulantes dentro del conductor, los circuitos adicionales representan estas corrientes y las variaciones de las inductancias en función de la frecuencia.
- Los elementos  $\mathbf{R}_1$  y  $\mathbf{L}_1$  modelan las pérdidas *DC*, tal como se pudo concluir de la figura 5-3.
- El efecto skin que se genera como producto de corrientes *AC* que pasan a través de un conductor se modela mediante los circuitos auxiliares que pertenecen a la misma columna.
- El efecto de proximidad sobre un elemento se modela mediante las impedancias mutuas de los circuitos no pertenecientes a la columna de dicho elemento.
- Todas las corrientes inducidas son producto de campos magnéticos que se generan por las corrientes que pasan por los conductores, la distribución de estos campos en función de la frecuencia se modelan mediante las inductancias mutuas  $M$ .

En la figura 5-6 se representan los fenómenos que actúan sobre el primer elemento, el color verde representa la resistencia e inductancia *DC*, el color azul representa el comportamiento del efecto skin y color rojo indica los elementos que modelan en efecto de proximidad en el

conductor acoplado mediante las inductancias mutuas  $M$ .



**Figura 5-6.:** Interpretación Física del Modelo Mombello

En este capítulo se describió el procedimiento para calcular los parámetros del circuito equivalente Mombello a partir del conocimiento del comportamiento de los elementos  $R$  y  $L$  en la frecuencia, con la ayuda del algoritmo vector fitting. Para lograr este objetivo se desarrolló un script en Octave<sup>TM</sup>[42] que toma los valores de impedancia y calcula la respuesta en frecuencia para circuitos con topologías según las figuras 4-1 y 5-4 .

## 6. Análisis de Resultados

En este capítulo se utiliza el método de elementos finitos *FEM* con el objetivo de conocer el comportamiento de resistencias e inductancias de devanados de transformadores en la frecuencia, luego se aplica vector fitting para calcular los elementos del circuito Mombello equivalente con el propósito de simular resonancias.

### 6.1. Análisis de la Espira Conductor Usando Circuito Mombello

En la figura 6-1 se observa el circuito Mombello equivalente de la espira conductora estudiada en el capítulo 3.

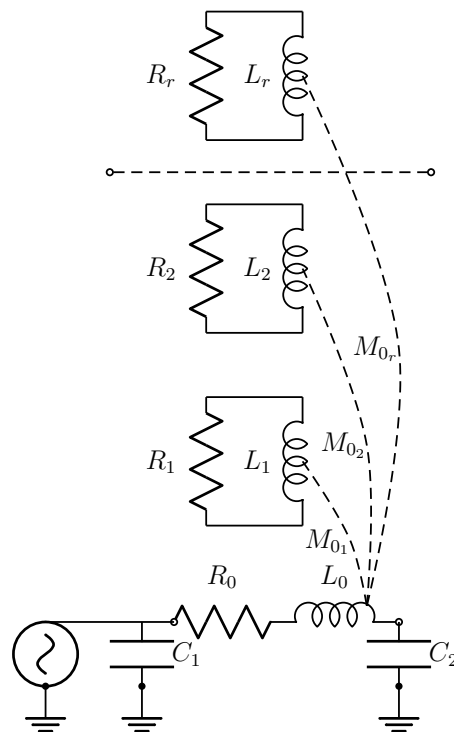
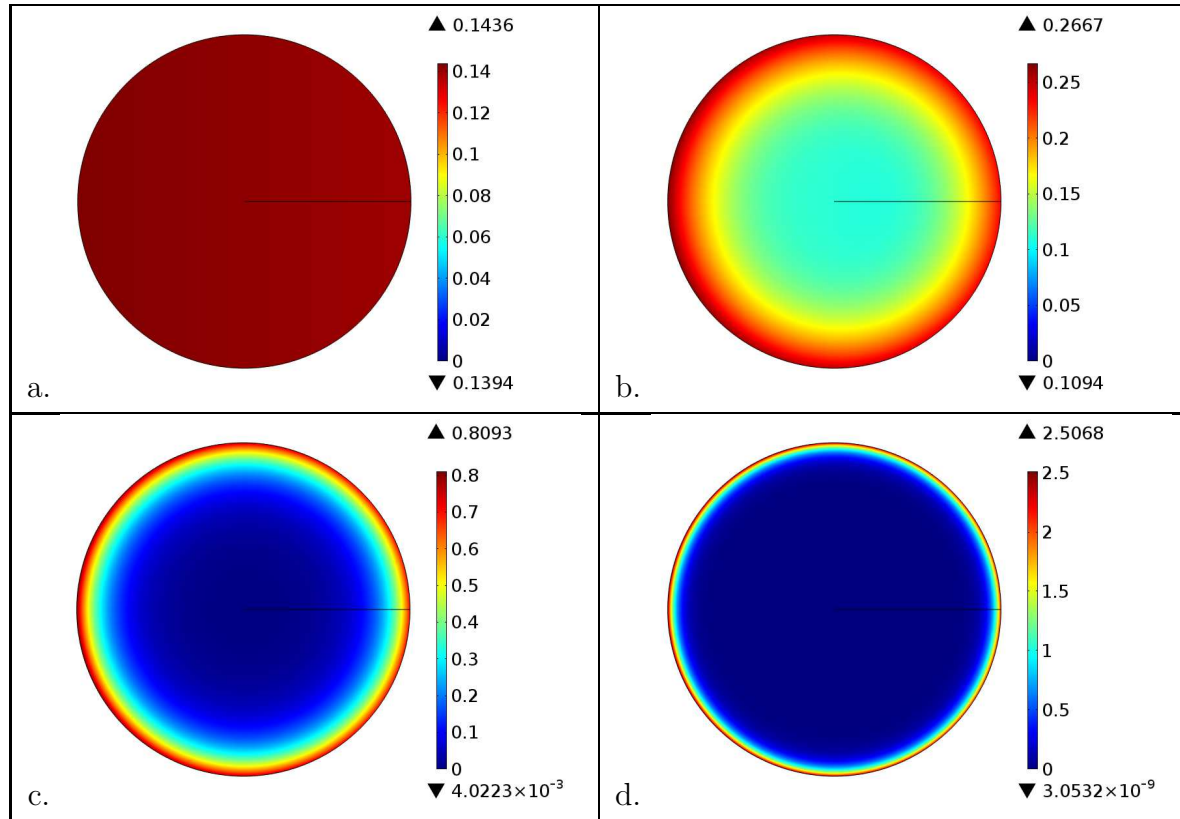


Figura 6-1.: Circuito Mombello de Una Espira

La distribución de densidad de corriente dentro del conductor para diferentes frecuencias

se puede observar en la figura 6-2. La relación de  $|J|$  a bajas frecuencias  $1 [Hz]$  y altas frecuencias  $1 [MHz]$  es alrededor de 18 veces.  $\vec{J}$  tiende a establecerse en la superficie del conductor con una distribución no homogénea. En el centro del conductor  $|J|$  tiende a ser cero a medida que aumenta la frecuencia.



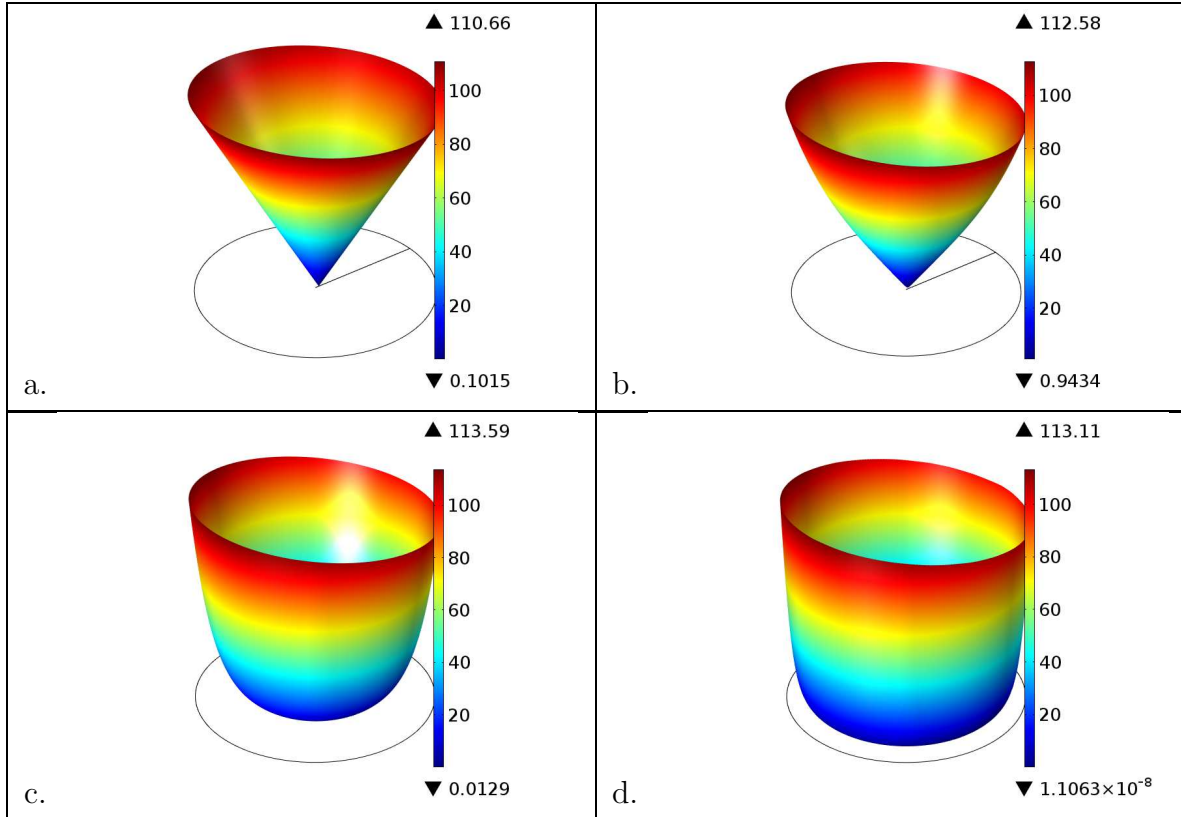
**Figura 6-2.:**  $|J|$  en una Espira  $[A/mm^2]$ . a)  $1 [Hz]$ , b)  $10 [KHz]$ , c)  $100 [KHz]$ , d)  $1 [MHz]$

La distribución de intensidad de campo magnético  $|H|$  dentro de la espira conductora se puede observar en la figura 6-3 para diferentes valores de frecuencias, aunque los valores máximos de  $|H|$  son similares y se encuentran en las superficie del conductor dentro de este la distribución es diferente. Las corrientes de eddy inducidas dentro del conductor generan un campo magnético que se opone a la variación del campo que lo genera.

El flujo magnético  $\phi_M$  dentro del conductor descrito en la ecuación (B-12) disminuye a medida que aumenta la frecuencia debido a que este es proporcional a la densidad de flujo  $\vec{B}$ . Si se calcula la inductancia de la espira a partir de la ecuación (B-14), la corriente se mantiene constante, pero el flujo disminuye con la frecuencia generando que el valor de la inductancia sea inversamente proporcional a  $\omega$ . Vale la pena recordar que esta disminución de flujo solo se presenta en el interior de conductor, en volumen exterior el valor del flujo permanece



constante en la espira conductora.



**Figura 6-3.:**  $|H|$  en una Espira [A/m]. a) 1 [Hz], b) 10 [KHz], c) 100 [KHz], d) 1 [MHz]

En el circuito equivalente de la figura 6-1 a media que se aumenta el número de ramas adicionales  $r = 1$ ,  $r = 2$ ,  $r = 4$  se mejora la correlación entre la resistencia, inductancia e impedancia, tal como se puede observar en las figuras 6-4 y 6-5. Para  $r = 4$  circuitos adicionales la correlación entre los valores simulados mediante *FEM* y los calculados mediante vector fitting son cercanos al 100 %.

Los valores de inductancia y resistencia para  $r = 1$ , aproximados mediante funciones racionales, tienen un bajo nivel de correlación; para la impedancia  $Z = R + j\omega L$  la correlación es mayor, como se puede observar en la figura 6-5. Para  $r = 2$  se mantienen las diferencias entre el comportamiento simulado de  $R$  y  $L$  y el calculado mediante vector fitting, pero el valor de la impedancia  $Z$  es similar.

La influencia del número de loops adicionales dentro del circuito resonante 6-1 se observa en la figura 6-6. Para  $r = 1$  loops la resistencia descrita mediante la función racional (5-9) es mayor en la frecuencia a la que ocurre la resonancia y origina que el valor de tensión

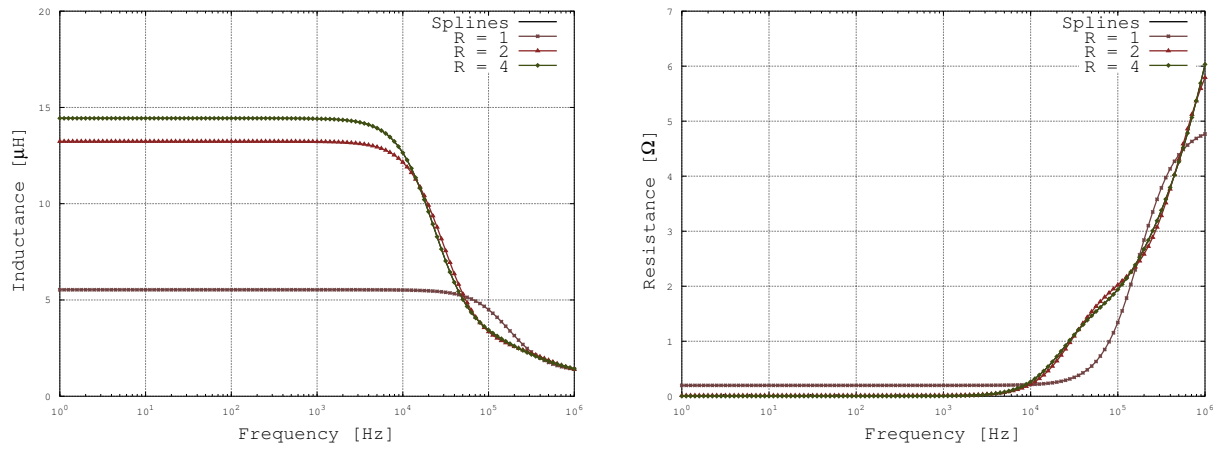


Figura 6-4.: Fitting de  $R$  y  $L$  para Diferentes Loops Adicionales

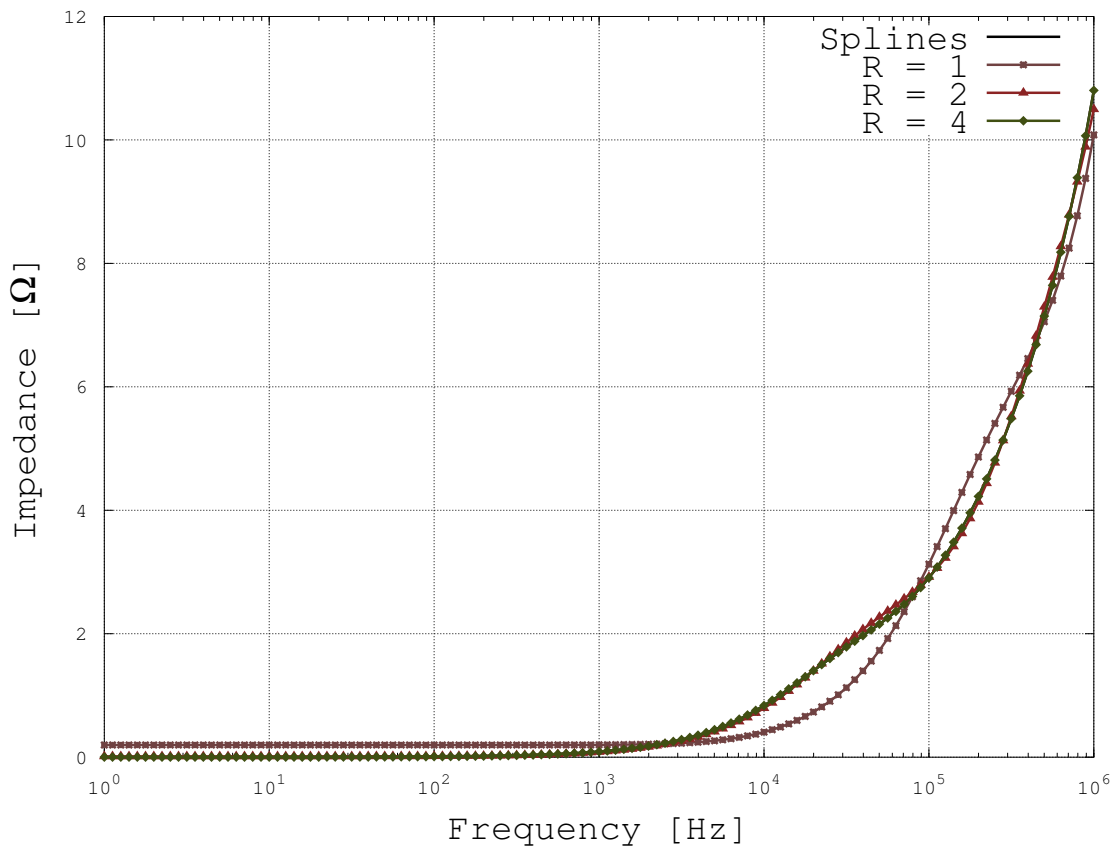
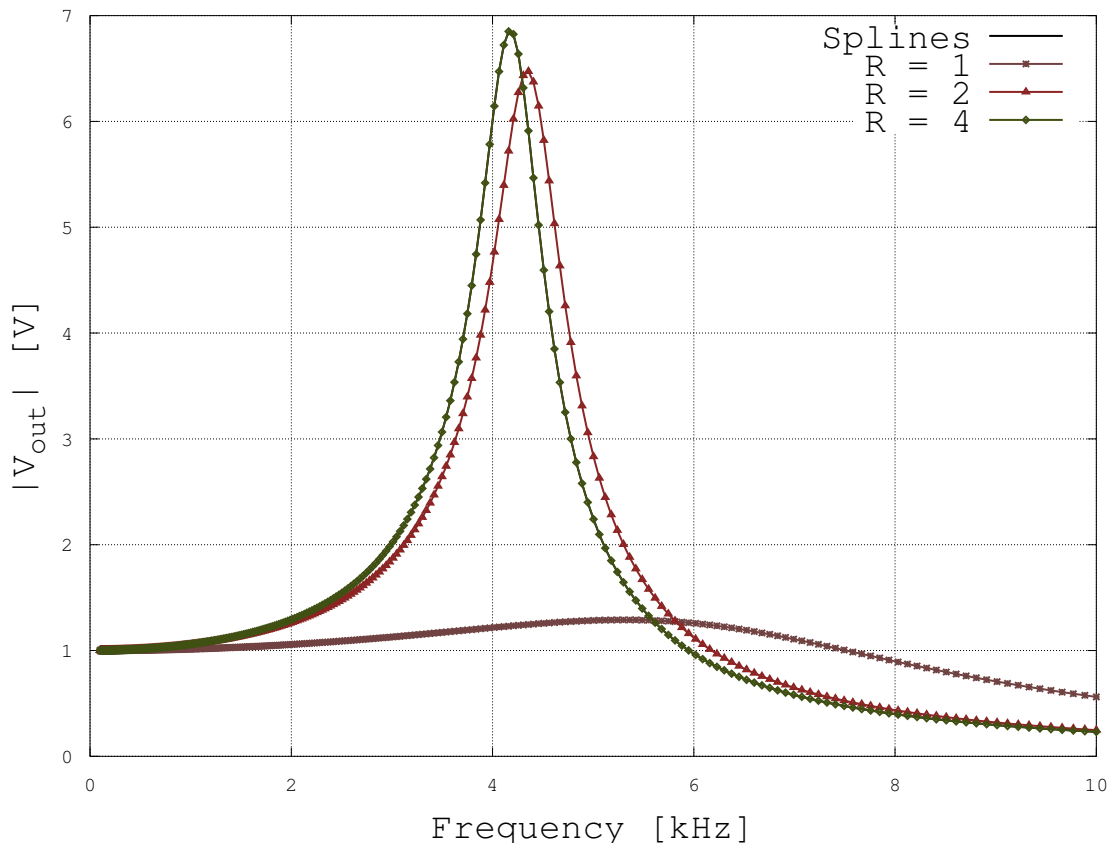


Figura 6-5.: Fitting de  $Z$  para Diferentes Loops Adicionales



**Figura 6-6.:** Tensión en la Espira Conductor para Diferentes Loops

simulada con  $r = 1$  sea menor. La inductancia tiene un valor menor para  $r = 1$ , esto trae como consecuencia que la frecuencia a la que se presenta la resonancia sea mayor.

