UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN GRADO NOVENO DE BÁSICA SECUNDARIA. POSTULADOS DE ARQUÍMEDES Y DE EUCLIDES. ANTECEDENTES. CONSECUENTES

JUDITH ANDREA CASTRO URREGO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Bogotá DC, 2014

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN GRADO NOVENO DE BÁSICA SECUNDARIA. POSTULADOS DE ARQUIMEDES Y DE EUCLIDES. ANTECEDENTES. CONSECUENTES

JUDITH ANDREA CASTRO URREGO

Monografía para optar al título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:
Alberto Campos
Doctor de la Universidad de París
Profesor Honorario
Universidad Nacional de Colombia. Bogotá

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Bogotá DC, 2014

A Dios, por ser quien me guía, sostiene, fortalece y consuela, porque sin Él no estaría donde estoy y no hubiese realizado esta maestría. A mis padres, por su amor, comprensión incondicional, su oración, y su apoyo en el cumplimiento de mis metas, a mis hermanos Fabian, Danilo y Daniel por ser un apoyo en la dificultad, a mi amiga Paola por ser motivo de perseverancia y a mi amado Andrés por su compañía en esta etapa del camino que estoy forjando.

"Todo cuanto hagáis, hacedlo de corazón, como si fuera para el Señor y no para los hombres".

Colosenses 3, 23

"uno no advierte jamás lo que está hecho, sólo puede ver lo que falta por hacer".

Marie Curie.

Agradecimientos

Quisiera agradecer de la manera más cordial a:

A la Universidad Nacional de Colombia, por haberme permitido ser parte de ella y por ser una institución que abre las puertas de su saber científico a quienes estamos deseosos de él.

A mí director del proyecto de grado, Dr. ALBERTO CAMPOS, Profesor Honorario de la Universidad Nacional de Colombia, por su ardua labor y tiempo dedicado, por tener paciencia conmigo y por exigirme y enseñarme tantas cosas, además, porque con su guía me permitió realizar un trabajo de calidad.

Gracias a la profesora Paola Castellanos Garay, compañera del programa, quien fue un constante apoyo y con quien compartí valiosas discusiones acerca de la enseñanza, el interés y la preocupación por formar mejores personas y nuestros trabajos de grado.

También quiero agradecer a mis profesores, por ser aquellas personas que me brindaron sus conocimientos, sus valiosos aportes, mostraron siempre su entusiasmo por la labor que desempeñan y son un modelo a seguir.

Resumen

A partir de la experiencia en algunos colegios y los bajos resultados en pruebas nacionales (Pruebas SABER) como internacionales (Pruebas PISA) en el componente geométrico-métrico, se vio necesario diseñar una propuesta didáctica para la enseñanza de la geometría en grado noveno de básica secundaria a partir de los postulados de Arquímedes y de Euclides.

La propuesta está dividida en dos partes: la primera a partir de las diferentes actividades busca que los estudiantes adquieran un buen conocimiento del Sistema Internacional de medidas y lo puedan utilizar de modo que se den cuenta de lo que se pierde al no emplearlo y cómo el Postulado de Arquímedes es el elemento que le permite a la geometría hablar de medida y de unidad de medida. En la segunda parte se trabaja con el quito postulado de Euclides y se pretende que el estudiante se dé cuenta de que hay tres tipos de superficies constantes (superficie plana, superficie esférica y superficie pseudoesférica) que permiten desarrollar la geometría y de lo importantes que son las líneas geodésicas en estas tres superficies.

Palabras clave: Geodésica, medida, postulado, punto, rectas paralelas, superficie, unidad de medida.

Abstract

From the experience in some schools and taking into account the low scores on national and international test (Pruebas SABER y PISA), for the geometric-metric component was necessary to desing a methodological approach for the geometry teaching, specifically in ninth grade (secondary school) from the postulates of Euclid and Archimedes.

The proposal is divided in two parts: the first one works on the activities intended to acquire a good knowledge of the International System of measures, the students have to use it in a way that they can account what is lost by not using it, and how in geometry, Archimedes's postulate is the element that allows to talk about measurement and unit of measure. In the second part the work is about Euclid's postulate; activities are intended so that students realize that there are three types of constant surfaces (flat surface, spherical surface and pseudospherical surface), and these surfaces that allow the geometric development and the importance of geodesic lines for it.

Keywords: Geodesic, measure, parallel lines, postulate, point, surface, unit of measure.

Contenido

Pág.

Lista de figuras

Pág.

Lista de tablas

Pág.

Lista de símbolos y abreviaturas

Símbolo	**término**
$\measuredangle$	Ángulo
$\measuredangle (h, k)$	Ángulo con lados h y k
$\approx$	Aproximado
$\equiv$	Congruente
$a, b, c, \dots$	Letras para designar rectas
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	Letras para designar planos
A, B, C,…	Letras para designar puntos
AB	Segmento de extremos A y B

Lista de siglas

Sigla	**Definición**
BAAS	Asociación Británica para el Adelanto de la Ciencia
BIPM	Bureau International des Poids et Mesures (Oficina Internacional de Pesas y Medidas),
CCE	Comité Consultivo Eléctrica, después denominado CCEM (Comité Consultivo Electricidad y Magnetismo)
CGPM	Conférence Générale des Poids et Mesures (Conferencia General de Pesas y Medidas)
CGS	Sistema unidad basado en las unidades mecánicas **centímetro, gramo** y **segundo**
CIPM	Comité International des Poids et Mesures (Comité Internacional de Pesas y Medidas)
EICAS	Engine Indicator and Crew Alerting System (Indicador de motor y equipo del Sistema de Alerta)
FDA	Food And Drug Administration (Administración de Alimentos y Drogas)
FPLA	Fair Packaging and Labeling Act (Ley de Equidad de Envasado y Etiquetado)
FQIS	Quantity Information System Processor (Procesador Sistema de Información de cantidad)
ICONTEC	Instituto Colombiano de Normas Técnicas y Certificación
IEC	International Electrotechnical Commission (Comisión Electrotécnica Internacional)
IUPAP	International Union of Pure and Applied Physics (Unión Internacional de Física Pura y Aplicada)
MEN	Ministerio de Educación Nacional.
METAR/TAF	METeorological Aerodrome Report (Informe meteorológico aeronáutico rutinario) estándar internacional del formato del código utilizado para emitir informes de las observaciones meteorológicas en los aeródromos realizado periódicamente.
MKS	Sistema unidad basado en las unidades **metro, kilogramo** y **segundo**
NASA	National Aeronautics and Space Administration (Administración Nacional de la Aeronáutica y del Espacio)
NIST	National Institute of Standards and Technology (Instituto Nacional de Estándares y Tecnología)
OIML	Organización de Metrología Legal
PISA	Program for International Student Assessment (Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes)
SI	Sistema Internacional de Unidades

Introducción

La geometría es una parte fundamental de la matemática y un elemento indispensable que le ha permitido al ser humano resolver diferentes tipos de situaciones como medir, representar objetos del entorno y realizar cálculos. De igual manera, a medida que una persona se va enfrentando a su entorno y a diversas experiencias está adquiriendo y apropiandose de un conocimiento y construyendo su propia estructura mental, estructura en la que debe estar integrada la geometría.

En el transcurso de la historia se ve cómo fue surgiendo la necesidad de contar y medir cada vez con más precision, lo que condujo a utilizar unidades de medida, pero apareció todo tipo de unidades y en tal cantidad que fue ineludible unificarlas a fin de tener un mismo lenguaje, real y equitativo; este proceso de unificación conpermitió llegar al Sistema Internacional de medidas gracias a la labor de grandes matemáticos como Lagrange y Laplace entre otros. Sistema que infortunadamente no todos los países han adoptado.

Es importante que en las instituciones educativas se forme convenientemente a los estudiantes respecto al componente geométrico-métrico ya que infortunadamente en algunos colegios no se lleva a cabo adecuadamente y de esto dan cuenta los resultados de pruebas nacionales como las pruebas SABER y de pruebas internacionales como las pruebas PISA. Es decir, los estudiantes no están empleando de manera adecuada los sistemas de medición ni reconociendo su importancia a fin de dar respuesta de manera lógica a percepciones y relaciones espaciales, representaciones intuitivas, operatorias, formales y abstractas. De igual manera, y según lo menciona el MEN (1998): “La desatención de la geometría como materia de estudio en las aulas y el tratamiento de los sistemas métricos desde concepciones epistemológicas y didácticas, descuida por un lado el desarrollo histórico de la medición y por otro reduce el proceso de medir a la mera asignación numérica”.

Por otra parte, casi toda la actividad académica en cuestiones de geometría procede de *Elementos* de Euclides y del desarrollo de la geometría euclidiana (partiendo de elementos básicos como el punto, la recta y el plano), desde luego la geometría que se enseña en los colegios es en su mayoria euclidiana. Esta geometría se ha implementado por mucho tiempo debido a que se ha considerado que puede representar fielmente el mundo físico que nos rodea; pero como se ha visto a través de la historia, la geometría euclidiana no es tan natural, entonces nos queda el interrogante sobre qué geometría es la que más se adapta a nuestro entorno, qué de geometría debemos asimilar; como se mencionó inicialmente esa geometría la debe integrar cada individuo y para ello la presente propuesta abre el espacio para que el estudiante piense en una geometría que se pueda desarrollar en cada una de las tres superficies constantes (superficie plana, superficie esférica y superficie pseudoesférica), cómo son sus elementos y cómo se pueden relacionar; siendo la geodésica el elemento unificador de las tres superficies ya que sobre ellas se miden las menores distancias entre dos puntos y son las que permiten desarrollar la geometría.

En este trabajo se tuvo en cuenta la obra de *Fundamentos de la geometría* de David Hilbert debido a que el trabajo de Hilbert siendo una obra de base para la geometría (tal como lo enuncia en el título *fundamentos*); permite no solo su aplicabilidad en la geometría euclidiana, sino también las no euclidianas a nivel elemental, además, como lo menciona Campos (2008), la síntesis del trabajo de Hilbert permite explicar ciertas cuestiones que habían quedado suspendidas al lado de los intentos de prueba del quinto postulado y responder a interrogantes planteados por la crítica de *Elementos*, subsecuente a la superación de estos por la invención de las geometrías no euclidianas.

Los estándares curriculares para los grados octavo y noveno, éstos contemplan entre otros aspectos, el cálculo de áreas de figuras planas y el vólumen de sólidos; el manejo de instrumentos y uso de técnicas para medir longitudes, áreas, volúmenes y ángulos; reconocer popiedades y relaciones de figuras geométricas particularmente de los triángulos en la resolución y formulación de problemas.

Teniendo en cuenta lo anteriormente expuesto, se presenta una propuesta en la que se plantea una estrategia didáctica para la enseñanza de la geometría de grado noveno de educación básica; dicha propuesta está dividida en dos partes (postulado de Arquímedes y postulado de Euclides), cada una con dos unidades, para un total de cuatro a fin de que correspondan a los cuatro periodos del año escolar. Dicha propuesta pretende mostrar cómo contribuye la geometría a la unificacion de las unidades de medida y cómo estas se relacionan a fin de que el estudiante adquiera un buen conocimiento y apropiación del SI y se dé cuenta de las dificultades que conlleva el no emplearlo, además de hacerle ver la importancia de las líneas geodesicas en las tres superficies constantes (superficie plana, superficie esférica y superficie pseudoesférica) y en el desarrollo de la geometría. Se espera que con las actividades diseñadas el estudiante desarrolle la comunicación y la argumentación a partir de preguntas abiertas y de figuras que él mismo debe realizar.

El trabajo está organizado en 3 capítulos: el *primer capítulo* corresponde a la propuesta didáctica en torno al postulado de Arquímedes, dado que permite simplificar unidades de medida al tomar un patrón de medida. En este primer capítulo se presenta la identificación del problema, aspectos históricos y epistemológicos particularmente el desarrollo del Sistema Internacional de medidas, el aspecto didáctico y el desarrollo de la propuesta pedagógica que incluye los estándares y lineamientos del MEN, la ubicación en el currículo, los requisitos teóricos (particularmente los tres primeros agrupamientos de axiomas de Hilbert) y el diseño de dos unidades que buscan que los estudiantes conozcan y manejen el SI y vean la importancia de la unificación de las unidades; en la primera unidad se pretende que los estudiantes se apropien del proceso de medición, vean algunas dificultades que se presentan al no tener un sistema de medida unificado y lo inconveniente del sistema anglosajón. En la segunda unidad se busca que los estudiantes se den cuenta de lo indicado que sería utilizar el SI, su utilidad y aplicación.

El *segundo capítulo* corresponde al postulado de Euclides, este capítulo contiene además la identificación del problema, aspectos históricos y epistemológicos, el aspecto didáctico y el desarrollo de la propuesta pedagógica que incluye los estándares y lineamientos del MEN, la ubicación en el currículo, los requisitos teóricos y el diseño de dos unidades. En este capítulo se pretende mostrar cómo actuó Euclides al formular su quinto postulado de manera que el desarrollo histórico de la geometría permitió evidenciar que hay tres probabilidades respecto a la paralela. En la primera unidad se busca que el estudiante se dé cuenta de la importancia de las líneas geodésicas en superficies que se curvan constantemente: el plano, la superficie esférica y la superficie pseudoesférica; mientras que en la segunda unidad se quiere llevar al estudiante a darse cuenta de que los triángulos son intersecciones de líneas geodésicas, por lo tanto son diferentes en el plano, en la superficie esférica y en la superficie pseudoesférica

Finalmente, en el *capítulo tres* se presentan las conclusiones y sugerencia, posteriormente los anexos y por último la bibliografía que se tuvo en cuenta para el desarrollo del presente documento

1. Postulado de Arquímedes

1.1 Identificación del problema

Los estudiantes no emplean de manera adecuada los sistemas de medición ni reconocen su importancia a fin de dar respuesta de manera lógica a percepciones y relaciones espaciales, representaciones intuitivas, operatorias, formales y abstractas.

Algunas de las actividades de las que el ser humano se ha ocupado y preocupado a lo largo de la historia ha sido comunicarse, medir y contar; inicialmente como medio para suplir algunas necesidades básicas como vivienda, vestido, alimento e intercambio de productos; poder responder al qué, cómo y cuánto, y solucionar situaciones como por ejemplo: cuánto se debe pagar por determinado producto, qué terreno es necesario para una determinada construccion, a qué velocidad se debe manejar un automovil en la ciudad, etc. Adicional a esto, como instrumento para el avance de las ciencias. Teniendo en cuenta lo anterior, es de suma importancia tener un lenguaje común, y particularmente, para dar respuestas a estas y otras preguntas, conocer y manejar sistemas de medida y unificados.

Por otra parte, es importante acercar al estudiante al estudio de la geometría de manera dinámica y en la que vea su utilidad. El entorno cotidiano, cultural y técnico en el que está inmerso y actividades diarias como los deportes, las compras en el supermercado, dibujar, la lectura de mapas, e incluso el trabajo en el campo, etc., permiten al estudiante acercarse a la geometría y a la medición, y como lo mencionan los líneamientos del MEN, le permite adquirir muchos conceptos y desarrollar destrezas matemáticas. Es en el proceso de la medición donde se puede encontrar el camino didáctico, al relacionar el entorno con el estudiante y de esta manera hacer que encuentre situaciones en las que puede aplicar de manera práctica gran parte de la matemática.

Para el ser humano es fundamental aprender, estudiar y conocer su entorno. Por lo tanto, la geometría, debería ocupar un lugar privilegiado en el currículo escolar teniendo en cuenta su importancia en la formación del individuo, durante mucho tiempo de la historia fue así, se le dio un lugar privilegiado particularmente a la geometría euclidiana, pero infortunadamente, como lo menciona Campos (2011), a mediados del siglo XX comenzó el descenso de la geometría en los programas de estudio de enseñanza básica o universitaria. Aunque se le puede estar dando un mayor reconocimiento a la geometría, éste no es el adecuado y ello se evidencia en los resultados de las pruebas nacionales (como las pruebas SABER) e internacionales (como las pruebas PISA).

A la baja formación docente en geometría y su práctica docente se le suma la organización que a nivel curricular se le da al componente geométrico. Como lo menciona Gómez (2011) y de acuerdo con mi experiencia, en el currículo se le da poco espacio al componente geométrico, pero es mucho menor el espacio que se le da al componente métrico, además no se instruye con la profundidad adecuada quedando reducida a la conceptualización, perímetros y áreas de figuras planas sin apreciar las relaciones que se puedan dar entre ellas, sus propiedades y sobre todo las construcciones a que hacen referencia los estándares; se deja a un lado la construcción de la magnitud como objeto de medición y el desarrollo de procesos de medición, al igual que la estimación y la aproximación de una medida. Así, la situación de la enseñanza de la geometría no permite que el estudiante llegue a la solución de problemas que requieran un óptimo nivel de desempeño ni alcance los resultados esperados en las diferentes pruebas de carácter nacional o internacional. (Gómez, 2011)

La desatención de la geometría como materia de estudio en las aulas y el tratamiento de los sistemas métricos desde concepciones epistemológicas y didácticas, descuida por un lado el desarrollo histórico de la medición y por otro reduce el proceso de medir a la mera asignación numérica (MEN, 1998).

Como se mencionó al principio, algunas de las necesidades del ser humano a través de la historia han sido contar y medir, producto de ello aparece otra necesidad: utilizar unidades de medida, pero se han generado todo tipo de unidades y es tal su cantidad que es preciso unificarlas con el fin de tener un lenguaje común, real y equitativo, dado que es la medición una de las herramientas que permite describir, controlar, dirigir y mejorar nuestro entorno (cotidiano, cultural y/o tecnológico). Infortunadamente, aun habiéndose unificado las unidades de medida encontramos países (como Estados Unidos, Reino Unido, Birmania y Liberia, entre otros) en los cuales no se ha hecho obligatoria dicha unificación.

Por lo tanto, el estudiante debe reconocer la importancia de tener un sistema métrico unificado y poder encontrar en la geometría el principio unificador; si se quiere que la sociedad vaya en el mismo sentido. Debe poder dar respuesta de manera lógica a percepciones y relaciones espaciales (en tres dimensiones), representaciones intuitivas, operatorias, formales y abstractas. Se debe adiestrar en la conexión lógica en toda explicación geométrica y es *Fundamentos de la geometría* de David Hilbert la obra guía de la fundamentación en geometría y el *postulado de Arquímedes* la función matemática unificadora de las unidades de medición.

1.2 Aspectos históricos y epistemológicos

La palabra geometría está formada por las raíces griegas: “ge”, tierra y “metrón”, medida, por lo tanto, su significado es “medida de la tierra”. Desde la antigüedad, las sociedades primitivas y las primeras culturas tuvieron la necesidad de contar y de medir, para poder realizar actividades tan básicas como construir viviendas, realizar trueques de alimentos o materias primas (intercambios comerciales)[1] e incluso, para los egipcios, explicarse la naturaleza e idear la manera de remarcar los límites de los terrenos ribereños y construir diques paralelos para encauzar sus aguas. Esto, debido a los desbordes que causaban las inundaciones periódicas en el río Nilo, aunque otro motivo era que las clases altas conocían de esta manera cuánto sembraban sus súbditos para luego determinar cuánto debían cobrarles de impuestos.

Pueblos como los mayas y diferentes pueblos andinos como los incas, además de culturas antiguas, como los egipcios y los babilonios, encontraron en el cuerpo humano unidades de longitud (ver tabla 2–1), es decir, que desde la antigüedad fue preciso manejar un tipo específico de unidades y aunque éstas se tomaban a partir de partes del cuerpo, obviamente variaban de individuo a individuo. Documentos encontrados sobre estas culturas e incluso la biblia señalan longitudes que fueron medidas con el antebrazo, la mano, o el dedo; así como los periodos del sol y de la luna fueron usados para medir el tiempo y construir los respectivos calendarios. Cuando era necesario comparar la capacidad o cantidad de masa, se contaba con recipientes los cuales eran llenados con semillas como las habas (Metas y Metrólogos Asociados, 2006). El pueblo Inca hacía uso de diferentes tipos de cántaros, cestos y tinajas, para realizar mediciones, almacenar diferentes alimentos e incluso la hoja de coca y el cacao; tenían un instrumento parecido a las romanas. Al parecer, su presencia se asocia con los trabajos de orfebrería y metalurgia, oficios en los que es necesario conocer la cantidad de masa exacta para utilizar las proporciones adecuadas en las aleaciones. [17]

Tabla 1–1: Unidades antropométricas [15]

	Dedo	Pulgada	Palma	Pie	Codo	Vara
Línea	1/9	1/12				
Grano	1/4	3/16				
Dedo		3/4				
Pulgada	4/3			1/12		
Palma	4	3		1/4		
Cuarta o Palmo	12		3	3/4		1/4
Pie	16	12	4			
Codo	24		6	1,5		
Grado	40		10	2,5	5/3	
Vara	48		12	3	2	
Paso	80		20	5	10/3	
Braza	96		24	6	4	

De acuerdo con Metas y Metrólogos Asociados (2006), a medida que surgieron las unidades de medida, fueron apareciendo de igual manera todo tipo de unidades. Con los primeros sistemas de medida surgió una gran cantidad de problemas, el solo hecho de asociar los objetos físicos a los números constituyó establecer los primeros pasos hacia la matemática; una vez dado este primer paso, llegó a ser posible comparar los objetos con los números asociados, lo cual condujo al

[1] Según estudios científicos (arqueológicos y antropológicos) las unidades de medida empezaron a utilizarse hacia el año 5.000 a.C. (Casares, 2009)

desarrollo de métodos de trabajo con números. Otro problema surgió cuando las cantidades a medir crecían, por lo cual fue necesario el uso de un sistema de representación cada vez más práctico. Casi todos los sistemas numéricos utilizados en la antigüedad representaban con exactitud números enteros, unos de estos sistemas carecían de fundamentos, otros no permitían que las personas pudieran representar grandes cantidades, algunos sistemas numéricos requerían de tal cantidad de símbolos que los volvió imprácticos.

Metas y Metrólogos Asociados (2006) mencionan que paralelo al desarrollo de las civilizaciones, estaba el de las medidas y sus unidades, las cuales llegaron a ser muy complejas, la diversidad y la cantidad de sistemas de medición eran la causa principal de los altercados entre mercaderes y funcionarios encargados de la recaudación tributaria. El desarrollo de los sistemas de numeración y el avance de la ciencia de las matemáticas permitió crear sistemas de unidades de medida que satisfacían momentáneamente las negociaciones y el comercio, pero su complejidad se incrementaba debido a la división de tierras, impuestos e investigación científica, teniendo en cuenta que era necesario hacerlo de manera equitativa, en repetidas ocasiones y en muchos lugares. Adicionalmente, otro obstáculo se presentó: la inconveniencia de tal cantidad de unidades; existían diversos sistemas para el mismo propósito establecidos en diferentes partes del mundo e inclusive dentro del propio país.

Los diferentes imperios tenían su propio sistema de unidades de medida y buscaban diseminarlo por las regiones conquistadas, por ejemplo, el imperio romano, que a su vez adoptó su sistema de medidas a partir del griego aunque con sus propias variantes. De igual manera algunos reyes como Carlos Magno (742–814) tenían su propio sistema de medidas el cual debía ser utilizado en todo el reino. En la época feudal, el rey, los nobles y el clero rivalizaban para imponer en sus dominios su sistema de pesas y medidas (Metas y Metrólogos Asociados, 2006).

Muchos países como Inglaterra fueron invadidos por distintas personas y pueblos y cada uno llevaba consigo sus propias unidades de medidas, como la braza que tuvo su origen con los daneses (era la distancia entre la yema de los dedos con los brazos extendidos), mientras que el codo era una medida alemana en el paño de lana. Es así como Francia e Inglaterra trabajaron las medidas por diferentes caminos pero un problema común fue el de la “referencia” o patrón (Metas y Metrólogos Asociados, 2006).

Cerca del año 1300 la realeza británica ordenó que las pesas y medidas tuvieran lista de definiciones de medición que deberían ser usadas en ese reino. De esta manera se intentaba regularizar o estandarizar el uso de dichas medidas; resultó con tanto éxito que duró aproximadamente 600 años. Infortunadamente con el trascurso de los años los problemas iban en aumento, lo que llevó a los científicos de la época a preguntarse cómo idear un sistema de medidas que se trabajara a nivel mundial y qué sería necesario definir para tal fin, por ejemplo, una unidad de distancia que no dependiera de cosas tan variables y fortuitas como el tamaño del pulgar del que mide, o del pie del rey de turno (Metas y Metrólogos Asociados, 2006).

A los problemas anteriores se agregaba el problema de la racionalización, en 1585 en su libro “*el décimo*” Simon Stevin sugiere que un sistema decimal sea usado para los pesos y las medidas, invención, y las divisiones del grado del arco (Metas y Metrólogos Asociados, 2006).

En 1670 Gabriel Mouton – párroco de la iglesia de San Pablo, en la ciudad francesa de Lyon – tuvo la ocurrencia de definir una unidad de distancia basada en las dimensiones de la Tierra. También tuvo la ocurrencia de que las unidades fraccionarias no fueran como las de otros sistemas (en que 12 pulgadas hacen un pie y 3 pies hacen una yarda, por ejemplo), sino decimales: que fueran divisiones entre 10 unas de otras. Otros propusieron que la unidad de distancia fuera la longitud de un péndulo que va y viene en un segundo. La idea era buena, pero no tanto: el movimiento del péndulo se altera con la intensidad de la gravedad y esta varía de un lugar a otro. El cambio es muy pequeño, pero ya se podía detectar en el siglo XVII (Metas y Metrólogos Asociados, 2006).

El punto culminante de la prepotencia y de tantas injusticias en la vida social de un pueblo había tocado fondo: 1789 en Francia, la revolución daba inicio, un pueblo que exigía a su soberano que impusiera su autoridad para tener un solo rey y una sola medida (Metas y Metrólogos Asociados, 2006).

Respecto a las medidas existentes en Francia, la frase "*En Francia la perplejidad infinita de las medida excede toda la comprensión. Diferencian no solamente en cada provincia, sino para cada distrito y casi cada ciudad*" descrita por Arthur Young da el contexto de la problemática que se vivió. De hecho se ha estimado que Francia tenía cerca de 80 diversos nombres para las medidas en este tiempo, y considerando sus diversos valores en diversas ciudades, alrededor de 250.000 clasificaciones en total para diferentes unidades (Metas y Metrólogos Asociados, 2006). Es de suponer que esto era el caos, dado que los problemas económicos surgían porque no se sabía con exactitud qué cantidad se estaba comprando o si ésta era barata o cara, si era justo el intercambio de mercancía para las dos partes o si se estaban cobrando impuestos de más.

