



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
OBSERVATORIO ASTRONÓMICO NACIONAL

TESIS DE MAESTRÍA

**Implicaciones Cosmológicas del Colapso
Gravitacional en Teorías de Gravedad
Modificada $f(R)$**

Autor:
César Daniel PERALTA GONZÁLEZ

Director:
Leonardo CASTAÑEDA COLORADO

Bogotá, Colombia
16 de octubre de 2014



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
OBSERVATORIO ASTRONÓMICO NACIONAL

TESIS DE MAESTRÍA

Implicaciones Cosmológicas del Colapso Gravitacional en Teorías de Gravedad Modificada $f(R)$

Autor:

César Daniel PERALTA GONZÁLEZ ¹

Director:

Leonardo CASTAÑEDA COLORADO ¹

¹Grupo Gravitación y Cosmología - Universidad Nacional de Colombia.

*Tesis para obtener el diploma de
la Universidad Nacional de Colombia
en Maestría en Ciencias: Astronomía.*

Bogotá, Colombia
16 de octubre de 2014

A mis padres

*“Con paciencia esperé que el Señor me ayudara, y él se fijó en mí y oyó mi clamor.
Me sacó del foso de desesperación, del lodo y del fango.
Puso mis pies sobre suelo firme y a medida que yo caminaba, me estabilizó.
Me dio un canto nuevo para entonar, un himno de alabanza a nuestro Dios.
Muchos verán lo que él hizo y quedarán asombrados;
pondrán su confianza en el Señor.”*

Salmos 40: 1 - 3 (NTV)

Agradecimientos

Al Dios vivo, por ser fiel en lo que me ha concedido: su gracia y su misericordia nuevas cada mañana.

A toda mi familia, por acompañarme y brindarme su apoyo en todo tiempo .

Al profesor Leonardo Castañeda, la labor de maestro, amigo sincero e incluso de padre protector son virtudes difícil de encontrar actualmente. Gracias por enseñar y compartir su experiencia científica en todo este tiempo, por la paciencia y la instrucción constantes. No sólo crecí en la ciencia sino en humildad.

Al observatorio astronómico nacional, a todos los profesores que participaron en este proceso, especialmente a su secretaria Islena Bonilla quien, sin falta alguna, nos ha colaborado en todas nuestras diligencias requeridas. Gracias por su amabilidad, gentileza, calidez, atención, por tener una cara amable en todo tiempo y por su labor impecable en el observatorio.


A mis compañeros, Miller Vargas, Jorge Farieta, Javier Hortúa, Daniel Molano, Fernando Vélez, William Almonacid, Mónica Rincón, Luz Ángela García, Carlos Ordúz, Alejandro Guarnizo, Roger Hurtado y Diego Cáceres, sin palabras por el respeto que les debo y se merecen. Grandes científicos.

A mis amigos, Saíd, Dimelsa, Jesús, Maher, Zulay, Julio, Luz Andrea, Andrea, Edwin Samir, Gorety y Wendy que maravilloso es contar con ellos siempre.

A Jenny, por acompañarme y darme una nueva esperanza.

Bogotá, Octubre 16 de 2014.

Acta de Sustentación


UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
AREA CURRICULAR DE ASTRONOMÍA
MAESTRÍA EN CIENCIAS ASTRONOMÍA

ACTA DE SUSTENTACION DE TESIS N° 40

TÍTULO DE LA TESIS: "IMPLICACIONES COSMOLÓGICAS DEL COLAPSO GRAVITACIONAL EN TEORÍAS DE GRAVEDAD MODIFICADA F (R)"

ESTUDIANTE: **CESAR DANIEL PERALTA GONZÁLEZ** C.C. 92.545.294

DIRECTOR: **LEONARDO CASTAÑEDA COLORADO** – Observatorio Astronómico Universidad Nacional de Colombia

CODIRECTOR:

JURADOS:

- **EDUARDO ALEXIS LARRAÑAGA RUBIO** – Docente Observatorio Astronómico Nacional, Universidad Nacional de Colombia.
- **JOSE ROBEL ARENAS SALAZAR** – Docente Observatorio Astronómico Nacional, Universidad Nacional de Colombia.

COORDINADOR: **MARIO ARMANDO HIGUERA GARZÓN**

FECHA: 02 de Octubre de 2014

HORA: 2:00 p.m.

LUGAR: Salón 116 – Observatorio Astronómico Nacional – Universidad Nacional de Colombia.


CALIFICACIÓN: Después de analizar el trabajo escrito y participar en la sesión de sustentación, en nuestra calidad de Jurado Calificador hemos decidido otorgar a esta tesis la calificación:

APROBADO REPROBADO

Por unanimidad recomendamos otorgar distinción


MERITORIA* LAUREADA* NINGUNA


*Véase formato anexo.


UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA


OBSERVACIONES

JURADO CALIFICADOR


EDUARDO ALEXIS LARRAÑAGA RUBIO
C.C. 79.987.143


JOSE ROBEL ARENAS SALAZAR
C.C. 19.398.744

El Coordinador de la sesión de la sustentación, representante del Comité Asesor del Programa, da fe del cumplimiento de lo estipulado en el Numeral b del Artículo 21 del Acuerdo 033 de 2008 del CSU.


MARIO ARMANDO HIGUERA GARZÓN
C.C. 15.418.191

Índice general

Introducción	1
1 Universo de FLRW con Gravedad de Einstein y Fluido Perfecto	3
1.1 Elementos de Relatividad General	3
1.2 Conclusiones	6
2 Perturbaciones Cosmológicas	7
2.1 Perturbaciones a la Métrica	8
2.1.1 Componentes de $h^{\mu\nu}$	8
2.1.2 Componentes de la Conexión Métrica Perturbada	9
2.2 Tensor de Ricci Perturbado	10
2.3 Ecuaciones de Campo de Einstein Perturbadas	10
2.3.1 Componentes de la Ecuación de Einstein Perturbada	11
2.4 Ecuación de Continuidad	12
2.4.1 Componentes Perturbadas de la Ecuación de Continuidad	12
2.5 Conclusiones	13
3 Ecuaciones de Campo de Einstein con Gauge de Newton Conforme	14
3.1 Perturbaciones en la Métrica	14
3.2 Componentes de la Conexión Métrica Perturbada	15
3.3 Componentes del Tensor de Ricci Perturbado	15
3.4 Escalar de Ricci Perturbado	15
3.5 Componentes del Tensor de Einstein Perturbado	16
3.6 Componentes del Tensor Energía-Momento Perturbado Para un Modelo de Polvo	16
3.7 Ecuación de Campo Perturbada y Modelo de Polvo	17
3.8 Conclusiones	19
4 Colapso Gravitacional Esférico con Gravedad de Einstein	20
4.1 Modelo de una Región Sobredensa Esféricamente Simétrica	20
4.2 Evolución de la Densidad de Contraste	24
4.3 Perfil de Densidad de Contraste	26
4.4 Proceso de Virialización	30
4.5 Descripción Métrica de una Perturbación en Relatividad General	34
4.5.1 Solución Analítica Propuesta	40