Para un valor de  $r = 2$  la resistencia es mayor durante la resonancia, esto genera una disminución en el valor máximo de la tensión, el valor de la inductancia es menor generando un desplazamiento de la resonancia hacia una mayor frecuencia.

## 6.2. Análisis de los Devanados de Transformadores

La validación del modelo se realizó con mediciones de tensiones en cada nodo e impedancias propias y mutuas hechas en [19]. El transformador en estudio posee un núcleo de hierro de tres columnas tipo apilado, con 12 bobinas tipo disco de 10 espiras cada uno que conectadas en serie conforman el devanado bajo estudio. El conductor de las espiras es de tipo rectangular con dimensiones  $2,5 \times 7,5 [mm]$  con un radio de curvatura de  $0,5 [mm]$ .

En la figura 6-7 se observa la tensión medida en el nodo 2 y la tensión calculada utilizando el circuito equivalente Mombello con cuatro loops adicionales  $r = 4$ . Los parámetros del circuito son calculados en base a las impedancias medidas, a las cuales se les aplica vector fitting para el cálculo de los elementos resistivos e inductivos.

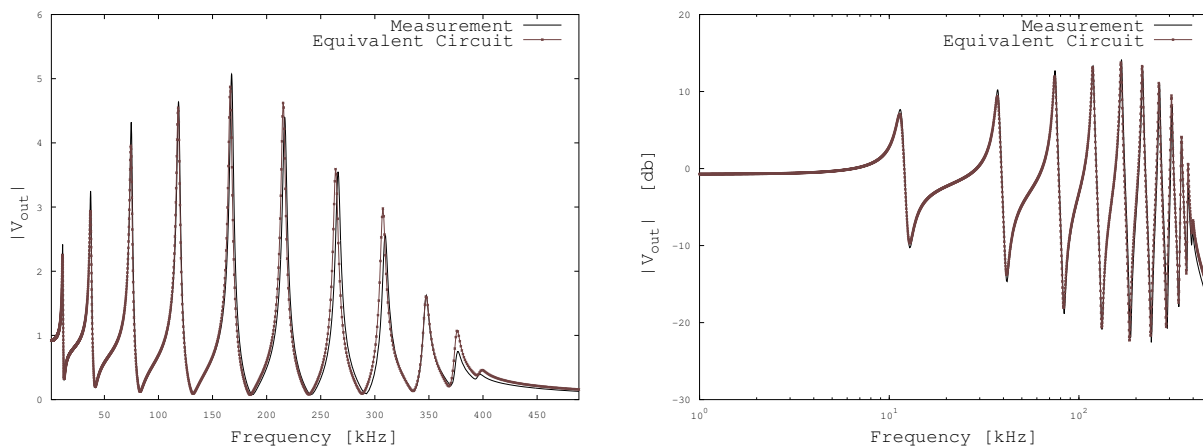


Figura 6-7.: Tensión en el Nodo 2

En la figura 6-8 se muestra el cálculo y la medición de tensión en el nodo 9. Se puede observar una correlación cercana al 99 % entre las medidas y el cálculo a partir de un circuito equivalente tanto para el nodo 2 como para el 9. Los valores de los parámetros calculados para este circuito se encuentran en el apéndice D.

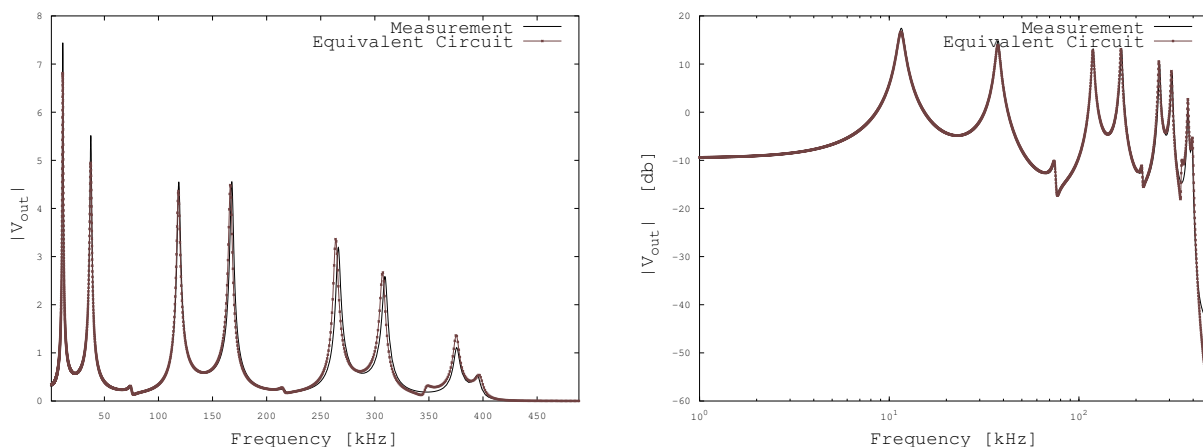


Figura 6-8.: Tensión en el Nodo 9

### 6.2.1. Influencia de Elementos Constantes

En esta sección se analiza la influencia de utilizar elementos constantes en el devanado bajo estudio. En las figuras 6-9 y 6-10 se observa el comportamiento de la tensión. El comportamiento es muy similar al estudiado en el capítulo 3, en el que se analiza la espira conductora. Como consecuencia de utilizar elementos resistivos constantes se presentan mayores tensiones en las diferentes frecuencias de resonancia. Al utilizar inductancias que no varían con la frecuencia, se va a presentar un desplazamiento de las frecuencias de resonancia. Como la inductancia disminuye con la frecuencia, el desplazamiento de las resonancias va a ser hacia frecuencias más bajas, como consecuencia de usar inductancias constantes.

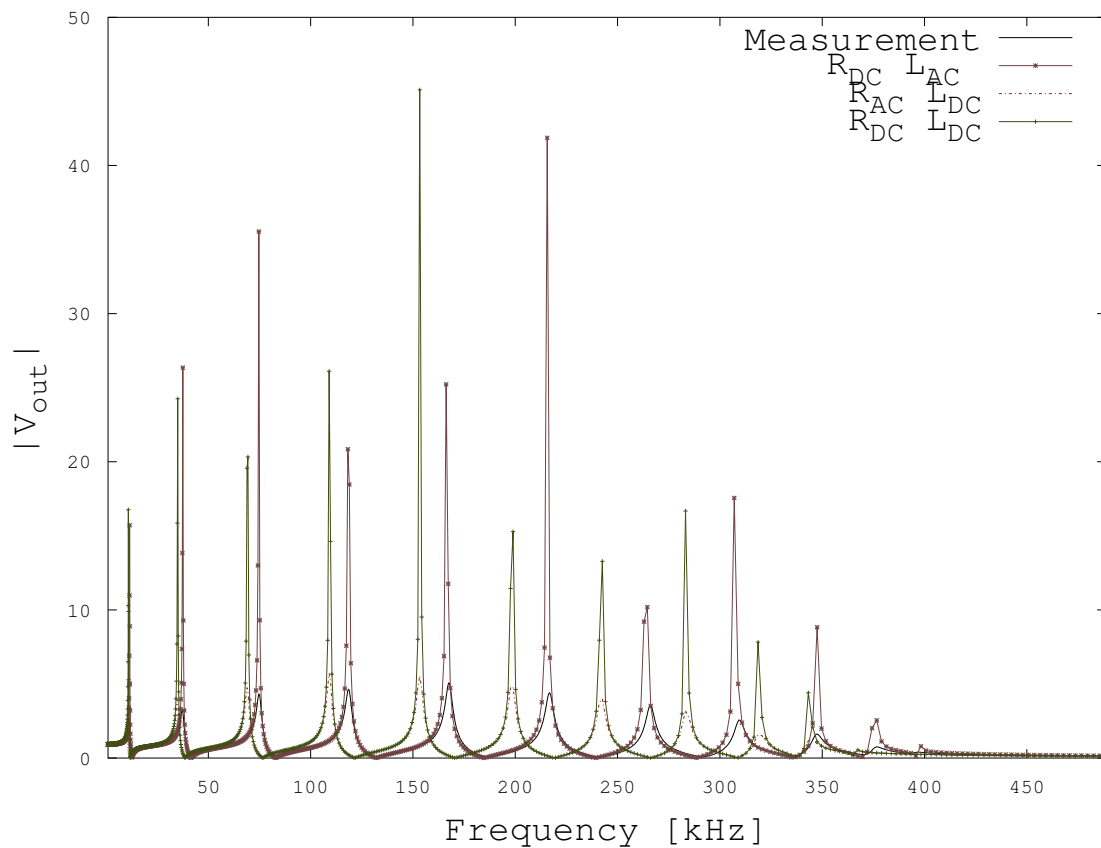
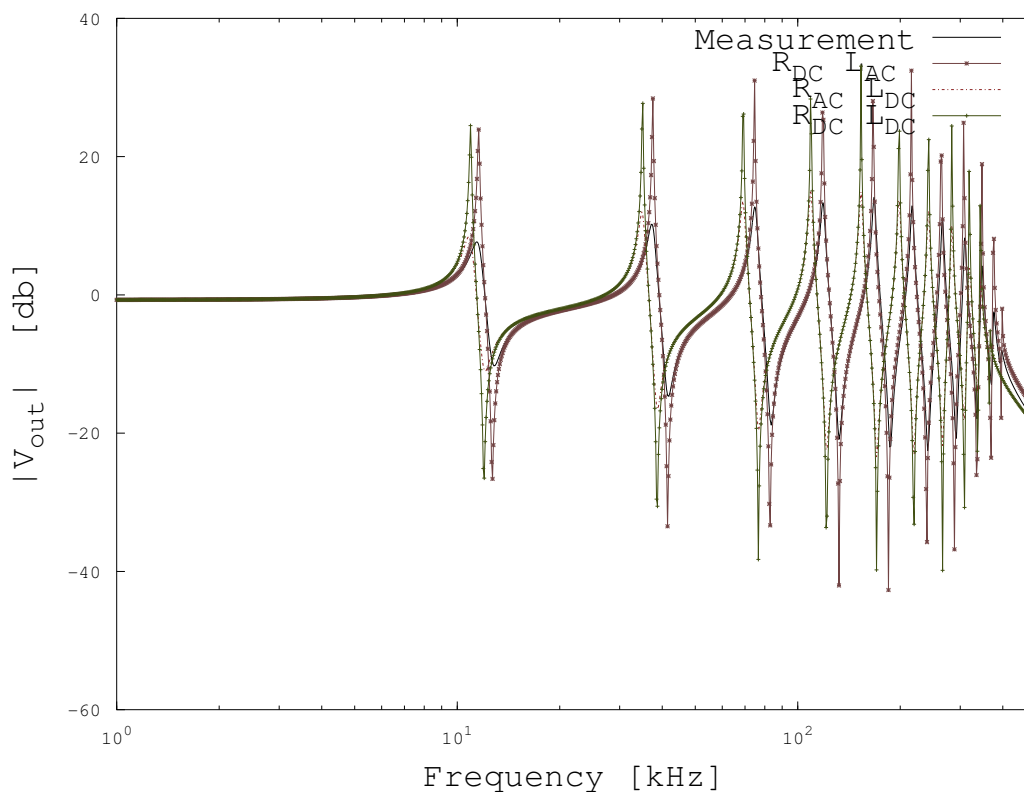


Figura 6-9.: Influencia de Elementos Constantes en la Tensión del Nodo 2

Al utilizar resistencias constantes  $DC$ , se aumentan los valores máximos de las resonancias a medida que la frecuencia se incrementa, esto es debido a que la relación entre resistencias  $AC$  y  $DC$  se incrementan a altas frecuencias.



**Figura 6-10.:** Influencia de Elementos Constantes en la Tensión del Nodo 2, Diagrama de Bode

### 6.2.2. Influencia del Número de Loops

El circuito equivalente Mombello, está compuesto por diferentes loops adicionales que le dan una mejor aproximación al comportamiento de los elementos resistivos e inductivos, y por ende, describe de una mejor manera la matriz de impedancias  $\mathbf{Z}$  en la frecuencia mediante elementos  $R$  y  $L$  constantes. El incremento del número de loops adicionales trae como consecuencia un mayor tamaño de la matriz  $\mathbf{Z}$ . En la figura 6-11 se puede observar la influencia del número de loops adicionales ( $r = 1, r = 2, r = 4$ ) comparada con la tensión medida en el nodo 2.

En la figura 6-11 se muestra como el número de loops solo afecta la respuesta a bajas frecuencias, esto se explica con la ayuda de la figura 6-12, en la que se puede observar que la aproximación utilizando funciones racionales para bajas frecuencias con  $r = 1$  y  $r = 2$  presenta baja correlación, pero para altas frecuencias tienen comportamientos muy similares. En la primera resonancia se presenta una variación en la amplitud y un desplazamiento en la frecuencia.

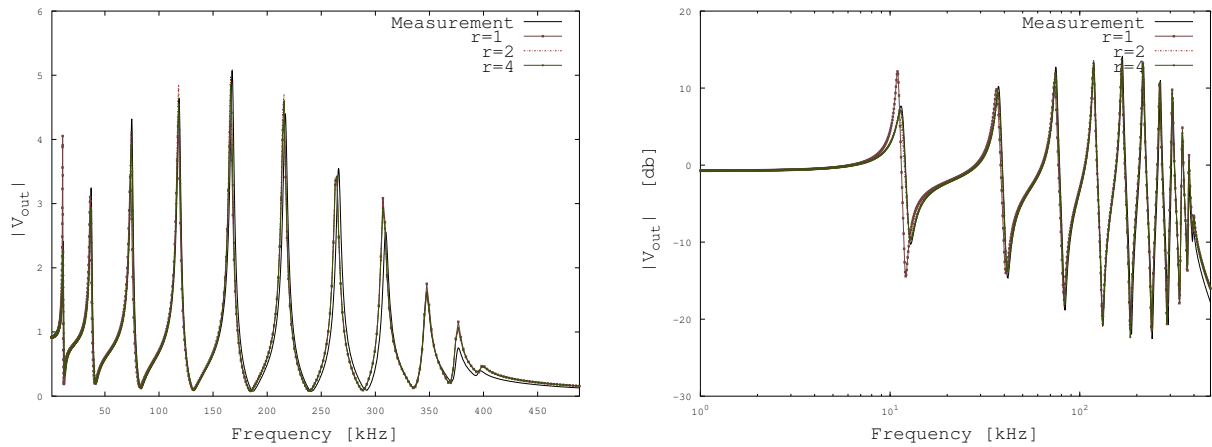


Figura 6-11.: Tensión en el Nodo 2 para Diferentes Número de Loops

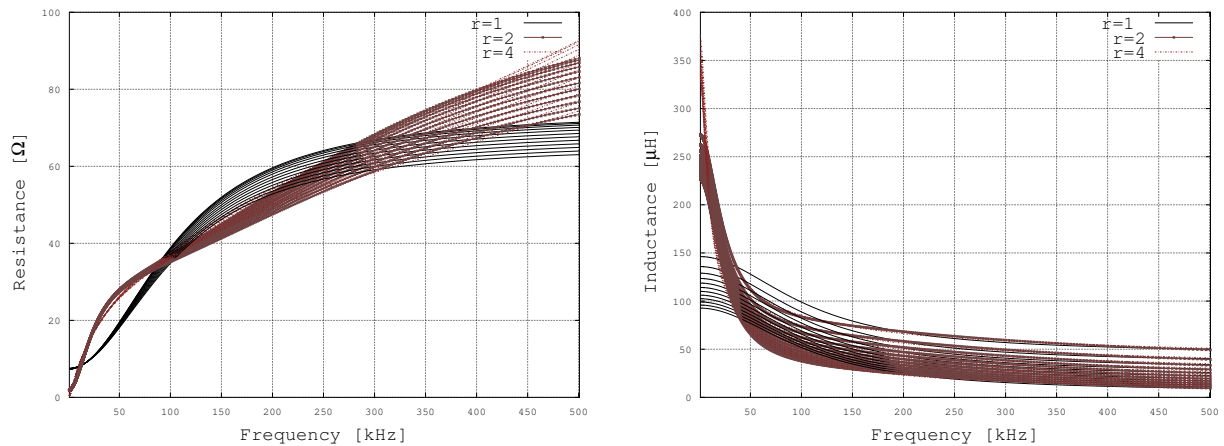


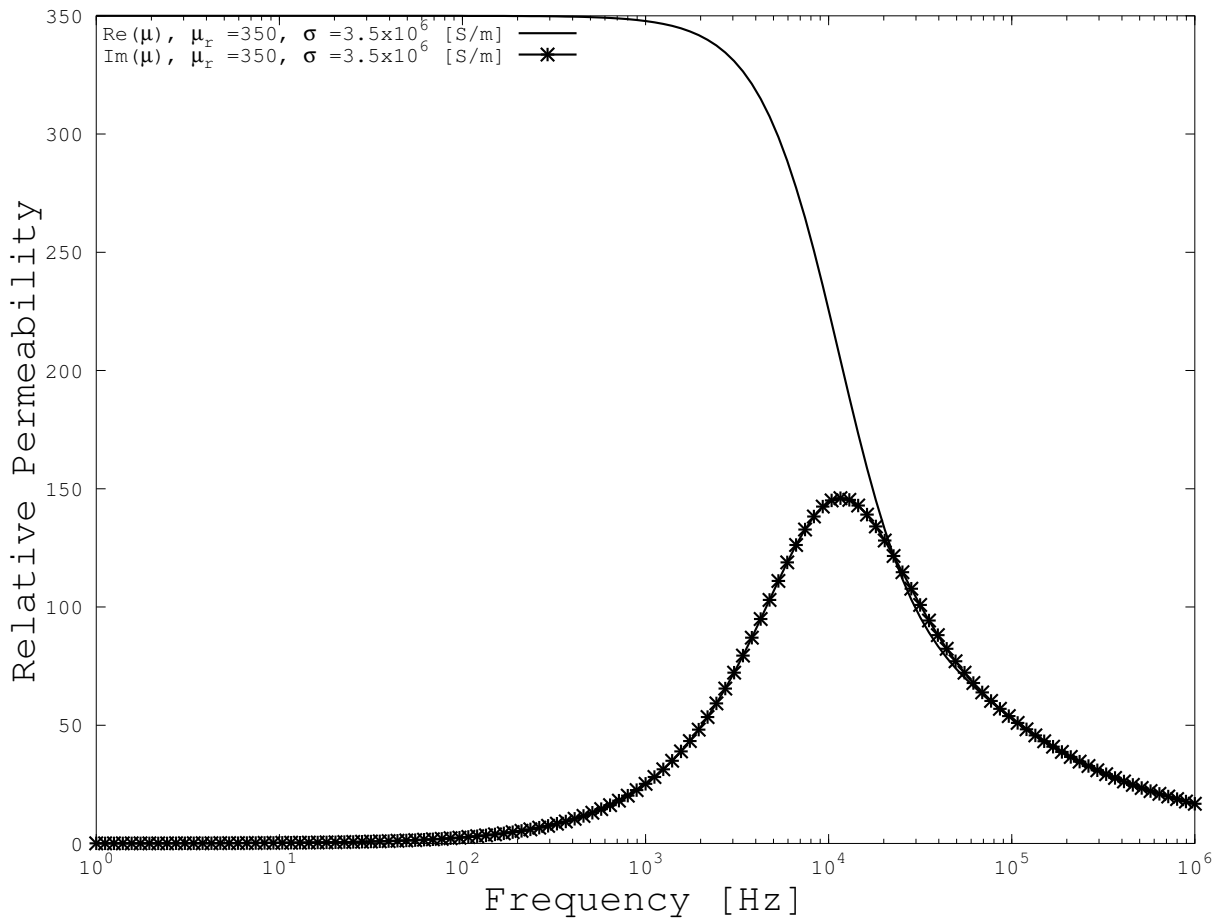
Figura 6-12.:  $R_{li}$  y  $L_{li}$  con Diferentes Número de Loops en Función de la Frecuencia

### 6.2.3. Modelamiento Mediante FEM

A partir de la geometría del transformador bajo estudio, se modeló mediante elementos finitos con el fin de calcular impedancias propias y mutuas aplicando superposición. Para el modelamiento del núcleo se utilizó la permeabilidad inicial en la curva  $BH$  de  $\mu_r = 350$ , una conductividad igual a  $\sigma = 3,5 \times 10^6 \left[\frac{S}{m}\right]$  y un espesor de lamina de  $L = 0,3 [mm]$ . El comportamiento de la parte real e imaginaria de la permeabilidad compleja  $\mu^*$  se puede observar en la figura 6-13, calculada con la ecuación (3-14).