A medida que se extendía por Europa el intercambio de mercancías, los poderes políticos fueron viendo la necesidad de que se "unificara" un sistema de medidas. Es en 1790, cuando la Asamblea Nacional Francesa encargó a la Academia de Ciencias diseñar un sistema de unidades decimales simple, que adoptó el sistema de medidas propuesto en 1670 por el sacerdote Gabriel Mouton: la unidad básica de medida había de ser una fracción de la circunferencia de la Tierra, y a partir de ella se crearía un sistema sencillo de 10 unidades, siendo ésta el metro. En el mismo año Thomas Jefferson propuso un sistema decimal basado en la medida para los Estados Unidos. Del cual se deriva la primera modernidad decimal del mundo (el dólar de Estados Unidos, el cual consiste en 100 centavos). (Metas y Metrólogos Asociados, 2006)

Curiosamente, aunque establecida la unificación de los sistemas de medida y creado el Sistema Internacional de Unidades, muchos países no la han adoptado de manera obligatoria o la manejan conjuntamente con su propio sistema de medidas.

1.2.1 Sistema internacional de unidades SI

Matemolivares (2011) respecto a la Revolución Francesa, menciona que uno de sus objetivos era la universalidad; por ello en la Asamblea Nacional Francesa, en 1790, se hizo eco del problema de la medida y se planteó intervenir en el asunto, tratando de buscar medidas seguras, fiables y mundiales. Debía hacerlo de forma seria, basada en la naturaleza, anulando y evitando localismos y lo suficientemente rigurosa como para que pudiera ser admitida por otros Estados del mundo. Como se mencionó anteriormente, en un principio se propusieron varias alternativas para determinar la unidad de medida longitud (longitud del péndulo, arco en el ecuador y arco de meridiano) y la Academia de las Ciencias (con el prestigio que tenía, y la comisión encargada de este tema que estaba formada por Lagrange, Laplace, Monge, entre otros) decidió que se trabajara sobre la medida de un arco de meridiano (Matemolivares, 2011).

El 19 de marzo de 1791, la Academia de las Ciencias propuso la adopción de un patrón procedente de la naturaleza: el metro[2]. Si se aceptaba la propuesta, el metro sería la diezmillonésima parte del cuadrante de un meridiano terrestre. Ante la imposibilidad de medir todo un cuarto de meridiano desde el polo Norte al Ecuador, la solución era medir un trozo y calcular matemáticamente el valor del total. El arco de meridiano escogido en la propuesta de la Academia fue el comprendido entre **Dunkerque** y **Barcelona,** Figura 2–1 (Xataka Ciencia, 2008). Las medidas para la capacidad (volumen) y la masa debían ser derivadas de la unidad de longitud, así relacionando las unidades básicas del sistema el uno al otro y a la naturaleza. Otra de las grandes ventajas del sistema se da en que los múltiplos y submúltiplos son decimales, lo que facilitaba significativamente las operaciones aritméticas, y que las unidades de medida son fácilmente reproducibles (Metas y Metrólogos Asociados, 2006).

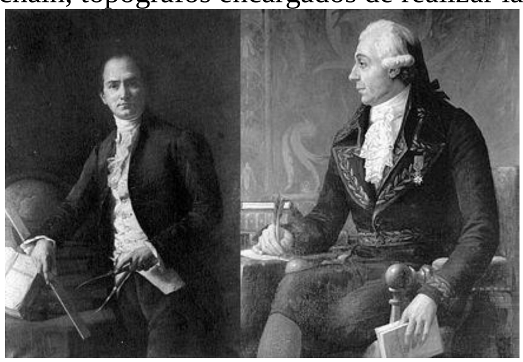
Figura 1–1: Mapa del arco de meridiano escogido en la propuesta de la Academia para determinar la unidad patrón de longitud, y comprendido entre Dunkerque y Barcelona. [11]

El rey de Francia: Luis XVI fue quien encargó a los topógrafos **Pierre François André Méchain** y **Jean Baptiste Joseph Delambre** (Figura 2–2) llevar a cabo la medición del meridiano. La técnica que utilizaron fue la triangulación geodésica; para esto debían trazar una cadena de triángulos, los vértices de los cuales serían montañas situadas a lo largo del meridiano y calcular sus dimensiones a partir de la medición de dos bases, cuidadosamente medidas sobre la medida del patrón más perfecto que existía en Francia: la toesa. Después de las mediciones de campo,

[2] Posteriores mejoras en la medición tanto del tamaño de la Tierra como de las propiedades del agua resultaron en discrepancias con los patrones. [12]

durante seis meses se efectuaron los trabajos necesarios para determinar matemáticamente la longitud de la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano de París, el metro, y los patrones de capacidad. Después de largos cálculos, se decidió que el metro, mediría 3 pies de rey, 11 líneas y 296 milésimas de una línea. Una toesa francesa de seis pies valdría 1,9490366 metros. Una ley de la República Francesa del 10 de diciembre de 1799, firmada por el primer cónsul, Napoleón Bonaparte, establecía el metro para siempre con el lema: "*Para todos los pueblos y para todos los tiempos*". Había nacido el metro y el sistema métrico decimal. (Xataka Ciencia, 2008)

Figura 1–2: Delambre y Méchain, topógrafos encargados de realizar la medición del meridiano [11]



El proceso culminó en la proclamación el 22 de junio de 1799 del sistema métrico con la entrega a los Archivos de la República de los patrones del metro y el kilogramo, confeccionados en aleación de platino, presenciada por funcionarios del gobierno francés y de varios países invitados y muchos de los más renombrados sabios de la época (Metas y Metrólogos Asociados, 2006).

Infortunadamente, como lo menciona Metas y Metrólogos Asociados (2006), pese a la adopción oficial del sistema métrico, ni siquiera los franceses lo usaron enseguida. Napoleón Bonaparte tuvo que permitir que se siguiera usando el viejo sistema medieval de medidas y no fue sino hasta 1840 cuando el sistema métrico decimal se convirtió en el único legal en Francia. Aunque el sistema métrico no fue aceptado con entusiasmo al principio, la adopción por otras naciones ocurrió después de que Francia lo hizo obligatorio.

Por esta misma época Gauss promovió el uso de este sistema métrico, junto con el segundo definido en astronomía, como sistema de unidades coherente para las ciencias físicas. Gauss era el primero en hacer medidas *absolutas* de la fuerza magnética de la Tierra en términos de un sistema decimal basado en *las tres unidades mecánicas* milímetro, gramo y segundo para respectivamente, las cantidades longitud, masa y tiempo y en conjunto con Weber ampliaron estas medidas para incluir fenómenos eléctricos (Metas y Metrólogos Asociados, 2006).

La Revolución Industrial estaba ya en camino y la normalización de las piezas mecánicas, fundamentalmente tornillos y tuercas, era de la mayor importancia y estos dependían de mediciones precisas. Se empieza a generar el caos científico, a pesar de que las discrepancias que se encontraron habrían quedado totalmente enmascaradas en las tolerancias de fabricación de la época, cambiar los patrones de medida para ajustarse a las nuevas mediciones hubiera sido impráctico particularmente cuando nuevos y mejores instrumentos acabarían encontrando nuevos valores cada vez más precisos (Metas y Metrólogos Asociados, 2006).

Los científicos han desarrollado y adoptado el sistema métrico para simplificar sus cálculos y para promover la comunicación a través de límites nacionales. Sin embargo… la observación de un fenómeno es en general incompleta, a menos que dé lugar a una información cuantitativa. Para obtener dicha información, se requiere la medición de una propiedad física. Así, la medición constituye una buena parte de la rutina diaria del físico experimental. La medición es la técnica por medio de la cual asignamos un número a una propiedad física, como resultado de una comparación de dicha propiedad con otra similar tomada como patrón, la cual se ha adoptado como unidad (Metas y Metrólogos Asociados, 2006)

Respecto a la adopción del sistema métrico, Metas y Metrólogos Asociados (2006) afirman:

> En el 1860, Gran Bretaña, los Estados Unidos y los estados alemanes hicieron movimientos para adoptar el sistema métrico. Llegó a ser legal en Gran Bretaña en 1864 por una ley que fue aprobada por la Cámara de los Comunes para requerir su uso a través del imperio británico, la cual nunca se hizo obligatoria.
>
> En ese mismo año la electricidad y el magnetismo fueron desarrollados más a fondo bajo la dirección activa de Maxwell y de Thompson, con la asociación británica para el adelanto de la ciencia (BAAS). Formularon el requisito para un sistema de unidades coherente con las unidades base.
>
> Al igual que en Gran Bretaña, en los Estados Unidos el Sistema Métrico llegó a ser legal en 1866 aunque su uso no fue hecho obligatorio, los estados alemanes aprobaron la legislación en 1868, haciendo uso del sistema métrico que fue hecho obligatorio.
>
> En 1874 BASS introdujo *el sistema de **CGS***, un sistema coherente tridimensional de la unidad, basado en las tres unidades mecánicas **centímetro, gramo** y el **segundo**, con los prefijos que se extienden de micro a mega para expresar submúltiplos y múltiplos decimales. El desarrollo siguiente de la física como ciencia experimental fue basado en gran parte en este sistema.
>
> En 1875, Francia dio a conocer oficialmente al mundo el Sistema Métrico Decimal con la celebración de la convención del Metro, y con el objeto de garantizar la uniformidad y equivalencia en las mediciones, así como facilitar todas las actividades tecnológicas, industriales y comerciales. Este Tratado fue firmado en París por 17 países, los cuales se comprometían a sostener gastos comunes, la estructura científica, técnica y administrativa que implicaba el establecimiento, el mejoramiento y la difusión de las unidades de este Sistema. El Tratado del Metro otorga autoridad a la Conférence Générale des Poids et Mesures (CGPM, Conferencia General de Pesas y Medidas), al Comité International des Poids et Mesures (CIPM, Comité Internacional de Pesas y Medidas) y al Bureau International des Poids et Mesures (BIPM, Oficina Internacional de Pesas y Medidas), para actuar a nivel internacional en materia de metrología.

Los objetivos que se tuvieron en cuenta para diseñar el sistema métrico están definidos en Metas y Metrólogos Asociados (2006), así:

- Neutral y universal, los diseñadores del sistema métrico querían que fuera lo más neutral posible para facilitar su más amplia adopción.
- Cualquier laboratorio debía poder reproducirlas; en todos los países habrían de referir sus patrones al patrón del país que tuviera los originales.
- Múltiplos decimales, todos los múltiplos y submúltiplos de las unidades base serían en base a potencias decimales.
- Prefijos comunes, todas las unidades derivadas habrían de usar un mismo conjunto de prefijos para indicar cada múltiplo. Por ejemplo, *kilo* se usaría tanto para múltiplos de peso (kilogramo) como de longitud (kilómetro) en ambos casos indicando 1000 unidades de base.
- Práctica. Las nuevas unidades deberían ser cercanas a valores de uso corriente en aquel entonces.

Los tamaños de las unidades coherentes de CGS en los campos de la electricidad y el electromagnetismo, demostraron ser incómodos, así pues, en el 1880, BAAS y el congreso eléctrico internacional, precursor de la Comisión Electrotécnica Internacional (IEC), aprobó un sistema mutuamente coherente *de unidades prácticas*. Entre ellas estaban el Ohm para la resistencia eléctrica, volt para la fuerza electromotriz, y el amperio para la intensidad de la corriente eléctrica (Metas y Metrólogos Asociados, 2006).

Las unidades MKS que representan **metro, kilogramo** y **segundo** fueron utilizados con más frecuencia cada vez en transacciones comerciales, ingeniería, y otras áreas prácticas. Se empezó a sentir cierto malestar entre los usuarios de unidades métricas, por la necesidad de traducir entre las unidades de CGS y el MKS que iba contra el ideal métrico de un sistema único de medida (Metas y Metrólogos Asociados, 2006).

Después del establecimiento de la convención del metro, el CIPM se concentró en la construcción de los nuevos prototipos que tomaban al metro y al kilogramo como las unidades base de la longitud y de la masa. En 1889 la 1ª CGPM sancionó los prototipos internacionales para el metro y el kilogramo. Junto con el segundo astronómico como unidad del tiempo, estas unidades constituyeron un sistema mecánico tridimensional de la unidad similar al sistema CGS, pero con las unidades base metro, kilogramo (Metas y Metrólogos Asociados, 2006).

En 1901 el físico italiano Giovanni Giorgi demostró que es posible combinar las unidades mecánicas del sistema metro–kilogramo–segundo con las unidades eléctricas para formar un solo sistema coherente agregando a las tres unidades base, una cuarta unidad base de naturaleza eléctrica, tal como el amperio o el ohm, y reescribiendo las ecuaciones que ocurrían en electromagnetismo en la forma racionalizada supuesta. Así, Giorgi abrió la trayectoria de un número de nuevos progresos (Metas y Metrólogos Asociados, 2006).

Finalmente Metas y Metrólogos Asociados (2006) respecto al desarrollo del SI, afirman:

> Después de la revisión de la convención del metro por el 6° CGPM en 1921, que prolongó el alcance y las responsabilidades del BIPM a otros campos de la física, y la creación subsecuente del CCE (Comité Consultivo Eléctrica), (ahora CCEM (Comité Consultivo

Electricidad y Magnetismo)) por el 7° CGPM en 1927, la oferta de Giorgi fue discutida a fondo por el IEC y el IUPAP (International Union of Pure and Applied Physics) y otras organizaciones internacionales. Esto condujo al CCE a recomendar, en 1939, la adopción de un sistema basado en el metro, el kilogramo, el segundo y el amperio, una oferta aprobada por el CIPM en 1946.

Después de una investigación internacional por el BIPM, que comenzó en 1948, el 10° CGPM, en 1954, aprobó la introducción *del amperio, del kelvin* y *de la candela* como unidades base, respectivamente, para la intensidad de corriente eléctrica, temperatura termodinámica e intensidad luminosa.

El sistema métrico fue oficialmente denominado Sistema Internacional de Unidades (SI) por la 11ª CGPM en 1960. En ese mismo año se realizó la cuarta definición del metro que estaba en función de radiación del Kriptón 86.

Las enmiendas de la educación de 1974 efectuadas en Estados Unidos (el derecho público 92–380) establecieron a las agencias y a instituciones educativas que prepararan a estudiantes para utilizar el sistema métrico de medida como parte del programa educativo regular.

En 1983, en la 17ª Convención General de Pesas y Medidas, se estableció la quinta y actual definición del metro en función de la velocidad de la luz: Longitud de trayecto recorrido en el vacío por la luz durante 1/299 792 458 segundos.

Desde la antigüedad nos hemos dado cuenta de la necesidad de medir y contar, surgió con el tiempo también la necesidad de tener unidades de medida; durante miles de años se trabajó con múltiples unidades para la misma magnitud y nos llevó mucho tiempo tener en cuenta la necesidad de manejar un único sistema y empezar a unificarlo (aproximadamente hasta el siglo XVIII); nos ha llevado un par de siglos (y el trabajo de muchas personas) concretar este trabajo y tratar de adoptar dicha unificación a nivel mundial. Sin embargo, después de todo este proceso y creado el Sistema Internacional de unidades de medidas aún hay estados que no lo han adoptado, su uso no es obligatorio o lo manejan junto con su propio sistema de medidas.

OTROS DATOS HISTÓRICOS

- En Matemolivares (2011) se afirma que al parecer Méchain cometió un error en la medición del meridiano, en el tramo de Barcelona, y una vez descubierto lo ocultó. Delambre terminó primero su labor e incluso le ayudó y creó en platino el patrón del metro. Revisadas por Delambre las notas dejadas por Méchain descubrió el error, pero tampoco lo desveló. Por ello parece que el resultado acarrea un error perpetuado en el tiempo y en las siguientes definiciones de longitud (incluso la definición actual basada en la velocidad de la luz). Así de acuerdo con las mediciones efectuadas hoy día con satélites, la longitud del meridiano desde el Polo hasta el Ecuador es de 10.002.290 metros. Por lo tanto el metro calculado por Delambre y Méchain es unos 0,2 milímetros más corto. Por ello se dice que triunfaron incluso en el fracaso: conocieron y modificaron nuestro conocimiento de la forma de la Tierra y el concepto de error. Además unificaron una medida para la posteridad, que era su objetivo (Matemolivares, 2011).

Por lo tanto se creó el **metro** como la diezmillonésima de la cuarta parte del meridiano terrestre. Incluso ahora la NASA nos dice que ello va cambiando y variando en función del deshielo del polo (¡veremos qué ocurre con el calentamiento global!). (Metas y Metrólogos Asociados, 2006).

- En España se implantó el sistema métrico decimal el 15 de abril de 1848. Siguieron Chile (1848), Colombia (8 de junio de 1853), Argentina (1863), México (1857), pero los anglosajones (EEUU, Inglaterra) no llegaron a implantarlo (Matemolivares, 2011).

- En el año 1875, EE.UU. junto con otros 16 países firmaron el Tratado del Metro, el cual define las unidades inglesas en términos del Sistema Métrico. Hoy en día el sistema métrico decimal se utiliza en casi todas partes, inclusive en el Reino Unido las unidades del Sistema Imperial están siendo lentamente reemplazadas por el Sistema Internacional de Unidades; mientras que en Estados Unidos la inercia del antiguo sistema (U.S. Customary System –USCS–) ha impedido en gran medida dicho cambio, a pesar de los grandes esfuerzos realizados por el NIST (National Institute of Standards and Technology). (Casares, 2009).
  El Sistema Inglés fue estandarizado por los reyes ingleses en el 1300. El Sistema Inglés o Imperial creó unidades estándares tomando como referencia las partes del cuerpo. La razón fue que para las personas es fácil el acceso a estas referencias. Ejemplo: el pie y pulgar. El problema de este sistema es que de persona a persona las medidas cambian y la conversión entre unidades es más difícil (Casares, 2009).

- En 1994, el acto de empaquetado y de etiquetado (FPLA) fue enmendado por la Administración de Alimentos y Drogas (FDA) para requerir el uso de unidades dobles (libra–pulgada y métrico) en todos los productos de consumo norteamericano (Metas y Metrólogos Asociados, 2006).

- En el mismo año todas las observaciones de la temperatura superficial en informes nacionales del servicio METAR/TAF del tiempo ahora se trasmiten en grados Celsius. Es importante destacar que la resolución de cambiar el nombre de grado centígrado a grado Celsius fue emitida en 1948 (Metas y Metrólogos Asociados, 2006) (Metas y Metrólogos Asociados, 2006).

- Así como los países que son miembros de la Comunidad Europea optaron por adoptar una moneda unificada, el Euro, a fines de 2001, se han realizado muchos intentos a través de los años para llevar al mundo a adoptar un único sistema de unidades de medida (Casares, 2009).

- A principios del año 2005, los límites de velocidad en Irlanda fueron convertidos de millas por hora a kilómetros por hora (km/h) (Metas y Metrólogos Asociados, 2006).

- Para el término del año 2009 era requerido que todos los productos vendidos en Europa (con excepciones limitadas) tuvieran solamente unidades métricas en sus etiquetas y el etiquetado dual no sería permitido (Metas y Metrólogos Asociados, 2006).

1.2.2 Sistema internacional de unidades, algunas definiciones

El sistema métrico decimal fue de gran utilidad ya que cantidades grandes o pequeñas de cada unidad eran creadas multiplicando o dividiendo las unidades básicas por 10; característica que proporcionó una gran conveniencia a los usuarios del sistema dado que elimino la necesidad de los cálculos tales como dividir por 16 (para convertir libras a onzas) o multiplicar por 12 (para convertir pies a pulgadas). Los cálculos similares en el sistema métrico podían ser realizados simplemente cambiando de puesto la coma así, de esta forma quedaba establecido el sistema métrico en "base–10" o sistema "decimal" (Metas y Metrólogos Asociados, 2006) (Metas y Metrólogos Asociados, 2006).

La Comisión asignó el metro conocido – metro – a la unidad de longitud. Nombre que fue derivado del metron griego que significa "una medida". El estándar físico que representaba el metro debía ser construido de modo que igualara a la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre (Metas y Metrólogos Asociados, 2006).

La unidad métrica inicial de la masa, el "gramo", fue definido como la masa de un centímetro cúbico (un cubo que es 0,01 metro de cada lado) de agua en su temperatura de la densidad máxima. El decímetro cúbico (un cubo 0,1 metro en cada lado) fue elegido como la unidad para la capacidad. Como medida fluida del volumen para el decímetro cúbico fue dada el "litro conocido". (Metas y Metrólogos Asociados, 2006)

El organismo regente de la metrología legal en el ámbito mundial es la Organización de Metrología Legal (OIML). Los países miembros o adherentes a la OIML deben adoptar dentro de sus legislaciones los reglamentos y recomendaciones establecidos en dicha organización. ISO es un órgano consultivo de la Organización de las Naciones Unidas y coopera estrechamente con la Comisión Electrotécnica Internacional (International Electrotechnical Commission, IEC). En la Norma ISO 1000 encontramos detallado el Sistema Internacional de Unidades, sus unidades base, las derivadas, sus múltiplos y submúltiplos, así como también su nomenclatura y simbología (Casares, 2009).

De acuerdo con Casares (2009), la finalidad de ISO es la elaboración de normas internacionales industriales y comerciales, en consonancia con el Acta Final de la Organización Mundial del Comercio, con el propósito de:

- facilitar el comercio,
- facilitar el intercambio de información,
- contribuir a la transferencia de tecnologías.

El Instituto Colombiano de Normas Técnicas y Certificación, ICONTEC, es el organismo nacional de normalización, según decreto 2269 de 1993, que estudió y editó La NTC 1000 (quinta actualización) radicada por el Consejo Directivo el 29 de septiembre de 2004; es una adopción idéntica por traducción de la norma ISO 1000 Amd. 1:1998 (ICONTEC, 2004).

SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)

El documento mencionado anteriormente (NTC 1000) es el que se tuvo en cuenta para la elaboración de las siguientes tablas en las que se registran las unidades básicas y unidades derivadas, que forman en conjunto el sistema coherente de unidades del SI.

Unidades básicas

El SI se fundamenta en las siete unidades básicas mostradas en la Tabla 2–2.

Tabla 1–2: Unidades básicas del sistema internacional de unidades. [9]

Magnitud	Unidad básica SI	Símbolo
longitud	metro	m
masa	kilogramo	kg
tiempo	segundo	s
corriente eléctrica	amperio	A
temperatura termodinámica	kelvin	K
cantidad de sustancia	mol	mol
intensidad luminosa	candela	cd

Unidades derivadas

Las unidades derivadas se expresan algebraicamente en términos de las unidades básicas. Sus símbolos se obtienen por medio de los signos matemáticos de multiplicación y división; por ejemplo, la unidad del SI para velocidad es metro por segundo (m/s).

Para algunas unidades derivadas del SI existen nombres y símbolos especiales; los aprobados por la CGPM se presentan en las tablas 1–3 y 1–4

Tabla 1–3: Unidades derivadas del sistema internacional que tienen nombre especial [9]

Magnitud	Nombre especial o unidad SI derivada	símbolo	Expresada en términos de unidades SI básicas o suplementarias o en términos de otras unidades SI derivadas
Ángulo plano	radian	rad	1 rad = 1m/m = 1
Ángulo sólido	estereorradián	sr	1 sr = 1 m^2/m^2 = 1
Frecuencia	hercio, (hertz)	Hz	1 Hz = 1 s^{-1}
Fuerza	newton	N	1 N = 1 $kg\cdot m/s^2$
Presión, esfuerzo	pascal	Pa	1 Pa = 1 N/m^2
Energía, trabajo, cantidad de calor	julio	J	1 J = 1 N·m
Potencia			
Carga eléctrica, cantidad de	vatio	W	1 W = 1 J/s
electricidad.	culombio	C	1 C = 1A·s
Potencial eléctrico, diferencia de potencial, tensión, fuerza electromotriz.	voltio	V	1 V = 1 W/A
Capacitancia eléctrica	faradio	F	1 F = 1 C/V
Resistencia eléctrica	ohmnio	Ω	1 Ω = 1 V/A
Conductancia eléctrica.	siemens	S	1 S = 1 Ω^{-1}
	weber	Wb	1 Wb = 1 V·s

Magnitud	Nombre especial o unidad SI derivada	símbolo	Expresada en términos de unidades SI básicas o suplementarias o en términos de otras unidades SI derivadas
Flujo de inducción magnética, flujo magnético.	tesla	T	1 T = 1 Wb/m^2
Densidad de flujo magnético, inducción magnética.	henrio	H	1 H = 1 Wb/A
Inductancia		°C	1 °C = 1 K
Temperatura Celsius	grado Celsius[1)]	lm	1 lm = 1 cd·sr
Flujo luminoso	lumen	lx	1lx = 1 lm /m^2
Iluminancia	lux		

[1)] El grado Celsius es un nombre especial que se da a la unidad de kelvin utilizada en valores de temperatura. (véase la NOTA 3)

Tabla 1–4: Unidades del sistema internacional derivadas con nombres especiales aceptados para propósitos de protección de la salud humana. [9]

Magnitud	Nombre especial de la unidad SI derivada	símbolo	Expresada en términos de unidades básicas o unidades SI derivadas
Actividad (de un núcleo radiactivo)	becquerel	Bq	1 Bq = 1 s–1
Dosis absorbida, energía específica impartida kerma, índice de dosis absorbida	gray	Gy	1 Gy = 1 J/kg
Dosis equivalente	sievert	Sv	1 Sv = 1 J/kg

Múltiplos de las unidades del sistema internacional

Los prefijos indicados en la tabla 1–5 se usan para formar los nombres y los símbolos de los múltiplos (múltiplos y submúltiplos decimales) de las unidades del Sistema Internacional.

El objetivo de un prefijo es el de combinarse con el símbolo central[3] al cual se une formando con él un nuevo símbolo (para un múltiplo o submúltiplo decimal) que puede elevarse a una potencia positiva o negativa, y que puede también combinarse con otros símbolos de unidades para formar símbolos de unidades compuestas

Ejemplos:

$$1\ \text{cm}^3 = (10^{-2}\text{m})^3 = 10^{-6}\text{m}^3$$
$$1\ \mu\text{s}^{-1} = (10^{-6}\text{s})^{-1} = 10^{6}\text{s}^{-1}$$
$$1\text{mm}^2 = (10^{-3}\text{m})^2/\text{s} = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$$

No se deben utilizar prefijos compuestos; por ejemplo, se debe escribir nm (nanómetro), nunca mµm

NOTA 1: por razones históricas el nombre de la unidad básica para la masa, kilogramo, contiene el nombre del prefijo del Sistema Internacional “kilo”, los nombres de los múltiplos y los

[3] En este caso, la expresión “símbolo central (kernel symbol)” significa solamente un símbolo para una unidad básica, o una unidad derivada con un nombre especial; sin embargo véase la nota 1 del presente apartado.

submúltiplos decimales de la unidad de masa se forman añadiendo los prefijos a la palabra "gramo", es decir, miligramo (mg) en lugar de microkilogramo (mkg).