4.6	Conclusiones	43
5	Ecuaciones de Campo en Teorías de Gravedad Modificada $f(R)$	44
5.1	Acción de Hilbert-Einstein en $f(R)$	44
5.2	Evaluación de los Términos de Frontera en el Formalismo Métrico $f(R)$	48
5.3	Conclusiones	50
6	Simetría Esférica en Gravedad Modificada $f(R)$	51
6.1	Escalar de Ricci en Simetría Esférica	52
6.2	Métrica con Simetría Esférica en Gravedad $f(R)$.	55
6.3	Soluciones con Escalar de Ricci Constante	56
6.4	Soluciones con $R = R(r)$	61
6.5	Conclusiones	62
7	Universo de FLRW con Gravedad $f(R)$ y Fluido Perfecto	63
7.1	Derivación de la Ecuación de Friedmann y Raychaudhuri en $f(R)$	63
7.2	Ecuación de Continuidad	67
7.3	Conclusiones	67
8	Ecuaciones de Campo Perturbadas en Gravedad $f(R)$	68
8.1	Derivación de la Ecuación Tipo Poisson	68
8.2	Conclusiones	71
A	Perturbaciones Métricas con Gauge de Newton Conforme	74
A.1	Componentes de la Conexión Métrica	74
B	Evaluación del término $g^{\alpha\beta}(\delta\Gamma_{\beta\alpha}^{\sigma}) - g^{\alpha\sigma}(\delta\Gamma_{\alpha\gamma}^{\gamma})$	81
C	Traza del Símbolo de Christoffel $\Gamma_{\sigma\kappa}^{\kappa}$	83
D	Soluciones con Escalar de Ricci Constante Definiendo la Signatura Como $(+, -, -, -)$	85
E	Ecuación Tipo Poisson sin la Aproximación Cuasi-Estática $f_R \ll 1$	90
	Bibliografía	92

Índice de figuras

2.1	Radiación Cosmica de Fondo de Microondas.	7
4.1	Evolución del Perfil de Densidad de masa	30
4.2	Interpretación Geométrica del Modelo LTB	38

Resumen

TÍTULO: Implicaciones Cosmológicas del Colapso Gravitacional en Teorías de Gravedad Modificada $f(R)$ ¹

AUTOR: César Daniel Peralta González²

Haremos una comparación entre la dinámica del colapso gravitacional esférico para un universo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) hasta primer orden en las perturbaciones en el contexto de relatividad general con el resultado correspondiente obtenido para el colapso gravitacional en el marco de la teoría de gravedad modificada $f(R)$.

Este trabajo tiene como objetivo la obtención de un modelo analítico que dé explicación a las fuentes de las estructuras a grandes escalas en el universo presentando una aproximación del modelo de colapso gravitacional esférico dentro del marco de las teorías de gravedad modificada $f(R)$.

Palabras clave: Colapso Gravitacional, Relatividad General, Teorías de Gravedad Modificada $f(R)$, Aproximación cuasi-estática.

¹ Tesis de Maestría

² Observatorio Astronómico Nacional. Director Leonardo CASTAÑEDA COLORADO

Abstract

TITLE: Cosmological Implications of Gravitational Collapse in Modified Gravity Theories $f(R)$ ¹

AUTOR: César Daniel Peralta González²

We will make a comparison between the dynamics of spherical gravitational collapse for a perturbed FLRW universe to first order in the context of general relativity, with the corresponding results obtained for the gravitational collapse under theories of modified gravity $f(R)$.

This work is aimed at obtaining an analytical model of explanation a source of large scale structures in the universe presenting an approximation of model spherical gravitational collapse under theories of modified gravity $f(R)$.

Key words: Gravitational Collapse, General Relativity, Modified Gravity Theory $f(R)$, Cuasi-Static Approximation.

¹ Master Thesis

² Observatorio Astronómico Nacional. Director: Leonardo CASTAÑEDA COLORADO

Introducción

La teoría de la relatividad general de Einstein se constituye como el paradigma científico más importante en el ámbito de la descripción gravitacional por sus aportes conceptuales, soportes experimentales de alta precisión en los diferentes test de evaluación que la teoría misma ha promovido y, recientemente, resultados en el ámbito de la simulación computacional que nos presenta un panorama virtual casi indistinguible al ojo humano de las observaciones más recientes del universo. Al mismo tiempo es, junto con la mecánica cuántica, la teoría más exacta jamás antes estudiada en toda la historia de la ciencia. De igual modo presenta una descripción coherente del espacio, tiempo, gravedad y materia a un nivel macroscópico. Rompe el paradigma Newtoniano en las que presenta al espacio y al tiempo como cantidades absolutas y las expone como cantidades que hacen parte de la dinámica misma del universo junto con la distribución de materia y energía. Evidentemente el primer impacto de esta teoría sucede en cosmología dado que las ideas fundamentales sobre las percepciones del universo se iban abriendo a nuevas posibilidades de exploración, medición y modelamiento. Esto motivó al matemático Alexander Friedmann [1, 2], en 1922, y al astrofísico Georges Lemaître [3], en 1927, a utilizar la teoría de la relatividad para demostrar que el universo estaba en movimiento constante y proponer junto con las observaciones en 1929, del astrónomo estadounidense Edwin Hubble [4] la teoría del Big Bang [5]. Sin embargo, desde su mismo inicio, Einstein se preguntó si ésta era la teoría definitiva capaz de describir las interacciones gravitacionales. Desde entonces comenzó la carrera de verificar y testear la relatividad general. En las últimas tres décadas se empezaron a mostrar fallas fundamentales de la teoría en lo que respecta a la descripción de los problemas cosmológicos (Problema de planitud, monopolos magnéticos, paredes de dominio, horizonte) mediante el modelo de Big Bang, para lo cual se derivó un modelo que resuelve estos problemas en un escenario cósmico llamado inflación [6], y la incapacidad de dar una descripción cuántica de la gravedad. Estas razones han dado paso a varias propuestas teóricas para conseguir modelos que puedan reproducir las interacciones gravitacionales en estos regímenes extremos. Una de las más útiles presentadas son las teorías de gravedad extendidas [7, 8, 9], las cuales están basadas en las correcciones y ampliaciones a la teoría de Einstein. Dentro de estas teorías alternativas, se encuentran las que permiten que el Lagrangiano dependa de una familia de diferentes funciones del escalar de Ricci, conocidas como teorías de gravedad modificada $f(R)$ [10, 11].