El modelo de elementos finitos fue analizado en el módulo *AC/DC*, *Magnetic – Fields* del Software Comsol Multiphysics<sup>TM</sup>, y se estudió como un problema en el dominio de la

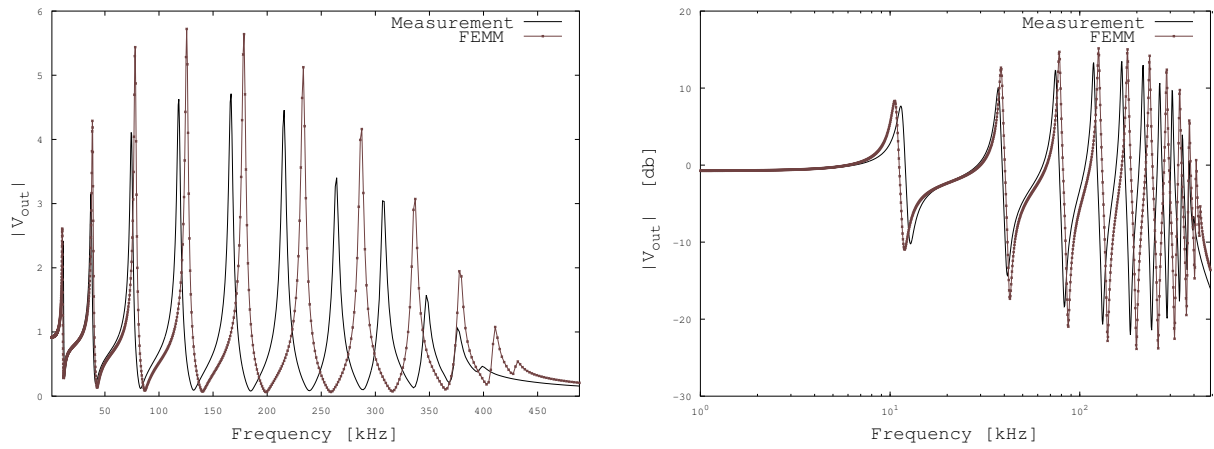
frecuencia. En el enmallado se utilizaron 186670 elementos triangulares y se realizó una distribución manual del número de elementos en los vértices del núcleo y de cada conductor, con el fin de minimizar el error debido al efecto skin depth. Para el barrido en frecuencia se hizo una distribución logarítmica de 50 frecuencias entre 1 [kHz] y 500 [kHz] con el fin de describir el comportamiento de la impedancia. Como fuente se utilizó una intensidad de corriente  $i_{ii} = 1 [A]$ . Las impedancias propias y mutuas se calcularon con la ecuación (B-20). Para la obtención de la matriz  $\mathbf{Z}$  se realizaron  $50 \times 12$  simulaciones.



**Figura 6-13.:** Permeabilidad Compleja  $\mu^*$

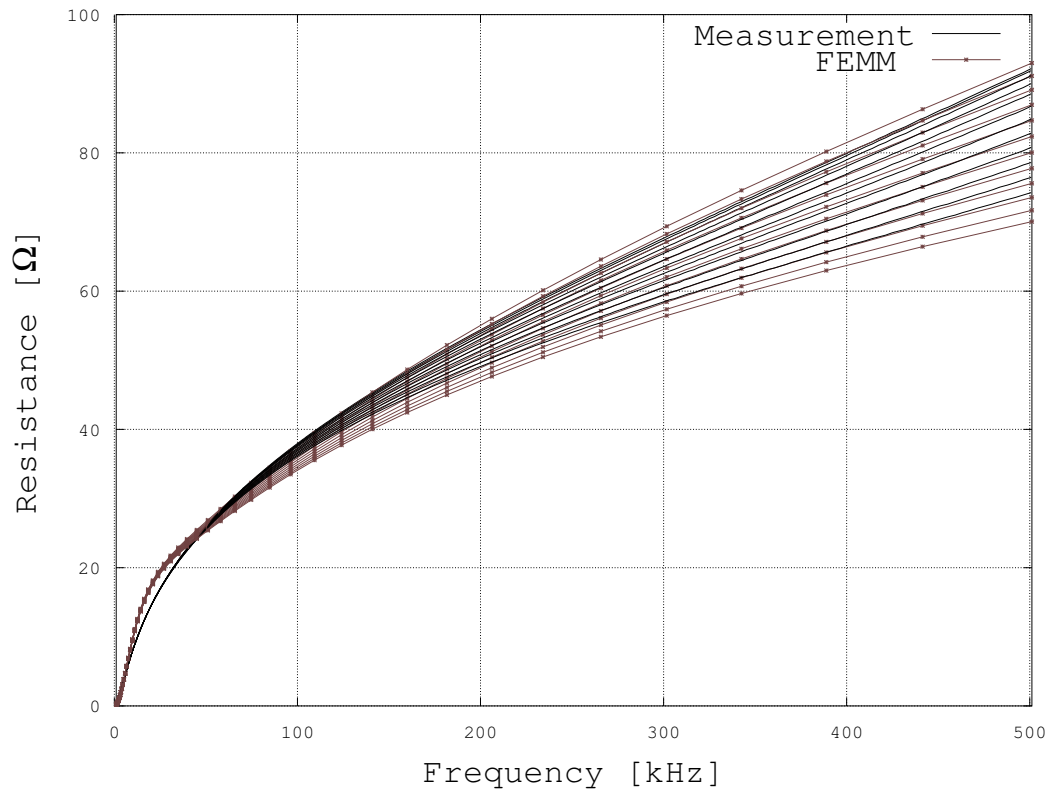
La tensión en el nodo 2, medida y calculada a partir de simulaciones realizadas en *FEM*, con la ayuda de un circuito equivalente se observa en la figura 6-14, donde la respuesta en frecuencia *FRA* conserva un comportamiento similar respecto a la forma de las resonancias, presentándose un desplazamiento en las frecuencias de resonancia a medida que aumenta  $\omega$ .



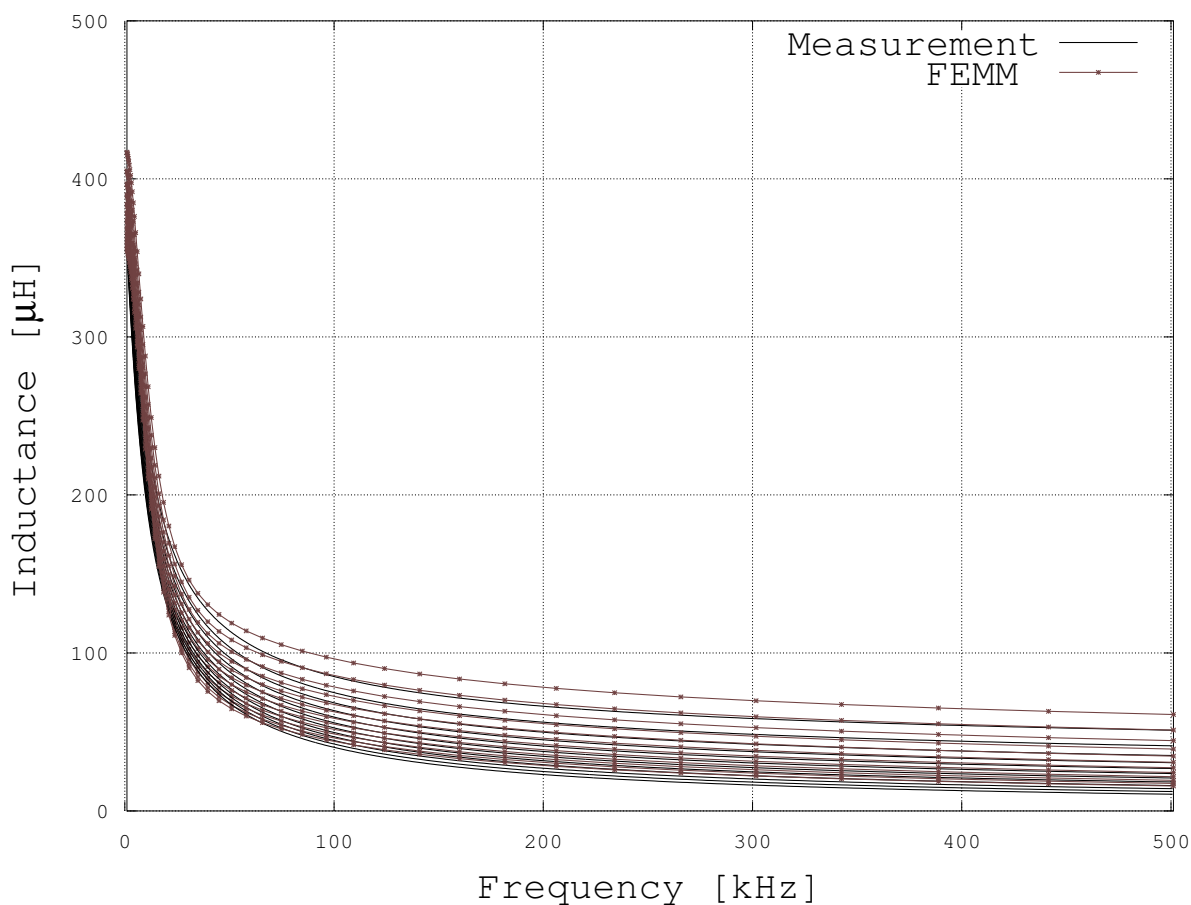


**Figura 6-14.:** Tensión en el Nodo 2 Mediante *FEM*

El comportamiento de las resistencias e inductancias propias y mutuas calculadas y medidas se observa en las figuras 6-15 y 6-16, donde el comportamiento es similar.



**Figura 6-15.:**  $R_{li}$  Medidas y Calculadas en Función de la Frecuencia



**Figura 6-16.:**  $L_{1i}$  Medidas y Calculadas en Función de la Frecuencia

### Influencia del Núcleo

La influencia del núcleo se puede modelar con la variación de la permeabilidad y la conductividad dentro de la permeabilidad compleja. Para poder observar la influencia del núcleo se plantean dos escenarios, el primero consiste en mantener la conductividad constante y variar la permeabilidad  $\mu_r$ . El comportamiento de  $\mu^*$  se observa en la figura 6-17. A medida que aumenta la permeabilidad  $\mu_r$  aumenta la parte real e imaginaria de la permeabilidad compleja  $\mu^*$ .

La tensión en el nodo 2 con diferentes valores de  $\mu_r$  se presenta en la figura 6-18 donde se puede observar como a pesar de cambiar los valores de permeabilidad inicial, las frecuencias de resonancia se mantienen.

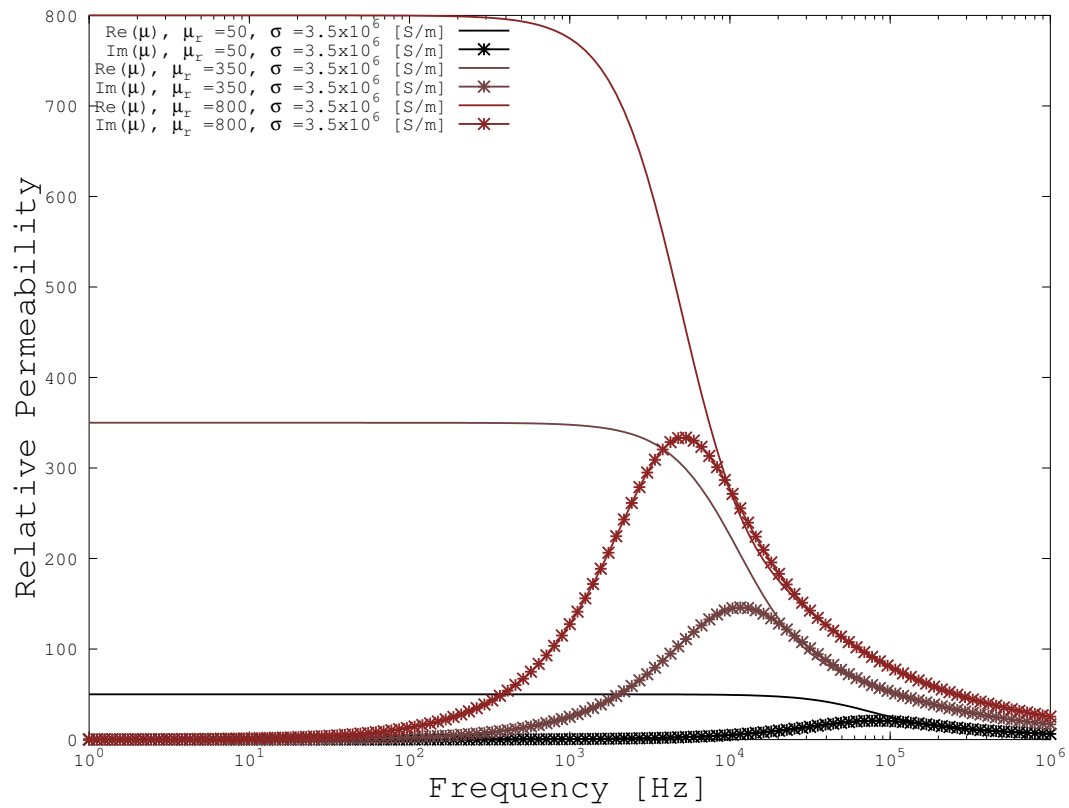


Figura 6-17.: Influencia de  $\mu_r$  en  $\mu^*$

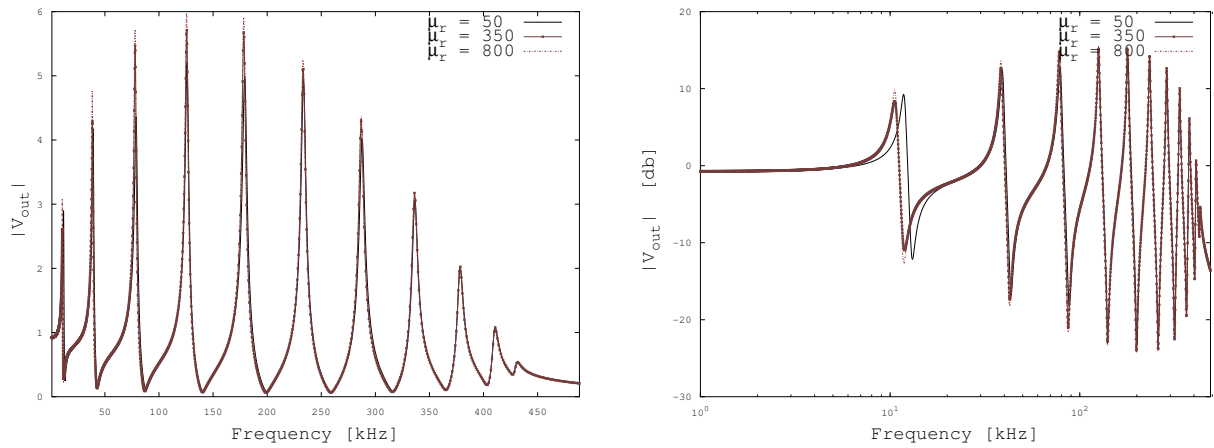


Figura 6-18.: Influencia de la Permeabilidad en la Tensión del Nodo 2

La variación de  $R$  y  $L$  para diferentes valores de  $\mu_r$  se observa en las figuras 6-19 y 6-20, donde se puede apreciar la variación en los parámetros resistivos e inductivos.