Tabla 1–5: Prefijos del Sistema Internacional [9]

Letra	Símbolo	Factor	Número decimal
yotta	Y	10^{24}	1 000 000 000 000 000 000 000 000 de unidades
zetta	Z	10^{21}	1 000 000 000 000 000 000 000 de unidades
exa	E	10^{18}	1 000 000 000 000 000 000 de unidades
peta	P	10^{15}	1 000 000 000 000 000 de unidades
tera	T	10^{12}	1 000 000 000 000 de unidades
giga	G	10^{9}	1 000 000 000de unidades
mega	M	10^{6}	1 000 000 de unidades
kilo	κ	10^{3}	1 000 unidades
hecto	h	10^{2}	100 unidades
deca	Da	10^{1}	10 unidades
deci	d	10^{-1}	0,1 unidad
centi	c	10^{-2}	0,01 unidad
mili	m	10^{-3}	0,001 unidad
micro	µ	10^{-6}	0,000 001 unidad
nano	n	10^{-9}	0,000 000 001 unidad
pico	p	10^{-12}	0,000 000 000 001 unidad
femto	f	10^{-15}	0,000 000 000 000 001 unidad
atto	a	10^{-18}	0,000 000 000 000 000 001 unidad
zepto	z	10^{-21}	0,000 000 000 000 000 000 001 unidad
yocto	y	10^{-24}	0,000 000 000 000 000 000 000 001 unidad

UNIDADES QUE NO PERTENECEN AL SISTEMA INTERNACIONAL PERO QUE PUEDEN UTILIZARSE JUNTO CON LAS UNIDADES Y LOS MÚLTIPLOS QUE SÍ LO SON

Existen determinadas unidades por fuera del Sistema Internacional que el Comité Internacional de Pesas y Medidas (CIPM) ha considerado necesario conservar, debido a su importancia práctica (véanse las tablas 1–6 y 1–7)

Los prefijos de la tabla 4 pueden utilizarse con algunas de las unidades indicadas en las tablas 5 y 6; por ejemplo, mililitro (ml). En algunos casos se forman unidades compuestas utilizando las unidades establecidas en las tablas 5 y 6 junto con unidades del Sistema Internacional y sus múltiplos; por ejemplo, kg/h; km/h

Tabla 1–6: Unidades utilizadas con el Sistema Internacional [9]

Magnitud	Unidad	Símbolo	Definición
tiempo	minuto hora día	min h d	1 min = 60 s 1 h = 60 min = 3600 s 1 d = 24 h = 86 400 s
ángulo plano	grado minuto segundo	° ‘ ‘’	1° = (π /180)rad 1’ = (1/60)° 1’’ = (1/60)’
Volumen	litro	L, L[1]	1 l = 1 dm^3
Masa	Tonelada[2]	t	1t = 10^3 kg

[1] Los símbolos para litro son equivalentes. Sin embargo, el CIPM hará un estudio sobre el desarrollo de los dos símbolos con el propósito de ver si uno de los dos se puede suprimir.
[2] También denominada tonelada métrica en el idioma ingles.

Tabla 1–7: Unidades utilizadas en el Sistema Internacional cuyos valores son obtenidos experimentalmente y expresados en el Sistema Internacional. [9]

Magnitud	Unidad	Símbolo	Definición
Energía	Electrovoltio	eV	El electrovoltio es la energía cinética adquirida por un electrón a su paso, a través de una diferencia de potencial de 1 voltio en el vacío. 1 eV = 1,602 19 x 10^{-19} J (aproximadamente)
Masa	Unidad de masa atómica	u	La unidad de masa atómica (unificada) es igual a 1/12 de la masa de un **nucleido ^{12}C.** 1 u = 1,660 53 x 10^{-27} kg (aproximadamente)

Definiciones de las unidades básicas del Sistema Internacional de unidades

Las definiciones aquí presentadas, junto con las observaciones, son las que aparecen en el documento del Instituto Colombiano de Normas Técnicas y Certificación (2004). Norma Técnica NTC 1000 correspondiente a metrología y Sistema Internacional de unidades.

- *Metro*: longitud del trayecto recorrido por la luz en el vacío, durante un intervalo de tiempo de 1/299 792 458 de un segundo.
- *Kilogramo*: es la unidad de masa; es igual a la masa del prototipo internacional de kilogramo.
- *Segundo*: es la duración de 9 192 631 770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfino del estado fundamental del átomo de Cesio–133.
- *Amperio*: es la intensidad de corriente eléctrica constante que, si se mantiene en dos conductores rectos paralelos de longitud infinita, de sección transversal circular despreciable, y distanciados un metro en el vacío, produciría entre estos conductores una fuerza igual a 2 x 10^{-7} newton por metro de longitud.
- *Kelvin*: unidad de temperatura termodinámica, es 1/273,16 de la temperatura y termodinámica del punto triple del agua.
- *Mol*: es la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas unidades elementales como átomos existen en 0,012 kilogramos de carbono 12. Cuando se utiliza el mol, las

unidades elementales deben identificarse y pueden ser átomos, moléculas, iones, electrones, otras partículas, o grupos de tales partículas.

- *Candela*: es la intensidad luminosa en una dirección determinada, de una fuente que emite una radiación monocromática con una frecuencia de 540 x 10^{12} Hz y cuya intensidad radiante, en la dirección determinada es 1/683 vatios por estereorradián.

NOTA 1: la 13 CGPM (1967, Resolución 3) decidió que la unidad kelvin y su símbolo K se deben utilizar para expresar un intervalo o diferencia de temperatura.

NOTA 2: adicionalmente a la temperatura termodinámica (símbolo T), expresada en kelvin, se utiliza la temperatura Celsius (símbolo t) definida por la ecuación $t = T - T_0$, donde T_0 = 273,15 K. la unidad "grado Celsius" es igual a la unidad "kelvin", pero el término "grado Celsius" es un nombre especial (en lugar de "kelvin") para expresar la temperatura Celsius. Un intervalo de temperatura o una diferencia de temperatura Celsius puede expresarse tanto en grados Celsius como kelvin.

1.3 Propuesta pedagógica

1.3.1 Objetivos

1.3.1.1 Objetivo General

Impulsar a los estudiantes a adquirir un buen conocimiento del Sistema Internacional de medidas (SI) para que teniendo confianza en su aplicación se den cuenta de lo que se pierde al no emplearlo.

1.3.1.2 Objetivos específicos

- Hacer que los estudiantes vean mediante múltiples cuestionamientos, experiencias, trabajos dirigidos, etc., las dificultades que se presentan con sistemas de medida como el anglosajón.

- Hacer que los estudiantes se den cuenta de lo indicado que sería utilizar por todas partes el Sistema Internacional (SI) de medidas.

1.3.2 Estándares y lineamientos en matemáticas Ministerio de Educación Nacional

En cuanto a la medida, los estándares y los lineamientos en matemáticas, promueven que el énfasis debe estar en comprender los atributos medibles (longitud, área, capacidad, peso, etc.) y su carácter de invarianza; se debe dar significado al patrón, a la unidad de medida y a los procesos mismos de medición; hay que desarrollar el sentido de la medida (que involucra la estimación) y las destrezas para medir, es de igual importancia involucrar aspectos geométricos como la semejanza en mediciones indirectas y aspectos aritméticos fundamentalmente en lo relacionado con la ampliación del concepto de número. Es decir, el énfasis está en desarrollo del pensamiento métrico. (MEN, 1998)

Como se mencionó al principio de este trabajo, y aunque los estandares y los líneamiento curriculares planteen el trabajo con el pensamiento métrico y los sistemas métricos, a este tema se le dedica poco tiempo en el desarrollo del currículo escolar, esto sin tener en cuenta que en los líneamentos de matematicas propuestos por el MEN no se encuentra algún apartado en el que se mencione que se debe asignar un espacio al desarrollo histórico de la medida, la correspondiente unificacion del sistema métrico y el proceso de medición. Tema que se debería tener encuenta dado que permite al estudiante reconocer su importancia, acercarse y apropiarse más del concepto.

El pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas

Los conceptos y procedimientos propios de este pensamiento hacen referencia a la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones. En los Líneamientos Curriculares del MEN (2002) se especifican conceptos y procedimientos relacionados con este tipo de pensamiento, como:

- La construcción de los conceptos de cada magnitud.
- La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes.
- La estimación de la medida de cantidades de distintas magnitudes y los aspectos del proceso de “capturar lo continuo con lo discreto”.
- La apreciación del rango de las magnitudes.
- La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos y procesos de medición.
- La diferencia entre la unidad y los patrones de medición.
- La asignación numérica.
- El papel del trasfondo social de la medición.

En relación con los anteriores conceptos y procedimientos,el MEN (2002) afirma “es importante destacar que la estimación de las medidas de las cantidades y la apreciación de los rangos entre los cuales puedan ubicarse esas medidas trascienden el tratamiento exclusivamente numérico de los sistemas de medidas y señalan la estimación como puente de relaciones entre las matemáticas, las demás ciencias y el mundo de la vida cotidiana, en contextos en los que no se requiere establecer una medida numérica exacta. Otros aspectos importantes en este pensamiento son la integración de la estimación con los procedimientos numéricos de truncamiento y redondeo, el tratamiento del error, la valoración de las cifras significativas y el uso de técnicas de encuadramiento, así como la expresión de medidas grandes y pequeñas por medio de la notación científica”.

En lo que respecta al aprendizaje de sistemas de medida y, en particular del SI, y de acuerdo con el MEN (2002), se considera importante el reconocimiento del conjunto de unidades de medida que se utilizan para cada una de las diferentes magnitudes (la velocidad, la densidad, la temperatura, etc., y no sólo de las magnitudes más relacionadas con la geometría: la longitud, el área, el volumen y la amplitud angular). El estudio de esas primeras magnitudes muestra que el pensamiento métrico no se limita a las matemáticas, sino que se extiende también a las ciencias naturales y sociales. En cada conjunto de unidades del SI para cada magnitud hay una unidad que sirve de base a las otras, que son mayores (múltiplos) o menores (submúltiplos) de dicha unidad básica. Así se construyen herramientas conceptuales para el análisis y la ejercitación de la equivalencia entre medidas expresadas en distintas unidades y la explicitación de las relaciones pertinentes del SI con el sistema de numeración decimal en sus diversas formas escriturales: con coma, con punto y en notación científica.

De especial importancia son aquellas magnitudes que tienen estrecha relación con aspectos claves de la vida social, como por ejemplo, todo lo relacionado con los servicios públicos, sus procesos de medición y facturación y las unidades respectivas (litro, metro cúbico, voltio, amperio, vatio, kilovatio, kilovatio–hora), algunas de las cuales desbordan el campo de las matemáticas y requieren del desarrollo del pensamiento científico y del aprendizaje de algunos contenidos de la física. De esta manera, el pensamiento métrico está estrechamente relacionado con las disciplinas científicas naturales y sociales y con las competencias ciudadanas, en particular, con lo que al cuidado del medio ambiente se refiere, en tanto conviene tener elementos conceptuales claros para hacer un uso racional de los servicios públicos, identificar cuándo se está haciendo un gasto innecesario de ellos, explicar las razones por las cuales pudo haberse incrementado el gasto y proponer medidas eficaces para el ahorro del agua, el gas y la energía eléctrica MEN (2002).

Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Octavo a noveno

Según los Estándares Básicos de Competencias en Mátemáticas del Ministerio de Educación Nacional, se espera que el estudiante al terminar grado noveno:

- Generalice procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.
- Seleccione y use técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.
- Justifique la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias.

La dificultad que se presenta en este grado, y teniendo en cuenta los estándares planteados para el ciclo correspondiente a los grados octavo y noveno, es que los estudiantes difícilmente determinan el área de algunas regiones planas y mucho menos el volumen de sólidos, ya que para esto requieren del manejo de diferentes fórmulas dependiendo de la figura geométrica a trabajar esto sin contar que no hacen uso de las unidades de medida para el mismo y se limitan a copiar procedimientos de ejercicios anteriores; además debido al poco trabajo que se realiza con las unidades de medida se les dificulta también la conversión entre las mismas o el trabajo con unidades diferentes a las de longitud y superficie tanto en ejercicios como en la solución de problemas, sin tener en cuenta que las unidades que se trabajan se les da como si siempre hubiesen existido por lo cual no reconocen la necesidad de unificar las unidades y su equivalencia con otros sistemas de unidades.

Respecto al trabajo con instrumentos de medición este se limita al uso de la regla y el transportador (en el caso de los ángulos) dado que el docente no realiza actividades con otros instrumentos y mucho menos actividades de estimación y redondeo, por otra parte es de resaltar que algunos de los estudiantes llegan a este nivel sin saber manejar el compás o el transportador. Esto como consecuencia del poco trabajo y tiempo que se dedica al componente geométrico en el aula.

Infortunadamente el trabajo que se lleva a cabo es limitado y netamente operacional, poco práctico y no se le exige al estudiante un trabajo de argumentación ni de demostración a nivel geométrico, posiblemente porque el profesor tampoco lo trate.

1.3.3 Ubicación en el currículo

Aunque el pensamiento métrico y los sistemas de medida están presentes en todos los grados de educación básica, según los estándares del MEN, es al culminar el ciclo de octavo y noveno donde se espera que el estudiante haya adquirido varios conocimientos y habilidades tanto matemáticos como geométricos, además se espera que la mayoría de los estudiantes estén en el nivel 3 de razonamiento de Van Hiele y que tengan una percepción del espacio más amplia.

Para introducir la geometría es necesario hacer un buen uso del lenguaje verbal y escrito, especialmente si se tiene en cuenta que los estudiantes viven y están sumergidos en su cotidiano vivir con las figuras planas. Por lo tanto es importante que el docente tenga un buen manejo de los conceptos geométricos y tenga en cuenta los términos a partir de los cuales parte Hilbert y que son necesarios para el desarrollo de la presente propuesta didáctica.

La presente propuesta para la enseñanza de la geometría en grado noveno de educación básica está organizada en cuatro unidades correspondientes a los cuatro periodos del año escolar. En el primer semestre se desarrollarán las dos primeras unidades que giran en torno al postulado de Arquímedes y buscan que los estudiante adquieran un buen conocimiento del Sistema Internacional de unidades SI y se den cuenta de la importancia de la unificación de las unidades y de lo inconveniente que resulta el no usar dicho sistema; en la primera unidad se pretende que los estudiantes vean algunas dificultades que se presentan al no tener un sistema de medida unificado y lo inconveniente del sistema anglosajón. En la segunda unidad se busca que los estudiantes se den cuenta de lo indicado que sería utilizar el SI por todas partes. Las otras dos unidades corresponden al trabajo para el segundo semestre del año se desarrollan en el siguiente capítulo con el postulado de Euclides.

1.3.4 Requisitos teóricos, alcances y limitaciones

La geometría que vamos a desarrollar, la desarrollamos con puntos, rectas y planos, por lo tanto requerimos introducir estas nociones convenientemente y la mejor manera de hacerlo es a partir de la obra de David Hilbert. En la obra realizada por Hilbert (en su libro *Fundamentos de la geometría*) se tiene en cuenta tres sistemas de cosas y su notación: puntos (designados por *A*, *B*, *C,…*), rectas (designadas por *a, b, c,…*) y planos (designados por α, β, γ,…).

Para el trabajo que se quiere realizar con el postulado de Arquímedes se deben tener en cuenta además los tres primeros agrupamientos de axiomas de *Fundamentos de la geometría* de Hilbert, como se mencionará más adelante. En los Anexos A, B y C, se encuentra una serie de actividades que permiten el trabajo con estos axiomas como reglas de procedimiento y como prueba diagnóstica a fin de determinar que tanto recuerdan los alumnos de aprendizajes anteriores. Además porque se supone que los alumnos han recorrido a través de los grados 6°, 7° y 8° tales axiomas en el orden siguiente:

Sexto grado: axiomas de enlace o incidencia o pertenencia

Séptimo grado: axiomas de ordenación
Octavo grado: axiomas de congruencia o igualdad o coincidencia

El **postulado de Arquímedes o de la medida Según Hilbert**, como regla de procedimiento se enuncia de la siguiente manera:

Si * *AB* y *CD* son dos segmentos cuales quiera,
entonces
*** existe siempre sobre la recta *AB* un número de puntos $A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n$ tales que los segmentos $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ sean congruentes con el segmento *CD* y que el punto *B* quede entre *A* y A_n.**

Para su uso se deben tener en cuenta los tres primeros agrupamientos de axiomas de Hilbert al utilizar algunos términos técnicos como:

- Dos ***segmentos*** *AB* y *CD* cuales quiera. Enunciado que requiere de los axiomas de incidencia.
- Sobre la recta *AB* existe un número de ***puntos*** $A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n$. Axiomas de ordenación.
- Los segmentos AA_1, $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ ***congruentes*** con el segmento *CD*. Axiomas de coincidencia.
- El ***punto*** *B* queda ***entre*** *A* y A_n. Axiomas de ordenación.

Es decir que no se puede hacer un trabajo con el axioma de Arquímedes y hablar de unificación de la medida sin antes haber determinado puntos y rectas y las relaciones entre estos.

Por otra parte el axioma de Arquímedes permite simplificar unidades de medida al tomar un patrón de medida. En el SI, la unidad patrón de longitud es el metro, aunque a partir del metro también fueron definidas otras unidades para área, volumen y capacidad. Es decir que la misma unidad se puede extenderá muchas otras unidades y magnitudes.

Algunas de las limitaciones a la solución del problema es el tiempo que se asigne en el currículo de cada colegio al componente geométrico-métrico sea suficiente, por otra parte se requiere una buena formación docentes en este aspecto y además influye en gran medida la motivación o desmotivación de los estudiantes hacia la asignatura.

1.3.5 Aspecto didáctico

1.3.5.1. Conocimiento y comprensión

Aprender es una actividad necesaria, es el fin último de la educación. En palabras de Alsina, Burgués & Fortuny (1995) se podría decir que no importa tanto el enseñar como el aprender. La capacidad de aprender siempre es útil y deseable. El aprendizaje en geometría posee, por supuesto, características especiales en cuanto a habilidades a desarrollar, metodología y adecuación de niveles, aunque al igual que otras ramas de la matemática presenta dificultades.

El conocimiento del entorno es uno de los aprendizajes necesarios para el ser humano, por lo tanto es importante la noción de espacio, conocer e identificar diferentes tipos de objetos y figuras con sus respectivas propiedades, relaciones y operaciones. Pero antes de analizar cómo se adquiere la noción de espacio se debe considerar lo que se entiende por espacio. Infortunadamente no hay unanimidad en describir el concepto de espacio. Esto es debido a que existen muchas maneras de abordarlo. Entre las más significativas se encuentran las perspectivas *filosófica*, *física* y *psicológica* (Alsina et al, 1995).

Históricamente, en la perspectiva filosófica se han considerado dos acepciones: espacio absoluto versus espacio relativo. En correspondencia con Alsina et al (1995), en el **espacio absoluto**, los objetos y sus relaciones son independientes de la existencia propia del espacio, Newton se ha servido de él para sentar las bases de su mecánica clásica. En la acepción del **espacio relativo**, se supone que el espacio queda determinado por medio de las relaciones de posición de los objetos. Este espacio ha sido propuesto en la filosofía de Kant y Leibniz y considerado en la mecánica relativista de Einstein.

La perspectiva filosófica del espacio sirve para fijar su naturaleza y delimitarlo de las perspectivas físicas y psicológicas. El **espacio físico** es cualquier espacio atribuido al mundo exterior, es decir, al entorno físico que nos rodea. En contra, el **espacio psicológico** es cualquier espacio representado en la mente y no existe si la mente no existe (Alsina et al, 1995).

De ahí la importancia que desde la escuela se den las herramientas para que los estudiantes vayan apropiándose de la noción de espacio; dado que esta noción y la percepción del mismo permite reproducir modelos, representar gráficamente diferentes objetos (a escala o no), describir verbalmente, tener una conciencia espacial, resolver problemas, tener información almacenada en la memoria, tener una idea intuitiva del entorno o abstracta de acuerdo con las relaciones proyectivas que establezca y los sistemas de referencia que utilice.

1.3.5.2. El modelo de aprendizaje de Van Hiele

Las dificultas de orden geométrico en los estudiantes es un tema común entre los docentes de matemáticas e incluso se evidencia en los resultados de las pruebas nacionales (Pruebas SABER), algunas veces un estudiante puede resolver un problema geométrico con creatividad y rapidez pero al momento de avanzar a sistemas más formales de abstracción o rigor presentan serias dificultades.

Este problema, en geometría no es nuevo. A mediados de 1950 una pareja de profesores de matemáticas holandeses, Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele Geldof iniciaron trabajos con grupos pilotos sustentando lo que entonces era una teoría: el Modelo de Razonamiento de Van Hiele, el cual permite estructurar el aprendizaje de la geometría de manera coherente con la construcción del espacio (Alsina et al, 1995). Puede enunciarse de la siguiente manera:

1) Se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas.
2) Un estudiante sólo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.
3) Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, será necesario esperar a que éstos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela.

4) No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma. Pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esa forma.

De acuerdo con Alsina et al (1995), El Modelo consta de dos componentes: una es descriptiva, identificando tipos de razonamiento denominados “Niveles de Razonamiento”, que van progresando desde la visualización hasta el rigor. El otro componente da pautas para alcanzar el siguiente nivel de razonamiento, se conocen como “fases de aprendizaje”. A raíz de sus planteamientos, no sólo los esposos Van Hiele sino múltiples matemáticos y sicólogos han aportado elementos para ir mejorando el Modelo (como lo mencionan Alsina et al, 1995), y poco a poco el modelo que se pensó para las matemáticas en su conjunto, se particularizó a la Geometría.

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, la metodología que se quiere abordar en este trabajo es la de Van Hiele, es decir:

1. Familiarización.
2. Comparación.
3. Clasificación.
4. Tratar de iniciar en la argumentación.

1.3.6. Diseño de la propuesta

Es importante que el pensamiento matemático y particularmente del pensamiento geométrico sea desarrollado a través de la comunicación, por tal motivo en las actividades propuestas se espera que el estudiante desarrolle la comunicación y la argumentación a partir de preguntas abiertas y de figuras que él mismo debe realizar, además del trabajo implícito con los niveles de razonamiento de Van Hiele, de manera que el estudiante se *familiarice* con los diversos conceptos, axiomas y las figuras de manera global; *compare* conceptos, gráficos y objetos geométricos de acuerdo con sus propiedades; *clasifique* y generalice de manera lógica las figuras a partir de sus propiedades; y que finalmente llegue a la *argumentación* realizando razonamientos lógicos formales.

UNIDAD 1

OBJETIVO:
Hacer que los estudiantes vean mediante múltiples cuestionamientos, experiencias, trabajos dirigidos, etc., las dificultades que se presentan con sistemas de medida como el anglosajón.

CONTENIDOS:

1. Unidades de medida y estimación.
2. Sistema de unidades.
3. Axioma de Arquímedes o de la medida según Hilbert.
4. Equivalencia entre unidades de medida.
5. Sistema anglosajón.

ACTIVIDADES:

ACTIVIDAD 1. ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE MEDIDA

TEMA: UNIDADES DE MEDIDA. ESTIMACIÓN Y MEDICIÓN

OBJETIVO: utilizar diferentes unidades para la misma medición, tomadas de su entorno, realizar una medición aproximada de algunos objetos y darse cuenta que se presentan diferencias.

MATERIALES: lápiz, borrador, cuaderno, partes del cuerpo, otros instrumentos para medir.

1. Tome objetos que se encuentren en el salón (como el tablero, una mesa, etc.) y use un lápiz, un borrador, la mano, el pie o un paso u otro objeto, para determinar cuántas veces son necesarias para cubrir el objeto inicial

Largo del borde del tablero	Largo de la mesa del profesor	Ancho de la pared de atrás	Ancho del libro de matemáticas
18 veces el lápiz y sobra un pedazo			
___ veces el pie y sobra un pedazo			
___ palmas			
___ pasos y ________			

2. Compare sus respuestas con las de sus compañeros.
   a) ¿Encontró alguna dificultad para realizar esta actividad? ¿cuál?
   b) ¿Por qué aunque se tienen los mismos objetos para hacerlos coincidir, los resultados son diferentes?
   c) Al comparar los instrumentos de medición con los de sus compañeros ¿Coinciden en tamaño?
   d) ¿Por qué no es recomendable medir objetos con las partes del cuerpo, como el pie o la palma?
   e) ¿Qué se debe hacer para que todos obtengan el mismo resultado?

3. Realice el mismo ejercicio del punto 1, haciendo uso de otro objeto (o unidad de medida) diferente a una regla y que considere más adecuado para realizar la medición correspondiente.

4. De manera individual, complete la siguiente tabla y luego compare sus resultados con los de sus compañeros.
   a) Mencione qué procedimientos y qué unidades puede usar para determinar el tiempo que tarda en realizar cada actividad y complete (adicione otra actividad en la tabla).

Actividad	Tiempo
Desayunar	
Ir de la casa al parque	
Ir del salón a la puerta de entrada del colegio	
Ir de la casa al colegio	
Hacer las tareas	
Ver televisión	
Cruzar de un salón de quinto a uno de tercero	

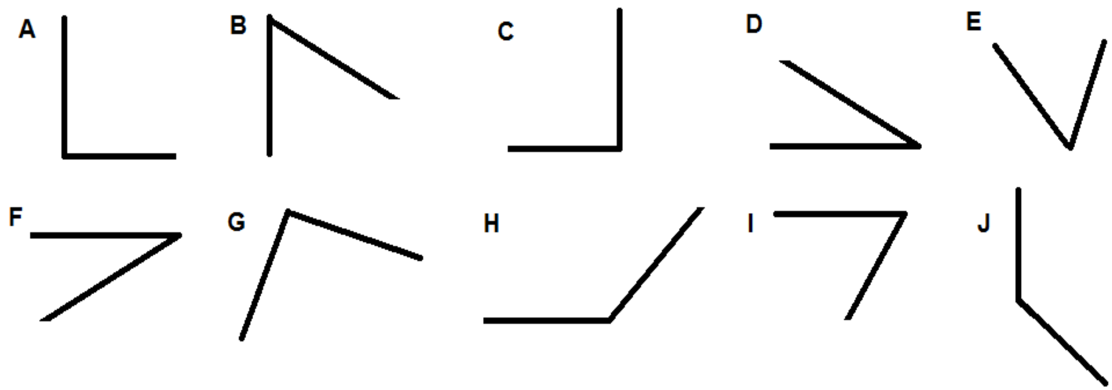
b) Realice el cálculo total del tiempo ¿hay alguna dificultad? ¿Cuál?
c) Al comparar los resultados con los de sus compañeros ¿hay alguna diferencia? ¿Por qué se presenta esta situación?

5. Complete la tabla teniendo en cuenta:
a) Primero escoja un objeto (por ejemplo el celular o un limón) con el cual, al comparar, debe estimar el peso de cada uno de los objetos de la tabla.