Se encuentran en la literatura varias motivaciones para modificar la relatividad general y queremos presentar a continuación tres de ellas [12]. La primera es incorporar completamente el principio de Mach en la teoría. Einstein sólo pudo introducir una de las ideas de Mach y a pesar de ello, esta idea admite una solución anti-Machiana, el universo de Gödel [13]. De acuerdo con el principio de Mach, el marco de referencia inercial local está determinado por el movimiento promedio de los objetos astronómicos distantes [14]. Esta característica implica que el acople gravitacional en un punto del espacio-tiempo no es absoluta, sino que está determinada por la materia circundante y, así, se convierte en una función

de la ubicación en el espacio-tiempo, en un campo escalar, es decir, la constante gravitacional cambia de acuerdo a la época en la que se encuentre el universo. La teoría de Brans-Dicke fue la primera en plasmar completamente una alternativa a la relatividad general de Einstein dentro del marco de teorías de gravedad alternativas. Consiguio la variación del acople gravitacional acoplado un campo escalar no mínimamente a la geometría consiguiendo una implementación más adecuada del principio de Mach que en relatividad general [15].

En segundo lugar tenemos, que las teorías de gravedad extendidas exhiben naturalmente un comportamiento inflacionario capaz de sobrellevar las fallas del modelo de Big Bang basado en relatividad general [16]. Se ha demostrado que, por medio de transformaciones conformes, términos de alto orden en la curvatura y términos acoplados no mínimamente siempre corresponden a gravedad de Einstein más un campo escalar mínimamente acoplado a la curvatura. De esta manera, se puede mostrar que gravedad $f(R)$ es equivalente no sólo a una teoría tensor-escalar sino también a una teoría de Einstein acoplada a un fluido ideal propiedad que es útil en escenarios inflacionarios [17].

En tercer lugar, el diagrama de Hubble de supernovas tipo Ia, mostraba evidencia que el universo está en una fase de expansión acelerada actualmente [18]. Los modelos que buscan explicar este fenómeno no se hicieron esperar. La explicación más simple, que mejor se ha ajustado a los datos, es el de la constante cosmológica Λ . Las observaciones sugieren que existe una especie de fluido desconocido de presión negativa, en la densidad de materia, que domina todo el universo (en un 68% de acuerdo a su medición más reciente [19]) conocida como energía oscura a la cual se le asocia la expansión acelerada. Sin embargo, el modelo de constante cosmológica falla al explicar por qué el valor inferido es pequeño en comparación con el valor típico predicho por la densidad de energía de vacío en el modelo estándar de partículas elementales (en 120 órdenes de magnitud por debajo) lo cual es una catástrofe para la teoría. Una forma de aproximarnos a este problema es asumir que la aceleración no está asociada directamente al fluido desconocido sino que es una acción neta de la dinámica del espacio-tiempo. Desde este punto de vista, se intenta modificar las ecuaciones de Einstein desde su geometría para intentar ajustar los datos reportados sin necesidad de incluir fluidos exóticos en el modelo, es decir, sólo con materia estándar.

En el presente trabajo se estudia el colapso gravitacional en el marco de la teoría de gravedad modificada $f(R)$ [20]. Este trabajo se divide principalmente en cinco partes. Inicialmente, con los elementos proporcionados por la relatividad general, se estudian las perturbaciones métricas de primer orden de la teoría usando un modelo de universo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), obteniéndose así una ecuación tipo Poisson, la cual gobierna la dinámica del perfil de densidad perturbado. En segundo lugar, se estudia el colapso gravitacional esférico para un modelo de una región sobredensa, y se propone una solución analítica para un perfil de densidad, usando una descripción métrica tipo Lemaître-Tolmann-Bondi (LTB) [21]. En tercer lugar, se muestra rigurosamente la obtención de las ecuaciones de campo generalizadas en $f(R)$ y sus respectivas ecuaciones dinámicas modificadas. En cuarto lugar, se presenta un análisis de las ecuaciones de campo generalizadas en $f(R)$ para simetría esférica sin considerar torsión. Finalmente, llevaremos la formulación de perturbaciones de primer orden para obtener la ecuación tipo Poisson correspondiente en el marco de la teoría de gravedad modificada $f(R)$.

Universo de FLRW con Gravedad de Einstein y Fluido Perfecto

En este capítulo se muestran las herramientas matemáticas principales usadas en el marco de la relatividad general de Einstein para describir la dinámica del espacio-tiempo de un universo cuatridimensional con contenido de materia sin constante cosmológica. La relatividad general es la base principal del paradigma de la cosmología actual, tanto sus métodos como sus resultados sirven de guía para el estudio de nuevas teorías emergentes, de modo que estas puedan recuperar o reproducir nuevamente la relatividad general en los límites adecuados de la teoría, como lo hace la relatividad general con la teoría Newtoniana a bajas velocidades respecto de la velocidad de la luz.

1.1. Elementos de Relatividad General

Se plantea primordialmente un espacio-tiempo descrito por un par (M, g) donde M es una variedad cuatridimensional, suave, conectada, orientable y de Hausdorff; g es una métrica Lorentziana sobre M . Se interpreta g , físicamente, como la generalización del potencial gravitacional. Para una variedad libre de torsión existe una única conexión simétrica $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ que es compatible con la métrica g llamada la conexión de Levi-Civita. De este modo, se interpreta la conexión como la generalización de los campos gravitacionales generados por los potenciales métricos de g [22].

Las ecuaciones de campo de Einstein se pueden obtener a partir de un lagrangiano y el principio variacional $\delta S_{HE} = 0$ con S_{HE} la acción del campo gravitacional planteada por David Hilbert y Albert Einstein en 1915 [23]

$$S_{HE} = \frac{1}{2k} \int_{\nu} d^4x \sqrt{-g} R. \quad (1.1)$$

La acción total incluye también una acción asociada a los campos de materia S_M ,

$$S = S_{HE} + S_M. \quad (1.2)$$

Variando la acción total respecto de la métrica $g_{\alpha\beta}$ y tomando extremos fijos¹, se obtienen las ecuaciones de campo Einstein [24, 25, 26]

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (1.3)$$

¹Es decir, las variaciones de la métrica se anulan en la frontera.