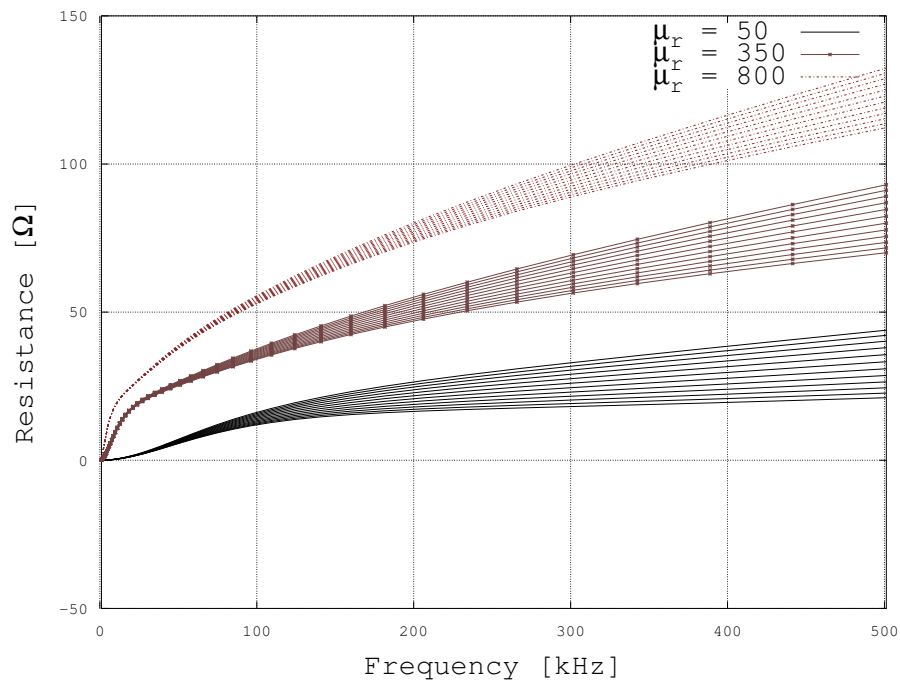


Figura 6-19.: Influencia de la permeabilidad en  $R_{1i}$

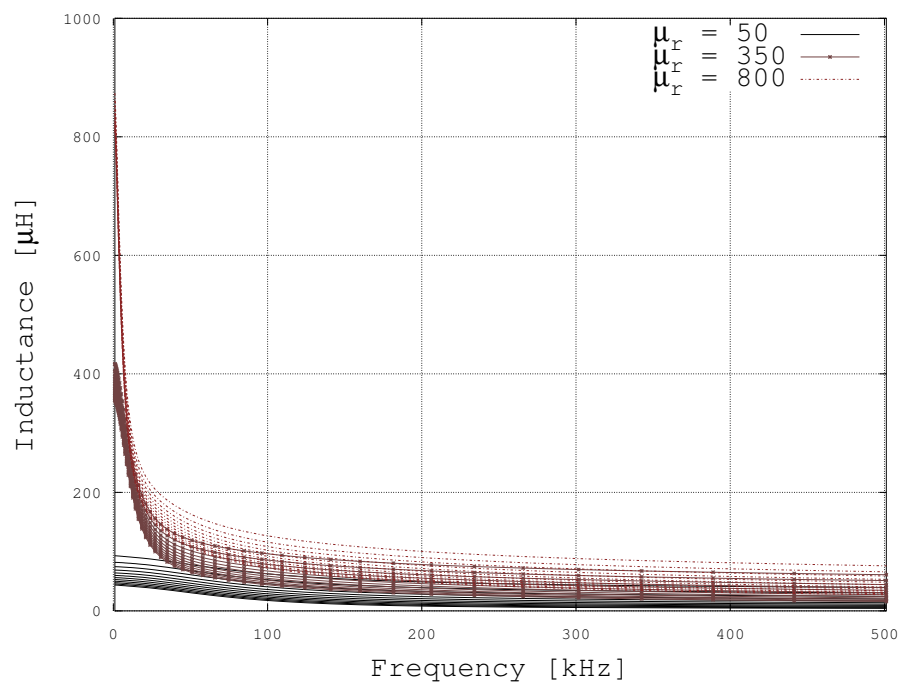


Figura 6-20.: Influencia de la permeabilidad en  $L_{1i}$

El segundo escenario consiste en mantener constante a  $\mu_r$  y variar  $\sigma$ . La variación de la permeabilidad compleja se observa en la figura 6-21, donde se presenta un desplazamiento en la frecuencia de  $\mu^*$ .

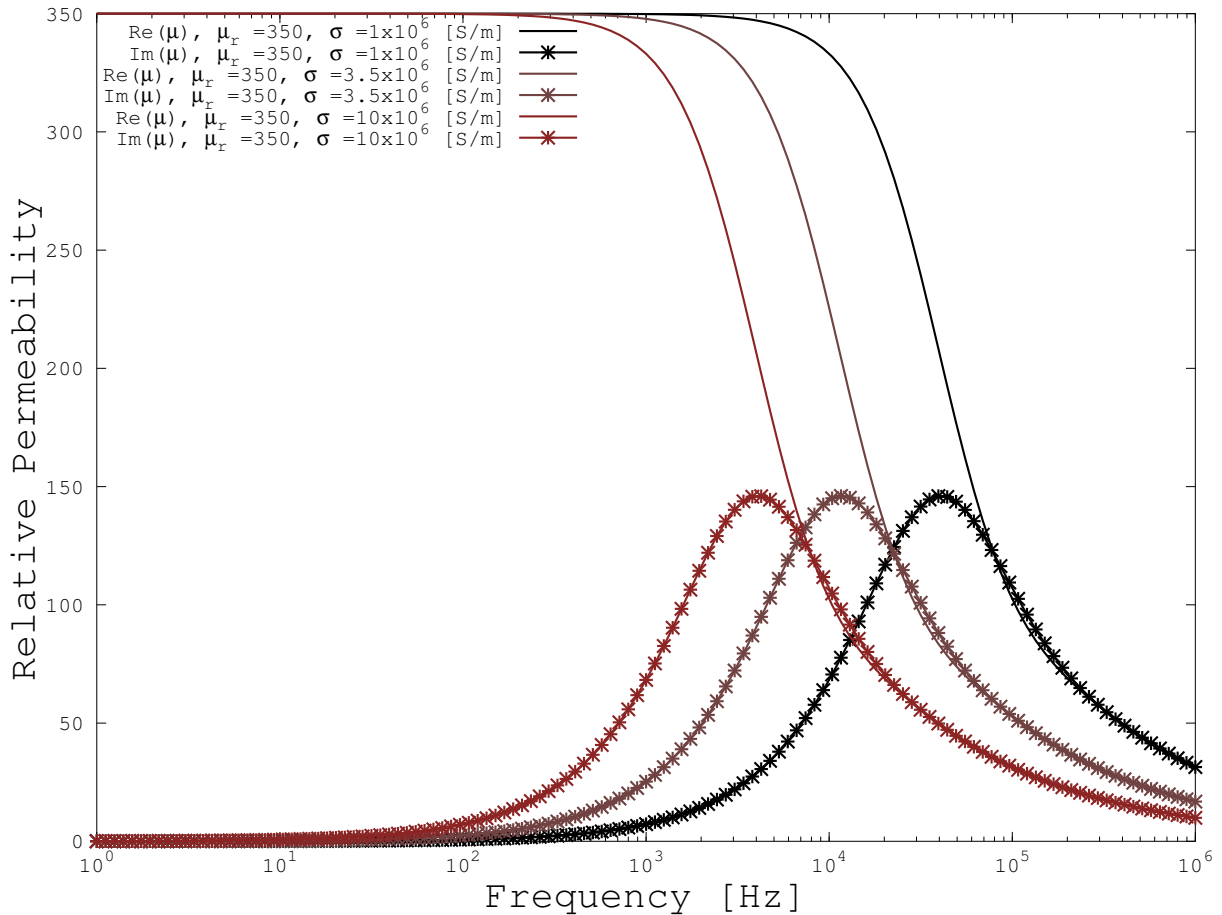


Figura 6-21.: Influencia de  $\sigma$  en  $\mu^*$

El comportamiento de la tensión en el nodo 2 de la figura 6-22 es muy similar al escenario uno, en el que se varía la permeabilidad inicial, y los valores de las frecuencias de resonancia se mantienen. Al variar la conductividad, los elementos resistivos se ven influenciados a diferencia de las inductancias tal como se observa en las figuras 6-23 y 6-24.

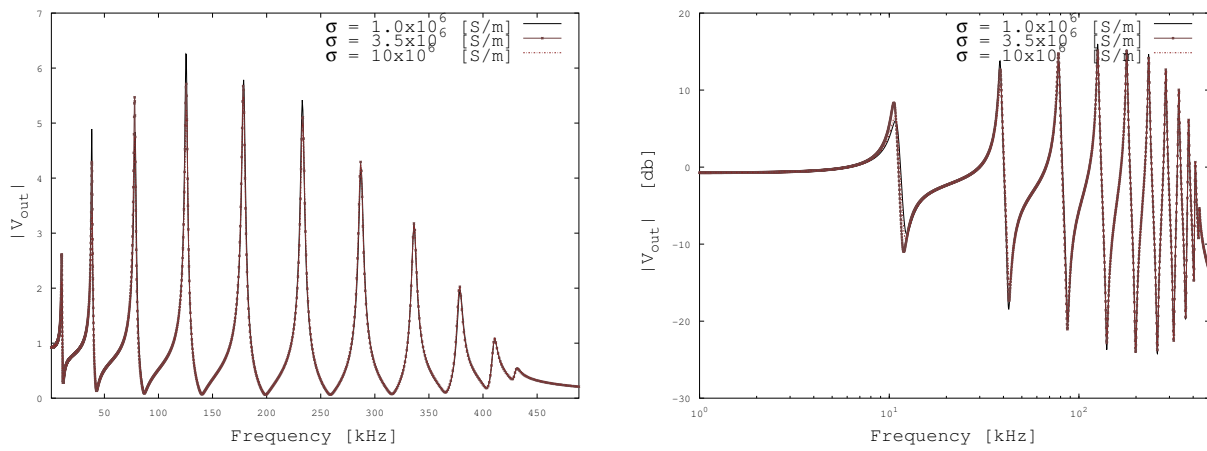


Figura 6-22.: Influencia de la Conductividad en la Tensión del Nodo 2

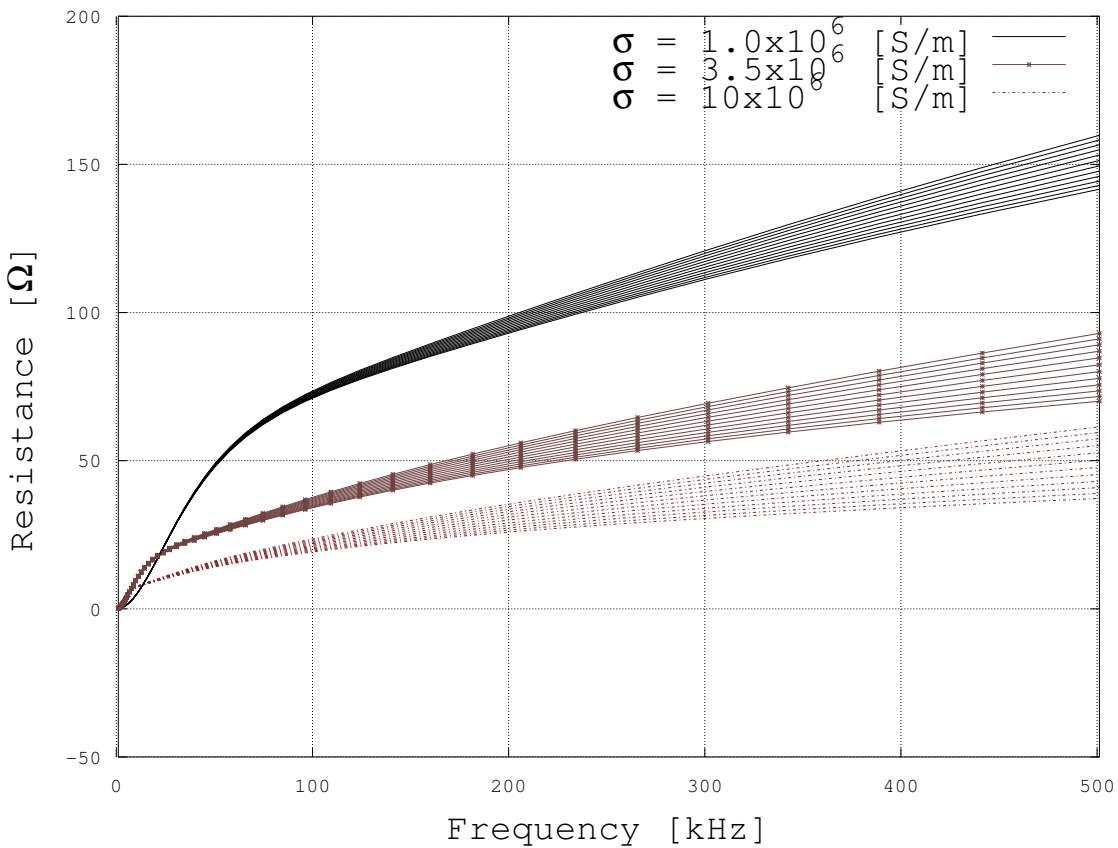
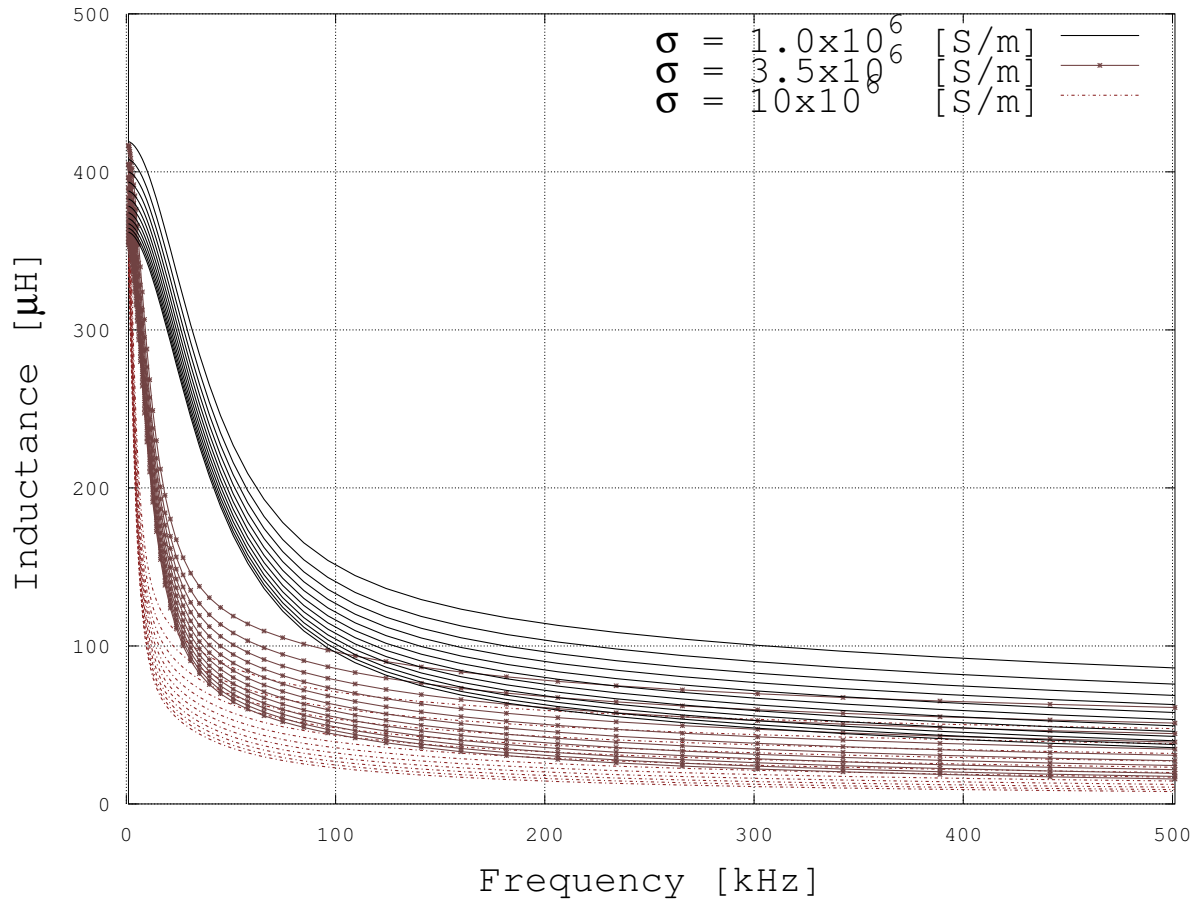


Figura 6-23.: Influencia de la Conductividad en  $R_{1i}$



**Figura 6-24.:** Influencia de la Conductividad en  $L_{1i}$

La poca influencia de los parámetros del núcleo en la respuesta en frecuencia, se puede analizar desde el punto de vista matricial, tomando como base el teorema de matrices similares que dice: *dos matrices son similares si tienen los mismos eigenvalores* [43]. Los valores del segundo eigenvalor en función de la frecuencia de la matriz  $\mathbf{Z}^{-1}$  se presentan en la figura 6-25 donde se puede observar claramente que para las simulaciones en *FEM*, en las que se variaron los parámetros del núcleo, el valor del eigenvalor es el mismo. El eje Y corresponde a los diferentes escenarios, el caso 1 corresponde al valor del eigenvalor de la matriz de impedancias medidas, en este resultado se observan variaciones tanto en la frecuencia como en el valor del eigenvalor respecto a simulaciones. El valor de 2 corresponde a  $\mu_r = 50$  y  $\sigma = 3,5 \times 10^6 [\frac{S}{m}]$ , el valor de 3 es para la condición  $\mu_r = 350$  y  $\sigma = 3,5 \times 10^6 [\frac{S}{m}]$ , el vértice 4 corresponde a  $\mu_r = 800$  y  $\sigma = 3,5 \times 10^6 [\frac{S}{m}]$ , el valor de 5 coincide con los valores de  $\mu_r = 350$  y  $\sigma = 1 \times 10^6 [\frac{S}{m}]$ , finalmente para el último vértice los valores son  $\mu_r = 350$  y  $\sigma = 10 \times 10^6 [\frac{S}{m}]$ .

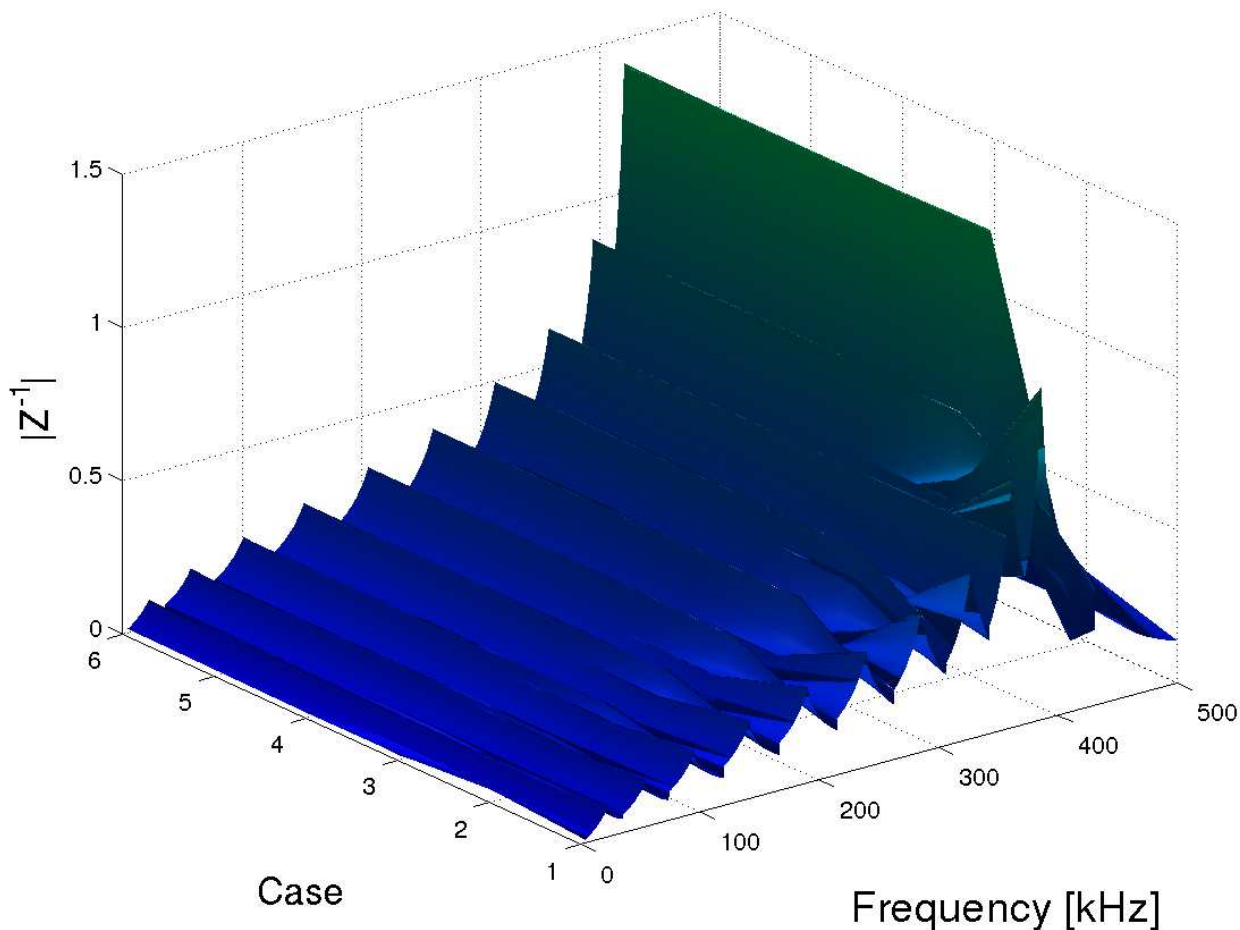


Figura 6-25.: Segundo Eigenvalor de  $\mathbf{Z}^{-1}$  en función de  $\omega$

Otra propiedad de las matrices similares es que poseen el mismo determinante [44]. En la figura 6-26 se muestran los valores del determinante en función de la frecuencia, se observa un comportamiento similar respecto a la frecuencia para cada simulación mediante *FEM*. El comportamiento entre los eigenvalores y el determinante respecto a las mediciones y simulaciones de impedancia difieren.