Objeto	Estimación	Peso en libras	Peso en gramos	Objeto	Estimación	Peso en libras	Peso en gramos	Objeto	Estimación	Peso en libras	Peso en gramos
Naranja				Cuaderno				Balón			
Banano				Libro				Silla			
Guanábana				Maleta				Celular			

b) En segundo lugar y con la ayuda de una balanza (que le permita determinar el peso en libras y en gramos) pese su unidad de medida y cada objeto de la tabla. Registre cada dato según corresponda.
c) Al comparar los resultados de su tabla ¿el peso de los objetos es igual al que había estimado?
d) Comparando las respuestas con las de sus compañeros, ¿cuántos objetos distintos se usaron para realizar la estimación? ¿cuántos resultados diferentes hubo para el peso del libro de matemáticas? ¿sucedió lo mismo al registrar el peso en libras y en gramos?
e) ¿Considera conveniente que todos manejen la misma unidad de medida? Argumente su respuesta.
f) ¿Cuál unidad de medida le permite decir con más exactitud cuánto pesa cada objeto?

6. Resuelva:
   a) ¿Qué procedimiento puede seguir para comparar los siguientes ángulos y decidir cuáles son iguales?
   b) Sin la ayuda del transportador, ordene estimativamente los ángulos según su amplitud (de menor a mayor).



Análisis del cumplimiento de los objetivos:
Con las actividades diseñadas en este primer apartado es posible el cumplimiento del objetivo de la unidad porque permite, al utilizar diferentes unidades, tener un primer acercamiento al proceso de medición de manera lúdica y a la dificultad que puede haber si no se tienen unidades de medida comunes al medir diferentes objetos.

ACTIVIDAD 2. CAMBIO DE UNIDADES DE MEDIDA

TEMA: UNIDADES DE MEDIDA

OBJETIVO: Darse cuenta de la utilidad de manejar un mismo sistema de unidades de medida.

MATERIALES: productos comestibles, lápiz, borrador, cuaderno y una balanza.

1. Realice en el salón una feria de productos comestibles, y para adquirirlos realice los siguientes pasos:
   a) Cada estudiante debe traer un producto diferente y suficiente para realizar intercambios.
   b) En un primer instante solo se puede intercambiar un producto con otro.
   c) Pese cada producto en libras. Después intercámbielos de acuerdo con su peso, posteriormente realice la misma actividad pero pesando cada producto en gramos.
   d) Con la ayuda del docente asignar a cada producto un valor e intercambiarlos nuevamente.

2. Responda las siguientes preguntas teniendo en cuenta el punto 1.
   a) Al realizar el intercambio de productos en el primer instante ¿fue justo? ¿quedó alguien inconforme? ¿por qué?
   b) Al realizar el segundo intercambio de productos teniendo en cuenta su peso ¿fue justo? ¿quedó alguien inconforme? ¿por qué?
   c) ¿hubo alguna diferencia al intercambiar los productos estando en libras o en gramos?
   d) Al realizar el intercambio de productos en el tercer momento ¿fue justo? ¿quedó alguien inconforme? ¿por qué?

3. Analice cada situación[4] y resuelva las preguntas
   - El 23 de julio de 1983, cuando el vuelo 143 de Air Canada, un nuevo Boeing 767–200, volaba a 12.000 metros de altura sobre el lago Red Lake Ontario, el sistema EICAS (Engine Indicator and Crew Alerting System) de la aeronave sonó sucesivamente, alertando al piloto de un problema en la presión de combustible. El piloto tras verificar la falta de combustible decidió girar hacia Winnipeg y solicitó un aterrizaje de emergencia. Sin combustible en los tanques ni potencia en los motores, el piloto no tuvo más opciones que realizar un planeo arriesgado hasta el lugar más cercano. Contra todo pronóstico, el capitán aterriza la aeronave en una base aérea abandonada en Gimli, reconvertida en parque de recreo y donde se estaban celebrando carreras de karts.
     Los pasajeros fueron afortunados en que el capitán fuese mejor para pilotear y aterrizar un "planeador" que para manejar sistemas de unidades: nadie, afuera o adentro del avión muere.
     El motivo fue el mal cálculo de la cantidad de combustible que tenía el avión, tras la falla de funciónamiento del FQIS (Fuel Quantity Information System Processor) y el uso de un factor de conversión equivocado (usaron libras por litro en vez de kilogramos por litro). El Boeing 767 salió de Montreal con 10.000 kg (22.300 libras) de combustible, menos de la mitad de lo que necesitaba para llegar a su destino, Edmonton (22.300 kg). (Metas y Metrólogos Asociados, 2006)

   - 1999 La sonda espacial *Mars Climate*, enviada por la NASA para mantenerse en órbita marciana y estudiar el clima del planeta, se estrelló en Marte y quedó completamente destruida. Según fuentes de la NASA el desastre fue debido a un error en la conversión al *Sistema Internacional* de unidades de los datos que se habían suministrado al ordenador abordo.
     ¿Por qué ha ocurrido el desastre? Según los datos que ha proporcionado la NASA, en la construcción, programación de los sistemas de navegación y lanzamiento de la sonda espacial participaron varias empresas. En concreto la *Lockheed Martin Astronautics Propulsion Laboratory* de Pasadena fue la encargada de programar los sistemas de navegación de la sonda. Pero resulta que los dos laboratorios no trabajan de la misma manera, el primero de ellos realiza sus medidas y proporciona sus datos con el sistema anglosajón de unidades (pies, millas, libras,…) mientras que el segundo utiliza el *Sistema Internacional* de unidades (metros, kilómetros, kilogramos,…). Así parece que el primero realizó los cálculos correctamente utilizando el sistema anglosajón y los envió al segundo, pero los datos que proporcionó iban sin especificar las unidades de medida utilizadas. El costo del error, 125 millones de dólares. (Metas y Metrólogos Asociados, 2006)

   a) ¿No es curioso que errores tan costosos se presenten en los trabajos de la NASA? ¿a qué se debieron estos errores?
   b) ¿Cómo se hubiesen evitado estos accidentes?
   c) ¿Es necesario manejar un mismo sistema de medida? ¿por qué?
   d) ¿Cree que es más conveniente manejar el sistema internacional de medidas? ¿Por qué?

Análisis del cumplimiento de los objetivos:

[4] Tomadas de Metas y Metrólogos Asociados (2006)

Las actividades diseñadas en este apartado pueden llevar al cumplimiento del objetivo de la unidad porque buscan que el estudiante vea la necesidad de unificar el sistema de medidas a partir de lo justo o injusto que puede ser un intercambio si no se tiene esa unificación o de lo peligroso que puede ser no manejar dicho sistema como se evidencia en las dos situaciones "reales" presentadas en el numeral 3.

ACTIVIDAD 3. AXIOMA DE ARQUÍMEDES

TEMA: AXIOMA DE ARQUÍMEDES O DE LA MEDIDA SEGÚN HILBERT

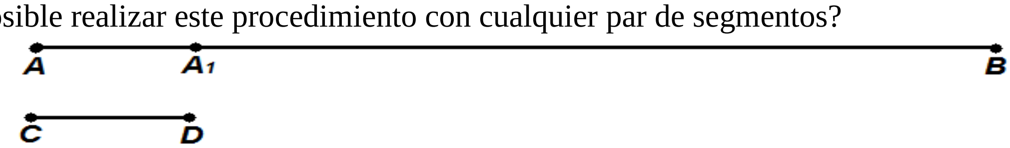
OBJETIVO: Identificar y hacer uso del axioma de Arquímedes en el proceso de medición.

MATERIALES: lápiz, borrador, cuaderno, regla.

AXIOMA DE ARQUÍMEDES O DE LA MEDIDA SEGÚN HILBERT
Si * *AB* y *CD* son dos segmentos cuales quiera,
entonces
*** existe siempre sobre la recta *AB* un número de puntos A_1, A_2,..., A_{n-1}, A_n tales que los segmentos AA_1, A_1A_2,…, $A_{n-1}A_n$ sean congruentes con el segmento *CD* y que el punto *B* quede entre *A* y A_n.**

1. Analice y resuelva teniendo en cuenta las definiciones y los tres primeros agrupamientos de axiomas de Hilbert[5]:
   a) Se pueden determinar los segmentos *AB* y *CD*. ¿cuáles axiomas permiten determinar estos segmentos?
   b) Que axiomas de ordenación o reglas de procedimiento permiten determinar los puntos A_1, A_2,..., A_{n-1} sobre el segmento *AB*?
   c) ¿Qué regla de procedimiento permite trasladar segmentos?

2. Sean los segmentos *AB* y *CD*, traslade el segmento *CD* sobre el segmento *AB* nombre como A_1 al punto de corte, realice este procedimiento tantas veces como sea necesario sobre el segmento *AB*. ¿entre qué puntos ha de encontrarse el punto *B* para cumplir el axioma de Arquímedes? ¿es posible realizar este procedimiento con cualquier par de segmentos?



[5] Los ejercicios 1 y 2 buscan que el estudiante recuerde y se familiarice con los elementos necesarios para trabajar con el Axioma de Arquímedes, además de ver por qué se requiere de los tres primeros agrupamientos de axiomas de Hilbert que se supone se han trabajado en años anteriores tal como se menciona en el numeral 1.3.4. de la presente propuesta.

3. Con la ayuda de su profesor, determine en un pliego de papel periódico un segmento cuya medida sea un centímetro (nómbrelo como *CD*), un segmento cuya medida sea una pulgada (nómbrelo como *AB*), un segmento cuya longitud sea un pie (nómbrelo como *EF*) y un segmento cuya longitud sea un metro (nómbrelo como *GH*). Realice el procedimiento del punto 2 y resuelva:
   a) Construya en cartulina una regla graduada por un lado en centímetros y por el otro en pulgadas.
   b) Teniendo en cuenta los segmentos *AB* y *CD* ¿Cuántos centímetros hay en una pulgada? A partir de los segmentos *AB*, *GH* y *EF*, determine cuántas pulgadas hay en un metro y cuántos pies hay en un metro.
   c) Si una regla es de 30 cm ¿Cuántas pulgadas hay entonces en la regla?
   d) ¿Cuántos centímetros hay en un metro? ¿Cuántas pulgadas hay en un metro?
   e) ¿Cuántos centímetros de largo, mide su cuaderno? ¿Cuántas pulgadas de largo, mide su cuaderno?
   f) ¿Cuántos centímetros de ancho, mide la puerta? ¿Cuántas pulgadas de ancho, mide la puerta? ¿Cuántos metros de largo mide la puerta? ¿Cuántos pies de largo, mide la puerta?
   g) ¿Cuáles unidades de medida fueron más precisas para realizar cada una de las mediciones de los ejercicios e y f?

4. Determine dos segmentos desiguales
   ¿Es posible hacer coincidir la longitud del segmento más pequeño con la longitud del más largo teniendo en cuenta el axioma de Arquímedes como regla de procedimiento? ¿De qué manera?

5. De acuerdo con los ejercicios anteriores
   a) ¿Qué es medir?
   b) ¿Qué es una unidad de medida?
   c) ¿Cuáles unidades de medida se relacionan? ¿Cómo se pueden relacionar dos unidades de medida diferentes para la misma longitud?
   d) ¿Es favorable o desfavorable manejar la misma unidad de medida? Argumente su respuesta.
   e) ¿Qué se debe hacer para medir con más precisión?

6. Consulte las unidades de medida del Sistema Ingles y el Sistema Internacional de Unidades SI.

7. En algunos cuadernos se puede encontrar tablas de conversión de algunas unidades de medida. Verifique algunas de las equivalencias que allí aparecen.

Análisis del cumplimiento de los objetivos:
Con los ejercicios presentados en este apartado se puede dar cumplimiento al objetivo de la unidad porque permiten que el estudiante se vaya apropiando del concepto de medición a partir del conocimiento y uso del axioma de Arquímedes trasladando segmentos y realizando equivalencias entre algunas unidades del Sistema Internacional de Medidas y el Sistema Ingles a fin de ver qué sistema es más preciso y fácil de manejar. Además de darse cuenta que sin el axioma de Arquímedes no se puede hablar de unidad de medida ni de segmentos que coinciden.

ACTIVIDAD 4. APROXIMACIÓN DE UNA MEDIDA

TEMA: DETERMINAR UNA MEDIDA A PARTIR DE OTRA

OBJETIVO: Reconocer el procedimiento para determinar una medida a partir de otra.

1. Determine dos segmentos, uno de una pulgada y otro de un centímetro y resuelva:
   a) ¿Cómo proceder gráficamente para saber cuántos centímetros hay en una pulgada?, ¿sobra algún trozo?
   b) Divida en 10 unidades (iguales) más pequeñas cada centímetro (llame a cada una de estas unidades milímetro). ¿Cuántos centímetros y cuántos milímetros hay en una pulgada?, ¿sobra algún trozo?

2. El centímetro, el metro y el kilómetro corresponden a unidades del Sistema Internacional SI, la pulgada, el pie y la yarda corresponden a unidades del Sistema Inglés.
   a) ¿Cuántos centímetros hay en un metro?, ¿Cuántos metros hay en un kilómetro?, ¿Cuántas pulgadas hay en un pie? ¿Cuántos pies hay en una yarda?
   b) El Sistema métrico es diferente al sistema inglés ¿A qué se debe esto? ¿Cuál sistema se utiliza en su región?

3. Cómo obtener una aproximación al valor de π (pi)[6]. Determine una circunferencia y su longitud, mida también su diámetro, para ello puede ayudarse del experimento 1.
   a) Haciendo uso del axioma de Arquímedes ¿Cuántas veces cabe el diámetro en la longitud de la circunferencia? ¿Sobra algún pedazo?,
   b) Divida en 10 unidades más pequeñas el diámetro. Compare y responda nuevamente: ¿Cuántas veces cabe el diámetro en la longitud de la circunferencia? ¿Sobra algún pedazo?
   c) Para tener un valor aproximado de π (pi), puede ayudarse de los experimentos 1 y 2 que se encuentran a continuación.
   d) Consulte cómo surgió en la historia, la relación entre el diámetro y la longitud de la circunferencia y construya una tabla con los valores aproximados de π (Pi) y la persona o el lugar donde se encontró dicha aproximación ¿hay gran diferencia entre las cifras encontradas?
   e) ¿Es importante el uso de π? ¿En qué campos o áreas es frecuente el uso de π?

Experimento 1 para obtener un valor aproximado de π (pi)[7]

Material para obtener el valor de π:

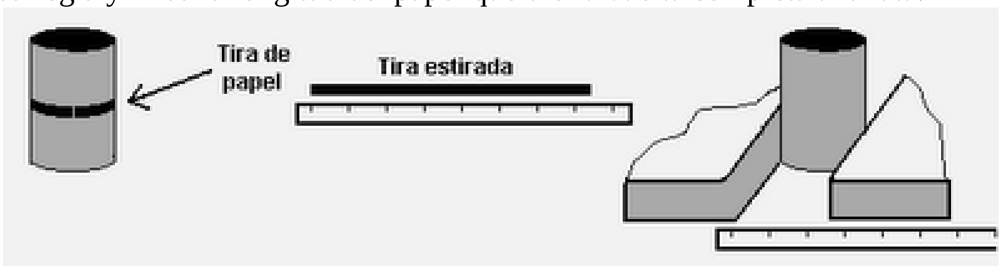
- ✓ Una lata metálica (solo la mediremos, no hace falta que este vacía)
- ✓ Tira de papel
- ✓ Regla

[6] Debido a la importancia de π (pi) en muchos campos de las matemáticas y otras ciencias es bueno que el estudiante vea que es posible obtener una aproximación de este número a partir de la relación entre dos longitudes y que es posible utilizar en dicho proceso el axioma de Arquímedes.

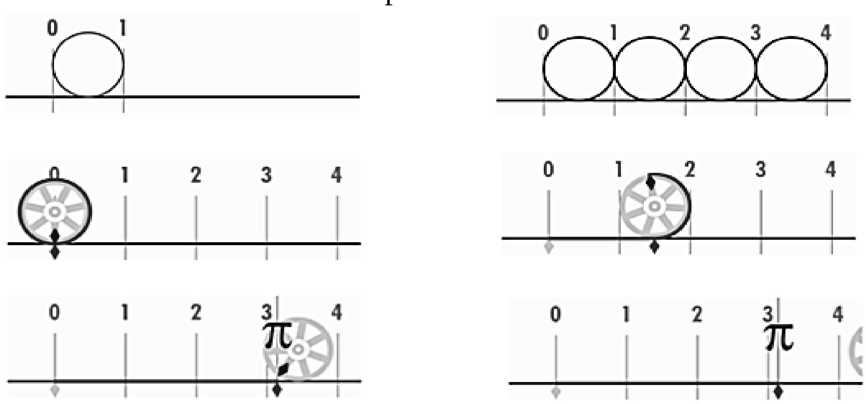
[7] En línea, junio 10 de 2013 disponible en http://experimentosyproyectos.blogspot.com/2011/07/valor–de–pi.html

Método

- Rodee la lata con la tira de papel y corte el material sobrante o marque en la tira el material que dio la circunferencia.
- Tome su regla y mida la longitud del papel que dio la vuelta completa a la lata.



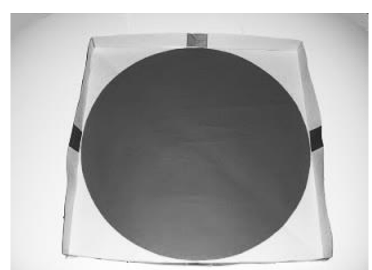
- Mida el diámetro de la lata. Situándola entre dos objetos es más fácil medirla.
- El cociente entre las dos medidas es una aproximación del número π.



- En otras palabras: es la relación entre la longitud de una circunferencia y la longitud del diámetro, en geometría euclidiana. Π es un número irracional y una de las constantes matemáticas más importantes, su valor se ha obtenido con diversas aproximaciones a lo largo de la historia. Además de matemáticas, su uso es frecuentemente en física e ingeniería. Una aproximación del número π, truncado a sus primeras cifras, es el siguiente:

$$\pi \approx 3{,}14159265358979323846\ldots$$

Experimento 2 para obtener un valor aproximado de π (pi)[8]



PASO 1: Se considera un cuadrado que tiene inscrito un círculo de radio 5 cm (Puede hacerlo con un par de cartulinas de colores distintos), donde el cuadrado tiene un área igual a 100 cm^2 y el círculo un área igual a $25\pi cm^2$.

[8]En línea, junio 10 de 2013 disponible en http://www.matematicas.isdata.es/index.php?option=com_content&view=article&id=203:experimento–para–calcular–pi&catid=35:inicio&Itemid=1

PASO 2: Coloque el círculo sobre el cuadrado (como se muestra en la figura). Cubra toda la superficie del cuadrado con arroz incluyendo la superficie del círculo.

PASO 3: Cuente los granos de arroz que han caído dentro del círculo y los que han caído en la superficie del cuadrado.

PASO 4: Plantee la siguiente proporción: $\frac{(\text{Granos de arroz dentro del círculo})}{(\text{Granos de arroz en el cuadrado})}$

Este cociente entre los granos de arroz dentro del círculo y los granos de arroz en el cuadrado tiende aproximadamente a $\frac{\pi}{4}$. Este cociente obtenido multiplicado por 4 será una buena aproximación al número pi cuando el número de granos de arroz es muy grande.

Análisis del cumplimiento de los objetivos:
Las actividades diseñadas en este apartado pueden llevar al cumplimiento del objetivo de la unidad porque a partir de los ejercicios y experimentos propuestos el estudiante se dará cuenta de la importancia del proceso de unificación debido a la dificultad del trabajo con las unidades del sistema anglosajón además de tener en cuenta que con el axioma de Arquímedes es posible ver como se relacionan algunas unidades de medida y realizar aproximaciones al número π (pi).

ACTIVIDAD 5. UNIDADES DE MEDIDA USADAS

TEMA: UNIDADES DE MEDIDA – SISTEMA ANGLOSAJÓN

OBJETIVO: Familiarizarse con algunas unidades de medida utilizadas actualmente y realizar conversiones entre unidades

MATERIALES: lápiz, borrador, cuaderno, regla, internet.

1. Consulte en una ferretería, una tienda, por internet, recibos de servicio público, elementos del entorno, etc. e indique la unidad de medida usada en cada caso.
    - Tubos de PVC para desagüe, abastecimiento de agua, gas, electricidad
    - Tornillos y puntillas
    - Un metro de modistería o un flexómetro
    - Pintura
    - Pinceles, brochas
    - Brocas para un taladro
    - Arena para construcción y cemento
    - Gasolina.
    - Balanzas
    - Diferentes tipos de bombillos
    - Peso de una tractomula o un conteiner
    - Peso límite permitido de un equipaje en el aeropuerto
    - Envase de helado
    - Una llanta y un neumático
    - Lana
    - Luz, gas y agua consumido en el hogar
    - Productos como frutas, tubérculos, verduras etc.

- Arroz y granos
- Carnes rojas y blancas
- Gaseosa
- Área de una casa
- Capacidad de un Disco duro
- Área de una finca

2. Elabore una tabla para cada caso:
   a) Equivalencia entre unidades del sistema inglés.
   b) Unidades fundamentales del Sistema Internacional de medidas y su equivalencia en el Sistema Ingles o anglosajón.

3. Teniendo en cuenta las equivalencias entre unidades de medida del punto anterior, realice la respectiva conversión a la unidad que se pide:

UNIDAD	CONVERTIR A	
2 pies	pulgadas	cm
45 yardas	pies	m
1500 pies	millas	km
3450 libras	toneladas	kg
420 onzas	libras	kg

UNIDAD	CONVERTIR A	
3 yardas	pies	m
12 galones	tazas	cm^3
5 $yardas^2$	$millas^2$	km^2
10 pie^3	$pulg^3$	m^3
7 galones	pinta	l

4. De acuerdo con las actividades anteriores:
   a) ¿Es necesario manejar un sistema de unidades para realizar mediciones?
   b) ¿Es conveniente el manejo de las unidades de medida en ambos sistemas?
   c) ¿Qué dificultad encontró en el trabajo con las unidades del sistema inglés?
   d) ¿Cuál sistema de medición es más conveniente manejar? Argumente su respuesta

Análisis del cumplimiento de los objetivos:
Con las actividades diseñadas en este apartado es posible dar cumplimiento al objetivo de la unidad porque con los cuestionamientos, trabajos, conversión de unidades y experiencias realizadas de manera más específica con el sistema inglés y el SI, el estudiante se da cuenta de la importancia conocer y manejar un mismo sistema de unidades y de la dificultad del trabajo con el sistema anglosajón.

UNIDAD 2

OBJETIVO:
Hacer que los estudiantes se den cuenta de lo indicado que sería utilizar por todas partes el Sistema Internacional (SI) de medidas.

CONTENIDOS:
1. Sistema Internacional de unidades SI.
2. Múltiplos y submúltiplos en el SI.
3. Unidades y magnitudes.
4. Axioma o postulado de Arquímedes.
5. Solución de problemas utilizando SI.

ACTIVIDADES:

ACTIVIDAD 1. UNIFICAR MEDIDAS

TEMA: EL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES SI.

OBJETIVO: Conocer parte de la historia de unificación del SI y algunos problemas que se presentan al no tener la unificación de unidades de medida.

1. Consulte cómo y por qué se creó el Sistema Internacional de Medidas SI y responda:
   a) ¿Por qué fue necesario unificar un sistema de medidas?
   b) ¿Con qué objetivos se diseñó el SI?
   c) ¿Aproximadamente cuánto tiempo duró el proceso de crear el SI?
   d) ¿Qué personajes estuvieron vinculados con la creación y organización de este sistema?
   e) ¿Todos los países adoptaron el SI inmediatamente se creó?
   f) ¿En qué año Colombia adoptó el SI?
   g) ¿Cuál cree que ha sido la dificultad para que todos los países adopten el SI?
   h) ¿Cuántas y cuáles unidades maneja el SI?
   i) ¿Por qué es útil el sistema métrico decimal en el SI?

2. Construya una tabla con las unidades básicas del SI, indicando la unidad, la magnitud que la utiliza y el símbolo correspondiente.

PROBLEMA:

3. Generalmente cada país maneja su propia moneda, es decir, no hay una moneda universal. según las áreas de influencia, algunos países dominantes pondrán su moneda como unidad de medida ej. Dólar, rublo, yen. El euro trata de resolver este problema del patrón de medida de la moneda, unas dos docenas de países europeos tienen el euro como unidad de medida,
   a) ¿Es posible en Europa viajar por diferentes países y llevar consigo un solo tipo de moneda sin tener que realizar intercambios de monedas? Argumente su respuesta
   b) ¿Por qué algunos países europeos no han adoptado el Euro como unidad de medida? ¿esto ha sido bueno o malo para dichos países?

c) ¿Desde hace cuánto tiempo se maneja el Euro en Europa? ¿Qué tuvieron en cuenta para poder unificar este patrón?
d) ¿Qué se debe tener en cuenta para unificar una unidad de medida como la moneda?
e) ¿Por qué cree que en América y en el mundo no se ha unificado la moneda como unidad de medida?

Análisis del cumplimiento de los objetivos:
Las actividades diseñadas en este apartado pueden llevar al cumplimiento del objetivo de la unidad porque le permite al estudiante acercarse, a partir de la historia, al surgimiento del SI teniendo en cuenta las dificultades y necesidades que llevaron a su creación, el grado de importancia que tuvo teniendo en cuenta a las personas encargadas de su construcción y la dificultad que ha tenido la adopción del mismo, además de algunos problemas que se presentan al no tener una unificación en las unidades como es el caso de la moneda.

ACTIVIDAD 2. EQUIVALENCIAS DE LAS UNIDADES DE MEDIDA

TEMA: MÚLTIPLOS Y SUBMÚLTIPLOS DE LAS UNIDADES DEL SI

OBJETIVO: Identificar y realizar conversiones entre múltiplos y submúltiplos de algunas unidades de medida del SI.

MATERIALES: lápiz, borrador, cuaderno, partes del cuerpo, otros instrumentos para medir.

Los prefijos indicados en la siguiente tabla se usan para formar los nombres y los símbolos de los múltiplos (múltiplos y submúltiplos decimales) de las unidades del Sistema Internacional; su objetivo es el de combinarse con el símbolo central (o de la unidad básica) al cual se une formando con él un nuevo símbolo (para un múltiplo o submúltiplo decimal) que puede elevarse a una potencia positiva o negativa, y que puede también combinarse con otros símbolos de unidades para formar símbolos de unidades compuestas.