Al lado izquierdo tenemos el tensor de Einstein que se encarga de describir la geometría de la variedad. Este tensor se define mediante expresión

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (1.4)$$

aquí, $R_{\mu\nu}$ es denominado tensor de Ricci y R escalar de Ricci responsables de dar cuenta de la curvatura del espacio-tiempo y siendo R la traza del tensor de Ricci $R = R^\mu_\mu = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. Al lado derecho encontramos el tensor de energía-momentum $T_{\mu\nu}$, el cual da cuenta del *todo* el contenido material del universo o del contenido que el modelo quiera considerar, de acuerdo a la ecuación de estado que gobierne dicho contenido. El tensor de energía-momentum está definido a partir de la langrangiana de materia L_m de acuerdo a la derivación funcional

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta L_m \sqrt{-g}}{\delta g_{\mu\nu}} = 2 \frac{\delta L_m}{\delta g_{\mu\nu}} + g^{\mu\nu} L_m \quad (1.5)$$

Definición que surge debido a que el tensor de energía momentum requiere que

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (1.6)$$

es decir, cumpla la ley de conservación de energía. Por su parte, la derivada covariante del tensor de Einstein $G^{\mu\nu}$ es idénticamente nula por medio de las identidades de Bianchi contraídas

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} \equiv 0. \quad (1.7)$$

Las ecuaciones (1.6) y (1.7) sugieren que los dos tensores son proporcionales luego se puede escribir consecuentemente la ecuación de campo de Einstein (1.3).

El modelo cosmológico estándar parte del principio de homogeneidad e isotropía del universo a grandes escalas², con el fin de satisfacer este principio vamos a usar como modelo de tensor de energía-momentum un fluido perfecto. Un fluido perfecto es caracterizado por tres cantidades físicas: Una cuadrivelocidad $u^\mu = dx^\mu/d\tau$; un campo de densidad propia ρ ; y un campo escalar de presión P . En el límite en el que P sea nulo, el fluido perfecto se reduce a un modelo de polvo. Esto sugiere que el fluido perfecto sea de la forma

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}. \quad (1.8)$$

Dado que el tensor de fluido perfecto se ajusta a la descripción de un universo isotrópico y homogéneo, esta característica global hace que sus componentes sean independientes de las coordenadas espaciales.

Adicionalmente, tomamos la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) a partir de la misma consideración de homogeneidad e isotropía. Esta métrica posibilita expandir o contraer el triespacio por medio de un factor de escala $a = a(t)$ que depende del tiempo cósmico; sobre este factor recae la dinámica de la evolución del universo, métrica que se caracteriza por tener curvatura constante K que determina tres de los posibles tipos de geometría triespacial de acuerdo a tres posibles valores que se le asigne $K = 1, 0, -1$ de los cuales se obtiene un universo cerrado, plano o abierto respectivamente. Además, para esta métrica y para el resto del trabajo se toma la signatura $(-, +, +, +)$. De acuerdo a esto, la métrica adquiere la forma [5]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (1.9)$$

²Escalas mayores que 100 Mpc.

Este tipo de métrica permite solucionar las ecuaciones de campo de Einstein de forma exacta. De igual modo, podemos calcular las componentes del tensor de Ricci definido a partir de la contracción del tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\rho\mu} + \Gamma^\rho_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\mu}. \quad (1.10)$$

Donde $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ son los simbolos de Christoffel definidos como

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}). \quad (1.11)$$

La coma indica la derivada parcial respecto de las cordenadas. Con estos elementos encontramos que las componentes no nulas del tensor de Ricci son

$$\begin{aligned} R_{00} &= 3\frac{\ddot{a}}{a}, \\ R_{ij} &= \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{K}{a^2} \right] g_{ij}, \\ R_{0i} &= 0, \end{aligned} \quad (1.12)$$

con g_{ij} la parte espacial de la métrica de FLRW. El escalar de Ricci puede ser obtenido mediante la expresión

$$R = R^\mu{}_\mu = g^{\mu\alpha} R_{\alpha\nu}. \quad (1.13)$$

De esta manera, las componentes no nulas del tensor de Einstein con indices mixtos, teniendo en cuenta que $g^i_j = \delta_{ij}$, son

$$\begin{aligned} G^0_0 &= 3 \left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} \right] \\ G^i_j &= \left[2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} \right] \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Usamos estas herramientas para obtener las ecuaciones que gobiernan la dinámica del universo conocidas como ecuaciones de Friedmann y de Raychaudhuri [27]

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad \text{Ecuación de Friedmann} \quad (1.15)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = -8\pi GP. \quad \text{Ecuación de Raychauduri} \quad (1.16)$$

A partir de estas ecuaciones podemos encontrar una expresión para la aceleración cósmica, sustrayendo la ecuación (1.15) de la ecuación (1.16)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3P). \quad (1.17)$$

Para complementar este conjunto de ecuaciones, se obtiene la ecuación equivalente para la conservación de la energía conocida como ecuación de continuidad, tomando la derivada respecto del tiempo cosmológico de la ecuación (1.15) y luego replazando la ecuación (1.16), en ese resultado resulta

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + P), \quad (1.18)$$

donde H es el parámetro de Hubble definido como $H \equiv \dot{a}/a$.

1.2. Conclusiones

La métrica de FLRW y el tensor de fluido perfecto se toman bajo la condición de homogeneidad e isotropía del universo, estos elementos permiten solucionar las ecuaciones de campo de Einstein (1.3) de forma exacta. La dinámica del universo de FLRW está dominada en su geometría por el factor de escala $a = a(t)$, y por la ecuación de estado que gobierne la distribución de partículas del modelo como se muestra en las ecuaciones de Friedmann (1.15) y Raychauduri (1.16). Por su parte, la dinámica del contenido material obedece a la ecuación de continuidad (1.18).

Perturbaciones Cosmológicas

El estudio de las perturbaciones cosmológicas son motivadas por las estructuras presentes en el universo a escalas más pequeñas (~ 40 Mpc.) lo que indica que la distribución espacial del contenido material en el universo no es uniforme. Un ejemplo se puede apreciar en el mapa de la radiación cósmica de fondo, donde la temperatura de esta radiación presenta fluctuaciones del orden de 10^{-5} K (ver figura 2.1).

El modelo de FLRW es una primera aproximación en la descripción de nuestro universo, este se puede ver como una aproximación de orden cero, es decir, como una base (o *fondo*). Sin embargo, dado que las observaciones muestran pequeñas variaciones, debemos ir a una aproximación de primer orden, por esta razón, se hace necesario utilizar la teoría de perturbaciones. En este estudio, se toma la métrica de FLRW como fondo y sobre este vamos a imponer perturbaciones de primer orden con el fin de describir inhomogeneidades que se presentan en las observaciones. Adicionalmente, no se va a considerar la curvatura del universo de fondo (i.e., $K = 0$), aunque, al considerar perturbaciones de primer orden, se induce una curvatura local que se conoce como perturbación de curvatura.