A pesar que las propiedades del núcleo influyen de manera significativa, los valores de los elementos del matriz de impedancias  $\mathbf{Z}$ , las inversas de estas matrices  $\mathbf{Z}^{-1}$  son similares, por lo que las respuestas en frecuencia de los devanados son parecidas.



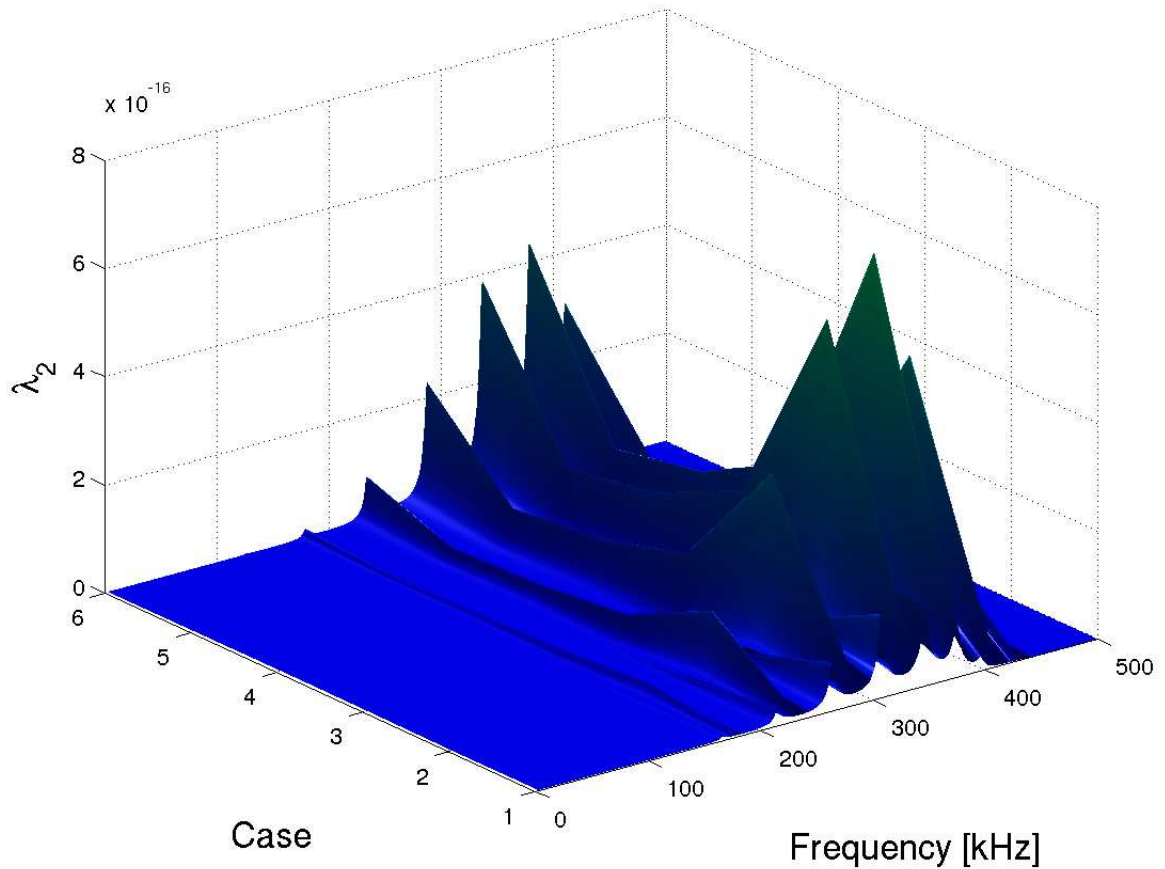


Figura 6-26.: Determinante de  $\mathbf{Z}^{-1}(\omega)$

La influencia de las propiedades del núcleo también se puede observar haciendo un análisis de sensibilidad al circuito de la figura 6-27.

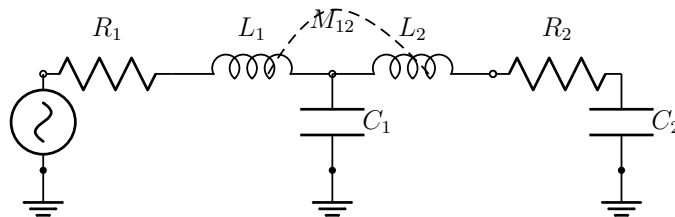


Figura 6-27.: Circuito Resonante Acoplado Magnéticamente

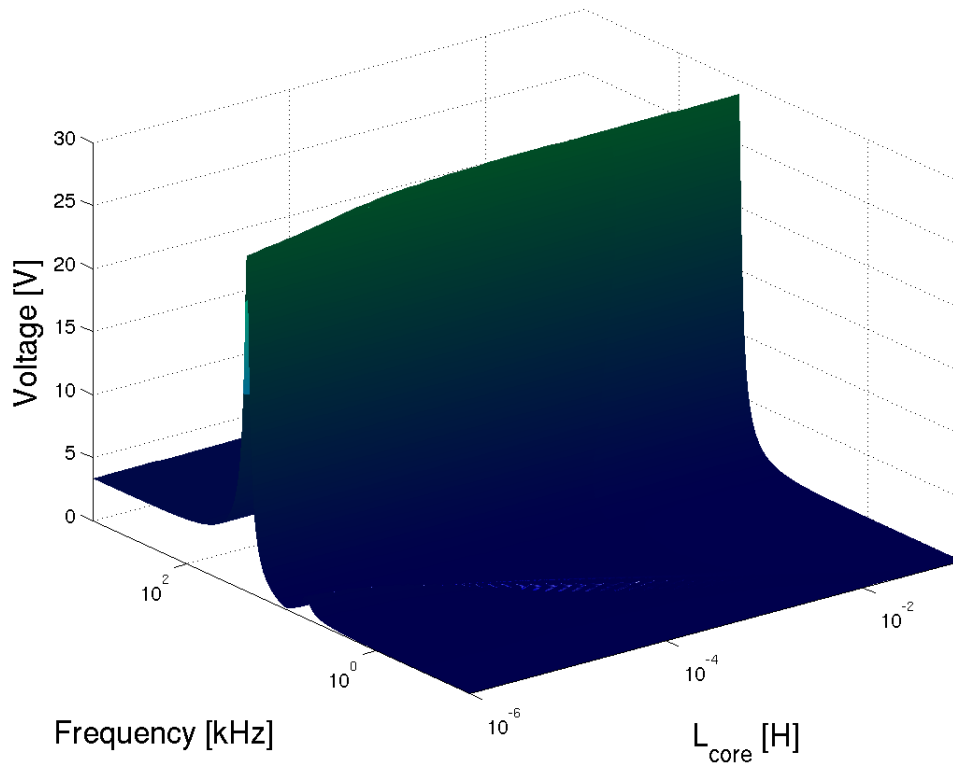
Este análisis se basa en la impedancia  $\mathbf{Z}$  de cada bobina que es descompuesta en dos partes, como se muestra en la ecuación (6-1). Donde  $\mathbf{Z}_{stray}$  es la impedancia debida al flujo disperso y  $\mathbf{Z}_{core}$  es la impedancia asociada al núcleo.

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{stray} + \mathbf{Z}_{core} \quad (6-1)$$

Tomando como base el trabajo desarrollado por S. Mitchell, donde supone que la inductancia asociada al núcleo es igual para cada bobina o sección del devanado [24]. Las corrientes de malla del circuito 6-27 se pueden describir mediante el sistema de ecuaciones de la expresión (6-2).

$$\mathbf{e} = \left( \mathbf{R} + s\mathbf{L}_{stray} + s\mathbf{L}_{core} + \frac{1}{s}\mathbf{Y} \right) \cdot \mathbf{i} \quad (6-2)$$

El análisis de sensibilidad consiste en variar los valores de la inductancia  $L_{core}$ , y calcular el valor de la tensión en el condensador  $C_1$ , como se aprecia en la figura 6-28. Se analiza que para valores de  $L_{core} \gg L_{stray}$  hay poca y nula influencia de la inductancia del núcleo en la respuesta del circuito. En el capítulo 4 se pudo observar que la impedancia con núcleo de aire es menor que la impedancia con núcleo de hierro, por lo tanto podemos concluir que la impedancia de flujo disperso es aun menor.



**Figura 6-28.:** Influencia de  $\omega$  y  $L_{core}$  en Circuitos Resonantes

Los valores de los parámetros del circuito de la figura 6-27 se encuentran en la tabla 6-1.

Parámetro	$e_1$	$L_{1stray}$	$L_{2stray}$	$M_{12stray}$	$C_1$	$C_2$	$R_1$	$R_2$
Valor	1 [V]	10 [ $\mu H$ ]	12 [ $\mu H$ ]	4 [ $\mu H$ ]	20 [ $\mu F$ ]	20 [ $\mu F$ ]	100 [ $m\Omega$ ]	100 [ $m\Omega$ ]

Tabla 6-1.: Parámetros del Circuito Acoplado Resonante

En la figura 6-29 se puede observar la sensibilidad a la variación de las inductancias por flujo disperso, al contrario de lo que sucede con la inductancia asociada al núcleo, estos valores de  $L_{stray}$  afectan de manera significativa el valor de la tensión en el condensador, aproximadamente en 5 veces.

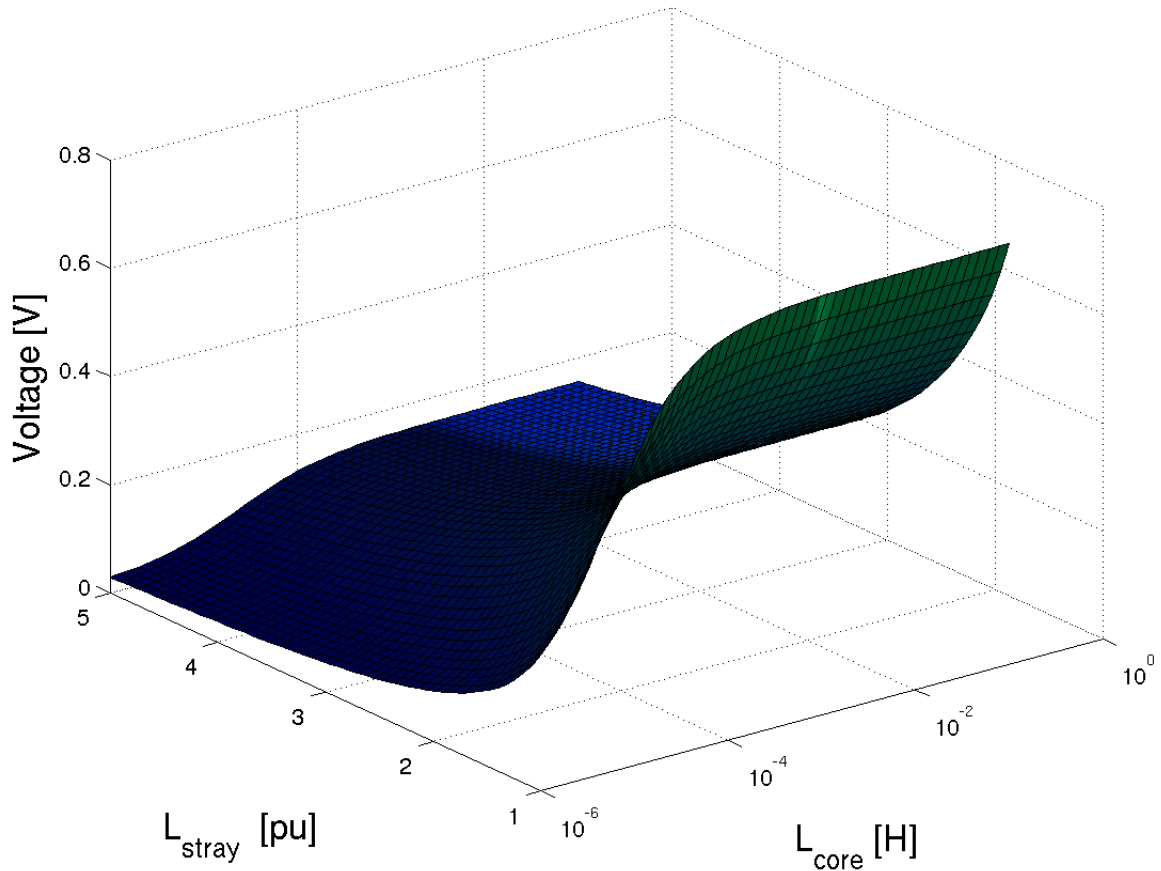


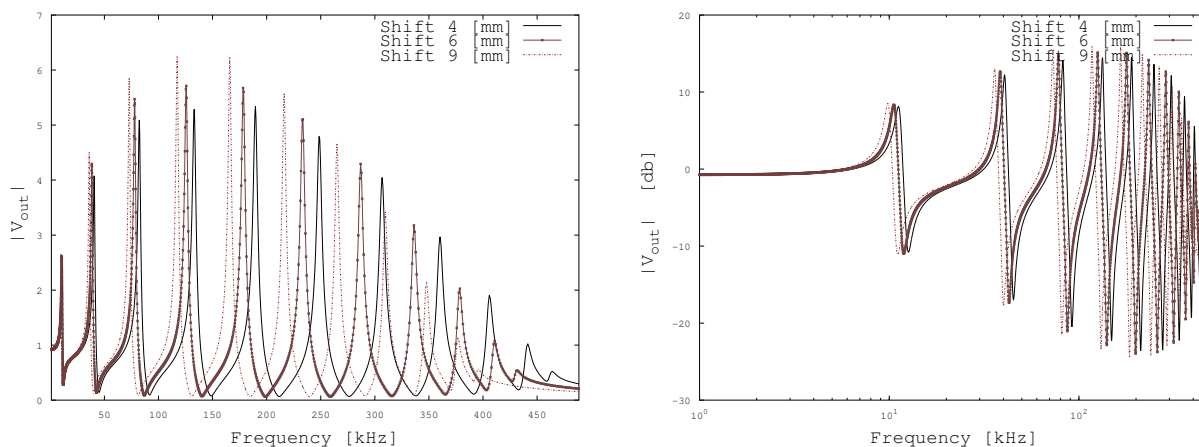
Figura 6-29.: Influencia de  $L_{stray}$  y  $L_{core}$  en Circuitos Resonantes

### Desplazamientos Axiales

El análisis *FRA* originalmente se propuso como método de diagnóstico para detectar deformaciones axiales. En este proyecto, el transformador bajo prueba se simuló mediante *FEM* para tres deformaciones axiales. La primera consiste en modelar el caso en que el devanado

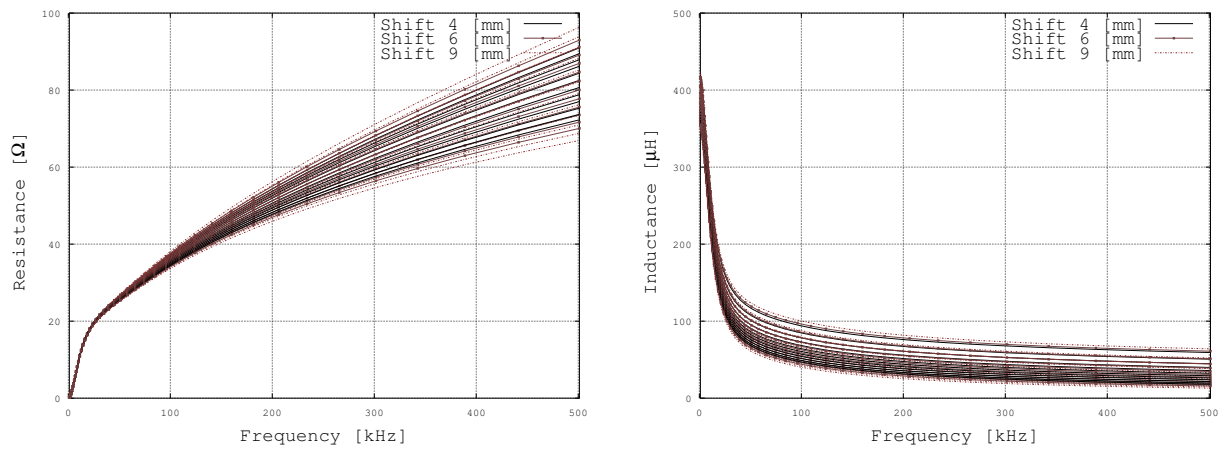
se comprime y se reduce la distancia entre discos a 4 [mm]. El segundo caso es el devanado tal como se fabricó con una separación entre discos de 6 [mm]. El último caso consiste en modelar una descompresión del devanado aumentando la distancia entre discos a 9 [mm]. Los resultados se observan en la figura 6-30, donde se presenta un desplazamiento en las frecuencias de resonancia a medida que cambia la separación entre discos.

Las deformaciones axiales en devanados de transformadores pueden ser diagnosticadas a partir de corrimientos en las frecuencias de resonancia, si hay desplazamiento hacia frecuencias superiores significa que el devanado se comprimió, al comprimirse la relación entre inductancias propias y mutuas disminuyen debido a que están mas cerca y esto genera que las resonancias se produzcan a mayores frecuencias. Caso contrario para desplazamientos axiales donde la relación entre impedancias propias y mutuas aumenta y por ende las resonancias ocurren a menores frecuencias.



**Figura 6-30.:** Influencia de los Desplazamientos Axiales en la Tensión del Nodo 2

En la figura 6-31 se puede observar las variaciones de  $R$  y  $L$  para las diferentes deformaciones axiales. El comportamiento es similar para cada caso, pero los valores de las resonancias varían considerablemente. La relación entre impedancias propias y mutuas aumentan a medida que se presenta un desplazamiento axial entre discos de devanados, esto genera un desplazamiento en las frecuencias de resonancia. Los resultados concuerdan con los obtenidos en [45] donde el prensado de devanados genera una disminución de la distancia axial entre discos de devanados.