Letra	Símbolo	Factor	Número decimal
yotta	Y	10^{24}	1 000 000 000 000 000 000 000 000 de unidades
zetta	Z	10^{21}	1 000 000 000 000 000 000 000 de unidades
exa	E	10^{18}	1 000 000 000 000 000 000 de unidades
peta	P	10^{15}	1 000 000 000 000 000 de unidades
tera	T	10^{12}	1 000 000 000 000 de unidades
giga	G	10^{9}	1 000 000 000de unidades
mega	M	10^{6}	1 000 000 de unidades
kilo	κ	10^{3}	1 000 unidades
hecto	h	10^{2}	100 unidades
deca	Da	10^{1}	10 unidades
deci	d	10^{-1}	0,1 unidad
centi	c	10^{-2}	0,01 unidad
mili	m	10^{-3}	0,001 unidad

Letra	Símbolo	Factor	Número decimal
micro	μ	10^{-6}	0,000 001 unidad
nano	n	10^{-9}	0,000 000 001 unidad
pico	p	10^{-12}	0,000 000 000 001 unidad
femto	f	10^{-15}	0,000 000 000 000 001 unidad
atto	a	10^{-18}	0,000 000 000 000 000 001 unidad
zepto	z	10^{-21}	0,000 000 000 000 000 000 001 unidad
yocto	y	10^{-24}	0,000 000 000 000 000 000 000 001 unidad

Así, un decámetro equivale a 10 metros y un decímetro es igual a 0,1 metros, siendo el metro la unidad básica de longitud. Otros ejemplos serían:

$$1\ cm^3 = (10^{-2}m)^3 = 10^{-6}m^3$$
$$1\ \mu s^{-1} = (10^{-6}s)^{-1} = 10^6 s^{-1}$$
$$1mm^2 = (10^{-3}m)^2/s = 10^{-6}m^2/s$$

Hay unidades de medida que aunque no son comunes o cotidianas se usan en diferentes campos de la ciencia, por ejemplo el nanómetro (formado por el prefijo nano y la unidad de medida de longitud metro, corresponde a 10^{-9} metros, es decir una mil millonésima parte del metro y su abreviatura es nm), comúnmente se utiliza para medir la longitud de onda de la radiación ultravioleta, radiación infrarroja y la luz. Recientemente la unidad ha cobrado notoriedad en el estudio de la nanotecnología, área que estudia materiales que poseen dimensiones de unos pocos nanómetros.

El prefijo Giga indica un factor de 10^9 partes de la unidad de medida a trabajar. En informática, este prefijo se utiliza cuando se trata de comunicaciones, la giga se utiliza como prefijo de bit para gigabit y su sigla Gb (un gigabit corresponde a mil millones de bits).

Al unir el prefijo tera a la unidad de medida metros cuadrados tenemos Tm^2 (terametros cuadrados) que corresponden a 10^{12} m^2.

1. Agrupe las siguientes unidades de medida de acuerdo con la magnitud que les corresponda y determine su equivalencia en la unidad de medida respectiva en el SI:
   - Kilómetro.
   - Kilogramo.
   - Kilómetro cuadrado.
   - Milisegundo.
   - Terabytes.
   - Picómetro.
   - Metro cubico.
   - Hectoamperio.
   - Decagramo.
   - Gigalitro.
   - Zeptometro cubico
   - Hectómetro.
   - Milímetro.
   - Litro.
   - Decalitro.
   - Decámetro.
   - Pulgada.
   - Pie.
   - Nanoamperio.
   - Milímetro.
   - Litro.
   - Palmo cuadrado.
   - Decalitro.
   - Decámetro

2. El SI maneja unos múltiplos y submúltiplos. La unidad de medida de longitud es el metro
   a) ¿Qué se puede medir con el metro?
   b) ¿Qué se puede medir con el kilómetro?
   c) ¿Qué se puede medir con el centímetro?

d) ¿Qué se puede medir con el milímetro?
e) ¿Considera necesario el uso de los múltiplos y submúltiplos de las unidades del SI?

3. Convierta a la unidad pedida y luego responda:

a) 6,035 m en cm.
b) 60,35 m en cm.
c) 6035 cm en m.
d) 38 hm en m.
e) 38 m en hm.
f) 755 cm en km.
g) 5,93 dam en dm.
h) 353 mm en cm.
i) 5,93 dm en dam.
j) 0,003 km en mm.
k) 37,83 hm en m.
l) 80 000 m en km.
m) 1535 km en m.
n) 6,035 pies en pulgadas.
o) 80 000 pies en millas.
p) 20256 pies en dm.
q) 5694 hm en pies.
r) 32 km en pulgadas.

¿Es más conveniente la conversión entre unidades del mismo sistema de medidas? Argumente su respuesta.

4. Determine:

a) Número de cm que hay en 87 dam, 56 m y 31 cm
b) ¿Cuántos km, dam, m y hm hay en 9821437cm?
c) ¿Cuántos km, hm y cm hay en 46352 m?
d) cm^3 que hay en $3dam^3$ y $0,3m^3$
e) Minutos que hay en un dia, 3 horas y 120 segundos

Análisis del cumplimiento de los objetivos:
Con las actividades diseñadas en este apartado se puede llegar al cumplimiento del objetivo de la unidad porque el trabajo con los múltiplos y submúltiplos de algunas de las unidades del SI permite que el estudiante se dé cuenta de lo conveniente que es el uso del SI dado que permite trabajar con medidas muy grandes o muy pequeñas y que la conversión entre éstas es más fácil ya que utiliza el sistema decimal y es más provechoso.

ACTIVIDAD 3. MAGNITUDES Y UNIDADES

TEMA: MAGNITUDES Y UNIDADES DE MEDIDA

OBJETIVO: Identificar las unidades del SI y las magnitudes correspondientes.

MATERIALES: lápiz, borrador, cuaderno.

1. Clasifique como magnitudes o unidades de medida y complete la tabla:

Litro	Gramo	Tiempo
Corriente eléctrica	Altitud	Temperatura
Hora	Presión	Memoria de un ordenador
Mol	Candela	Masa
Kilómetros por hora	Voltio	Litro

MAGNITUD	UNIDAD DE MEDIDA	MAGNITUD	UNIDAD DE MEDIDA

2. Consulte a qué magnitudes corresponden las siguientes unidades:

Onza	Herzio	Yuan	Grado Fahrenheit
Año Luz	Radian	Newton	Tesia
Lux	Becquerel	Electrovoltio	Unidad de masa atómica

3. Relacione cada magnitud con su posible unidad de medida

Masa	Longitud	Capacidad	Superficie	Temperatura
18° C	1,5 *l*	$63m^2$	7, 250g	12 hm

4. Determine la unidad del SI más adecuada para expresar cada magnitud
   a) Distancia de la luna a la Tierra
   b) La edad de una persona
   c) La capacidad de una botella
   d) Temperatura del Sol
   e) La masa de un camión
   f) Potencia de un bombillo
   g) El tamaño de un huerto
   h) La distancia entre Cartagena y San Andrés

5. Expresa cada unidad en la unidad básica más adecuada en el SI y señala la magnitud a la que corresponde:

$345{,}9km^3$	45 cm	$0{,}00000245Tm^3$	0,0006 Gm	$12dam^2$
3 horas	$120dam^3$	$34{,}9km^2$	23,6 dm	25,7minutos
$0{,}0045Tm^2$	0,07 mm	$346mm^2$	$34671mm^3$	0,009semanas

Análisis del cumplimiento de los objetivos:
Con las actividades diseñadas en este apartado se puede llegar al cumplimiento del objetivo de la unidad porque al afianzar el uso de las unidades e identificar las magnitudes a las que se refiere, el estudiante se puede dar cuenta de la importancia del manejo del SI por todas partes dado su necesario uso.

ACTIVIDAD 4. AXIOMA O POSTULADO DE ARQUÍMEDES

TEMA: ALCANCES DEL POSTULADO DE ARQUÍMEDES

OBJETIVO: identificar el postulado de Arquímedes y hacer uso de él en unidades del SI.

MATERIALES: lápiz, borrador, cuaderno, papel, cartulina, tijeras, plastilina.

AXIOMA O POSTULADO DE ARQUÍMEDES:
Dadas dos magnitudes desiguales, se puede alcanzar y superar la mayor repitiendo un número suficiente de veces la menor (Axioma o postulado de Arquímedes como lo había enunciado Eudoxio)

1. Teniendo en cuenta las actividades de la primera unidad, y el axioma de Arquímedes. Realice cada una de las siguientes actividades (puede utilizar papel, cartulina, plastilina, etc.) y luego responda las preguntas:
   a) Recorte en cartulina un cuadrado de lado siete centímetros y otro cuadrado de lado dos centímetros, ¿Es posible cubrir la superficie del menor con la superficie del mayor?
   b) Construya dos triángulos equiláteros uno de lado 2 cm y otro de lado 8 cm ¿Es posible cubrir con la superficie del más pequeño la superficie del más grande?
   c) Construya dos triángulos rectángulos, uno de altura 3 cm y base 4 cm, otro de altura 6 cm y base 8 cm ¿Es posible cubrir la superficie del más grande con la superficie del más pequeño?
   d) Determine dos triángulos semejantes, ¿Es posible cubrir con la superficie del más pequeño la superficie del más grande? ¿y si toma cualquier par de triángulos de diferente tamaño?
   e) Dadas dos superficies de diferente tamaño ¿Es posible cubrir la superficie mayor con la superficie menor? ¿De qué manera?
   f) Construya un cubo de arista 1cm y otro cubo de arista 3cm, ¿Es posible cubrir el volumen del cubo de lado 3 cm con el volumen del cubo de lado 1 cm?
   g) ¿Es posible cubrir el volumen de un cubo con el volumen de otro cubo más pequeño?
   h) Con dos esferas de diferente forma, ¿Es posible cubrir el volumen de una esfera con el volumen de la otra?
   i) Con dos cilindros de diferente forma, ¿Es posible cubrir el volumen de un cilindro con el volumen del cilindro más pequeño?
   j) Dados dos sólidos de diferente tamaño ¿Es posible cubrir el volumen del menor con el volumen de mayor? ¿De qué manera?

Dadas dos líneas rectas, dos superficies o dos sólidos desiguales, si el exceso de una de estas figuras sobre la otra se añade a sí mismo un cierto número de veces, se puede superar una u otra de las figuras que se comparan entre sí (Arquímedes sobre la esfera y el cilindro, II Principios)

2. Resuelva las siguientes preguntas:
   a) ¿Cuántas baldosas de 15 cm por 15 cm se necesitan para cubrir el piso de una sala que mide 5 m por 12 m?
   b) Represente los rectángulos o cuadrados diferentes que se puedan construir cuando su área es de 12 cm^2. Mida su perímetro y determine si es igual en todas las figuras construidas.

c) ¿Qué unidad de medida se privilegia el cc o mL o L en los diferentes tipos de envases? ¿Cuáles unidades de estas, manejan los alimentos? ¿Qué tipo de alimentos las manejan? ¿Sucede lo mismo con las gaseosas?
d) El área de la base de un prisma rectangular es de $8cm^2$ y su altura 5cm. Determine cuántos cubitos de 0,25 cm de arista caben en el interior del prisma.
e) ¿Qué condiciones deben cumplir dos conos/cilindros de igual volumen para que sean iguales?
f) Una fábrica de producción de perfumes, quieren relanzar al mercado un perfume, cuya presentación será en una botella en forma de cono. El equipo de diseño debe determinar el tipo de caja para empacarlo. Se presentaron tres opciones: una caja cilíndrica, una en forma de prisma recto y una que tiene la misma forma de la botella. La botella tiene 10 cm de altura y 3,2 cm de radio de la base ¿con cuál de los tres tipos de caja se pierde más espacio? ¿con cuál de los tres tipos de caja se desperdicia menos papel?

3. Al crearse el SI, se tomó como unidad de medida de longitud el metro:
a) ¿De dónde proviene la palabra metro?
b) ¿Cuántas y cuáles definiciones le han sido dadas al metro y en qué fechas? ¿a qué se debe esto?
c) ¿Qué unidades de medida se establecieron a partir del metro? ¿Cómo están relacionadas?
d) ¿Qué entidades estuvieron o están encargadas de establecer los patrones de medida?

4. Consulte o determine cada medida y luego halle su equivalencia en términos del metro, teniendo en cuenta el anterior punto.

MAGNITUD A MEDIR	Medida	Equivalencia en metros		MAGNITUD A MEDIR	Medida	Equivalencia en metros
Su estatura				Su masa		
Distancia de Bogotá a Cartagena				Liquido contenido en una botella de gaseosa		
Grosor de un cabello				Cantidad de Helado en un pote		
Masa de una pulga				Agua en el océano		
Masa de la luna				Su peso en marte		

Análisis del cumplimiento de los objetivos:
Las actividades diseñadas en este apartado pueden llevar al cumplimiento del objetivo de la unidad porque con el postulado de Arquímedes y su aplicación en diferentes unidades del SI, ven su utilidad y la necesidad del manejo que se le debe dar a este sistema de medidas en todas partes, tanto a nivel geométrico como en diversas situaciones cotidianas.

ACTIVIDAD 5. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

TEMA: USO DEL SI EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

OBJETIVO: Establecer la conveniencia del manejo del SI en la resolución de problemas.

MATERIALES: lápiz, borrador, cuaderno.

1. Lea cuidadosamente cada enunciado, indique las unidades del SI que se menciona (múltiplos o submúltiplos), analice y resuelva cada situación:
   a) ¿Cuánto cuesta enmarcar 5 cuadros rectangulares de 27m por 3dm cada uno, si el metro de marco elegido cuesta $28250?
   b) Rafael alcanza a recorrer 0,75 km durante cinco minutos de trote. ¿Cuántos kilómetros alcanza a avanzar si trota 25 minutos?
   c) ¿Cuál es la velocidad promedio por hora de un automóvil que recorre 200km, 5hm, 3dam, 4m en 3 horas?
   d) Se desea cercar con alambre un terreno rectangular de 82 m por 149 dm, con dos vueltas de alambre. ¿Cuántos metros de alambre son necesarios?
   e) Un atleta recorre el lunes 5m, 3 dam, 7 km y 2hm. El martes recorre 18m, 3dam, 11 km y 6hm y el miércoles recorre 12m, 5dam, 5km y 11hm. ¿Cuántos metros recorre en los tres días?
   f) Se desea cercar con alambre un terreno rectangular de 72 m por 158 dm, con dos vueltas de alambre. ¿Cuántos metros de alambre son necesarios?
   g) Lucía mide 145 cm y su hermana Marcela mide 1,44 m ¿Cuál de las dos hermanas es más alta?
   h) Si un mililitro es igual a 0,01 centilitros ¿Cuántos mililitros tiene un centilitro? ¿Cuántos mililitros tuene un litro? ¿Cuántos mililitros tiene una botella de gaseosa de 1,5 litros?
   i) ¿Cuánta agua se desperdicia en una hora si un grifo gotea 30mm3 cada 5 segundos? ¿en las mismas condiciones cuánta agua se pierde en un mes?
   j) Se quiere llenar un recipiente con 3 litros de agua, pero unicamente se cuenta con dos recipiente uno de 7 litros y otro de 4 litros ¿Cómo se puede resolver esta situación?

2. Resuelva cada actividad:
   a) Consulte cuál es la superficie del estadio de futbol en su ciudad y luego exprese esta medida en las siguientes unidades:
      cm^2 hm^2 mm^2 km^2
   b) ¿Qué unudad de superficie seria la mas adecuada para medir?:
      El suelo de la cocina La superficie de la una ciudad La cabeza de un alfiler
   c) Estime en cm^3 el volumen de cada objeto e indique si es menor que un dam^3, esta entre un dam^3 y un m^3 o es mayor que un m^3
      Una puerta El libro de matematicas Un esfero
      Una cama Una estufa El aula de clase

Preguntas de las Pruebas PISA[9]

1. Responda las siguientes preguntas e indique el razonamiento utilizado:
   a) La ruta del Gotemba, que lleva a la cima del Monte Fuji, tiene unos 9 kilómetros (km) de longitud. Los senderistas tienen que estar de vuelta de la caminata de 18 km a las 20:00 h. Toshi calcula que puede ascender la montaña caminado a 1,5 kilómetros por hora, como media, y descenderla al doble de velocidad. Estas velocidades tienen en cuenta las paradas

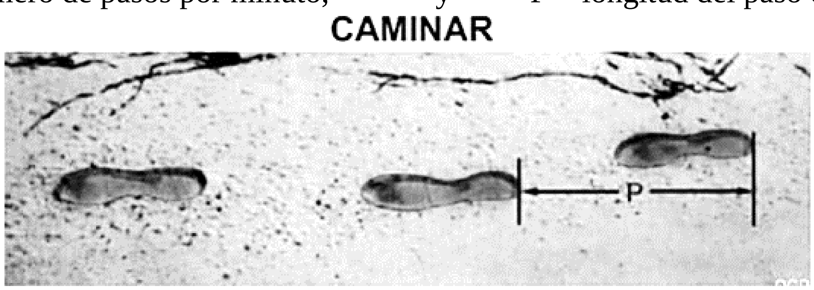
[9] Tomado de http://www.las2orillas.co/pruebas-pisa-32-preguntas-para-que-se-ponga-a-prueba/

para comer y descansar. Según las velocidades estimadas por Toshi, ¿a qué hora puede, como muy tarde, iniciar su caminata de modo que pueda estar de vuelta a las 20:00 h?

b) Toshi llevó un podómetro para contar los pasos durante su recorrido por la ruta del Gotemba. Según el podómetro, dio 22.500 pasos en la ascensión. Calcule la longitud media del paso de Toshi en su ascensión de 9 km por la ruta del Gotemba. Expresa tu respuesta en centímetros (cm).

2. En un concierto de rock se reservó para el público un terreno rectangular con unas dimensiones de 100 m por 50 m. Se vendieron todas las entradas y el terreno se llenó de fans, todos de pie. ¿Cuál de las siguientes cifras constituye la mejor estimación del número total de asistentes al concierto?
A. 2000 B. 5000 C. 20000 D. 50000 E. 100000

B. La imagen muestra las pisadas de un hombre. La longitud del paso, P, es la distancia que media entre el extremo posterior de dos huellas consecutivas.
Para los hombres, la fórmula ofrece una relación aproximada entre n y P donde:
n = número de pasos por minuto, y P = longitud del paso en metros.



a) Si se aplica la fórmula a la forma de andar de Heiko y Heiko da 70 pasos por minuto, ¿cuál es la longitud del paso de Heiko? Muestra tus cálculos.
b) Bernard sabe que la longitud de su paso es de 0,80 metros. Aplica la fórmula a la forma de andar de Bernard. Calcula la velocidad al andar de Bernard en metros por minuto y en kilómetros por hora. Muestra los cálculos que has realizado.

Análisis del cumplimiento de los objetivos:
Con las actividades diseñadas en este apartado se puede llegar al cumplimiento del objetivo de la unidad porque el trabajo con las unidades del SI en la solución de problemas, permiten que el estudiante se dé cuenta de la importancia del uso del SI, dado que permite trabajar en diferentes situaciones cotidianas y cómo son usadas en diferentes tipos de preguntas.

2. Postulado de Euclides

2.1. Identificación del problema

¿Cómo explicar mediante diversas actividades el proceso para reconocer, como lo hizo Euclides, la necesidad de postular la unicidad de la paralela en una superficie plana y que sucede con superficies que se curvan constantemente como la superficie esférica o la pseudoesférica?

En el proceso de aprendizaje cada persona se enfrenta a su entorno y a diversos tipos de experiencias; va adquiriendo y apropiándose del conocimiento y construyendo su propia estructura mental. Cada persona debería asimilar una parte de matemática, en particular de geometría, hasta sentirla integrada en su propia estructura mental.

Casi toda la actividad académica en cuestiones de geometría procede de *Elementos*[10], y del desarrollo de la geometría euclidiana que durante mucho tiempo se ha implementado, no solo por su contenido matemático sino como modelo teórico deductivo. Además la implementación durante tanto tiempo de dicha geometría también se debe a que se ha considerado que ésta puede representar fielmente el mundo físico que nos rodea; pero la geometría euclidiana no es tan natural, por ejemplo para poder trabajar con rectas, Euclides en su *definicion 23*, define las *rectas paralelas* como "aquellas que, estando en un mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos". En primer lugar hay que tener la noción de prolongar indefinidamente y en segundo lugar en el mundo físico no podemos encontrar rectas paralelas a la manera de Euclides y menos que cumplan la condición de prolongarse indefinidamente, pero entonces nos queda el interrogante sobre qué geometría es la que más se adapta a nuestro entorno, qué de geometría debemos asimilar; como se mencionó al inicio de este capítulo esa geometría la debe integrar cada individuo.

Un primer acercamiento a la geometría se realiza a un nivel experimental cuando es posible familiarizarse con los conceptos más sencillos (sección plana, línea, etc.). Según Campos (2007), se cumple una aproximación intuitiva a la geometría si, yendo más allá del uso experimental, se trata de entender la generalidad de los procedimientos geométricos. Posteriormente un enfoque axiomático de la geometría se tiene cuando se va más allá de la visión intuitiva, al tratar de

[10] *Elementos* es un tratado matemático y geométrico que se compone de trece libros, escrito por el matemático griego Euclides cerca del 300 a. C. en Alejandría.

contemplar la interrelación de los enunciados geométricos, su ordenamiento en cadenas de condicionales y su derivación unos de otros según reglas dadas.

“la geometría euclidiana es un campo muy fértil – aunque no el único – para el cultivo de la abstracción, la generalización, la definición, la axiomatización y, ante todo la deducción formal a partir de axiomática”, por tener una articulación optima entre lo intuitivo y lo formal, lo concreto y lo abstracto y lo cotidiano y lo académico (Vasco C, 2006. Citado en [1]). Pero afortunada o infortunadamente, dentro de la axiomatización de esta geometría, el quinto postulado generó discordias durante mucho tiempo debido a su aparente inconsistencia y es a partir de él y del trabajo de grandes matemáticos como Gauss, Lobachevski, Bolyai y Hilbert, entre otros, como ha evolucionado la geometría y su axiomatización.

Volviendo a la geometría euclidiana, ésta se desarrolla en una superficie plana partiendo de unos elementos básicos: el punto, la recta y el plano. En 1868, en su trabajo, Eugenio Beltrami destaca tres tipos de superficies constantes: el plano, la superficie esférica y la superficie pseudoesférica. Desde luego, la geometría sobre la superficie plana es la geometría euclidiana, ahora es importante pensar en una geometría para cada una de las otras superficies, determinar cómo son los elementos básicos en ellas, cómo se relacionan entre sí dichos elementos; y es la geodésica[11] el elemento unificador de las tres superficies. Puesto que no hay una única línea geodésica para las tres superficies se sigue que hay tres geometrías posibles. En tiempo de Euclides nada inducia a pensarlo, dado que Euclides formuló su postulado en cierta manera se adelantó a los tiempos mostrando así su talento geométrico.

2.2. Aspectos históricos y epistemológicos

Euclides hizo una exposición de la geometría, durante muchos siglos considerada como el modelo para cualquier explicación racional. Esta obra requirió un inmenso trabajo, de tipo intuitivo, realizado por los griegos, poco más o menos entre los años 600 y 300 antes de nuestra era.

Campos, 2006, p.*vi*) afirma:

> El estudio de la axiomatización de la geometría realizada por Euclides en *Elementos*, se organiza alrededor de un análisis de su demostración del teorema de Pitágoras en el libro I. Prosigue con la evolución producida gracias a las tentativas de convertir el quinto postulado de Euclides en teorema, hasta el desenlace de tal intento, que fue la creación de las geometrías no euclidianas. Entre tanto, Kant había encontrado en la geometría euclidiana el paradigma de un saber que parecía exigir la admisión de juicios sintéticos a priori, juicios sobre cuya existencia fundamentó la posibilidad de una metafísica. La reflexión por parte de diversos matemáticos acerca de este desenvolvimiento de la geometría y de la comprensión epistemológica de su propia disciplina conduce a Hilbert a la compleción de la axiomatización euclidiana y, de allí, a dar un lugar preminente al problema de no contradicción y a la teoría de la demostración.

[11] Línea sobre la cual se mide la menor distancia entre dos puntos en una superficie dada.

2.2.1. El quinto postulado de Euclides

La geometría no quedó constituida, de una vez por los griegos (como algunos aún creen), sino que en su construcción axiomática (que por concepciones filosóficas se creía la única posible) quedaron gérmenes que, afortunadamente, impulsaron su desarrollo desde el interior mismo. Lo que permitió la evolución de la geometría desde la concepción de Euclides hasta la de David Hilbert. (Campos, 2008, p. 1)

El cuerpo entero de la geometría euclidiana constituía una colección de verdades incontrovertibles sobre objetos idealizados y fenómenos del mundo físico. La geometría euclidiana se ocupa de líneas paralelas. Por definición, dos rectas del mismo plano son paralelas cuando no se cortan, es decir, cuando no contienen ningún punto común. Este enunciado expresa lo que se quiere decir con rectas paralelas y por ello no es objetable. En si no asegura que haya rectas paralelas. Pero la geometría euclidiana contiene un axioma que implica la *unicidad* de paralelas, (Kline, 1992, p.452) a saber:

Postulado (V). *Si una recta, al incidir sobre otras dos, forma ángulos internos, por el mismo lado, menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, si se las prolonga indefinidamente, se encuentran por el lado en que están los ángulos menores que dos ángulos rectos.*

Es incorrecto hablar de postulado de las paralelas. En efecto, ellas no son mencionadas explícitamente; y para encontrar su mención implícita es necesario tener en cuenta todas las posiciones posibles de una de las dos rectas incididas, si la otra se deja fija.

Es posible descomponer el enunciado del quinto postulado de Euclides, en antecedente y consecuente:

Antecedente: una recta al incidir sobre otras dos determina ángulos menores que dos ángulos rectos.

Consecuente: las dos rectas se encuentran, al prolongarlas por el lado de la recta incidente en que están los ángulos menores que dos rectos.

Ahora bien; decir que no se encuentran por más que se prolonguen, es lo mismo que decir que las rectas son paralelas (Definición 23 de *Elementos*). Si se niega el consecuente, y las rectas son paralelas, se niega también el antecedente, es decir, los ángulos determinados por la recta incidente ya no son menores que dos ángulos rectos. (Campos, 2008, p. 3)

Este axioma es algo confuso, ni Euclides ni los matemáticos que lo sucedieron hasta el siglo XIX dudaron realmente de la verdad de este axioma, es decir, no cuestionaron que fuera una idealización correcta del comportamiento de las rectas reales o físicas. Lo que había molestado a Euclides y a sus sucesores era que el axioma no fuera tan evidente por sí mismo (Kline, 1992).

En el intento por encontrar un axioma equivalente, se dieron cuenta de que todo sustituto propuesto contenía directa o indirectamente una afirmación sobre lo que ocurría en lo más remoto del espacio. Así fue como los esfuerzos por encontrar un enunciado más sencillo que el de Euclides rindieron resultados satisfactorios en lo tocante a la sencillez, pero sembraron dudas sobre la verdad de todo aserto relativo a la existencia de una única paralela a otra que pase por un punto dado. (Kline, 1992)

Hacia el siglo XVIII algunos matemáticos decidieron ensayar un nuevo camino. El conjunto de Euclides contenía 5 axiomas o nociones comunes y 5 postulados. Quizá bastara con 5 axiomas y 4 postulados; acaso se pudiera demostrar una afirmación sobre rectas paralelas deduciéndola de los otros nueve axiomas. De ser posible esto, ya no habría problema alguno, pues la afirmación sobre paralelas sería consecuencia necesaria de los nueve axiomas perfectamente aceptables. Fracasaron todos estos empeños (Kline, 1992).