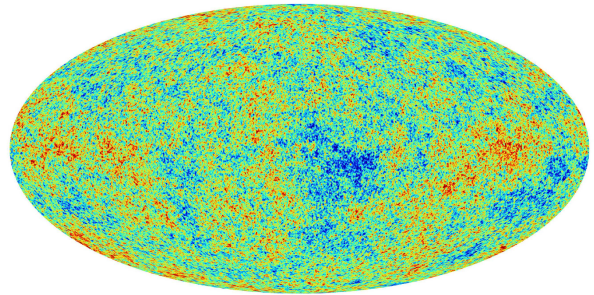


Figura 2.1:

La radiación cósmica de fondo presenta en promedio una temperatura de 2.7K con variaciones del orden de 10^{-5} K, estas son variaciones muy pequeñas respecto del valor promedio de la temperatura. Creditos: Planck - ESA.

2.1. Perturbaciones a la Métrica

La métrica definida por el tensor $g_{\mu\nu}$ que describe nuestro universo físico no es la métrica de FLRW. Pero $g_{\mu\nu}$ se puede escribir como la métrica de FLRW, denotada por $\bar{g}_{\mu\nu}$, esto es, la métrica no perturbada más una pequeña perturbación $h_{\mu\nu}$ ¹. [28, 29, 30]

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \therefore \quad h_{\mu\nu} \ll \bar{g}_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

Recordemos que las componentes de $\bar{g}_{\mu\nu}$ son

$$\begin{aligned} \bar{g}_{00} &= -1, \\ \bar{g}_{0i} &= 0, \\ \bar{g}_{ij} &= a^2(t)\delta_{ij}. \end{aligned}$$

Por otra parte, la inversa de una matriz para este caso viene dada por

$$\begin{aligned} MM^{-1} &= \mathcal{I}, \\ (M + \delta M)(M^{-1} + \delta M^{-1}) &= \mathcal{I}, \\ \mathcal{I} + M\delta M^{-1} + \delta MM^{-1} &= \mathcal{I}, \\ M\delta M^{-1} &= -\delta MM^{-1}, \\ \delta M^{-1} &= -M^{-1}\delta MM^{-1} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Así

$$\begin{aligned} h^{\mu\nu} &= -\bar{g}^{\mu\rho}h_{\rho\sigma}\bar{g}^{\sigma\nu}, \\ &= -\bar{g}^{\mu\rho}\bar{g}^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

se debe tener en cuenta que $h^{\mu\nu}$ no es la inversa (o la parte dos veces contravariante) de $h_{\mu\nu}$.

2.1.1. Componentes de $h^{\mu\nu}$

$$h^{00} = -\bar{g}^{0\rho}\bar{g}^{0\sigma}h_{\rho\sigma} = -h_{00}; \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} h^{0i} &= -\bar{g}^{0\rho}\bar{g}^{i\sigma}h_{\rho\sigma}, \\ &= -(-1)\frac{1}{a^2}\delta_{ij}h_{0j}, \\ &= \frac{1}{a^2}h_{0i}; \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} h^{ij} &= -\bar{g}^{i\rho}\bar{g}^{j\sigma}h_{\rho\sigma} \\ &= -\frac{1}{a^2}\delta_{ik}\frac{1}{a^2}\delta_{jl}h_{kl} \\ &= -\frac{1}{a^4}h_{ij}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

¹Las cantidades con barras indican cantidades no perturbadas, estas son las mismas que se conocen del modelo estándar.

2.1.2. Componentes de la Conexión Métrica Perturbada

Si la métrica es perturbada entonces los coeficientes de conexión son también perturbados [28, 29, 30].

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \bar{\Gamma}_{\nu\lambda}^{\mu} + \delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}. \quad (2.7)$$

Por definición

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho} [g_{\rho\nu,\lambda} + g_{\rho\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\rho}], \quad (2.8)$$

perturbando obtenemos,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} &= \frac{1}{2}(\bar{g}^{\mu\rho} + h^{\mu\rho}) [\bar{g}_{\rho\nu,\lambda} + h_{\rho\nu,\lambda} + \bar{g}_{\rho\lambda,\nu} + h_{\rho\lambda,\nu} - \bar{g}_{\nu\lambda,\rho} - h_{\nu\lambda,\rho}], \\ &= \bar{\Gamma}_{\nu\lambda}^{\mu} + \frac{1}{2}\bar{g}^{\mu\rho} [h_{\rho\nu,\lambda} + h_{\rho\lambda,\nu} - h_{\nu\lambda,\rho}] + \frac{1}{2}h^{\mu\rho} [\bar{g}_{\rho\nu,\lambda} + \bar{g}_{\rho\lambda,\nu} - \bar{g}_{\nu\lambda,\rho}]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde el término $\frac{1}{2}h^{\mu\rho} [\bar{g}_{\rho\nu,\lambda} + \bar{g}_{\rho\lambda,\nu} - \bar{g}_{\nu\lambda,\rho}]$ se puede describir como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}h^{\mu\rho} [\bar{g}_{\rho\nu,\lambda} + \bar{g}_{\rho\lambda,\nu} - \bar{g}_{\nu\lambda,\rho}] &= -\frac{1}{2}\bar{g}^{\mu\chi} h_{\chi\sigma} \bar{g}^{\sigma\rho} [\bar{g}_{\rho\nu,\lambda} + \bar{g}_{\rho\lambda,\nu} - \bar{g}_{\nu\lambda,\rho}], \\ &= -\bar{g}^{\mu\chi} h_{\chi\sigma} \bar{\Gamma}_{\nu\lambda}^{\sigma}, \\ &= -\bar{g}^{\mu\rho} h_{\rho\sigma} \bar{\Gamma}_{\nu\lambda}^{\sigma} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Luego,

$$\delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2}\bar{g}^{\mu\rho} [-2h_{\rho\sigma} \bar{\Gamma}_{\nu\lambda}^{\sigma} + h_{\rho\nu,\lambda} + h_{\rho\lambda,\nu} - h_{\nu\lambda,\rho}]. \quad (2.11)$$

Dado que las componentes de la conexión no perturbadas diferentes de cero son

$$\bar{\Gamma}_{ij}^0 = a\dot{a}\delta_{ij}; \quad (2.12)$$

$$\bar{\Gamma}_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij}; \quad (2.13)$$

$$\bar{\Gamma}_{jl}^i = 0. \quad (2.14)$$

El último término es cero dado que estamos asumiendo un universo plano $K = 0$. A partir de la ecuación (2.11) obtenemos

$$\delta\Gamma_{00}^0 = -\frac{1}{2}\dot{h}_{00}; \quad (2.15)$$

$$\delta\Gamma_{0i}^0 = \frac{\dot{a}}{a}h_{0i} - \frac{1}{2}h_{00,i}; \quad (2.16)$$

$$\delta\Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2} [2a\dot{a}\delta_{ij}h_{00} - h_{0i,j} - h_{0j,i} + \dot{h}_{ij}]; \quad (2.17)$$

$$\delta\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2a^2} [2\dot{h}_{i0} - h_{00,i}]; \quad (2.18)$$

$$\delta\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2a^2} \left[-2\frac{\dot{a}}{a}h_{ij} + \dot{h}_{ij} + h_{i0,j} - h_{0j,i} \right]; \quad (2.19)$$

$$\delta\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2a^2} \left[-2a\dot{a}h_{i0}\delta_{jk} + h_{ij,k} + h_{ik,j} - h_{jk,i} \right]; \quad (2.20)$$

$$\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda} = \left[\frac{1}{2a^2}h_{ii} - \frac{1}{2}h_{00} \right]_{,\mu}. \quad (2.21)$$