**Figura 6-31.:** Influencia de los Desplazamientos Axiales en  $R_{1i}$  y  $L_{1i}$

El algoritmo vector fitting se ajusta al circuito equivalente Mombello tanto para el modelamiento de simples resistencias e inductancias variantes con la frecuencia, como para complejas redes circuitales con elementos  $R$  y  $L$  propios y mutuos dependientes de la frecuencia. La utilización de *FEM* permitió hacer un análisis de sensibilidad de la influencia del núcleo en *FRA*, analizando la matriz de impedancias y el circuito resonante; se determinó la baja influencia del núcleo debido a que las matrices son similares independientemente de los valores de los parámetros. Igualmente se demostró mediante *FEM* una alta sensibilidad de *FRA* a los desplazamientos axiales en bobinas de los devanados.

En la figura 6-32 se resume el procedimiento utilizado para el calculo de resonancias en transformadores para análisis *FRA* en este proyecto.

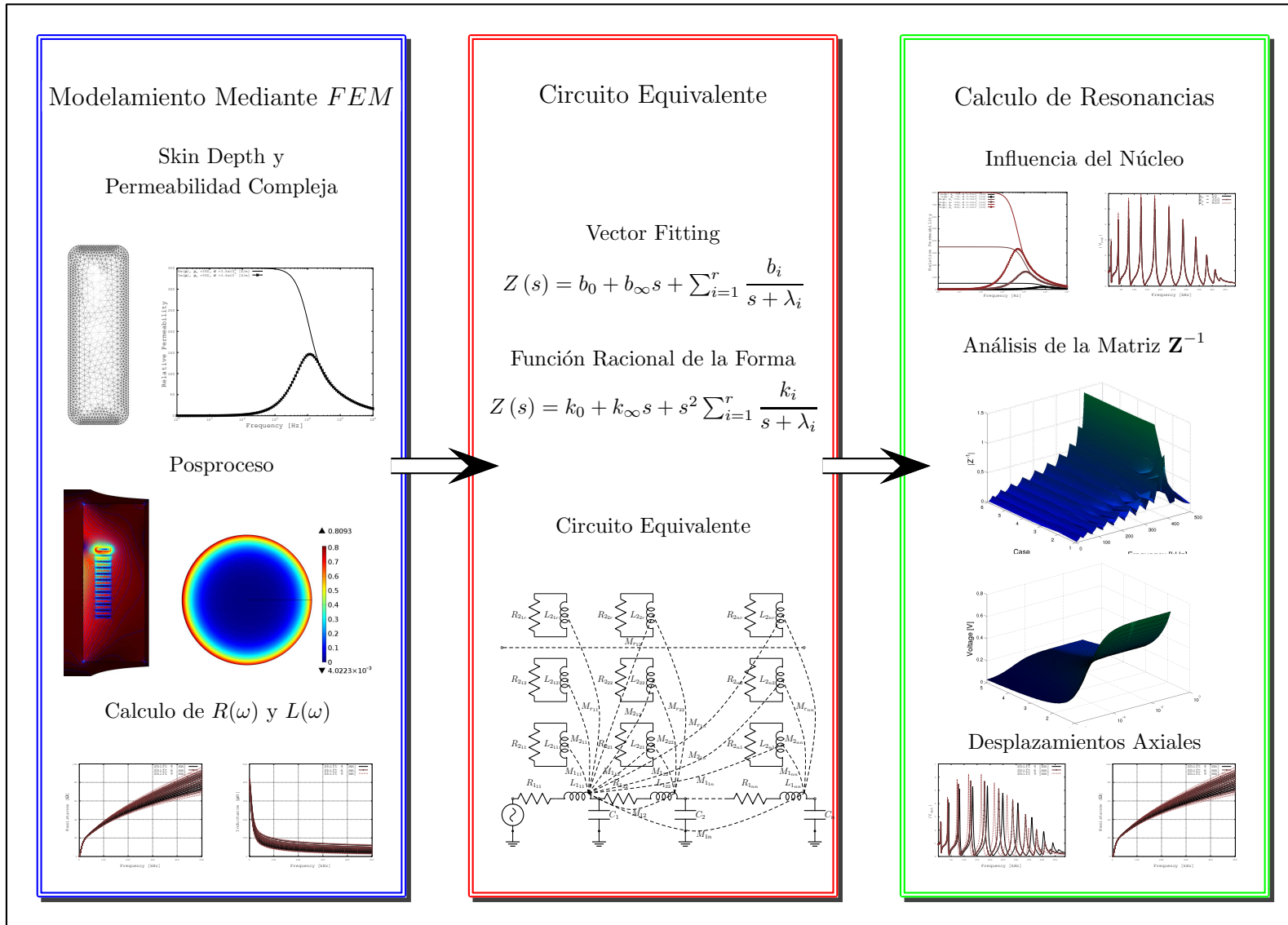


Figura 6-32.: Procedimiento para el Cálculo de Resonancias

## 7. Conclusiones

El presente trabajo de investigación permitió modelar la respuesta en frecuencia de devanados de transformadores para análisis *FRA* a partir de un circuito equivalente que representa la variación frecuencial de los elementos resistivos e inductivos.

La distribución de campos magnéticos dentro de los conductores juega un papel significativo en el comportamiento de resistencias en inductancias en función de la frecuencia, afectando las resonancias tanto en magnitud, como en la frecuencia de resonancia. En este trabajo se comparó la influencia de utilizar elementos constantes *vs* elementos variables con la frecuencia para una espira conductora y en el devanado de un transformador donde se pudo apreciar la influencia en la magnitud y en la frecuencia de resonancia.

Las características de distribución de la intensidad de flujo magnético  $\vec{H}$  dentro del núcleo del transformador permite que se modele mediante un problema de corrientes de eddy en una dimensión, obteniendo como resultado una permeabilidad compleja. Al utilizar la permeabilidad compleja se reduce el tamaño del problema desde el punto de vista del método de elementos finitos *FEM*.

El modelamiento de transformadores en *3D* usando *FEM* requiere de una gran cantidad de recursos computacionales y por tanto es necesario reducir el problema a dos dimensiones (*2D*). Esto es posible a través de un nuevo núcleo equivalente en *2D* que posea una reluctancia equivalente al núcleo en *3D*.

Los modelos circuitales de devanados de transformadores utilizan elementos *R* y *L* variables con la frecuencia, trayendo como consecuencia que solo sea aplicable para el análisis en estado estable, ya que para cada frecuencia es necesario recalcular dichos elementos. El circuito equivalente Mombello permite modelar con precisión la dependencia frecuencial de los elementos resistivos e inductivos a través de elementos constantes generando una gran ventaja porque permite ser aplicable para cualquier tipo de análisis. En este trabajo se demostró la adaptabilidad del circuito Mombello para diferentes comportamientos de impedancias.

Al circuito equivalente Mombello es posible asociarle una interpretación física de los diferentes fenómenos electromagnéticos (efecto piel y efecto proximidad) que se presentan dentro de conductores acoplados magnéticamente.

El algoritmo vector fitting describe correctamente del comportamiento de los elementos resistivos e inductivos en la frecuencia mediante funciones racionales. Estas funciones racionales permiten calcular los elementos del circuito equivalente Mombello.

El modelamiento mediante *FEM* de las impedancia mutuas y propias a partir del conocimiento de la geometría y los materiales permite describir el comportamiento de dichas impedancias, con el objetivo de aplicar vector fitting y calcular los elementos del circuito Mombello.

En este trabajo se analizó la influencia del núcleo en el calculo de resonancias, y se observó como los valores de impedancias propias y mutuas varían drásticamente pero mantienen el mismo comportamiento en la respuesta en frecuencia y no se ven afectadas por los parámetros del núcleo en altas frecuencias. Se analizó como estas matrices de impedancias son similares ya que poseen los mismos eigenvalores y determinantes. Por otro lado se realizó un análisis de sensibilidad a las impedancias de flujo disperso y las impedancias del núcleo en el que se corroboran los resultados respecto a la influencia del núcleo.

El uso de *FEM* en este trabajo permitió analizar las deformaciones axiales en devanados. Estas deformaciones del modelo planteado por este proyecto son claramente identificables mediante un análisis *FRA*. La sensibilidad de la prueba *FRA* a este tipo de desplazamientos axiales es su principal característica, debido a que son difícilmente detectados por otro tipo de pruebas. Las deformaciones axiales son comunes en transformadores producto de cortocircuitos, deficiencias de producción y problemas de transporte.



## 8. Trabajos Futuros

El procedimiento desarrollado en este trabajo para el cálculo de circuitos equivalentes que modelan la dependencia frecuencial puede ser aplicado en motores eléctricos, líneas de transmisión, cables y demás elementos donde se requiera modelar fenómenos transitorios y análisis de respuesta en frecuencia.

En este trabajo se analizó la influencia del núcleo y las deformaciones axiales mediante *FEM*. La influencia de cortocircuitos entre espiras, deformaciones radiales, descentramiento de devanados y demás fenómenos que afecte la geometría y las propiedades de los materiales también puede ser estudiada con la ayuda de *FEM*.

El efecto del núcleo en tres dimensiones debe ser analizado, ya que puede influir en el cálculo de la impedancias, específicamente las inductancias de flujo disperso, tal como lo menciona [46].

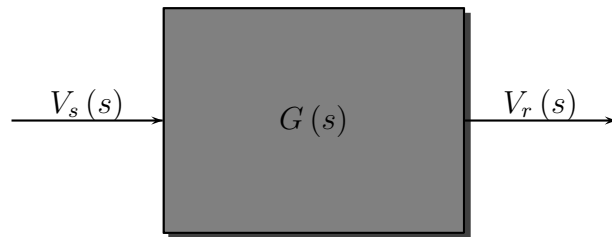
El uso de elementos finitos para simulaciones *3D* requiere de grandes recursos computacionales haciéndolo ineficiente para modelar distribución de campos electromagnéticos en devanados de transformadores, por lo que se hace necesario explorar y adoptar otros métodos numéricos o semi-numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales.

Diferentes técnicas de análisis de señales se pueden aplicar al circuito equivalente de devanados que se presentó en este trabajo con el objetivo de analizar la sensibilidad y la posible información que pueda ser obtenida.

# A. Prueba FRA

En esta sección se hace una breve descripción de la metodología utilizada para realizar pruebas para el análisis de respuesta en frecuencia.

La prueba de respuesta en frecuencia consiste en aplicar una señal ya sea un impulso o un barrido en frecuencia en una terminal de un devanado y medir la respuesta usualmente en otro devanado [14], en la figura A-1 se puede observar en forma esquemática el objetivo de la prueba *FRA*.



**Figura A-1.:** Función de Transferencia en Pruebas *FRA*

La función de transferencia  $G(s)$  se calcula a partir de mediciones de tensión según la ecuación (A-1).

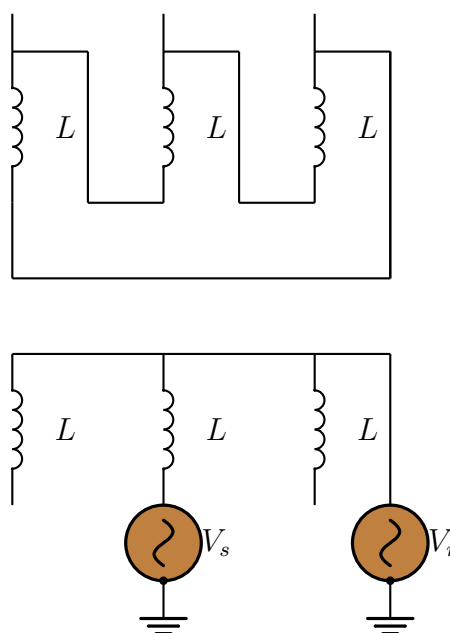
$$G(s) = \frac{V_r(s)}{V_s(s)} \quad (\text{A-1})$$

Diferentes tipos de conexiones han sido propuestos para el análisis de respuesta en frecuencia, estos dependen de:

- Tipo de conexión del transformador  $Y, D, Z$
- Número de devanados
- Posición del devanado de regulación
- Número de Fases

Para los transformadores trifásicos se han propuesto diferentes pruebas que dependen de la conexión de los terminales, el CIGRE [14] las clasifica en los siguientes grupos: Capacitancia

entre devanados, Inductancia entre devanados, end-to-end en circuito abierto, end-to-end en cortocircuito. En la figura A-2 se muestra la configuración de la prueba end-to-end en circuito abierto para un transformador trifásico con conexión  $Dy$ .



**Figura A-2.:** Prueba end-to-end en Circuito Abierto para un Transformador Trifásico

Los tipos de conexiones son sensibles a diferentes deformaciones, en un estudio realizado [47] se muestra la sensibilidad de cada medición para detectar diferentes tipos de deformaciones que se puedan presentar en un amplio rango de transformadores.

El análisis de respuesta en frecuencia originalmente se aplicó utilizando un impulso en baja tensión, con el transcurso del tiempo esta técnica fue depurada y se pasó al uso de barridos en frecuencia ya que presenta una mejor relación señal/ruido y repetibilidad. En los últimos años se ha llegado a acuerdos como número de puntos 1000 – 3000, frecuencia de aplicación 1 [MHz], tipo de medición (función de transferencia), análisis de magnitud y fase, en los que la prueba  $FRA$  es aplicable y más susceptible a detectar posibles fallas en transformadores [48].

Con el constante interés por la aplicación y registro de la prueba  $FRA$  para su posterior comparación entre mediciones, se ha desarrollado una nueva técnica que nuevamente utiliza impulsos de tensión, con el objetivo de ser aplicable online [49].

# B. Método de los Elementos Finitos

## B.1. Planteamiento Matemático

El método de los elementos finitos *FEM*, se ha utilizado como método numérico para resolver problemas modelados mediante ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de frontera. *FEM* consiste en resolver la ecuación diferencial en cada punto de la geometría discretizada mediante nodos que generan una red llamada malla, como resultado es generado un sistema de ecuaciones que describe un dominio del problema. En resumen *FEM* consiste en subdividir la geometría en pequeños subdominios llamados elementos finitos y expresar la ecuación diferencial asociada con las condiciones de frontera [50]. La gran ventaja que presenta este método es la posibilidad de ser utilizado para cualquier geometría y materiales.

Para el caso de problemas de electromagnetismo, se resuelven las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial. Debido al amplio rango de problemas en electromagnetismo es posible utilizar solo algunas ecuaciones. Para este trabajo en el que se calculó la resistencia e inductancia en función de la frecuencia menor a 1 [MHz] es posible desacoplar las ecuaciones de Ampere y Faraday.

La ecuación de Ampere Maxwell (B-1) expresada en forma diferencial describe el comportamiento de campos eléctricos y magnéticos en un medio.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{B-1})$$

La densidad de corriente  $\vec{J}$  de la ecuación (B-1) se descompone en densidad de corriente externa  $\vec{J}_e$  producto de un campo aplicado y la densidad de corriente inducida producto de la ley de Faraday  $\sigma \vec{E}$  [51]. La ecuación de Ampere-Maxwell expresada en el dominio de la frecuencia se muestra en la ecuación (B-2).

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_e + \sigma \vec{E} + j\omega \vec{D} \quad (\text{B-2})$$

Utilizando la relación constitutiva para intensidad de campo eléctrico  $\vec{E}$  y densidad de campo eléctrico  $\vec{D}$ ,  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  se obtiene la ecuación (B-3).

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_e + \sigma \vec{E} + j\omega \epsilon \vec{E} \quad (\text{B-3})$$

En problemas de magnetismo solucionados a partir de *FEM* se introduce un nuevo campo vectorial denominado potencial magnético  $\vec{A}$ , que es la variable independiente del sistema de ecuaciones. El objetivo de utilizar el campo  $\vec{A}$  es por la posibilidad de derivar campos eléctricos y magnéticos a partir de las relaciones (B-4) y (B-5).

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (\text{B-4})$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{B-5})$$

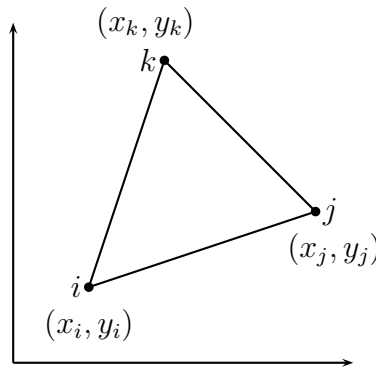
Combinando las ecuaciones (B-2), (B-4) y (B-5) se obtiene la ecuación de Ampere-Maxwell (B-6) en función de  $\vec{A}$  para campos en el dominio de la frecuencia.

$$(j\sigma\omega + \omega^2\epsilon) \vec{A} + \nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) = \vec{J}_e \quad (\text{B-6})$$

La ecuación diferencial (B-6) es desarrollada mediante el método de elementos finitos donde la variable independiente es  $\vec{A}$ .

### B.1.1. Formulación de FEM 2D

En la figura B-1 se puede observar un elemento finito triangular con nodos  $i, j, k$ , en el que cada nodo, la variable desconocida es el potencial magnético  $\vec{A}$  [52], como se analizó en la anterior sección a partir de esta cantidad es posible determinar campos eléctricos y magnéticos.



**Figura B-1.:** Elemento Finito Triangular

La solución de la ecuación diferencial (B-6) mediante elementos finitos en problemas 2D en que las fuentes externas  $\vec{J}_e$  están en la dirección  $a_\phi$  o  $a_z$ , el campo vectorial  $\vec{A}$  solo tiene componentes en alguna de estas direcciones dependiendo del tipo de geometría.

Expandiendo la ecuación (B-4) se obtiene la ecuación (B-7).

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_Z \end{bmatrix} \quad (\text{B-7})$$

Volviendo a la figura **B-1**, se asume que el potencial magnético varía linealmente y se expresa en cualquier punto del triangulo mediante las funciones de la ecuación (B-8) [52].

$$\begin{aligned} A_i &= C_1 + C_2x_i + C_3y_i \\ A_j &= C_1 + C_2x_j + C_3y_j \\ A_k &= C_1 + C_2x_k + C_3y_k \end{aligned} \quad (\text{B-8})$$

De las anteriores expresiones se obtienen funciones elementales  $N_e$  que dependen de la geometría y del tipo malla. A partir de  $N_e$  y aplicando el método de elementos finitos y Galerkin a la ecuación diferencial (B-6), se genera la matriz de coeficientes  $\mathbf{K}$  calculándola a partir de la ecuación (B-9).

$$[\mathbf{K}] = \sum_{\Omega} \frac{1}{\mu} \iint_{\Delta_e} \left( \frac{\partial N_e^T}{\partial x} \frac{\partial N_e}{\partial x} + \frac{\partial N_e^T}{\partial y} \frac{\partial N_e}{\partial y} \right) dx dy \quad (\text{B-9})$$

Donde  $\Omega$  es la región que limita el problema y  $\Delta_e$  es el área del elemento triangular. Finalmente, el potencial magnético se calcula solucionando el sistema de ecuaciones (B-10) donde el vector  $\mathbf{F}$  depende de las condiciones de borde.

$$[\mathbf{K}] \cdot [\mathbf{A}] = [\mathbf{F}] \quad (\text{B-10})$$

## B.2. Geometría

La geometría modelada mediante *FEM* se observa en la figura **B.2**, en esta se puede apreciar la forma del núcleo equivalente en 2D y la distribución de intensidad de campo magnético cuando fluye una intensidad de corriente en la bobina superior.