Otro intento fue el realizado por el jesuita Girolamo Saccheri (1667–1733), al respecto Kline (1992) afirma que Saccheri decidió aplicar el método indirecto de demostración. En efecto, el axioma de las paralelas de Euclides asegura la existencia de una y solo una recta que pasa por P y es paralela a l, para establecer por contradicción la verdad de este aserto, hay dos posibilidades: o ninguna paralela a l pasa por P, o pasa más de una. Por la primera opción Saccheri produjo una contradicción pero por la segunda posibilidad dedujo varios teoremas extraños pero libres de contradicción. En el intento por sustituir el quinto postulado de Euclides se elaboraría una nueva clase de geometría y ésto fue precisamente lo que hizo Gauss, desarrolló las implicaciones lógicas de un sistema de axiomas que incluía el supuesto de que, por un punto dado, podía pasar más de una paralela a una recta dada, y así creó la geometría no euclidiana (Kline, 1992).

Gauss aun sabiendo que la geometría que había desarrollado era aplicable al espacio físico y, por lo mismo, muy importante, no publicó sus resultados. Estaba uy adelantado a su época al sacar la conclusión que la geometría euclidiana no era por fuerza la descripción correcta del espacio físico, y que podría ser igualmente precisa para el efecto alguna geometría no euclidiana. Por lo tanto, la obra de Gauss sobre la geometría no euclidiana fue encontrada entre sus papeles después de su muerte, ocurrida en 1855. Los matemáticos a los que se atribuye haber creado la geometría no euclidiana, pues ellos sí publicaron sus resultados, son Nicolái Ivánovich Lobachevski (1793–1856) y Janos Bolyai (1802–1860). (Kline, 1992, p.455).

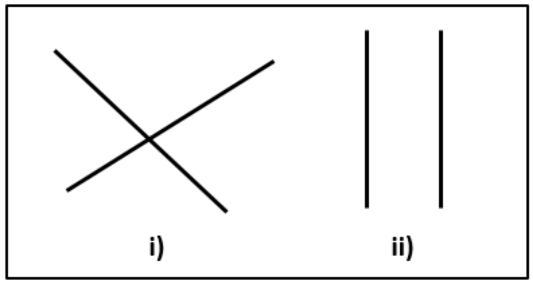
2.2.2. Determinación de paralelismo en una superficie constante

Aproximadamente desde el año 300 antes de nuestra era, hasta más o menos el año 1832 se cree que hay una única geometría: la de Euclides. Esta geometría, desarrollada en el plano tiene como uno de sus elementos las rectas y dentro de su estudio es importante el análisis de cómo estas se relacionan (Figura 2–1): hay pares de rectas que se intersecan (con un punto en común), y hay pares de rectas que no tienen puntos comunes que son denominadas *rectas paralelas*.

Euclides en *Elementos* da la definición de rectas parales e inclusive los teoremas 27, 28 y 29 del libro I, tratan sobre ellas. Pero dado que no logra establecer la unicidad en ciertos casos requeridos tiene que postularla por lo tanto enuncia el quinto postulado[12] para garantizar lógicamente la unicidad de la paralela.

[12] El quinto postulado a la manera de Euclides esta enunciado en el presente trabajo en el apartado 2.2.1.

Figura 2–1: Posición relativa de dos rectas en el plano euclídeo



Después del trabajo de muchos geómetras en el intento de eliminar el quinto postulado, llegaron a enunciados equivalentes a éste, algunas de dichas equivalencias son:

- La suma de [las medidas de] los ángulos de cualquier triángulo es igual a [la suma de las medidas de] dos ángulos rectos. Elementos, I, 32. (Proposición ya conocida en tiempos de Aristóteles, siglo IV a. C.)
- Por un punto exterior a una recta dada sólo cabe trazar una paralela. Esta formulación es la más conocida y es debida al matemático griego Proclo. Se la conoce también como «postulado de las paralelas» (o axioma de Playfair).

Sobre una superficie plana el quinto postulado parece obvio en el sentido de que prácticamente no se entiende cómo podría ser de otra manera, es decir, cómo se puede trazar más de una recta o cómo no trazar ninguna. Se ve la perspicacia de Euclides al darse cuenta de que la unicidad no podría ser establecida por demostración.

En 1829, Lobachevski, sin postular unicidad de la paralela logra otra geometría que no es la euclidiana.

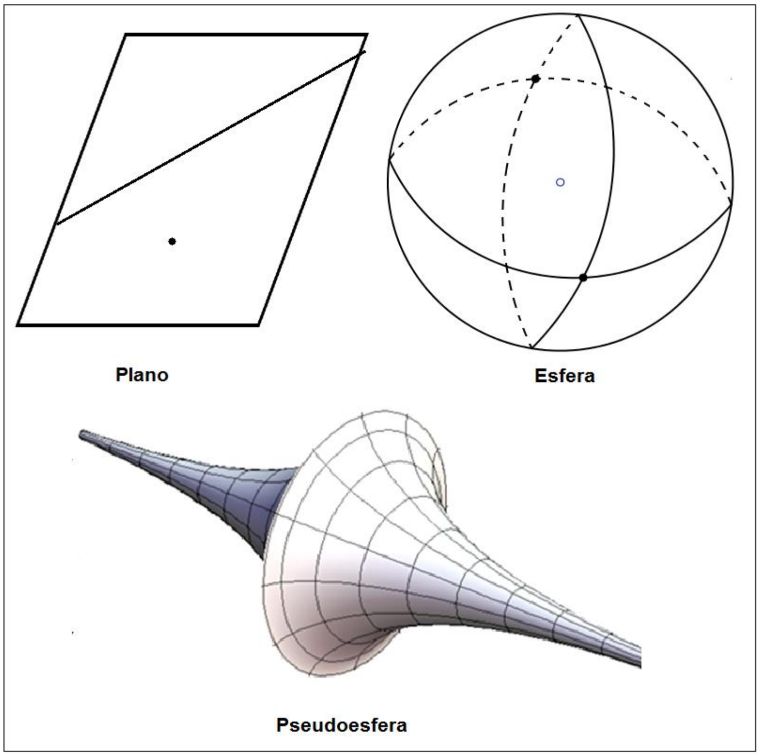
Riemann en 1854, sugiere una geometría donde no hay paralela alguna.

En 1868, Eugenio Beltrami (1835-1900), se da cuenta que hay tres tipos especiales de superficies, es decir, de multiplicidades con dos dimensiones:

1. La primera es una superficie plana constantemente, es decir, que no se curva en ninguna parte de su extensión.
2. El segundo tipo de superficie es la que se curva constantemente hacia afuera. Un ejemplo de este tipo de superficie es la superficie esférica.
3. El tercer tipo corresponde a una superficie constantemente curva hacia adentro, se le llama superficie pseudoesférica. Un ejemplo de este tipo de superficie lo podemos encontrar en un instrumento musical como la trompa que va desde la embocadura hasta el pabellón. El tercer tipo de superficie de Beltrami es como un tubo que por un extremo termina en un pabellón y por el otro no termina sino que se adelgaza cada vez más. (ver figura 3–2)

Sobre cada una de estas superficies se construye una geometría, sobre la primera superficie, la constantemente plana, se tiene ya la geometría de Euclides. Desde luego, cabe construir sendas geométricas sobre las superficies esférica y pseudoesférica, basta para ello tratar de construir una geometría como la de la superficie plana.

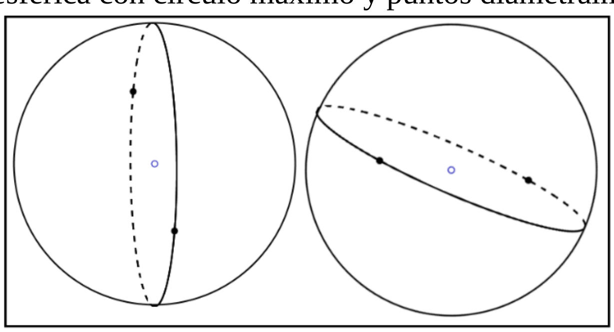
Figura 2–2: Superficies constantes según Beltrami.



Superficie Esférica

La distancia más corta sobre dos puntos en el plano euclídeo se mide sobre la recta. La distancia más corta entre un par de puntos de una superficie esférica se mide sobre la geodésica[13]. En la superficie esférica las líneas que tienen la misma función que las rectas en el plano de Euclides son los círculos máximos[14]. En geografía, el Ecuador y todos los meridianos son círculos máximos; es más, cualquier par de puntos diametralmente opuestos determinan un círculo máximo.

Figura 2–3: Superficie esférica con círculo máximo y puntos diametralmente opuestos.

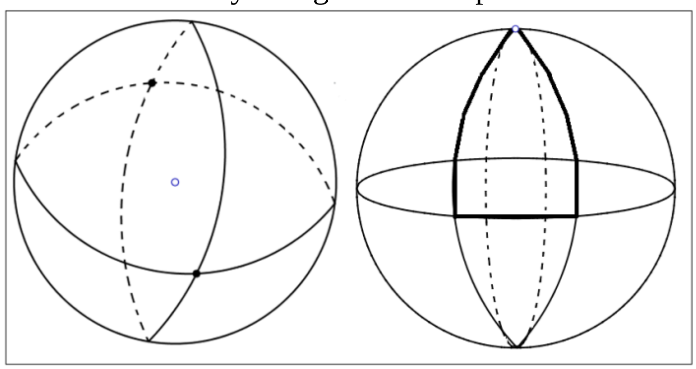


[13] En geometría, la línea **geodésica** se define como la línea de mínima longitud que une dos puntos en una superficie dada, y está contenida en esta superficie. Las geodésicas de una superficie son las líneas "más rectas" posibles (con menor curvatura) fijado un punto y una dirección dada sobre dicha superficie. En línea. Noviembre de 2014, disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Geod%C3%A9sica

[14] Círculo máximo: traza de un plano que corta la esfera pasando por el centro de la esfera.

En la geometría euclidiana se comparan las posibles posiciones entre dos rectas: o se intersecan o no tienen puntos comunes. En la geometría esférica lo que sucede con dos círculos máximos es que solamente se intersecan: exactamente en dos puntos; es decir que no hay paralelas sobre la superficie esférica, lo que implica que a partir de un punto exterior a una recta no pasa ninguna paralela, además si se quiere ver el axioma equivalente al del quinto postulado: la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°; se tiene que en la superficie esférica es falso dado que esta suma es mayor a 180° y para ello es necesario analizar cómo son los triángulos en esta superficie: un triángulo en la superficie esférica es la porción de la superficie esférica limitada por tres círculos máximos (ver figura 2-4).

Figura 2–4: Intersección de dos rectas y triángulo en la superficie esférica.



Es posible construir en la superficie esférica un triángulo con tres ángulos rectos mientras que en el plano euclídeo un triángulo puede tener a lo más un solo ángulo recto.

Superficie Pseudoesférica

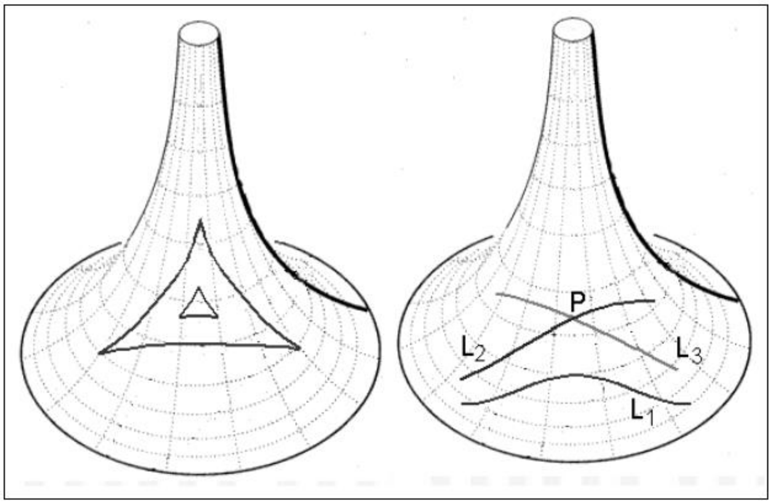
Como se mencionó anteriormente, de acuerdo con el trabajo de Beltrami, el tercer tipo especial de superficie con dos dimensiones corresponde a una superficie constantemente curva hacia adentro, denominada superficie pseudoesférica; sobre esta superficie es posible construir una geometría no euclidiana en la que la distancia más corta entre dos puntos no es una línea recta. La superficie de una pseudoesfera se puede representar como un plano hiperbólico, es decir, un plano con una curvatura negativa; sin embargo, en un plano hiperbólico se satisfacen todos los postulados de Euclides excepto quinto.[15]

El trabajo geométrico en la superficie de una pseudoesfera es más complicado que en las dos superficies anteriores. Hay líneas sobre la pseudoesfera que cumplen la misma función que las rectas en la superficie plana o que los círculos máximos en la superficie esférica: sobre ellas se miden las distancias mínimas; las líneas geodésicas sobre la superficie pseudoesférica, son de dos tipos: curvas que parten del ecuador y suben hasta el infinito, y curvas que rodean el “cuello” de la pseudoesfera.[16] No se cumple el quinto postulado en el sentido de que, dada una geodesia *L1* y un punto *P* exterior a ella, pasa por *P* más de una paralela que no cortan a *L1*, como se trata de mostrar en la figura 2–5. Pero si se quiere ver cuánto suman la medida de los ángulos interiores a

[15] En línea. Noviembre de 2014, disponible en http://ike-darwin.blogspot.com/2011/06/que-es-una-pseudoesfera.html
[16] En línea. Noviembre de 2014, disponible en http://www.epsilones.com/epsiclas/paginas/t-geometria/geo-999-geometrias-no-euclideas.html

un triángulo, ésta es menor a 180° (Ver figura 2–5), caso contrario al de la superficie esférica y al de la superficie plana.

Figura 2–5: Triángulo y rectas que pasan por un punto exterior a otra recta dada en la pseudoesfera.[17]



2.2.3. *Fundamentos de la geometría*, de David Hilbert

El hecho cumplido de las geometrías no euclidianas juntado a la indagación sistemática de la lógica y de las relaciones de ésta con la matemática condujeron a filósofos, lógicos y matemáticos a replantear las circunstancias generales de la axiomatización de tal manera que cobijara tanto las geometrías no euclidianas como la euclidiana. Todo este proceso culmina en una obra, más compleja que la de Euclides, *Fundamentos de la geometría*, de David Hilbert. (Campos, 2008, p. *ii*)

Campos (2008, p. 239) menciona, respecto a la obra de *Elementos* y a la obra de *Fundamentos de la geometría*, lo siguiente:

> Tanto en *Elementos*, la obra de partida, como en *Fundamentos de la geometría*, la obra de llegada, el tema central es la geometría euclidiana plana pero, una buena parte, tanto en extensión como en cuanto a fundamentación, en ambas obras, tienen que ver con la geometría en tres dimensiones. Hilbert sintetiza resultados sobresalientes de *Elementos* y del desenvolvimiento histórico de estos; tal síntesis le permite: explicar ciertas cuestiones que habían quedado suspendidas al lado de los intentos de prueba del quinto postulado, por una parte; por otra, responder a interrogantes planteados por la crítica de *Elementos*, subsecuente a la superación de estos por la invención de las geometrías no euclidianas.
>
> La extensión cuantitativa de las dos obras no es comparable: 465 teoremas en Euclides contra 68 teoremas en Hilbert. Cualitativamente Hilbert va mucho más lejos que el geómetra alejandrino; para comenzar, asume que es una obra de base, por ello figura en el

[17] Tomado de obaricentrodamente.blogspot.com/2013_09_01_archive.html

título la palabra fundamentos; como tal, asienta firmemente, no solo la geometría euclidiana, sino también las no euclidianas, y otras posibles a nivel elemental.

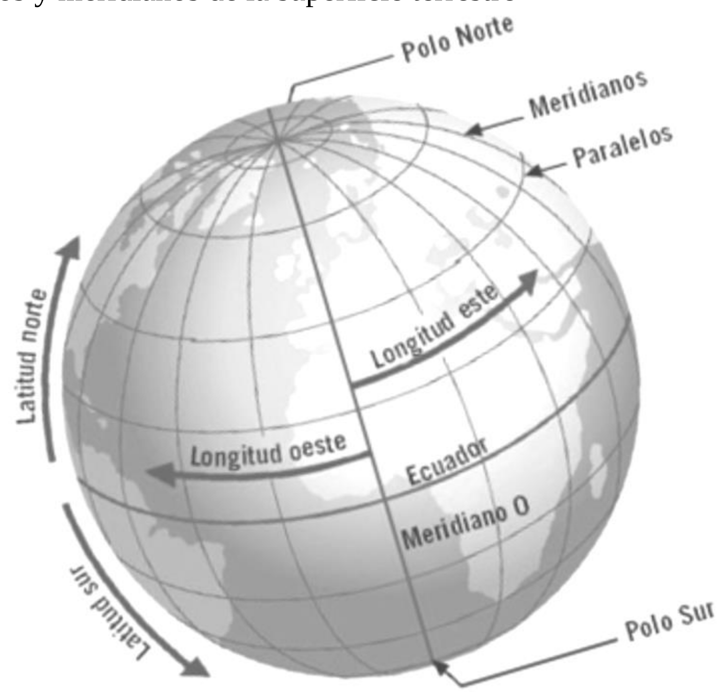
El quinto postulado como lo enunció Euclides asegura la existencia de una y solo una recta que pasa por un punto dado *P* y es paralela a una recta *l* que no contiene a *P*; pero como se vio en apartados anteriores al contradecir este enunciado podemos encontrar dos opciones que se pueden verificar una en la superficie esférica (no existe ninguna paralela a *l* que pase por *P*) y otra en la superficie pseudoesférica (existe más de una paralela a *l* que pase por *P*). De ahí la pertinencia del enunciado de este axioma a la manera de Hilbert:

Si * *a* es una recta;
*** *A* es un punto que no pertenece a *a*;**
entonces
*** en el plano determinado por la recta *a* y por el punto *A* existe a lo más una recta que pasa por *A* y que no corta a la recta *a*.**

2.2.4. Geografía esférica

Las **coordenadas geográficas** son un sistema de referencia que utiliza las dos coordenadas angulares, latitud (Norte y Sur) y longitud (Este y Oeste) y sirve para determinar los ángulos laterales de la superficie terrestre (o en general de un círculo o un esferoide).

Figura 2–6: Paralelos y meridianos de la superficie terrestre[18]



[18] En línea. Diciembre de 2013, disponible en (http://nuestrorincondeinformatica.blogspot.com/2012/04/paralelos–y–meridianos–movie.html)

La **latitud** mide el ángulo entre cualquier punto y el ecuador. Las líneas de latitud se denominan paralelos. La latitud es el ángulo que existe entre un punto cualquiera y el Ecuador, medida sobre el meridiano que pasa por dicho punto. La distancia en km a la que equivale un grado de dichos meridianos depende de la latitud, a medida que la latitud aumenta disminuyen los kilómetros por grado. [18]

- La latitud se suele expresar en grados sexagesimales.
- Todos los puntos ubicados sobre el mismo paralelo tienen la misma latitud.
- Aquellos que se encuentran al norte del Ecuador reciben la denominación Norte (N).
- Aquellos que se encuentran al sur del Ecuador reciben la denominación Sur (S).
- Se mide de 0º a 90º.
- Al Ecuador le corresponde la latitud 0º.
- Los polos Norte y Sur tienen latitud 90º N y 90º S respectivamente.

La **longitud** mide el ángulo a lo largo del ecuador desde cualquier punto de la Tierra. Se acepta que Greenwich cerca de Londres es la longitud 0 en la mayoría de las sociedades modernas. Las líneas de longitud son círculos máximos que pasan por los polos y se llaman meridianos. Para los meridianos, sabiendo que junto con sus correspondientes antimeridianos se forman circunferencias de 40.007 km de longitud, 1º de dicha circunferencia equivale a 111,131 km. [18]

Combinando estos dos ángulos, se puede expresar la posición de cualquier punto de la superficie de la Tierra. Por ejemplo, Bogotá (Colombia), tiene Latitud Norte 4°35'56"57, y Longitud Oeste 74°04’51’’30. Así un vector dibujado desde el centro de la tierra al punto 4°35'56"57 grados norte del ecuador y 74°04’51’’30 grados al oeste de Greenwich pasará por Bogotá.

Figura 2–7: Planisferio físico[19]

[19] En línea. Diciembre de 2013, disponible en http://cienciastc.wikispaces.com/Territorio+y+sociedad+argentino)

Posición absoluta: se determina a través de las coordenadas geográficas (latitud y longitud). Por ejemplo:
La posición absoluta o astronómica de Colombia tiene de latitud norte 12° 30’ 40” en Punta Gallinas en La Guajira y 4° 13’ 30” de latitud sur en las bocas de la quebrada San Antonio en el extremo del Trapecio Amazónico. Partiendo del meridiano de Greenwich, Colombia tiene longitud occidental; esta es de 66° 50’ 54” en el extremo este en la isla de San José en el río Negro, frente a la Piedra del Cocuy y 79º 01’ 23” en el Cabo Manglares en el extremo oeste.[20]

Posición relativa: permite localizar distintos espacios territoriales a partir de tomar otro espacio territorial como referencia. Por ejemplo:
La posición relativa o geográfica de Colombia la ubica en la esquina noroccidental de América del sur; los límites de Colombia son:
Norte: Meridiano 82, Nicaragua, Jamaica, Costa Rica, Haití, República Dominicana, Honduras, Panamá, Costa Rica, Océano Atlántico, a lo largo de 1626 Km.
Este: con Venezuela 2219 Km.
Sureste: con Brasil 1645 Km.
Sur: con Perú 1626 Km.
Sur oeste: con Ecuador 586Km.
Oeste: con el Océano Pacifico 1300 km.
Noroeste: con Panamá 286 Km

2.3. Propuesta pedagógica

2.3.1. Objetivos

2.3.1.1. Objetivo general
Mostrar como Euclides actuó como un matemático al formular su quinto postulado. El desarrollo histórico de la geometría puso en claro que en realidad había tres probabilidades.

2.3.1.2. Objetivos específicos

- Llevar a los estudiantes a darse cuenta de la importancia de las líneas geodésicas en superficies que se curvan constantemente de la misma manera, es decir, el plano, la superficie esférica y la superficie pseudoesférica.

- Inducir a los estudiantes a darse cuenta de que los triángulos son intersecciones de líneas geodésicas, por lo tanto son diferentes en el plano, en la superficie esférica y en la superficie pseudoesférica.

[20] http://latierrayelhombre.wordpress.com/tag/limites/

2.3.2. Estándares y lineamientos en matemáticas: Ministerio de Educación Nacional

La práctica de la definición cuidadosa de términos técnicos, la de la argumentación a partir de premisas de las que no se sabe si son verdaderas o no y la de la deducción formal basada en axiomas más o menos arbitrarios y aun contrarios a la intuición espacial o numérica se desarrollan más naturalmente con el aprendizaje de la geometría euclidiana y de las no euclidianas, del álgebra abstracta y de otras ramas ya axiomatizadas de las matemáticas. Como se mencionó anteriormente, la geometría euclidiana es un campo muy rico para el cultivo de habilidades y destrezas geométricas; por tener una articulación óptima entre lo intuitivo y lo formal, lo concreto y lo abstracto y lo cotidiano y lo académico (MEN, 2002).

De acuerdo con el MEN (2002), para los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias se podría hablar de división entre pensamiento lógico y pensamiento matemático, sin subdividir este último. Pero desde la tradición griega y medieval ya se había distinguido entre la manera de hacer matemáticas con respecto al número: la aritmética, y la manera de hacerlas con respecto al espacio: la geometría. Para la aritmética se pensó durante siglos únicamente en los números de contar, con las operaciones de adición y sustracción, multiplicación y división. Para la geometría se pensó también durante siglos únicamente en la geometría euclidiana, sistematizada en el Siglo IV antes de nuestra era. Estas dos maneras de hacer matemáticas sugieren pues una primera subdivisión del pensamiento matemático al menos en dos tipos: el pensamiento numérico y el espacial (MEN, 2002).

La geometría, por su mismo carácter de herramienta para interpretar, entender y apreciar un mundo que es eminentemente geométrico[21], constituye una importante fuente de modelación y un ámbito por excelencia para desarrollar el pensamiento espacial y procesos de nivel superior y, en particular, formas diversas de argumentación como afirmacion del consecuente o negacion del antecedente. Desde esta perspectiva los énfasis en el hacer matemático escolar estarían en aspectos como: el desarrollo de la percepción espacial y de las intuiciones sobre las figuras bi y tridimensionales, la comprensión y uso de las propiedades de las figuras y las interrelaciones entre ellas así como del efecto que ejercen sobre ellas diferentes transformaciones (como rotaciones, traslaciones y reflexiones), el reconocimiento de propiedades y relaciones a partir de la observación de regularidades que conduzca al establecimiento de conjeturas y generalizaciones, el análisis y resolución de situaciones problemas que propicien diferentes miradas desde lo analítico, desde lo sintético y lo transformacional. (MEN, 1998)

Desarrollo del Pensamiento Geométrico

El estudio de la geometría intuitiva en los currículos de las matemáticas escolares se había abandonado como una consecuencia de la adopción de la “matemática moderna”. Desde un punto de vista didáctico, científico e histórico, actualmente se considera una necesidad ineludible volver a recuperar el sentido espacial intuitivo en toda la matemática, no sólo en lo que se refiere a la geometría (MEN, 1998). Aunque se está retomando el trabajo con la geometría en el aula aún falta

[21] Según los lineamientos del MEN. Aunque este es un tema discutible.

mucho para realizar un estudio a nivel axiomático y teniendo en cuenta diferentes geometrías además de la euclidiana.

Howard Gardner en su teoría de las múltiples inteligencias, citado en MEN (1998), considera como una de las inteligencias, la espacial; plantea que el pensamiento espacial es esencial para el pensamiento científico, ya que es usado para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas. El manejo de información espacial para resolver problemas de ubicación, orientación y distribución de espacios es peculiar a esas personas que tienen desarrollada su inteligencia espacial. Se estima que la mayoría de las profesiones científicas y técnicas, tales como el dibujo técnico, la arquitectura, las ingenierías, la aviación, y muchas disciplinas científicas como química, física, matemáticas, requieren personas que tengan un alto desarrollo de inteligencia espacial (MEN, 1998).

La propuesta de Renovación Curricular avanzó en este proceso enfatizando la geometría activa como una alternativa para restablecer el estudio de los sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio (MEN, 1998). Por otra parte, el MEN (1998) también afirma que la investigación actual sobre el proceso de construcción del pensamiento geométrico indica que éste sigue una evolución muy lenta desde las formas intuitivas iniciales hasta las formas deductivas finales, aunque los niveles finales corresponden a niveles escolares bastante más avanzados que los que se dan en la escuela.