2.2. Tensor de Ricci Perturbado

El tensor de Ricci definido en la ecuación (1.10) se puede escribir como un tensor de fondo más su correspondiente parte perturbada de la siguiente manera [28, 29, 30]

$$\bar{R}_{\mu\kappa} + \delta R_{\mu\kappa} = \bar{\Gamma}_{\lambda\mu,\kappa}^\lambda + \delta\Gamma_{\lambda\mu,\kappa}^\lambda - \bar{\Gamma}_{\mu\kappa,\lambda}^\lambda - \delta\Gamma_{\mu\kappa,\lambda}^\lambda + (\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\eta + \delta\Gamma_{\mu\nu}^\eta) (\bar{\Gamma}_{\kappa\eta}^\nu + \delta\Gamma_{\kappa\eta}^\nu) - (\bar{\Gamma}_{\mu\kappa}^\eta + \delta\Gamma_{\mu\kappa}^\eta) (\bar{\Gamma}_{\eta\nu}^\nu + \delta\Gamma_{\eta\nu}^\nu). \quad (2.22)$$

Así, la parte perturbada del tensor de Ricci se escribe como

$$\delta R_{\mu\kappa} = \delta\Gamma_{\lambda\mu,\kappa}^\lambda - \delta\Gamma_{\mu\kappa,\lambda}^\lambda + \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\eta \delta\Gamma_{\kappa\eta}^\nu + \delta\Gamma_{\mu\nu}^\eta \bar{\Gamma}_{\kappa\eta}^\nu - \bar{\Gamma}_{\mu\kappa}^\eta \delta\Gamma_{\eta\nu}^\nu - \delta\Gamma_{\mu\kappa}^\eta \bar{\Gamma}_{\eta\nu}^\nu. \quad (2.23)$$

Tomando la ecuación (2.23), las componentes del tensor de Ricci perturbado son

$$\begin{aligned} \delta R_{00} &= \frac{1}{2a^2} \nabla^2 h_{00} + \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a} \dot{h}_{00} - \frac{1}{a^2} \dot{h}_{0i,i} \\ &\quad + \frac{1}{2a^2} \left[\ddot{h}_{ii} - 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{h}_{ii} + 2 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} \right) h_{ii} \right]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \delta R_{0j} &= \frac{\dot{a}}{a} h_{00,j} + \frac{1}{2a^2} (\nabla^2 h_{j0} - h_{i0,ji}) \\ &\quad - \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} \right) h_{j0} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a^2} (h_{ii,j} - h_{ij,i}) \right]_{,0}; \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \delta R_{jk} &= -\frac{1}{2} h_{00,jk} - (2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) \delta_{jk} h_{00} - \frac{1}{2} a \dot{a} \delta_{jk} \dot{h}_{00} \\ &\quad + \frac{1}{2a^2} (\nabla h_{jk} - h_{ik,ij} - h_{ij,ik} + h_{ii,jk}) - \frac{1}{2} \ddot{h}_{jk} \\ &\quad + \frac{\dot{a}}{2a} (\dot{h}_{jk} - \delta_{jk} \dot{h}_{ii}) + \frac{\dot{a}^2}{a^2} (-2h_{jk} + \delta_{jk} h_{ii}) + \frac{\dot{a}}{a} \delta_{jk} h_{i0,i} \\ &\quad + \frac{1}{2} (\dot{h}_{k0,j} + \dot{h}_{j0,k}) + \frac{\dot{a}}{2a} (h_{k0,j} + h_{j0,k}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

2.3. Ecuaciones de Campo de Einstein Perturbadas

Para determinar las perturbaciones de la ecuaciones de campo de Einstein podemos rescribir la ecuación (1.3) de la siguiente manera [5, 29, 30]

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G S_{\mu\nu}, \quad (2.27)$$

donde

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma}. \quad (2.28)$$

La perturbación al tensor energía-momentum produce una perturbación en el tensor fuente $S_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu} &= \bar{S}_{\mu\nu} + \delta S_{\mu\nu}, \\ &= \bar{T}_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) (\bar{g}^{\rho\sigma} + h^{\rho\sigma}) (\bar{T}_{\rho\sigma} + \delta T_{\rho\sigma}), \\ &= \bar{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{g}^{\rho\sigma} \bar{T}^{\rho\sigma} + \delta T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\bar{g}^{\rho\sigma} \delta T_{\rho\sigma} + h^{\rho\sigma} \bar{T}_{\rho\sigma}) - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} (\bar{g}^{\rho\sigma} \bar{T}_{\rho\sigma}). \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde

$$\delta T_\lambda^\lambda = \delta(g^{\rho\sigma}T_{\rho\sigma}) = \bar{g}^{\rho\sigma}\delta T_{\rho\sigma} + h^{\rho\sigma}\bar{T}_{\rho\sigma}. \quad (2.30)$$

Luego

$$\delta S_{\mu\nu} = \delta T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\delta T_\lambda^\lambda - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\bar{T}_\lambda^\lambda. \quad (2.31)$$

Recordemos que hemos modelado el tensor de energía-momentum (1.5) como un fluido perfecto. También usamos las ecuaciones de Einstein no perturbadas para escribir la densidad y la presión de fondo ($\bar{\rho}$ y \bar{P} respectivamente) en términos del factor de escala de FLRW y sus derivadas

$$\bar{\rho} = \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right), \quad \bar{P} = \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right). \quad (2.32)$$

Esto conlleva a que la traza del tensor energía-momentum se escriba como

$$\bar{T}_\lambda^\lambda = 3\bar{P} - \bar{\rho} = \frac{3}{4\pi G} \left(\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right). \quad (2.33)$$

De esta manera, las componentes perturbadas del término fuente son

$$\delta S_{00} = \delta T_{00} + \frac{1}{2}\delta T_\lambda^\lambda + \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) h_{00}; \quad (2.34)$$

$$\delta S_{0i} = \delta T_{0i} + \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) h_{0i}; \quad (2.35)$$

$$\delta S_{jk} = \delta T_{jk} + \frac{a^2}{2}\delta_{jk}\delta T_\lambda^\lambda + \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) h_{jk}. \quad (2.36)$$