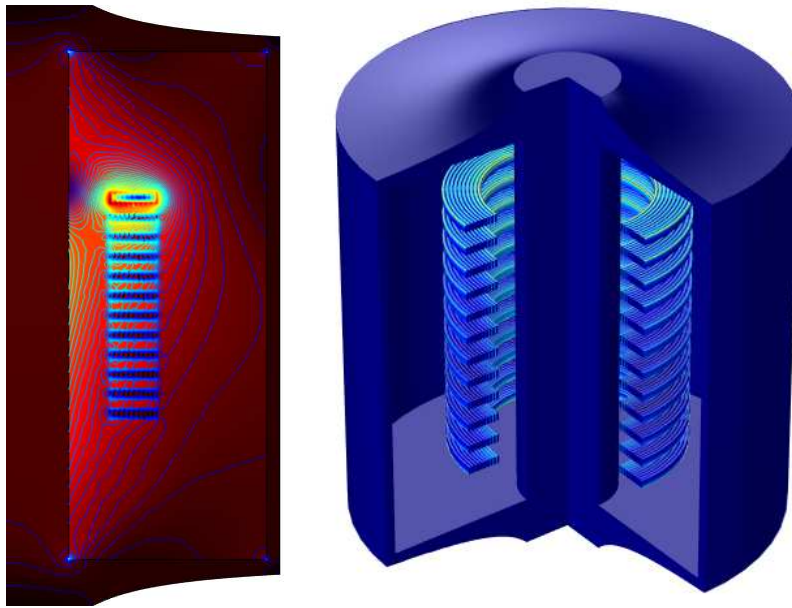


Figura B-2.: Geometría Modelada en *FEM*

### B.3. Materiales

Para moldeamiento mediante *FEM* se definieron tres materiales, las características de estos se presentan en la tabla B-1.

Material	$\mu_r$	$\sigma \left[ \frac{S}{m} \right]$
Aire	1	0
Cobre	1	$5,8 \times 10^6$
Hierro	350	$3,5 \times 10^6$

Tabla B-1.: Propiedades de los Materiales Usados en *FEM*

### B.4. Condiciones de Frontera

Debido a la utilización de la simetría de rotación para modelar el transformador, es necesario imponer condiciones de frontera, esta consiste en limitar las fronteras exteriores y el eje de simetría del problema imponiendo que la densidad de campo magnético  $\vec{B}$  normal

a la superficie sea cero como se muestra en la ecuación (B-11) en términos del potencial magnético.

$$\vec{n} \times \vec{A} = 0 \quad (\text{B-11})$$

## B.5. Pos-Proceso

Para el cálculo de inductancias propias y mutuas se utiliza el flujo magnético.  $\vec{B}$  se obtiene de la ecuación (B-4) y a partir de este se calcula el flujo magnético  $\phi_M$  con la ecuación (B-12).

$$\phi_M = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (\text{B-12})$$

La intensidad de corriente  $i$  se calcula a partir de  $\vec{J}$  como se muestra en la ecuación (B-13).

$$i = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (\text{B-13})$$

Con el flujo  $\phi_M$  y la corriente  $i$  (obtenida a partir de la ecuación B-13) que circula en un medio, es posible determinar la inductancia  $L$  de un elemento con la ayuda de la expresión (B-14).

$$L = \frac{\phi_M}{i} \quad (\text{B-14})$$

La inductancia se puede calcular a partir del potencial magnético vectorial  $\vec{A}$ , reemplazando  $\phi_M$  en la ecuación (B-14) por las expresiones (B-12) y (B-4) se tiene como resultado la ecuación (B-15).

$$L = \frac{\int \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\int \vec{J} \cdot d\vec{S}} \quad (\text{B-15})$$

Para reducir la complejidad del cálculo se usa el teorema de Stokes (ecuación B-16).

$$\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \quad (\text{B-16})$$

El teorema Stokes se aplica en la ecuación (B-15) [53] para reducir la complejidad del cálculo, generando la expresión (B-17).

$$L = \frac{\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l}}{\int \vec{J} \cdot d\vec{S}} \quad (\text{B-17})$$



Finalmente la densidad de corriente se puede expresar en términos de  $\vec{A}$  con base en la ecuación (B-6).

$$L = \frac{\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l}}{\int \nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) \cdot d\vec{S}} \quad (\text{B-18})$$

Para el cálculo de la impedancia  $Z$  se utiliza la ley de *Ohm*, pero antes hay que conocer la tensión  $v$  del elemento (ecuación B-19).

$$v = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{B-19})$$

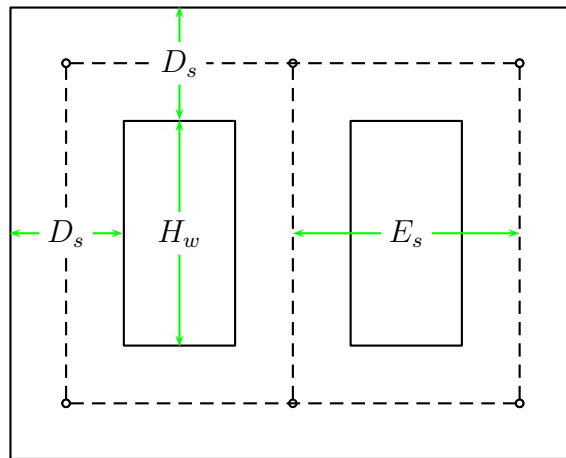
Finalmente, las impedancias propias y mutuas  $Z$ , son calculadas con la ecuación (B-20).

$$Z_{ij} = \frac{v_{ij}}{i_{ii}} \quad (\text{B-20})$$

## C. Representación del Núcleo en 2D

El circuito magnético del núcleo se puede representar en simetría de rotación utilizando el procedimiento desarrollado por [20], donde se modifica la pierna exterior y el yugo en 2D en base al circuito magnético para la pierna exterior. En este trabajo se muestra el calculo de las dimensiones del núcleo en 2D en simetría de rotación para la pierna central.

El la figura C-1 se puede observar las dimensiones del núcleo apilado.



**Figura C-1.:** Dimensiones del Núcleo Apilado

La reluctancia del yugo es función de la distancia entre piernas  $E_s$ , de la permeabilidad del núcleo y de la sección transversal del núcleo, tal como se muestra en la ecuación (C-1).

$$\mathfrak{R}_{Yoke} = \frac{E_s}{\mu \cdot A_{Leg}} \quad (C-1)$$

La reluctancia de las piernas del transformador se calcula con base en la expresión (C-2).

$$\mathfrak{R}_{Leg} = \frac{H_s + D_s}{\mu \cdot A_{Leg}} \quad (C-2)$$

Las anteriores expresiones sirven para calcular las reluctancias del transformador, tal como se muestra en la figura C-2.

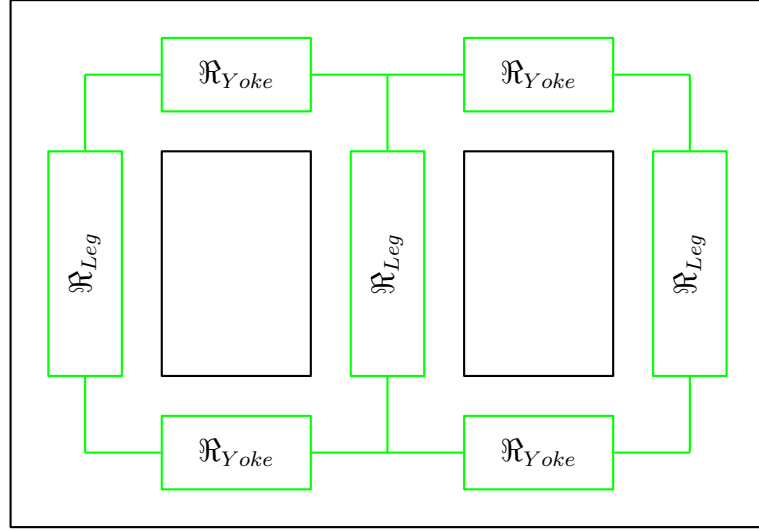


Figura C-2.: Reluctancias en un Núcleo Apilado

El circuito magnético equivalente  $\mathfrak{R}_{Eq}$  visto desde la pierna central del transformador se calcula con base en la expresión (C-3).

$$\mathfrak{R}_{Eq} = \mathfrak{R}_{Leg} + \frac{2 \cdot \mathfrak{R}_{Yoke} + \mathfrak{R}_{Leg}}{2} \quad (\text{C-3})$$

La reluctancia equivalente de la ecuación (C-3) se puede expresar de la forma de la ecuación (C-4).

$$\mathfrak{R}_{Eq} = \frac{\ell_{Eq}}{\mu \cdot A_{Leg}} \quad (\text{C-4})$$

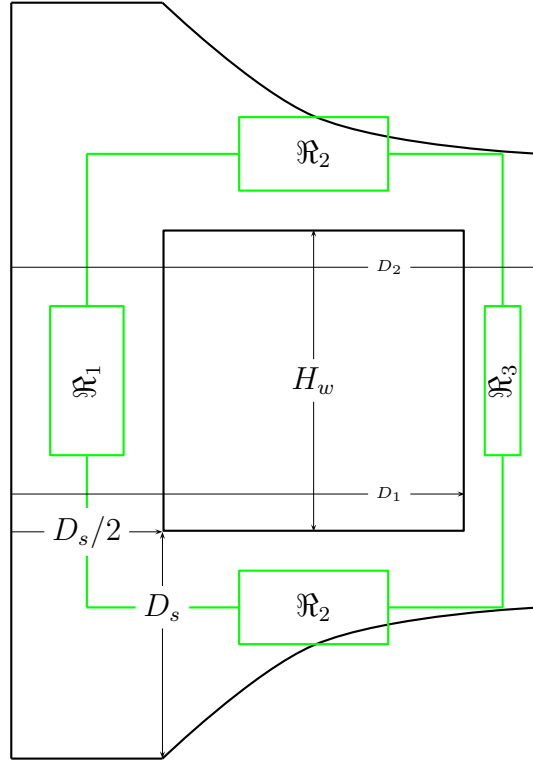
Remplazando las ecuaciones (C-1), (C-2) y (C-4) en (C-3) y factorizando  $\mu \cdot A_{Leg}$  se puede calcular una nueva longitud equivalente  $\ell_{Eq}$  que depende únicamente de las dimensiones del núcleo, como se observa en la ecuación (C-5).

$$\ell_{Eq} = H_w + D_s + \frac{2 \cdot E_s + H_w + D_s}{2} \quad (\text{C-5})$$

## C.1. Modelo 2D con Simetría de Rotación

En base en la ecuación (C-3) se puede calcular un circuito magnético equivalente con simetría de rotación en 2D. Este nuevo núcleo se describe en la figura C-3. La variación de la altura del yugo se hace con el fin de mantener una misma sección en todo el núcleo  $A_{Leg}$  cuando este rote respecto al eje de simétrica axial y se cumpla la ecuación (C-4). Esta altura es

descrita mediante la función  $h(r)$ .



**Figura C-3.:** Circuito Magnético Equivalente para Simetría de Rotación

La función  $h$  tiene un valor de  $\frac{D_s}{2}$  cuando  $r = (D_s/2)$ .

$$h(D_s/2) = \frac{D_s}{2} \quad (\text{C-6})$$

La longitud de la pierna se encuentra en la expresión (C-7).

$$\ell_{leg} = H_w + \frac{D_s}{2} \quad (\text{C-7})$$

La sección transversal del núcleo se calcula en base al área de una circunferencia a la que se aproxima la pierna (ecuación (C-8)).

$$A_{leg} = \pi \left( \frac{D_s}{2} \right)^2 \quad (\text{C-8})$$

Luego se calcula la longitud del yugo, el único valor que no se conoce y se requiere calcular es  $D_2$ .

$$\ell_{Yoke} = E_s - \frac{D_s}{2} + \frac{D_2 - D_1}{2} \quad (\text{C-9})$$

La longitud de la pierna del núcleo y los yugos están dados por la ecuación (C-10).

$$\ell_a = \ell_{leg} + 2 \cdot \ell_{Yoke} \quad (\text{C-10})$$

La altura de la pierna exterior  $\ell_{rem}$  se calcula con la ayuda de la expresión (C-11).

$$\ell_{rem} = \ell_{eq} - \ell_a \quad (\text{C-11})$$

El área en el yugo del transformador es igual al área de la pierna  $A_{leg}$ :

$$A_{leg} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h(r) \quad (\text{C-12})$$

Si se igualan las ecuaciones (C-12) y (C-8) se obtiene la función  $h(r)$  como se muestra en la ecuación (C-13).

$$h(r) = \frac{D_s^2}{8 \cdot r} \quad (\text{C-13})$$

La longitud de la pierna exterior  $\ell_{out}$  esta dada por la expresión (C-14).

$$\ell_{out} = H_w + h\left(\frac{D_1 + D_2}{2}\right) \quad (\text{C-14})$$

El área de la pierna exterior  $A_{out}$  es función de la relación  $\frac{\ell_{out}}{\ell_{rem}}$ , si  $\ell_{out} = \ell_{rem}$  entonces  $A_{out} = A_{leg}$ , este es el objetivo que se busca para mantener el circuito magnético equivalente.

$$A_{out} = \frac{\ell_{out}}{\ell_{rem}} \cdot A_{leg} \quad (\text{C-15})$$

Como se había mencionado anteriormente el valor del radio  $D_2$  es desconocido, la formula que se utiliza para calcularlo es base al área  $A_{out}$ , ecuación (C-16).

$$D_2 = \sqrt{\frac{A_{out}}{\pi} + D_1^2} \quad (\text{C-16})$$

Como se puede observar es necesario iterar el valor de  $D_2$  a partir de la ecuación (C-9) hasta que  $A_{out} = A_{leg}$ . Una condición inicial es  $D_2 = D_1$

## D. Parámetros del Circuito Equivalente

En esta sección se presentan los parámetros del circuito equivalente estudiado en el capítulo 5, obtenidos a partir de mediciones y calculados con la ayuda del vector fitting y el circuito Mombello.

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0,2517 & 0,2126 & 0,2024 & 0,2015 & 0,195 & 0,1922 & 0,191 & 0,1887 & 0,1974 & 0,1999 & 0,2 & 0,204 \\ 0,2126 & 0,2563 & 0,2185 & 0,2155 & 0,2043 & 0,2015 & 0,1983 & 0,1963 & 0,2037 & 0,2083 & 0,208 & 0,2109 \\ 0,2024 & 0,2185 & 0,2589 & 0,2284 & 0,2162 & 0,2134 & 0,211 & 0,2076 & 0,2138 & 0,2178 & 0,2174 & 0,2205 \\ 0,2015 & 0,2155 & 0,2284 & 0,2665 & 0,2262 & 0,2212 & 0,2188 & 0,2135 & 0,2214 & 0,2237 & 0,2215 & 0,226 \\ 0,195 & 0,2043 & 0,2162 & 0,2262 & 0,2652 & 0,2299 & 0,2254 & 0,2187 & 0,2257 & 0,2278 & 0,227 & 0,2308 \\ 0,1922 & 0,2015 & 0,2134 & 0,2212 & 0,2299 & 0,2575 & 0,2219 & 0,2182 & 0,2235 & 0,2235 & 0,2219 & 0,2256 \\ 0,191 & 0,1983 & 0,211 & 0,2188 & 0,2254 & 0,2219 & 0,2604 & 0,2246 & 0,2304 & 0,2303 & 0,2236 & 0,2288 \\ 0,1887 & 0,1963 & 0,2076 & 0,2135 & 0,2187 & 0,2182 & 0,2246 & 0,2619 & 0,24 & 0,2385 & 0,2331 & 0,2284 \\ 0,1974 & 0,2037 & 0,2138 & 0,2214 & 0,2257 & 0,2235 & 0,2304 & 0,24 & 0,2703 & 0,2349 & 0,2278 & 0,2381 \\ 0,1999 & 0,2083 & 0,2178 & 0,2237 & 0,2278 & 0,2235 & 0,2303 & 0,2385 & 0,2349 & 0,2726 & 0,2383 & 0,244 \\ 0,2 & 0,208 & 0,2174 & 0,2215 & 0,227 & 0,2219 & 0,2236 & 0,2331 & 0,2278 & 0,2383 & 0,271 & 0,2442 \\ 0,204 & 0,2109 & 0,2205 & 0,226 & 0,2308 & 0,2256 & 0,2288 & 0,2284 & 0,2381 & 0,244 & 0,2442 & 0,2764 \end{bmatrix} \Omega$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 0,3794 & 0,3701 & 0,3646 & 0,3598 & 0,3561 & 0,351 & 0,3482 & 0,3459 & 0,3421 & 0,3397 & 0,3376 & 0,3357 \\ 0,3701 & 0,3822 & 0,3726 & 0,3664 & 0,3619 & 0,3564 & 0,3533 & 0,3508 & 0,3468 & 0,3442 & 0,3419 & 0,3399 \\ 0,3646 & 0,3726 & 0,3847 & 0,3743 & 0,3684 & 0,3623 & 0,3587 & 0,3559 & 0,3517 & 0,3488 & 0,3464 & 0,3441 \\ 0,3598 & 0,3664 & 0,3743 & 0,3864 & 0,3764 & 0,3688 & 0,3646 & 0,3613 & 0,3568 & 0,3537 & 0,351 & 0,3486 \\ 0,3561 & 0,3619 & 0,3684 & 0,3764 & 0,388 & 0,3763 & 0,3707 & 0,3668 & 0,3619 & 0,3585 & 0,3555 & 0,3529 \\ 0,351 & 0,3564 & 0,3623 & 0,3688 & 0,3763 & 0,3873 & 0,3775 & 0,3718 & 0,3666 & 0,3628 & 0,3595 & 0,3566 \\ 0,3482 & 0,3533 & 0,3587 & 0,3646 & 0,3707 & 0,3775 & 0,3894 & 0,3799 & 0,3729 & 0,3685 & 0,3648 & 0,3615 \\ 0,3459 & 0,3508 & 0,3559 & 0,3613 & 0,3668 & 0,3718 & 0,3799 & 0,392 & 0,3808 & 0,375 & 0,3706 & 0,3669 \\ 0,3421 & 0,3468 & 0,3517 & 0,3568 & 0,3619 & 0,3666 & 0,3729 & 0,3808 & 0,3927 & 0,3826 & 0,3769 & 0,3727 \\ 0,3397 & 0,3442 & 0,3488 & 0,3537 & 0,3585 & 0,3628 & 0,3685 & 0,375 & 0,3826 & 0,3946 & 0,3846 & 0,3788 \\ 0,3376 & 0,3419 & 0,3464 & 0,351 & 0,3555 & 0,3595 & 0,3648 & 0,3706 & 0,3769 & 0,3846 & 0,397 & 0,3868 \\ 0,3357 & 0,3399 & 0,3441 & 0,3486 & 0,3529 & 0,3566 & 0,3615 & 0,3669 & 0,3727 & 0,3788 & 0,3868 & 0,3993 \end{bmatrix} mH$$



$$\mathbf{R}_{24} = \begin{bmatrix} 17,87 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 17,92 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17,96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18,06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18,14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18,21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18,23 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18,24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18,44 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18,49 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18,51 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18,49 \end{bmatrix} \Omega$$

$$\mathbf{L}_{21} = \begin{bmatrix} 0,3794 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3822 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3847 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3864 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,388 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3873 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3894 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,392 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3927 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3946 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,397 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3993 \end{bmatrix} mH$$