El modelo de Van Hiele es la propuesta que parece describir con exactitud esta evolución y que está adquiriendo cada vez mayor aceptación a nivel internacional en lo que se refiere a geometría escolar. (MEN, 1998)

Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Octavo a noveno

Según los Estándares Básicos de Competencias en Mátemáticas del Ministerio de Educación Nacional, se espera que el estudiante al terminar el ciclo correspondiente a los grados octavo y noveno:

- Conjeture y verifique propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
- Reconozca y contraste propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).
- Aplique y justifique criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.
- Use representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

Respecto a estos estándares, en grado noveno sí se trabaja congruencia, semejanza, propiedades y relaciones entre figuras (trabajo que requiere de paralelismo), pero poco se exige la argumentación, se procede únicamente de manera operacional y el estudiante se limita a copiar procesos, esto sin tener en cuenta que en pocas ocasiones hay un trabajo de transversalidad con otras asignaturas.

2.3.3. Ubicación en el currículo

Aunque el pensamiento espacial y los sistemas geométricos están presentes en todos los grados de educación básica, según los estándares del MEN; es en el grado noveno donde se espera que el estudiante haya adquirido varios conocimientos y habilidades tanto matemáticos como geométricos y de tipo argumentativo, además que la mayoría de los estudiantes están en el nivel 3 de razonamiento de Van Hiele y tienen una percepción del espacio más amplia es posible realizar un trabajo más riguroso con la ayuda del axioma de Euclides a la manera de Hilbert.

Nuevamente se debe tener en cuenta que en geometría es necesario hacer un buen uso del lenguaje verbal y escrito, especialmente si se tiene en cuenta que los estudiantes viven y están sumergidos en su cotidiano vivir con la geometría Euclidiana. Por lo tanto es importante que el docente tenga un buen manejo de los conceptos geométricos en las distintas geometrías a trabajar (las que se pueden desarrollar a partir de las tres superficies constantes); se debe tener en cuenta la importancia del quinto postulado de Euclides y su incidencia en el desarrollo de las geometría no euclidianas; sobre la superficie esférica y sobre la superficie pseudoesférica.

El trabajo que se pretende desarrollar en esta propuesta está organizado en dos unidades que se desarrollarían en el segundo semestre del año escolar, es decir los periodos tres y cuatro.

El desarrollo de las actividades buscan que el estudiante se dé cuenta que hay tres tipos de curvatura constante (la superficie plana, la superficie esférica y la superficie pseudoesférica); que sobre la superficie plana se desarrolla la geometría de Euclides y sobre la superficie esférica y sobre la superficie pseudoesférica es posible pensar en que haya una geometría, a partir del reconocimiento e importancia de las líneas geodésicas sobre cada una de estas superficies que además permiten ver el gran trabajo de Euclides como geómetra.

2.3.4. Requisitos teóricos, alcances y limitaciones

Hay que tener en cuenta que un postulado y un axioma en *Elementos*, son diferentes mientras que para Hilbert significan lo mismo. Por lo tanto se va a hablar del postulado y no axioma de Euclides para evitar confusión.

Un postulado se puede definir como un enunciado que contribuye a la descripción de una situación simulada sobre la cual se tiene el propósito de construir una teoría matemática. **El POSTULADO DE EUCLIDES (enunciado en *Fundamentos de la geometría* de Hilbert)** es:

Si * *a* es una recta;

*** *A* es un punto que no pertenece a *a*;**

entonces

*** en el plano determinado por la recta *a* y por el punto *A* existe a lo más una recta que pasa por *A* y que no corta a la recta *a*.**

Los pitagóricos querían mostrar que en todo triángulo los tres ángulos interiores son iguales a dos ángulos rectos. Según Eudemo citado en Campos (2006), el procedimiento de los pitagóricos era este:

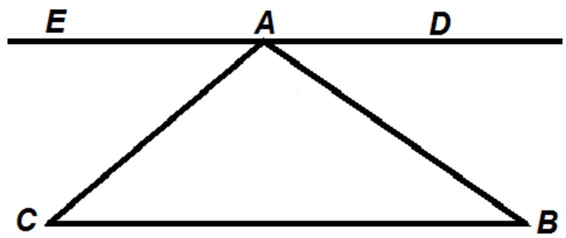
- Por el vértice A del triángulo ABC se traza la paralela DE a BC.
- Puesto que BC, DE son paralelas los ángulos alternos internos son iguales.
- $\measuredangle BAD = \measuredangle ABC$
- $\measuredangle CAE = \measuredangle ACB$

Considérese una tercera igualdad

- $\measuredangle BAC = \measuredangle BAC$

Al sumar respectivamente a izquierda y a derecha, los totales son iguales.

- $\measuredangle BAD + \measuredangle BAC + \measuredangle CAE = \measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB$
- $\measuredangle BAD + \measuredangle BAC + \measuredangle CAE$ = 2 ángulos rectos.
- *Conclusión*: la suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera es igual a dos ángulos rectos.



Para realizar la anterior demostración se requiere de enunciados o postulados que deben ser demostrados con anterioridad:

1. Para hablar de la paralela por el vértice A se debe emplear el quinto postulado de Euclides.
2. Al hacer referencia a ángulos alternos internos iguales se requiere del teorema I 29 de *Elementos:* Una línea recta, al incidir sobre líneas rectas paralelas, forma ángulos alternos iguales uno a otro, el ángulo exterior igual al ángulo interior y opuesto, y, los ángulos interiores del mismo lado iguales a dos ángulos rectos. Es al demostrar este enunciado cuando Euclides introduce el postulado que lleva su nombre.
3. En lo relativo al transporte de ángulos se requiere del teorema I 23 de *Elementos*: un punto de una línea recta dada, construir un ángulo rectilíneo igual a un ángulo rectilíneo dado.

De acuerdo con Campos (2006), no hay indicio en los textos de los antiguos de que los pitagóricos se hayan dado cuenta de supuestos tan importantes claramente establecidos en *Elementos*. Por otra parte para poder realizar esta demostración se requiere de una paralela a BC que pase por el vértice A, lo que implica la unicidad de la paralela.

2.3.5. Aspectos didácticos

Durante mucho tiempo se ha implementado la enseñanza de la geometría a partir del planteamiento de Euclides con el desarrollo de la geometría euclidiana en una superficie plana, no solo por su contenido matemático sino como modelo teórico deductivo. A pesar de las sospechas sobre su inconsistencia lógica (debido a desacuerdos sobre el quinto postulado), por muchos siglos las generaciones de matemáticos y filósofos lo reconocieron como excelente ejemplo de construcción lógica. Aun se le reconoce así, aunque se tenga claridad de sus vacíos y se cuente con modelos axiomáticos que lo perfeccionaron, (Alcaldía Mayor de Bogotá. Secretaria de Educación 2007) como el trabajo realizado por Hilbert en *Fundamentos de la geometría*.

Junto a las razones de tipo histórico al considerar la geometría como campo privilegiado para el desarrollo del razonamiento deductivo, están las de tipo psicológico. Se ha dicho que el pensamiento espacial goza, como pocos, de fuertes soportes intuitivos. Este hecho facilita que el estudiante logre hacer inferencias sencillas a partir de manipulaciones de objetos y de sus representaciones gráficas; y que una vez hechas estas, pueda construir argumentaciones prácticas con las cuales busca validar sus afirmaciones. (Alcaldía Mayor de Bogotá. Secretaria de Educación 2007)

La metodología que se quiere abordar en esta segunda parte del trabajo; al igual que en el capítulo uno, es la de Van Hiele (que está enunciada en el apartado 1.3.5.2), es decir:

1. Familiarización.
2. Comparación.
3. Clasificación.
4. Tratar de iniciar en la argumentación.

2.3.6. Diseño de la propuesta

Es importante que el pensamiento matemático y particularmente del pensamiento geométrico sea desarrollado a través de la comunicación, por tal motivo en las actividades propuestas se espera que el estudiante desarrolle la comunicación y la argumentación a partir de preguntas abiertas y de figuras que él mismo debe hacer, además del trabajo implícito con los niveles de razonamiento de Van Hiele como se mencionó anteriormente.

UNIDAD 1[22]

OBJETIVO:
Llevar a los estudiantes a darse cuenta de la importancia de las líneas geodésicas en superficies que se curvan constantemente de la misma manera, es decir, el plano, la superficie esférica y la superficie pseudoesférica.

CONTENIDOS:
1. El plano y la geometría euclidiana.
2. Superficie terrestre
3. Superficies que se curvan constantemente.
4. Esfera y Pseudoesfera
5. Postulado de Euclides.

ACTIVIDADES:

ACTIVIDAD 1. GEOMETRÍA EUCLIDIANA

[22] Como se mencionó en el numeral 1.3.4 (de la presente propuesta), ésta unidad correspondería al tercer periodo académico escolar para grado noveno.

TEMA: EL PLANO Y LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA

OBJETIVO: Reconocer los elementos básicos de la geometría Euclidiana: puntos, rectas y planos.

1. En su cuaderno, determine los siguientes elementos y asígneles nombres (tenga en cuenta los axiomas de enlace o incidencia de *Fundamentos de la geometría* de Hilbert). Indique cómo se pueden relacionar (realice la figura correspondiente a cada caso).
   a) Un punto y una recta.
   b) Dos rectas.
   c) Tres rectas.

2. Señale el antecedente y el consecuente de cada enunciado e indique si es falso o verdadero. Argumente su respuesta.
   a) Dos segmentos son congruentes si y sólo si coinciden en todos sus puntos.
   b) Si dos segmentos son congruentes entonces tienen igual longitud.
   c) Dos rectas no pueden ser congruentes.
   d) Sea un punto P tal que P pertenece a AB. Si AP es congruente con PB, entonces P es el punto medio de AB.
   e) Si $AB + AC = BC$, entonces B esta entre A y C.
   f) Si A y B determinan dos puntos entonces A y B determinan más de una recta
   g) Si A y B determinan dos puntos entonces A y B determinan un único plano.
   h) Si tres rectas se intersecan dos a dos entonces limitan una porción del plano llamada triángulo.
   i) Dos rectas son paralelas sí y sólo si tienen un punto en común.

3. Complete cada una de las siguientes afirmaciones:
   a) Dos rectas que no tienen puntos comunes son ________________
   b) Un ángulo con medida menor que un ángulo recto es ________________
   c) Si el ángulo ABC es recto, entonces BA y BC son ________________
   d) Cuando dos ángulos coinciden son ________________
   e) La distancia mínima entre dos puntos se mide sobre __________ ________________
   f) Por un punto exterior a una recta _____________ _____________ paralela.

4. Consulte y resuelva
   a) Quién fue Euclides, cuál fue su obra más importante y por qué.
   b) ¿La geometría euclidiana sobre qué tipo de superficie trabaja?
   c) ¿Se relaciona esta geometría con los ejercicios de los anteriores numerales? Argumente.
   d) ¿Considera que la geometría euclidiana representa adecuadamente el entorno físico?
   e) En qué consiste el quinto postulado de Euclides y cuál es su importancia en el desarrollo de la geometría.

Análisis del cumplimiento de los objetivos:
Las actividades planteadas en este apartado permiten llegar al cumplimiento del objetivo de la unidad porque acercan al estudiante al reconocimiento a través de múltiples cuestionamientos, de la importancia del trabajo de Euclides y la geometría que desarrollo en la superficie plana además de trabajar con algunos de los elementos de dicha geometría y las relaciones entre ellos.

ACTIVIDAD 2. SUPERFICIE TERRESTRE

TEMA: POSICIÓN GEOGRÁFICA DE UN PUNTO EN LA TIERRA

OBJETIVO: Determinar los elementos necesarios para encontrar la posición geográfica de un punto en la superficie esférica.

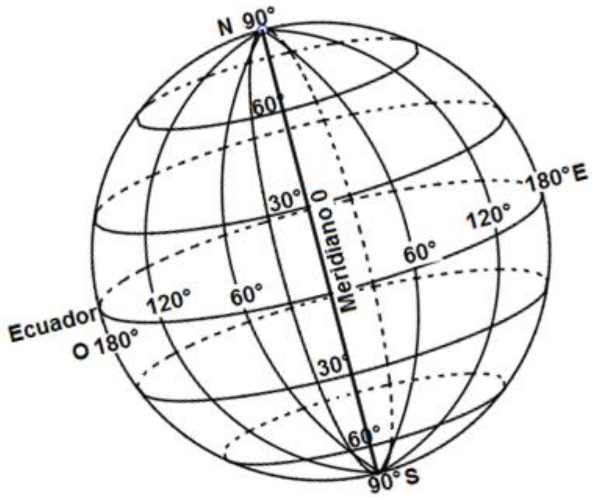
La *posición geográfica* hace referencia al sistema de coordenadas geográficas de localización que permite expresar todas las posiciones sobre la Tierra usando dos de las tres coordenadas de un sistema de coordenadas esféricas que está alineado con el eje de rotación de la Tierra. Este define dos ángulos medidos desde el centro de la Tierra: longitud y latitud.

1. Resuelva las siguientes preguntas, si es necesario consulte sobre el tema:
   a) ¿Cómo se ubica un punto en el plano cartesiano? ¿Cuántos datos son necesarios para hacerlo?
   b) ¿Cuál es la ubicación geográfica de la ciudad en la que vives?
   c) ¿Cómo se ubica geográficamente un punto en la Tierra? ¿Cuántos datos son necesarios para hacerlo? ¿hay algún punto de referencia?
   d) ¿Cuál es la ubicación geográfica de Bogotá?
   e) ¿Cuál es la antípoda o perieco de Bogotá?
   f) ¿Cuál es el anteco de Bogotá?
   g) ¿Dos personas pueden vivir en un mismo meridiano? Argumente su respuesta (realice la figura que ilustre la situación).

2. Ubique los siguientes puntos en la superficie de la esfera terrestre
   a) Latitud norte 30° Longitud este 60°
   b) Latitud sur 60° Longitud este 120°
   c) Latitud norte75° Longitud oeste 180°
   d) Latitud sur 45° Longitud oeste 20°

3. Determine las coordenadas de la antípoda o perieco y el anteco de cada uno de los puntos del ítem anterior y con un color diferente ubíquelos en la superficie esférica.

4. Consulte las coordenadas terrestres de tres ciudades del mundo y ubíquelas en la siguiente esfera terrestre.
   a) ¿Cómo se puede determinar la distancia entre dos de esas ciudades?
   b) ¿Se pueden ubicar las tres ciudades sobre un mismo paralelo o meridiano?
   c) Si cada ciudad representa un punto sobre la superficie terrestre, ¿cuántos meridianos o paralelos se pueden trazar? Realice una figura en cada caso.



Análisis del cumplimiento de los objetivos:
Las actividades diseñadas en este apartado pueden llevar al cumplimiento del objetivo de la unidad porque le permite al estudiante acercarse al trabajo con la geometría sobre la superficie esférica y algunos de sus elementos.

ACTIVIDAD 3. SUPERFICIES CONSTANTES

TEMA: SUPERFICIE PLANA, SUPERFICE ESFÉRICA Y SUPERFICIE PSEUDOESFÉRICA.

OBJETIVO: determinar algunas semejanzas y diferencias entre las tres superficies constantes.

MATERIALES: lápiz, borrador, compás, regla, cuaderno.

Durante muchos siglos se ha venido trabajando la geometría Euclidiana, pero Eugenio Beltrami (1835-1900), se da cuenta que hay tres tipos especiales de superficies, es decir, de multiplicidades con dos dimensiones:

- La primera es una superficie plana constantemente, es decir, que no se curva en ninguna parte de su extensión.
- El segundo tipo de superficie es la que se curva constantemente hacia afuera. Un ejemplo de este tipo de superficie es la superficie esférica.
- El tercer tipo corresponde a una superficie constantemente curva hacia adentro, se le llama superficie pseudoesférica. Un ejemplo de este tipo de superficie lo podemos encontrar en un instrumento musical como la trompa que va desde la embocadura hasta el pabellón, este tipo de superficie de Beltrami es como un tubo que por un extremo termina en un pabellón y por el otro no termina sino que se adelgaza cada vez más.

1. Determine a qué tipo de superficie correspondería cada elemento.

La pantalla del PC	La pasta de un libro	Un balón de futbol
El planeta Tierra	Una trompeta	El piso de la sala
Una hoja de papel	El corno	Un balín
Un hoyo negro	una pelota de tenis	La pantalla del iPhone

2. Realice en su cuaderno una figura para cada superficie constante.

3. En las figuras realizadas en el punto anterior, determine y/o establezca la relación entre los siguientes elementos (considere todos los casos posibles):
   a) Dos puntos.
   b) Tres puntos.
   c) Un punto y una recta.
   d) Dos rectas

4. Resuelva:
   a) ¿Por qué a las tres superficies trabajadas en este apartado se les denomina superficies constantes?
   b) ¿Es posible determinar puntos en los tres tipos de superficies constantes?
   c) ¿Es posible determinar rectas en las tres superficies? ¿son iguales las rectas en las tres superficies?
   d) ¿En las tres superficies se puede determinar cuándo un punto está entre otros dos?
   e) Teniendo en cuenta el trabajo realizado en las tres superficies; si dos rectas se intersecan, ¿cuántos puntos tienen en común dichas rectas?
   f) ¿Cómo se puede determinar la distancia entre dos puntos en cada superficie?
   g) ¿qué diferencias encuentra en las tres superficies constantes?

Análisis del cumplimiento de los objetivos:
Con las actividades diseñadas en este apartado se puede llegar al cumplimiento del objetivo de la unidad porque permiten que el estudiante se vaya familiarizando con las superficies que se curvan constantemente, realiza comparaciones, clasifica y argumenta las relaciones entre los elementos con los que trabajan dichas superficies.

ACTIVIDAD 4. SUPERFICIE ESFÉRICA Y PSEUDOESFÉRICA

TEMA: SUPERFICIE PLANA, SUPERFICE ESFÉRICA Y SUPERFICIE PSEUDOESFÉRICA

OBJETIVO: determinar los elementos básicos en las tres superficies constantes.

MATERIALES: una naranja, un cuchillo, plastilina, regla, lápiz, borrador y cuaderno.

En la geometría plana euclidiana los conceptos básicos son el punto, la línea recta y el plano. En la esfera, los puntos están definidos en el sentido usual y en la pseudoesfera de igual manera. Los equivalentes de las líneas no están definidos en el sentido usual de la "línea recta" sino en el sentido de "las trayectorias más cortas entre los puntos", lo cual es llamado geodésica.

Geodésica: es una línea sobre la cual se miden las distancias más cortas.

En el plano, las líneas rectas las empleamos como geodésicas; en la superficie esférica se emplean como geodésicas los círculos máximos y en la superficie pseudoesférica también se emplean las geodésicas cuya función es la misma a la señalada anteriormente. En la superficie esférica las geodésicas son los círculos máximos, así que los otros conceptos geométricos son definidos como en la geometría plana pero con las líneas rectas sustituidas por los círculos máximos.

C***írculo máximo***: es el círculo que resulta al cortar la esfera con un plano que pasa por el centro de la esfera.

Realice la figura correspondiente en cada caso:

1. Determine puntos en el plano, la superficie esférica y la superficie pseudoesférica.

2. Determine una geodésica en cada una de las tres superficies del punto anterior.

3. Determine dos geodésicas en cada una de las tres superficies constantes y resuelva las preguntas para cada superficie:
   a) Si hay una sola recta ¿en cuántas partes queda dividida la superficie?
   b) Si hay dos rectas ¿en cuántas regiones queda dividida la superficie? recuerde realizar una figura para cada caso que se presente.

4. Realice la siguiente actividad con mucho cuidado y resuelva:
   a) Tome una naranja, determine dos puntos sobre su superficie y córtela con un cuchillo de manera que dicho corte pase por los puntos determinados anteriormente y por el centro de la naranja.
   b) ¿Cómo quedo dividida la naranja?
   c) ¿Cómo es el borde del corte hecho en la naranja (la cascara)?

   Si se realiza el mismo procedimiento del apartado a), en una segunda ocasión
   d) ¿En cuántas partes queda dividida la naranja?
   e) ¿En cuántos puntos coinciden los dos cortes?

5. Realice el siguiente ejercicio en las tres superficies (el plano, la superficie esférica y la superficie pseudoesférica). Dada una recta a y un punto P no contenido en a, determine otra recta b, tal que pase por P. ¿Cuántas y cuáles son las posibles relaciones entre las rectas a y b?

6. Consulte la definición de pseudoesfera y realice en plastilina un modelo de la misma y realice con ella los mismos pasos del punto 4, defina cómo serían las geodésicas en esta superficie.

7. De acuerdo con el trabajo realizado:
   a) ¿Cuántas coordenadas son necesarias para ubicar un punto en el plano euclidiano? ¿Cuántas son necesarias en la superficie esférica? y ¿Cuántas serán necesarias en la superficie pseudoesférica?
   b) ¿Cómo se determina un punto en el plano euclidiano? ¿cómo se determina un punto en la superficie esférica? ¿cómo se podría determinar un punto en la superficie pseudoesférica?
   c) ¿Cuántos puntos se pueden determinar en cada una de las tres superficies?
   d) ¿Cuántos puntos se necesitan para determinar una recta? ¿cuántos puntos se necesitan para determinar un círculo máximo? ¿cuántos puntos se necesitan para determinar una geodésica?
   e) En el plano euclidiano ¿un punto determina una única recta? ¿sucede lo mismo con las otras dos superficies que se curvan constantemente?
   f) Dados dos puntos A y B en la superficie de la esfera ¿Cómo es las línea con la que se puede medir la menor distancia entre ellos? ¿qué nombre recibe? Resuelva esta misma pregunta para la superficie de la pseudoesfera.

g) ¿Cómo es la línea del Ecuador respecto al meridiano de Greenwich? Es decir, qué relación hay entre estas dos geodésicas.
h) Mediante el dibujo de dos rectas en cada una de las tres superficies determine como se pueden relacionar. Realice una figura para cada caso.

Análisis del cumplimiento de los objetivos:
Las consideraciones propuesta permiten dar cumplimiento al objetivo de la tercera unidad dado que cuando se trata de distancias hay que medirlas forzosamente sobre una línea que determina la naturaleza de la geometría en cuestión, es decir de las geodésicas.

ACTIVIDAD 5. POSTULADO DE EUCLIDES

TEMA: POSTULADO DE EUCLIDES

OBJETIVO: hacer uso del postulado de Euclides en la comparación de la superficie plana, la superficie esférica y la superficie pseudoesférica, determinando algunas semejanzas y diferencias.

1. Analice, resuelva y argumente:
   a) Dadas dos geodésicas *m* y *n*, muestre a partir de dibujos la o las posibles posiciones de una con respecto a la otra, tanto en el plano euclídeo como en la superficie esférica y en la superficie pseudoesférica. ¿en las tres superficies se presentan los mismos casos?
   b) ¿Es posible determinar rectas que no tengan puntos comunes en las tres superficies de curvatura constante?
   c) ¿Qué ángulo forman un meridiano terrestre y la línea terrestre ecuatorial? ¿qué ángulo pueden formar dos meridianos?
   d) ¿Hay ángulos rectos en la superficie esférica? ¿hay ángulos rectos en la superficie pseudoesférica?

POSTULADO DE EUCLIDES (enunciado en *Fundamentos de la geometría* de Hilbert)
Si * *a* es una recta;
*** *A* es un punto que no pertenece a *a*;**
entonces
*** en el plano determinado por la recta *a* y por el punto *A* existe a lo más una recta que pasa por *A* y que no corta a la recta *a*.**

Dos rectas se llaman ***paralelas***, cuando están en un plano y no se cortan.

2. Intente el trazo del enunciado del axioma de Euclides tanto para el plano euclídeo como para la superficie esférica y la superficie pseudoesférica.
   a) ¿Es posible hablar de rectas paralelas en la superficie esférica?
   b) ¿Es posible hablar de rectas paralelas en la superficie pseudoesférica?
   c) ¿Qué sucedería en la superficie plana si no hubiesen paralelas?

d) ¿Qué sucedería en la superficie plana si por un punto que no pertenezca a una recta dada pasa más de una paralela a dicha recta?
e) ¿Es posible demostrar en la superficie plana, que dado un punto y recta que no contiene a dicho punto pasa una única paralela a la recta dada?

3. Complete cada frase y argumente con una figura:
a) En la superficie ______________ existe más de una paralela a otra que pase por un punto dado.
b) En la superficie ______________ no existen paralela.
c) En la superficie ______________ existe a lo más una paralela a otra que pase por un punto dado.

Análisis del cumplimiento de los objetivos:
Con las actividades diseñadas en este apartado se puede llegar al cumplimiento del objetivo de la unidad porque al utilizar las geodésicas (y la posible posición de dos rectas) en las tres superficies constantes el estudiante se da cuenta de su importancia en el desarrollo de la geometría.

UNIDAD 2[23]

OBJETIVO:
Inducir a los estudiantes a darse cuenta de que los triángulos son intersecciones de líneas geodésicas, por lo tanto son diferentes en el plano, en la superficie esférica y en la superficie pseudoesférica.

CONTENIDOS:
1. El triángulo en la superficie plana.
2. El triángulo en la superficie esférica.
3. El triángulo en la superficie pseudoesférica.

ACTIVIDADES:

ACTIVIDAD 1. SUPERFICIE PLANA

TEMA: EL TRIÁNGULO EN EL PLANO

OBJETIVO: establecer como son los triángulos en la superficie plana y algunas de sus características.

1. Determine tres rectas en el plano que se corten dos a dos (realice la figura)
a) Al trazar la primera recta ¿en cuántas partes queda dividido el plano? ¿al trazar la segunda? ¿al trazar las tres rectas?
b) ¿Cada porcion o cara en que quedó dividido el plano esta limitada por las tres rectas?
c) La porcion del plano limitada unicamente por las tres rectas ¿qué nombre recibe?
d) ¿Qué elementos componene un triángulo?
e) ¿Cuántos ángulos rectos puede tener un triángulo en esta superficie?

[23] Como se mencionó en el apartado 1.3.4. de este trabajo, ésta unidad correspondería al cuarto periodo académico.

2. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos. Consulte:
   a) ¿Cómo los pitagoricos demostraron este enunciado?
   b) ¿Quiénes han intentado demostrar esta proposición y por qué se le ha dado tanta importancia?
   c) ¿qué relacion tiene esta proposición con el quinto postulado de Euclides?
   d) Recortando y plegando papel ¿Cómo podria uno darse cuenta de que en la superficie plana la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°?

Análisis del cumplimiento de los objetivos:
Con las actividades diseñadas en este apartado es posible dar cumplimiento al objetivo de la unidad porque es importante que el estudiante retome aprendizajes previos y los aplique en la construcción de nuevo conocimiento, específicamente al trabajar con geodésicas y triángulos en las tres superficies es relevante que trabaje sobre conceptos previos e identifique características comunes.

ACTIVIDAD 2. SUPERFICIE ESFÉRICA

TEMA: TRIÁNGULOS EN LA SUPERFICIE ESFÉRICA

OBJETIVO: determinar cómo son los triángulos en la superficie esférica y algunas de sus propiedades.

1. Determine tres circulos máximos en la superficie esférica tales que se corten dos a dos (realice la figura)
   a) ¿En cuantas partes queda dividido la superficie esférica al trazar la primera, la segunda y la tercera geodésica? ¿Qué relacion encuentra con la superficie plana?
   b) ¿Cada porcion o cara en que quedó dividida la superficie esférica esta limitada por las tres rectas?
   c) ¿Cuántos ángulos rectos puede tener un triángulo en la superficie esférica? Argumente.