2.3.1. Componentes de la Ecuación de Einstein Perturbada

Finalmente, escribimos la ecuación de campo de Einstein (2.27) con su correspondiente parte perturbada [29]

$$\bar{R}_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu} = -8\pi G (\bar{S}_{\mu\nu} + \delta S_{\mu\nu}), \quad (2.37)$$

Retirando el fondo de la ecuación anterior nos queda

$$\delta R_{\mu\nu} = -8\pi G \delta S_{\mu\nu}. \quad (2.38)$$

Así, las componentes de la ecuación de campo de Einstein perturbada son las siguientes

$$\begin{aligned} -8\pi G \left(\delta T_{00} + \frac{1}{2}\delta T_\lambda^\lambda \right) &= \frac{1}{2a^2} \nabla^2 h_{00} + \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a} \dot{h}_{00} - \frac{1}{a^2} \dot{h}_{0i,i} \\ &+ \frac{1}{2a^2} \left[\ddot{h}_{ii} - 2\frac{\dot{a}}{a} \dot{h}_{ii} + 2 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} \right) h_{ii} \right] \\ &+ 3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} \right) h_{00}; \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned}
-8\pi G\delta T_{0j} &= \frac{\dot{a}}{a}h_{00,j} + \frac{1}{2a^2}(\nabla^2 h_{j0} - h_{i0,ji}) \\
&+ \left(\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)h_{j0} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a^2}(h_{ii,j} - h_{ij,i})\right]_{,0}; \tag{2.40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-8\pi G\left(\delta T_{jk} - \frac{a^2}{2}\delta_{jk}\delta T_\lambda^\lambda\right) &= -\frac{1}{2}h_{00,jk} - (2\dot{a}^2 + a\ddot{a})\delta_{jk}h_{00} - \frac{1}{2}a\dot{a}\delta_{jk}\dot{h}_{00} \\
&+ \frac{1}{2a^2}(\nabla h_{jk} - h_{ik,ij} - h_{ij,ik} + h_{ii,jk}) - \frac{1}{2}\ddot{h}_{jk} \\
&+ \frac{\dot{a}}{2a}(\dot{h}_{jk} - \delta_{jk}\dot{h}_{ii}) + \frac{\dot{a}^2}{a^2}(-2h_{jk} + \delta_{jk}h_{ii}) + \frac{\dot{a}}{a}\delta_{jk}h_{i0,i} \\
&+ \frac{1}{2}(\dot{h}_{k0,j} + \dot{h}_{j0,k}) + \frac{\dot{a}}{2a}(h_{k0,j} + h_{j0,k}) \tag{2.41}
\end{aligned}$$

2.4. Ecuación de Continuidad

Las componentes del tensor energía-momentum estan sujetas a la condición de conservación $T_{\nu;\mu}^\mu = 0$ los cuales a primer orden resultan [5, 28, 29]

$$\begin{aligned}
T_{\nu;\mu}^\mu &= T_{\nu,\mu}^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T_\mu^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda T_\lambda^\mu, \\
&= (\bar{T}_\nu^\mu + \delta T_\nu^\mu)_{,\mu} + (\bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^\mu + \delta\Gamma_{\mu\lambda}^\mu)(\bar{T}_\mu^\lambda + \delta T_\mu^\lambda) - (\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda + \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)(\bar{T}_\lambda^\mu + \delta T_\lambda^\mu), \\
&= \bar{T}_{\nu,\mu}^\mu + \delta T_{\nu,\mu}^\mu + \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^\mu \bar{T}_\mu^\lambda - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \bar{T}_\lambda^\mu - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \delta T_\lambda^\mu - \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \bar{T}_\lambda^\mu = 0. \tag{2.42}
\end{aligned}$$

Luego

$$\delta T_{\nu;\mu}^\mu = \delta T_{\nu,\mu}^\mu + \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^\mu \delta T_\nu^\lambda - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \delta T_\lambda^\mu + \delta\Gamma_{\mu\lambda}^\mu \bar{T}_\nu^\lambda - \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \bar{T}_\lambda^\mu = 0. \tag{2.43}$$

Esto es igual a cero porque la derivada covariante del tensor es cero, lo que implica que la perturbación sea cero.

2.4.1. Componentes Perturbadas de la Ecuación de Continuidad

Como vemos en la ecuación (2.43), para calcular las componentes perturbadas de la ecuación de continuidad primero debemos obtener las componentes perturbadas del tensor energía-momentum con índices mixtos [5, 28]

$$\begin{aligned}
T_\nu^\mu &= g^{\mu\lambda}T_{\lambda\nu}, \\
\bar{T}_\nu^\mu + \delta T_\nu^\mu &= (\bar{g}^{\mu\lambda} + h^{\mu\lambda})(\bar{T}_{\lambda\nu} + \delta T_{\lambda\nu}), \\
&= \bar{g}^{\mu\lambda}\bar{T}_{\lambda\nu} + \bar{g}^{\mu\lambda}\delta T_{\lambda\nu} + h^{\mu\lambda}\bar{T}_{\lambda\nu}. \tag{2.44}
\end{aligned}$$

Retirando el fondo obtenemos así

$$\begin{aligned}
\delta T_\nu^\mu &= \bar{g}^{\mu\lambda}\bar{T}_{\lambda\nu} - \bar{g}^{\mu\rho}\bar{g}^{\lambda\sigma}h_{\rho\sigma}\bar{T}_{\lambda\nu}, \\
&= \bar{g}^{\mu\lambda}\delta\bar{T}_{\lambda\nu} - \bar{g}^{\mu\rho}h_{\rho\sigma}\bar{T}_\nu^\sigma, \\
&= \bar{g}^{\mu\lambda}(\delta\bar{T}_{\lambda\nu} - h_{\lambda\sigma}\bar{T}_\nu^\sigma). \tag{2.45}
\end{aligned}$$

De la ecuación (2.43) hagamos $\nu = 0$, lo que resulta en

$$\delta T_{0,0}^0 + \delta T_{0,i}^i + 3\frac{\dot{a}}{a}\delta T_0^0 - \frac{\dot{a}}{a}\delta T_i^i - \left(\frac{\bar{\rho} + \bar{P}}{2a^2}\right) \left(-2\frac{\dot{a}}{a}h_{ii} + \dot{h}_{ii}\right) = 0. \quad (2.46)$$

Ahora hagamos $\nu = j$

$$\delta T_{j,0}^0 + \delta T_{j,i}^i + 2\frac{\dot{a}}{a}\delta T_j^0 - a\dot{a}\delta T_0^j - (\bar{\rho} + \bar{P}) \left(\frac{1}{2}h_{00,j} - \frac{\dot{a}}{a}h_{0j}\right) = 0. \quad (2.47)$$

2.5. Conclusiones

La teoría de perturbaciones cosmológicas nos permite considerar de forma separada un fondo y un elemento perturbativo, este en comparación al fondo es pequeño. De esta manera, se pueden obtener explícitamente las componentes perturbativas de las cantidades tensoriales involucradas en la ecuación de campo de Einstein, y sus ecuaciones dinámicas perturbadas correspondientes, de manera que puedan ser estudiadas independientemente de las ecuaciones de fondo. En este caso, se tuvo particularmente en cuenta un universo de fondo con constante de curvatura nula $K = 0$.