$$\mathbf{L}_{21} = \mathbf{L}_{22} = \mathbf{L}_{23} = \mathbf{L}_{24}$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 60,25 & 49,92 & 44,16 & 38,35 & 34,45 & 29,4 & 25,7 & 22,09 & 18,65 & 15,65 & 12,86 & 10,25 \\ 46,44 & 55,27 & 46,74 & 42,89 & 37,22 & 32,23 & 28,5 & 24,64 & 21,21 & 17,73 & 14,7 & 12,07 \\ 38,93 & 44,32 & 53,82 & 45,65 & 41,09 & 35,85 & 31,8 & 27,83 & 23,92 & 20,44 & 16,83 & 13,94 \\ 32,41 & 39,01 & 43,77 & 53,26 & 44,98 & 39,88 & 35,54 & 31,01 & 27,13 & 23,11 & 19,51 & 16,23 \\ 28,36 & 32,96 & 38,34 & 43,75 & 53,67 & 43,9 & 39,82 & 34,6 & 30,38 & 26,14 & 22,23 & 18,55 \\ 24,32 & 28,66 & 33,61 & 38,98 & 44,11 & 53,22 & 42,37 & 39,77 & 33,96 & 29,84 & 25,32 & 21,18 \\ 21,12 & 25,21 & 29,66 & 34,57 & 39,82 & 42,17 & 53,65 & 43,56 & 38,84 & 33,63 & 28,91 & 24,5 \\ 18,29 & 21,94 & 26,13 & 30,37 & 34,83 & 39,86 & 43,88 & 52,97 & 43,51 & 38,42 & 33,24 & 28,39 \\ 15,86 & 19,35 & 23 & 27,2 & 31,31 & 34,83 & 40,04 & 44,54 & 53,46 & 43,56 & 38,25 & 33,35 \\ 13,8 & 16,74 & 20,35 & 23,99 & 27,89 & 31,73 & 35,93 & 40,77 & 45,16 & 53,95 & 44,12 & 39,15 \\ 11,88 & 14,53 & 17,59 & 21,31 & 24,95 & 28,34 & 32,55 & 37,17 & 41,77 & 46,5 & 55,5 & 46,84 \\ 9,911 & 12,52 & 15,41 & 18,79 & 22,1 & 25,15 & 29,35 & 33,79 & 38,68 & 43,85 & 49,85 & 61,14 \end{bmatrix} \mu H$$



$$M_2 = \begin{bmatrix} 53,32 & 43,94 & 39,83 & 36,25 & 33,3 & 30,63 & 28,65 & 26,98 & 25,05 & 23,77 & 22,96 & 22,43 \\ 42,59 & 47,87 & 40,07 & 37,07 & 34,01 & 31,44 & 29,47 & 27,99 & 26,16 & 24,95 & 23,82 & 23,46 \\ 37,73 & 39,08 & 45,18 & 37,9 & 35,06 & 32,58 & 30,65 & 28,91 & 27,34 & 26,11 & 25,31 & 24,5 \\ 33,9 & 35,54 & 37,2 & 43,66 & 36,53 & 33,81 & 32,13 & 30,42 & 28,54 & 27,52 & 26,51 & 25,95 \\ 31,12 & 32,5 & 34,21 & 36,27 & 42,77 & 35,5 & 33,57 & 32,07 & 30,39 & 29,09 & 28,12 & 27,33 \\ 28,81 & 30,17 & 31,89 & 33,66 & 35,58 & 42,05 & 35,9 & 33,64 & 32,33 & 30,79 & 29,93 & 29,25 \\ 26,87 & 28,11 & 29,77 & 31,7 & 33,32 & 35,55 & 42,47 & 36,2 & 34,26 & 33,15 & 31,94 & 31,14 \\ 25,36 & 26,64 & 27,96 & 29,86 & 31,66 & 33,14 & 36,03 & 43,42 & 36,96 & 35,57 & 34,67 & 33,7 \\ 23,83 & 25,09 & 26,63 & 28,2 & 30,19 & 32,09 & 34,37 & 37,27 & 44,38 & 38,55 & 37,38 & 37,2 \\ 22,66 & 23,9 & 25,38 & 27,12 & 28,85 & 30,58 & 33,31 & 35,99 & 38,73 & 46,74 & 41,38 & 40,74 \\ 21,68 & 22,57 & 24,39 & 25,97 & 27,76 & 29,7 & 32,16 & 35,22 & 37,82 & 41,73 & 50,45 & 45,98 \\ 20,69 & 21,72 & 23,18 & 25,09 & 26,7 & 28,91 & 31,35 & 34,36 & 37,97 & 41,62 & 46,74 & 57,36 \end{bmatrix} \mu H$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 71,88 & 58,91 & 55,36 & 53,2 & 52,16 & 50,83 & 50,84 & 51,06 & 50,6 & 50,79 & 50,96 & 51,19 \\ 59,59 & 69,36 & 57,78 & 54,97 & 52,98 & 51,49 & 51,24 & 51,2 & 50,68 & 50,7 & 51,08 & 51,42 \\ 56,13 & 58 & 68,59 & 57,38 & 54,5 & 52,55 & 52,12 & 52,06 & 51,11 & 51,16 & 51,41 & 51,94 \\ 53,7 & 55,19 & 57,5 & 68,27 & 57,09 & 54,25 & 53,18 & 52,89 & 52 & 51,92 & 52,22 & 52,72 \\ 52,26 & 53,07 & 54,69 & 57,24 & 68,17 & 56,88 & 55,04 & 54,17 & 52,93 & 52,71 & 53,02 & 53,75 \\ 50,87 & 51,68 & 52,95 & 54,7 & 57,21 & 67,88 & 57,3 & 56,06 & 54,33 & 54,16 & 54,27 & 54,72 \\ 49,8 & 50,6 & 51,85 & 53,05 & 54,8 & 56,74 & 68,8 & 58,58 & 56,18 & 55,37 & 55,64 & 56,38 \\ 48,82 & 49,59 & 50,93 & 51,96 & 53,18 & 54,73 & 57,75 & 69,89 & 58,99 & 57,42 & 57,25 & 58,07 \\ 48,33 & 49,19 & 50,2 & 51,34 & 52,17 & 53,16 & 55,48 & 59,04 & 70,43 & 60,51 & 59,63 & 59,89 \\ 47,91 & 48,74 & 49,82 & 50,83 & 51,49 & 52,42 & 54 & 56,7 & 59,61 & 72,06 & 62,71 & 62,81 \\ 47,63 & 48,72 & 49,66 & 50,65 & 51,21 & 51,75 & 53,34 & 55,4 & 57,38 & 61,17 & 74,67 & 66,61 \\ 47,69 & 48,92 & 49,93 & 50,74 & 51,38 & 51,33 & 52,95 & 54,83 & 55,83 & 59,16 & 64,14 & 79,51 \end{bmatrix} \mu H$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 104,9 & 88,07 & 84,41 & 82,05 & 80,34 & 77,88 & 76,57 & 75,92 & 74,6 & 73,97 & 73,82 & 73,58 \\ 86,08 & 102,1 & 86,04 & 82,42 & 80,86 & 78,5 & 77,36 & 76,91 & 75,69 & 75,23 & 74,91 & 75,04 \\ 81,42 & 84,81 & 101,2 & 84,86 & 81,89 & 79,43 & 78,27 & 77,72 & 76,89 & 76,42 & 76,28 & 76,13 \\ 78,99 & 80,82 & 84,32 & 100,5 & 84,85 & 80,76 & 79,53 & 78,89 & 77,9 & 77,59 & 77,37 & 77,41 \\ 77,1 & 78,82 & 80,69 & 84,06 & 100,6 & 83,75 & 80,92 & 80,15 & 79,28 & 78,88 & 78,71 & 78,46 \\ 75,35 & 77,02 & 78,66 & 80,31 & 84,13 & 99,52 & 84,14 & 81,13 & 80,52 & 79,8 & 79,73 & 79,55 \\ 74,29 & 75,87 & 77,34 & 78,84 & 80,98 & 83,86 & 100,3 & 85,18 & 82,42 & 81,72 & 81,16 & 80,99 \\ 73,64 & 75,18 & 76,43 & 77,78 & 79,71 & 80,42 & 84,72 & 101,9 & 86,28 & 83,93 & 83,33 & 82,85 \\ 72,58 & 74,11 & 75,65 & 76,77 & 78,84 & 79,81 & 82,02 & 86,38 & 103,1 & 87,94 & 85,61 & 85,38 \\ 71,92 & 73,44 & 74,93 & 76,21 & 78,19 & 78,98 & 81,28 & 84,06 & 88,05 & 105,3 & 90,26 & 88,14 \\ 71,36 & 72,63 & 74,31 & 75,59 & 77,68 & 78,78 & 80,74 & 83,63 & 86,05 & 90,68 & 108,4 & 93,65 \\ 70,47 & 72,02 & 73,53 & 75,16 & 77,06 & 78,6 & 80,77 & 83,58 & 86,59 & 89,6 & 94,92 & 113,8 \end{bmatrix} \mu H$$

# Bibliografía

- [1] L. Betancourt, G. Martinez, D. Alvarez, and J. Rosero, “Losses characterization on distribution transformer windings in frequency domain by means of finite element method (fem): Part i.” in *Power Engineering, Energy and Electrical Drives (POWERENG), 2013 International Conference on*, Istanbul, 2013.
- [2] —, “Losses characterization on distribution transformer windings in frequency domain by mean of finite element method (fem): Part ii,” in *Power Engineering, Energy and Electrical Drives (POWERENG), 2013 International Conference on*, Istanbul, 2013.
- [3] D. Alvarez, J. Rosero, and E. Mombello, “Circuit model of transformers windings using vector fitting for frequency response analysis (fra),” in *Workshop on Power Electronics and Power Quality Applications (PEPQA), 2013 International Conference on*, Bogota, 2013.
- [4] —, “Circuit model of transformers windings using vector fitting, for frequency response analysis (fra) part ii: Core influence,” in *Workshop on Power Electronics and Power Quality Applications (PEPQA), 2013 International Conference on*, Bogota, 2013.
- [5] M. N. Bandyopadhyay, “A review on transformer diagnostics,” in *Power Symposium, 2005. Proceedings of the 37th Annual North American*, 2005, pp. 304–309.
- [6] W. Bartley, “Analysis of transformer failures,” in *International Association of Engineering Insurers*, ser. 36<sup>th</sup> Annual Conference. Stockholm: The Hartford Steam Boiler Inspection & Insurance Co., 2003.
- [7] J. Fuhr, “Benefits and limits of advanced methods used for transformer diagnostics,” in *Electrical Insulation Conference, 2009. EIC 2009. IEEE*, 2009, pp. 262–272.
- [8] K. G. N. B. Abeywickrama, Y. Serdyuk, and S. Gubanski, “Exploring possibilities for characterization of power transformer insulation by frequency response analysis (fra),” *Power Delivery, IEEE Transactions on*, vol. 21, no. 3, pp. 1375–1382, 2006.
- [9] A. Abu-Siada and S. Islam, “High frequency transformer computer modeling,” in *Power Engineering Conference. AUPEC. Australasian Universities*, 2007, pp. 1–5.
- [10] S. Ryder, “Diagnosing transformer faults using frequency response analysis,” *Electrical Insulation Magazine, IEEE*, vol. 19, no. 2, pp. 16–22, 2003.

- 
- [11] E. Dick and C. Erven, “Transformer diagnostic testing by frequency response analysis,” *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, vol. PAS-97, no. 6, pp. 2144 – 2153, nov. 1978.
- [12] “Ieee draft guide for the application and interpretation of frequency response analysis for oil immersed transformers,” *IEEE PC57.149/D9.3 August 2012*, pp. 1 –67, 24 2012.
- [13] “Frequency response analysis on winding deformation of power transformers,” *The Electric Power Industry Standard of People’s Republic of China, DL/T 911-2004*, 2005.
- [14] C. international des grands réseaux électriques. Comité d’études A2, *Mechanical Condition Assessment of Transformer Windings Using Frequency Response Analysis, FRA*. CIGRÉ, 2008.
- [15] M. Wang, A. Vandermaar, and K. Srivastava, “Improved detection of power transformer winding movement by extending the fra high frequency range,” *Power Delivery, IEEE Transactions on*, vol. 20, no. 3, pp. 1930–1938, 2005.
- [16] A. Shintemirov, W. H. Tang, and Q. Wu, “A hybrid winding model of disc-type power transformers for frequency response analysis,” *Power Delivery, IEEE Transactions on*, vol. 24, no. 2, pp. 730–739, 2009.
- [17] ———, “Transformer core parameter identification using frequency response analysis,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 46, no. 1, pp. 141–149, 2010.
- [18] J. Pleite, E. Olias, A. Barrado, A. Lazaro, and J. Vazquez, “Transformer modeling for fra techniques,” in *Transmission and Distribution Conference and Exhibition 2002: Asia Pacific. IEEE/PES*, vol. 1, 2002, pp. 317–321 vol.1.
- [19] E. Mombello, “Modelo circuital para la representacion del comportamiento transitorio del transformador durante la resonancia con consideracion de las perdidas,” Dissertation, Universidad Nacional de San Juan, 1998.
- [20] E. Bjerkan and N. teknisk-naturvitenskapelige universitet Institutt for elkraftteknikk, *High Frequency Modeling of Power Transformers: Stresses and Diagnostics*, ser. Doktoravhandling ved NTNU. Norwegian University of Science and Technology, Faculty of Information Technology, Mathematics and Electrical Engineering, Department of Electrical Power Engineering, 2005.
- [21] N. Abeywickrama, Y. Serdyuk, and S. Gubanski, “High-frequency modeling of power transformers for use in frequency response analysis (fra),” *Power Delivery, IEEE Transactions on*, vol. 23, no. 4, pp. 2042–2049, 2008.

- 
- [22] D. Wilcox, M. Conlon, and W. Hurley, “Calculation of self and mutual impedances for coils on ferromagnetic cores,” *Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education - Reviews, IEE Proceedings A*, vol. 135, no. 7, pp. 470–476, 1988.
- [23] S. Mitchell and J. Welsh, “Modeling power transformers to support the interpretation of frequency-response analysis,” *Power Delivery, IEEE Transactions on*, vol. 26, no. 4, pp. 2705–2717, 2011.
- [24] ———, “Estimation of physical transformer parameters from frequency response analysis,” in *PowerTech, 2011 IEEE Trondheim*, 2011, pp. 1–7.
- [25] L. Satish and S. K. Sahoo, “Locating faults in a transformer winding: An experimental study,” *Electric Power Systems Research*, vol. 79, no. 1, pp. 89 – 97, 2009.
- [26] A. Shintemirov, W. Tang, W. Tang, and Q. Wu, “Improved modelling of power transformer winding using bacterial swarming algorithm and frequency response analysis,” *Electric Power Systems Research*, vol. 80, no. 9, pp. 1111 – 1120, 2010.
- [27] R. Vecchio, *Transformer Design Principles: With Applications to Core-Form Power Transformers*. Gordon and Breach Science Publishers, 2001.
- [28] L. H. Dixon, “Eddy current losses in transformer windings and circuit wiring.”
- [29] A. Urling, V. Niemela, G. Skutt, and T. Wilson, “Characterizing high-frequency effects in transformer windings—a guide to several significant articles,” in *Applied Power Electronics Conference and Exposition, APEC’ 89. Fourth Annual IEEE*, mar 1989, pp. 373–385.
- [30] C. Johnk and S. Everest, *Teoría electromagnética: campos y ondas*. Limusa, 1981.
- [31] C. Ab, *COMSOL AC/DC Module User’s Guide*, 2010.
- [32] K. G. N. B. Abeywickrama, T. Daszczyński, Y. Serdyuk, and S. Gubanski, “Determination of complex permeability of silicon steel for use in high-frequency modeling of power transformers,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 44, no. 4, pp. 438–444, 2008.
- [33] S. Mitchell and J. Welsh, “The influence of complex permeability on the broadband frequency response of a power transformer,” *Power Delivery, IEEE Transactions on*, vol. 25, no. 2, pp. 803–813, 2010.
- [34] A. Podoltsev, K. G. N. B. Abeywickrama, Y. Serdyuk, and S. Gubanski, “Multiscale computations of parameters of power transformer windings at high frequencies. part ii: Large-scale level,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 43, no. 12, pp. 4076–4082, 2007.

- 
- [35] ———, “Multiscale computations of parameters of power transformer windings at high frequencies. part i: Small-scale level,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 43, no. 11, pp. 3991–3998, 2007.
- [36] S. Kulkarni, S. Kulkarni, and S. Khaparde, *Transformer Engineering: Design and Practice*, ser. Power Engineering. Marcel Dekker, Incorporated, 2004.
- [37] B. Gustavsen and A. Semlyen, “Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting,” *Power Delivery, IEEE Transactions on*, vol. 14, no. 3, pp. 1052–1061, jul 1999.
- [38] B. Gustavsen, “Improving the pole relocating properties of vector fitting,” in *Power Engineering Society General Meeting*, 0-0 2006, p. 1 pp.
- [39] E. E. Mombello, “Modeling of a coil system considering frequency-dependent inductances and losses ii. equivalent circuit synthesis,” *Electrical Engineering*, vol. 84, pp. 11–19, 2002.
- [40] E. Mombello, “A novel method for the synthesis of magnetically coupled networks considering the frequency-dependence of the impedances,” *Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on*, vol. 52, no. 10, pp. 2227–2233, oct. 2005.
- [41] E. E. Mombello, “Modeling of a coil system considering frequency-dependent inductances and losses i. analysis of the impedance matrix characteristics,” *Electrical Engineering*, vol. 84, pp. 3–10, 2002.
- [42] J. W. Eaton, D. Bateman, and S. Hauberg, *GNU Octave Manual Version 3*. Network Theory Ltd., 2008.
- [43] R. Larson and D. Falvo, *Elementary Linear Algebra*, sixth edition ed. New York: John Wiley & Sons, 2010.
- [44] P. DE PELAEZ, R. ARBELAEZ, and L. SIERRA, *Algebra lineal con aplicaciones*. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, 1997.
- [45] H. Firoozi, M. Kharezi, A. Farshidnia, and A. Azirani, “Investigations on the transformer high frequency transfer function to interpretation of fra measurements,” in *Electrical Insulation Conference, EIC*, 2009, pp. 119–123.
- [46] J. Martinez-Velasco, *Power System Transients: Parameter Determination*. Taylor & Francis, 2010.
- [47] G. Aponte, “Evaluación de la condición de los transformadores mediante el análisis de su respuesta en frecuencia,” Dissertation, Universidad del Valle - Univalle, 2010.

- 
- [48] J. Secue, E. Mombello, and C. V. Cardoso, “Review of sweep frequency response analysis -sfra for assessment winding displacements and deformation in power transformers,” *Latin America Transactions, IEEE (Revista IEEE America Latina)*, vol. 5, no. 5, pp. 321–328, 2007.
- [49] E. Gómez-Luna, G. Aponte, W. Herrera, and J. P. Guerra, “Experimentally obtaining on-line fra in transformers by injecting controlled pulses,” *Ingeniería e Investigación*, vol. 33, no. 1, 2013.
- [50] A. Polycarpou, *Introduction to the finite element method in electromagnetics*, ser. Synthesis Lectures on Computational Electromagnetics Series. Morgan & Claypool Publishers, 2006.
- [51] D. A. Aruliah, B. Simon, M. Simon, and C. D. A. Aruliah, “Fast solvers for time-harmonic maxwell’s equations in 3d,” 2001.
- [52] X. Fernandez, *Finite Element Method Applied to Design and Analysis in Power Transformers*, ser. ARWtr 2010, 2010.
- [53] J. Gieras, *Permanent Magnet Motor Technology: Design and Applications*, , *Third Edition*, ser. Electrical and Computer Engineering Series. CRC PressINC, 2010.