   Llamaremos triángulo a una de las porciones de la superficie esférica limitada unicamente por las tres rectas, al igual que en la superficie plana. Se debe tener en cuenta que los elementos que componen yn triángulo en el plano, tambien lo hacen en la superficie esférica; es decir, vertices, lados y ángulos (aunque los lados estan conformados por las geodésocas propias de esta superficie)

2. Determine una geodésica a en la superficie esférica, y otras dos geodésicas b y c, de manera que formen cada una un ángulo recto con a.
   a) Nombre como B el punto de intersección entre a y b; C el punto de intersección entre a y c. por lo tanto los ángulos $\measuredangle B$ y $\measuredangle C$ son rectos.
   b) b y c tienen puntos en común. Argumente
   c) El $\measuredangle(b,c)$ ¿Qué valores puede tomar?
   d) Teniendo en cuenta la actividad realizada, ¿entre qué valores se encuentra las suma de los ángulos interiores de un triángulo en la superficie esférica? Argumente su respuesta.

Análisis del cumplimiento de los objetivos:
Con las actividades diseñadas en este apartado es posible dar cumplimiento al objetivo de la unidad porque con el trabajo en la superficie esférica, el estudiante se da cuenta de la importancia de las geodésicas al trazar triángulos y cómo estos triángulos son diferentes a los de la superficie plana.

ACTIVIDAD 3. SUPERFICIE PSEUDOESFÉRICA

TEMA: TRIÁNGULOS EN LA SUPERFICIE PSEUDOESFÉRICA

OBJETIVO: tratar de establecer como serían los triángulos en la superficie pseudoesférica y algunas de sus características.

1. Trace una pseudoesfera.
   a) Determine tres geodésicas tales que se corten dos a dos.
   b) ¿En cuantas partes queda dividido la superficie pseudoesférica?
   c) ¿Cada porcion o cara en que quedó dividida la superficie esférica esta limitada por las tres geodésicas?
   d) ¿En la superficie pseudoesférica, un triángulo puede tener ángulos rectos?

2. De igual manera que en la superficie plana y en la superficie esférica, llamaremos triángulo a la porcion de la superficie limitada unicamente por las tres geodésicas.
   a) ¿Qué elemntos componen un triángulo en la superficie pseudoesférica?
   b) ¿Entre qué valores se encuentra las suma de los ángulos interiores de un triángulo en la superficie pseudoesférica? Argumente su respuesta.

Hay tres tipos de líneas geodésicas que permiten desarrollar la geometría: sobre la superficie plana dado que las distancias más cortas ahí se miden sobre las rectas; la superficie esférica dado que las distancias se miden ahí sobre los círculos máximos y sobre la superficie pseudoesférica dado que ahí las distancias se miden sobre líneas geodésicas que funcionan igual a las de las rectas y a las de círculos máximos.

Dado que no hay una línea geodésica para las tres superficies se sigue que hay tres geometrías posibles. En tiempo de Euclides nada inducia a pensarlo puesto que Euclides formuló su postulado en cierta manera se adelantó a los tiempos mostrando así su talento geométrico.

Análisis del cumplimiento de los objetivos:
Con las actividades diseñadas en este apartado se puede llegar al cumplimiento del objetivo de la unidad porque el trabajo con la superficie pseudoesférica, permite que el estudiante se dé cuenta cómo son los triángulos en esta superficie y algunas de sus características además que son diferentes a los de la superficie plana y la superficie esférica.

3. Conclusiones y recomendaciones

3.1. Conclusiones

- Se realizó una propuesta didáctica en la que teniendo en cuenta los Estándares y Lineamientos del Ministerio de Educación y a partir del postulado de Arquímedes y el postulado de Euclides se hace un acercamiento más profundo a la geometría, dado el poco trabajo que se realiza respecto a la geometría y a la medición en el aula de clase particularmente en grado noveno de educación básica.

- Se logró realizar un estudio histórico, epistemológico y didáctico del postulado de Arquímedes, el tratamiento lógico que de él hace Hilbert; lo que permitió diseñar una serie de actividades con el objetivo de que el estudiante se diera cuenta de la necesidad de unificar y adoptar los sistemas de medida y se cuestione acerca del proceso y del arduo trabajo que ha requerido dicha unificación.

- Después de hacer un estudio del postulado de Euclides se evidencio de igual manera parte de la evolución de la geometría partiendo de la obra de Euclides "*Elementos*" y teniendo en cuenta una obra como la de *Fundamentos de la Geometría* de Hilbert, lo que permitió ver por qué Euclides tuvo que postular la unicidad y su relación con las geometrías no euclidianas particularmente en las superficies que se curvan constantemente como la de la esfera y la pseudoesfera.

- La propuesta se desarrolló, teniendo en cuenta los niveles de razonamiento de Van Hiele (familiarización, comparación, clasificación y argumentación), de manera que le permita al estudiante darse cuenta de la necesidad de construir su propia matemática en este caso su propia geometría dado que ésta se aplica a su entorno físico, pero es necesario seguir un trabajo con el planteamiento de actividades en las que se pueda comparar más a profundidad las relaciones entre las geometrías que se pueden construir sobre las superficies constantes.

- Con las actividades planteadas es posible alcanzar los objetivos propuestos porque le garantizan a un estudiante atento, la apropiación de parte de la geometría en su estructura mental además de permitirle darse cuenta de la importancia y el papel que desempeñan la medición, las unidades de medida, las geodésicas y los triángulos en el desarrollo tanto de la geometría como del ser humano.

- Al final de cada actividad se realizó un breve análisis o conclusión sobre la efectividad y cumplimiento del objetivo propuesto para cada unidad y que busca evidenciar el cumplimiento del objetivo general.

3.2. Recomendaciones

- Se requiere que en cada grado haya más trabajo y tiempo dedicado al componente geométrico-métrico ya que es de gran importancia en la construcción que de las matemáticas debe hacer cada individuo.

- Es necesario que el profesor conozca y trabaje con los agrupamientos de axiomas de Hilbert enunciados como reglas de procedimiento y como está indicado en el apartado 1.3.4 de la presente propuesta.

- Conocer y llevar un trabajo conjunto entre la PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN GRADO NOVENO DE BÁSICA SECUNDARIA. POSTULADOS DE ARQUÍMEDES Y DE EUCLIDES. ANTECEDENTES. CONSECUENTES y los niveles de razonamiento de Van Hiele.

- Seguir el curso de geometría ampliando su desarrollo o trabajo sobre las tres superficies constantes.

ANEXOS

Los siguientes anexos toman como base los Fundamentos de la Geometría de Hilbert, dado que para el trabajo que se quiere realizar con el postulado de Arquímedes se deben tener en cuenta los tres primeros agrupamientos de axiomas de *Fundamentos de la geometría* de Hilbert.

En los Anexos A, B y C, se encuentra una serie de actividades que permiten el trabajo con estos axiomas como reglas de procedimiento, es posible que el docente haga uso de ellos como prueba diagnóstica a fin de determinar que tanto recuerdan los alumnos de aprendizajes anteriores. Además porque se supone que los alumnos han recorrido a través de los grados 6°, 7° y 8° tales axiomas tal como se **mencionó** en el apartado 1.3.4 de este trabajo**.**

A. **Anexo:** Primer agrupamiento de axiomas

TEMA: **AXIOMAS DE ENLACE, INCIDENCIA O PERTENENCIA**

OBJETIVO: apropiarse de los axiomas de incidencia y hacer uso de ellos en la argumentación de proposiciones.

I.1. Primer axioma de incidencia, como regla de procedimiento
Dos puntos determinan a lo menos una recta

ACTIVIDAD

1. Ubique en su cuaderno de geometría un punto (una pequeña señal con el lápiz) y asígnele un nombre (una letra mayúscula). De esta manera el punto queda determinado. Realice este mismo ejercicio en una segunda y tercera ocasión.
   a) ¿Cuántos puntos se pueden determinar?
   b) Hay una recta que pasa por el punto *A*, trácela y llámela *a*. ¿se puede hacer pasar otras rectas por ese punto?
   c) ¿Con un solo punto se determina una recta?

I.2. Segundo axioma de incidencia, como regla de procedimiento
Dos puntos determinan a lo más una recta.

ACTIVIDAD

2. Teniendo en cuenta que solo se puede trabajar con los puntos que se han determinado; tome dos de los puntos *A* y *B* determinados y con una regla trace una línea recta que pase por dichos puntos y nómbrela como *a*. De esta manera se pueden determinar rectas. Tenga en cuenta que la recta *a* determinada por los puntos *A* y *B* es la misma recta que la que determinan los puntos *B* y *A*
   a) ¿Siempre es posible trazar una recta a partir de dos puntos dados?
   b) ¿Cuántas rectas se pueden trazar a partir de dos puntos dados?

c) ¿Con menos de dos puntos se puede determinar una recta?
d) Tome únicamente el punto *A*, hay una recta que pasa por *A*, trácela. ¿puede hacer pasar otras rectas por el punto *A*?, si es posible, trácelas ¿Dado un punto, se puede determinar una única recta?
e) Dada la recta *a* determinada por los puntos *A* y *B* ¿Es posible determinar puntos ella?

I.3. Tercer axioma de incidencia, como regla de procedimiento

Hay a lo menos dos puntos sobre una línea recta. Hay a lo menos tres puntos no en línea recta.

ACTIVIDAD

3. Determine otro punto C sobre la recta *a*.
a) ¿De cuántas maneras se puede ubicar el punto C?
b) Los puntos, *A*, *B*, y *C* ¿determinan la misma recta?
c) ¿De cuántas maneras se puede decir que queda determinada la recta *a*?
d) ¿Cuántos puntos son necesarios para determinar una recta?
e) Considere 4 puntos *A*, *B*, *C* y *D* determinados sobre la recta *a*. ¿De cuántas maneras queda determinada la recta *a*?
f) ¿Los puntos *A*, *B*, *C* y *D* del ejercicio anterior, pueden determinar rectas diferentes?
g) ¿Cuántos puntos se pueden determinar en una recta?

RELACIONES ENTRE PUNTO Y RECTA

4. Determine una recta *a* y un punto en ella C.
a) ¿Cuál es el mínimo de puntos que debo determinar para construir dos rectas? Realice el o las construcciones correspondientes a cada caso.
b) Dados tres puntos que no estén en la misma recta ¿Cuántas rectas se pueden determinar?
c) Dadas dos rectas ¿Cuáles pueden ser las posiciones que ocupe una respecto a la otra? ¿Cuántos puntos comunes pueden tener?
d) Si dos rectas se intersecan ¿de cuántas maneras se pueden intersecar?
e) Dados cuatro puntos que no estén en la misma recta ¿Cuántas rectas se pueden trazar? ¿de cuántas maneras se pueden ubicar dichas rectas? Mencione los diferentes casos que se presentan.

I.4. Cuarto axioma de incidencia, como regla de procedimiento

Tres puntos no en línea recta determinan a lo menos un plano. Hay a lo menos un punto en cada plano.

I.5. Quinto axioma de incidencia, como regla de procedimiento

Tres puntos no en línea recta determinan a lo más un plano.

I.6. Sexto axioma de incidencia, como regla de procedimiento

Si dos puntos de una recta pertenecen a un plano, entonces todos los puntos de la recta pertenecen al plano.

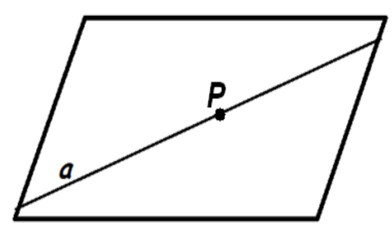
I.7. Séptimo axioma de incidencia, como regla de procedimiento
Si dos planos tienen un punto en común, entonces tienen a lo menos otro punto en común.

I.8. Octavo axioma de incidencia, como regla de procedimiento
Hay a lo menos cuatro puntos no situados en el mismo plano.

ACTIVIDAD

5. Determine tres puntos *A*, *B* y *C* que no estén en línea recta, estos corresponden a un plano, nómbrelo como α.
   a) ¿Siempre es posible determinar un plano a partir de tres puntos dados? ¿En qué caso no es posible?
   b) ¿Cuántos planos se pueden determinar a partir de tres puntos?
   c) ¿Con menos de tres puntos se puede determinar un único plano?
   d) ¿Una recta y un punto que no esté en ella pueden determinar un plano? Argumente
   e) ¿Cuántos puntos se pueden determinar en un plano?
   f) ¿Cuántas rectas se pueden determinar en un plano?

6. En toda figura geométrica se cumple que $V - A + C = 1$ (Vértices, Aristas y Caras), por ejemplo:
   *En una recta. Sea una recta *a* y un punto en ella *P* sobre el plano, entonces tenemos:
   V: punto *P*. $V = 1$.
   A: cada una de las partes en las que quedó dividida la recta *a* a partir del punto *P*. $A = 2$.
   C: cada una de las porciones de plano en las que quedó dividido el mismo por la recta *a*. $C = 2$.



   Se cumple que:
   $V - A + C = 1$ $\qquad 1 - 2 + 2 = 1$
   a) Compruebe esta relación para:
   *Dos rectas (que se intersecan o que no se intersecan, ¿Cuántos casos son?)
   *Tres rectas (que se intersecan o que no se intersecan, ¿Cuántos casos son?)

7. Determine tres puntos *A*, *B*, *C*, que estén en el mismo plano pero no en la misma recta.
   a) ¿A lo menos cuántas rectas quedan determinadas? ¿A lo más cuántas rectas se pueden construir?
   b) Teniendo en cuenta las rectas que se pueden determinar a partir de tres puntos ¿Cómo es la relación de una recta respecto a las otras dos? Realice el trazo correspondiente a cada caso
      I. No tienen puntos comunes.
      II. Tienen puntos comunes.
   c) ¿Cuántos vértices, aristas y caras resultan en cada caso?

8. A partir de uno de los casos del punto anterior. Tres rectas que se intersecan dos a dos determinan una porción del plano limitada únicamente por dichas rectas.
   a) ¿En todos los casos en los que tres rectas que se intersecan dos a dos, se determina una porción del plano?

Esta cara o porción del plano recibe el nombre de **Triángulo** y es el resultado de tener tres rectas que se intersecan dos a dos.

   b) Verifique si se cumple la relación $V - A + C = 1$ en la figura.
   c) ¿Con dos rectas se puede determinar una porción del plano?
   d) Dadas cuatro rectas ¿Cuáles son sus posibles posiciones?
   e) Encuentre otra manera de encerrar una región, cara o porción del plano.

B. **Anexo:** Segundo agrupamiento de axiomas

TEMA: **AXIOMAS DE ORDENACION**

OBJETIVO: apropiarse de los axiomas de ordenación y hacer uso de ellos en la argumentación de proposiciones con la relación *estar entre*.

II.1. Primer axioma de ordenación, como regla de procedimiento
Si un punto *B* está situado entre un punto *A* y un punto *C*, entonces *A*, *B*, *C* son tres puntos distintos de una recta. *B* está situado también entre *C* y *A*.

II.2. Segundo axioma de ordenación, como regla de procedimiento
Si hay dos puntos determinados, *A* y *C*, entonces es posible determinar al menos un punto *B* entre *A* y *C*.

II.3. Tercer axioma de ordenación, como regla de procedimiento
De tres puntos sobre una recta, hay a lo más uno entre los otros dos.

Definición: teniendo en cuenta los puntos *A* y *B* sobre la recta *a*; damos el nombre de *segmento* al sistema de ambos puntos *A* y *B*, lo designamos con *AB* o con *BA*. Los puntos entre *A* y *B* se llaman puntos del segmento *AB* o también situados al *interior* del segmento *AB*; los puntos *A*, *B* se llaman *extremos* del segmento *AB*. El resto de los puntos de la recta *a* se dice situados al *exterior* del segmento *AB*.

ACTIVIDAD

1. Determine una recta *a* a partir de los puntos *A* y *B*.
   a) ¿De cuántas maneras se puede colocar otro punto *C* de manera que esté *entre A* y *B*?
   b) Dados tres puntos *A*, *B* y *C* sobre la recta *a*, ¿A lo menos cuántos puntos pueden *estar entre*? ¿A lo más cuántos puntos pueden *estar entre*? ¿De cuántas maneras se puede colocar otro punto D de manera que esté *entre AB*, *BC* y *AC*?
   c) ¿Es posible añadir más puntos? ¿cuáles están *entre*?

2. Determine cuatro puntos *A*, *B*, *C*, *D* sobre la misma recta.
   a) ¿Cuáles puntos son interiores, exteriores o extremos del segmento *AD*?
   b) Al comparar los segmentos *AC* y *AB* ¿tienen puntos interiores comunes?
   c) ¿De cuántas maneras se puede determinar la recta?

Definición: decimos que una recta está *orientada de izquierda a derecha* si el punto *A* está antes del punto *B* y del punto *C*. Recíprocamente la recta está *orientada de derecha a izquierda* si es correcto decir que el punto *C* está antes del punto *A* y del punto *B*.
De igual manera, la recta *a* divide al plano α en dos regiones. Todo punto que no pertenezca a la recta *a*, pertenece a una de las dos regiones del plano. El segmento que une dos puntos *AB* de la misma región no corta a la recta *a*. Recíprocamente, El segmento que une dos puntos *AC* de distinta región corta a la recta *a*.

II.4. Cuarto axioma de ordenación, como regla de procedimiento
Si * *A, B, C* son tres puntos no colíneales;
*** *a* es una recta del plano *ABC* a la que no pertenece ni *A*, ni *B*, ni *C*;**
*** La recta *a* pasa por un punto de *AB*;**
Entonces
*** O la recta *a* pasa también por un punto de *AC* o por un punto de *BC*.**
Gráficamente: en el plano si una recta entra a un triángulo entonces vuelve a salir de él.

ACTIVIDAD

1. Refiera a una figura el enunciado II.4.
2. ¿Qué sucede si la recta *a* corta el segmento *AC*? ¿Qué sucede si la recta *a* corta el segmento *BC*?
3. ¿Es posible que una recta que entre al interior de un triángulo no salga de él? Argumente su respuesta.
4. Sean tres puntos *M*, *N* y *P* determinados en una recta *l*, ¿Qué significa que *M* y *P* estén a distinto lado sobre la recta *l*?

Dos rectas que tienen un punto común determinan cuatro regiones, cada una de estas regiones se puede llamar *ángulo*. El punto común se llama vértice de los ángulos y las semirrectas lados del ángulo. Se dicen puntos *interiores* al ángulo a aquellos puntos que se encuentran en una de las regiones limitada por dos semirrectas de origen común.

Definición: sea α un plano cualquiera y *h*, *k* dos semirrectas distintas que parten de un punto *O* de α y que pertenecen a rectas distintas. Al sistema de estas dos semirrectas lo llamamos un *ángulo* y lo designamos $\measuredangle (h, k)$ y también $\measuredangle (k, h)$.

C. **Anexo:** Tercer agrupamiento de axiomas

TEMA: **AXIOMAS DE COINCIDENCIA**

OBJETIVO: apropiarse de los axiomas de coincidencia y hacer uso de ellos en la argumentación de proposiciones.

III.1. Primer axioma de coincidencia, como regla de procedimiento
Existencia del transporte unívoco de segmentos.
Si * *A*, *B* son dos puntos determinados sobre la recta *a*,
*** *A’* es otro punto determinado sobre una recta a o de otra recta *a’***
Entonces
*** Sobre uno de los lados de *a’*, determinados por *A’*, hay un único punto *B’* tal que los segmentos *AB* y *A’B’* son congruentes o iguales. Se escribe *AB* ≡ *A’B’***

ACTIVIDAD

1. Refiera a una figura el enunciado III.1.
2. Dese cuenta de que hay dos direcciones posibles para el punto *B’*. muéstrelo con una figura.

Los datos necesarios para el enunciado anterior son:

- La recta *a*, sobre ella los puntos *A*, *B*; por lo tanto el segmento *AB* determinado sobre la recta *a*.
- Una recta *a’* y sobre ella el punto *A’*.

<u>*Tener en cuenta*</u>:

3. La conclusión del enunciado no es que se puede determinar el segmento *A’B’*. ¿Por qué?
4. ¿Hay alguna condición para determinar el punto *A’*? si la hay ¿Cuál es?
5. Esta primera regla de procedimiento permite trasportar segmentos. Muéstrelo con una figura.
6. ¿Un segmento puede coincidir consigo mismo? ¿Por qué?

III.2. Segundo axioma de coincidencia, como regla de procedimiento
Si dos segmentos son congruentes con un tercero, entonces, son congruentes entre sí. Todo segmento es congruente consigo mismo.

Si * Los segmentos *A'B'* y A''B'' coinciden con un mismo segmento *AB*,
Entonces
*** Los segmentos *A'B'* y *A''B''* coinciden. Se escribe *A'B'* ≡ *A''B''***

RESPONDER AHORA A LA CUESTION 6

ACTIVIDAD

1. Según los datos de la regla de procedimiento, puede escribirse:
   A'B' ≡ *AB*   *A''B''* ≡ *AB*
   ¿Cómo se podría escribir la conclusión?
2. ¿Da lo mismo decir: si dos segmentos coinciden con un tercero, entonces, coinciden entre sí?

III.3. Tercer axioma de coincidencia, como regla de procedimiento
Adicionabilidad de segmentos
Si **AB* y *BC* son dos segmentos sin puntos comunes de una recta *a*,
****A'B'* y *B'C'* son dos segmentos sin puntos comunes de una recta *a* o de una recta *a'*;**
*** *AB* ≡ *A'B'***
*** *BC* ≡ *B'C'***
Entonces
*** *AC* ≡ *A'C'***

ACTIVIDAD

1. ¿Cuáles son los datos necesarios para formular el enunciado III.3? ¿Cuál es el consecuente o la conclusión?
2. Realice un trazo del enunciado sin omitir detalles.
3. Teniendo en cuenta esta regla de procedimiento, es posible adicionar segmentos ¿Por qué?

III.4. Cuarto axioma de coincidencia, como regla de procedimiento
Dados
*** *(h, k)* un ángulo en un plano;**
*** *a'* una recta en el mismo o en distinto plano;**
*** Una de las regiones dos regiones determinadas por a';**
*** *h'* una de las semirrectas de *a'*;**
entonces,
*** En el segundo plano hay una semirrecta *k'* tal que el ángulo *(h, k)* es congruente con el ángulo *(h', k')*.**
*** Todos los puntos interiores al ángulo *(h', k')* están situados en la región dada de *a'*. Se escribe ∡ *(h, k)* ≡ ∡ *(h', k')*. Todo ángulo es congruente consigo mismo.**
Brevemente: todo ángulo puede ser transportado de manera unívocamente determinada, a un plano dado, a una región dada, con un lado dado.

III.5. Quinto axioma de coincidencia, como regla de procedimiento
Si * *ABC, A'B'C'*, son triángulos;
****AB*≡*A'B'*;**

***$AC \equiv A'C'$;**
*** $\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'C'$;**
entonces * $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C'$;
***$\measuredangle ACB \equiv \measuredangle A'C'B'$.**

ACTIVIDAD

4. ¿Cuáles son los datos necesarios para formular cada enunciado? ¿Cuál es el consecuente o la conclusión?
5. Realice un trazo del enunciado del axioma cuatro sin omitir detalles.
6. ¿Da lo mismo decir: si dos ángulos coinciden con un tercero, entonces, coinciden entre sí?
7. Dese cuenta de que hay dos regiones determinadas por *a'*. muéstrelo con otra figura.
8. Realice un trazo del enunciado del quinto axioma de coincidencia sin omitir detalles.

Bibliografía

[1] ALCALDÍA MAYOR DE BOGOTÁ. Secretaria de educación (2007). *Colegios públicos de excelencia para Bogotá. Orientaciones curriculares para el campo del Pensamiento Matemático*. Bogotá: Serie cuadernos de currículo.

[2] ALSINA, C., BURGUÉS, C. & FORTUNY, J. (1995). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Tercera reimpresión. Madrid: Ed. Sintesis S.A.

[3] CAMPOS, A. (2006). *Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática. Lógica y geometría griegas.* Vol I. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

[4] CAMPOS, A. (2007) *Huellas en los Encuentros de Geometría y Aritmética*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

[5] CAMPOS, A. (2008) *Introducción a la historia y a la filosofía de las matemáticas. Hacia la formalización en Hilbert y en Bourbaki*. Vol II. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

[6] CAMPOS, A. (2011) *Pensamiento geométrico*. Notas de clase. Diversas versiones no publicadas. Bogotá.

[7] CASARES, C. (2009, junio). Los sistemas de unidades y el Sistema Internacional; Renovador esfuerzo internacional para promover el uso de las unidades métricas. *Petrotecnia (revista oficial del Instituto Argentino del Petróleo y del Gas IAPG)*. Recuperado de http://www.petrotecnia.com.ar/junio09/Sistema.pdf

[8] GÓMEZ, M. (2011) *Pensamiento Geométrico y Métrico en las Pruebas Nacionales* (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

[9] INSTITUTO COLOMBIANO DE NORMAS TÉCNICAS Y CERTIFICACION. (2004). Norma técnica colombiana NTC 1000. Metrología. Sistema internacional de unidades. Quinta actualización. Bogotá D.C. ICONTEC. Recuperado de http://metrologia1.wikispaces.com/file/view/NTC1000.pdf

[10] KLINE, M. (1992) *Matemáticas para los estudiantes de humanidades*. México: Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. Fondo de Cultura Económica.

[11] MATEMOLIVARES. (2011, diciembre, 13). *La increíble historia del nacimiento del metro*. Recuperado de http://matemolivares.blogia.com/2011/121302-la-increible-historia-del-nacimiento-del-metro..php

[12] METAS & METROLOGOS ASOCIADOS. (2006, febrero). Historia del sistema internacional de unidades (SI). *La Guia MetAs*, año 06(02), 10. Recuperado de http://www.metas.com.mx/guiametas/la-guia-metas-06-02-historia-del-si.pdf

[13] MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL (1998). *Matemáticas. Lineamientos Curriculares*. Bogotá: MEN.

[14] MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL (2002). *Matemáticas. Estándares Básicos de Competencias*. Bogotá: MEN.

[15] PRIETO, E. (S.F.). Breve historia de la metrología. Centro Español de Metrología. Recuperado de http://www.cem.es/sites/default/files/historia.pdf

[16] XATAKA CIENCIA, la ciencia de forma sencilla. (2008, abril 21). *El nacimiento del metro*. Recuperado de http://www.xatakaciencia.com/sabias-que/el-nacimiento-del-metro

[17] Anónimo. (S.F.) Matemática incaica. *Wikipedia* [versión electrónica]. Recuperado de http://es.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1tica_incaica

[18] Anónimo. (S.F.) Coordenadas geográficas. *Wikipedia* [versión electrónica]. Recuperado de http://es.wikipedia.org/wiki/Coordenadas_geogr%C3%A1ficas