Ecuaciones de Campo de Einstein Perturbadas con Gauge de Newton Conforme

En este capítulo tomamos los conceptos de la teoría de perturbaciones cosmológicas para introducir perturbaciones de primer orden en la métrica de FLRW eligiendo como factores perturbativos un gauge de Newton conforme, encontrándose luego, todos los elementos perturbados correspondientes a las ecuaciones de campo de Einstein. Este se tendrá como uno de los escenarios importantes a tener en cuenta dentro de la propuesta de este estudio.

3.1. Perturbaciones en la Métrica

El gauge de Newton conforme (también conocido como *gauge longitudinal*) mencionado por Mukhanov [31] es simplemente un gauge particular usado para perturbaciones métricas escalares. Estas perturbaciones se caracterizan por dos potenciales escalares ϕ y ψ los cuales aparecen en el elemento de línea como [32]

$$ds^2 = a^2(\tau) [-(1 + 2\phi)d\tau^2 + (1 - 2\psi)(dx^2 + dy^2 + dz^2)], \quad (3.1)$$

cuyas componentes métricas son [31, 32]

$$\begin{aligned} g_{00} &= -a^2(1 + 2\phi); & g_{ij} &= a^2(1 - 2\psi)\delta_{ij}; \\ g^{00} &= -a^{-2}(1 - 2\phi); & g^{ij} &= a^{-2}(1 + 2\psi)\delta^{ij}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Donde se considera que los potenciales de Newton $\phi \ll 1$ y $\psi \ll 1$, son pequeños comparados con el potencial de fondo. De esta manera, las cantidades que se obtienen a partir de estas componentes métricas se van a aproximar sólo a primer orden e ignorando términos con órdenes mayores de los potenciales respectivos ϕ y ψ , de modo que se pueden recuperar las ecuaciones de fondo simplemente apagando las perturbaciones que hemos introducido en la ecuación en todos los casos que se puedan obtener en adelante. Los cálculos completos se muestran en detalle en el apéndice A

3.2. Componentes de la Conexión Métrica Perturbada

Como se había definido en el capítulo anterior, las conexiones métricas se definen a partir de las derivadas de las componentes métricas como sigue

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho} [g_{\rho\nu,\lambda} + g_{\rho\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\rho}], \quad (3.3)$$

Teniendo en cuenta las componentes métricas de (3.2), las componentes no nulas de las conexiones que se obtienen de allí son [31, 32]

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \mathcal{H} + \phi'; \\ \Gamma_{0i}^0 &= \partial_i\phi; \\ \Gamma_{ji}^0 &= (-\psi' + \mathcal{H}(1 - 2\phi - 2\psi))\delta_{ij}; \\ \Gamma_{00}^k &= \partial_k\phi; \\ \Gamma_{0i}^k &= (\mathcal{H} - \psi')\delta_i^k; \\ \Gamma_{ji}^k &= -(\partial_i\psi\delta_j^k + \partial_j\psi\delta_i^k - \partial_k\psi\delta_{ji}); \\ \Gamma_{0k}^k &= 3(\mathcal{H} - \psi'); \\ \Gamma_{ik}^k &= -3\partial_i\psi. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Donde, $\mathcal{H} \equiv \frac{a'}{a}$ es el parámetro de Hubble y la prima es la derivada respecto del tiempo conforme.

3.3. Componentes del Tensor de Ricci Perturbado

A partir de la definición del tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}, \quad (3.5)$$

las componentes no nulas teniendo en cuenta las componentes de las conexiones métricas (3.4) son [31, 32]

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\mathcal{H}' + \nabla^2\phi + 3\psi'' + 3\mathcal{H}\phi' + 3\mathcal{H}\psi'; \\ R_{0j} &= 2\partial_j(\psi' + \mathcal{H}\phi); \\ R_{ij} &= (2\mathcal{H}^2 - 4\phi\mathcal{H}^2 - 4\psi\mathcal{H}^2 - \psi'' + (1 - 2\phi - 2\psi)\mathcal{H}' - \mathcal{H}(5\psi' + \phi') + \nabla^2\psi)\delta_{ij} + \partial_i\partial_j\psi - \partial_i\partial_j\phi. \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.4. Escalar de Ricci Perturbado

El escalar de Ricci se obtiene tomando la traza del tensor de Ricci de acuerdo a las componentes (3.6) de la siguiente forma [31, 32]

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{00}R_{00} + g^{0j}R_{0j} + g^{ij}R_{ij} \\ &= (-a^{-2}(1 - 2\phi))(-3\mathcal{H}' + \nabla^2\phi + 3\psi'' + 3\mathcal{H}\phi' + 3\mathcal{H}\psi') \\ &\quad + (a^{-2}(1 + 2\psi)\delta^{ij})((2\mathcal{H}^2 - 4\phi\mathcal{H}^2 - 4\psi\mathcal{H}^2 - \psi'' + (1 - 2\phi - 2\psi)\mathcal{H}' - \mathcal{H}(5\psi' + \phi') + \nabla^2\psi)\delta_{ij} \\ &\quad - \partial_i\partial_j\psi + \partial_i\partial_j\phi) \\ &= 3\mathcal{H}' - \nabla^2\phi - 3\psi'' - 3\mathcal{H}\phi' - 3\mathcal{H}\psi' - 6\mathcal{H}'\phi - 12\mathcal{H}^2\phi - 12\mathcal{H}^2\psi + 6\mathcal{H}^2 - 3\psi'' + 3(1 - 2\phi - 2\psi)\mathcal{H}' \\ &\quad - 3\mathcal{H}(5\psi' + \phi') + 3\nabla^2\psi + 6\mathcal{H}'\psi + \nabla^2\psi - \nabla^2\phi + 12\mathcal{H}^2\psi \\ &= a^{-2}(6\mathcal{H}' + 6\mathcal{H}^2 - 6\psi'' - 2\nabla^2\phi + 4\nabla^2\psi - 6\mathcal{H}\phi' - 18\mathcal{H}\psi' - 12\mathcal{H}'\phi - 12\mathcal{H}^2\phi). \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.5. Componentes del Tensor de Einstein Perturbado

Ahora podemos construir el tensor de Einstein de acuerdo a la definición (1.4) del cual se obtienen las siguientes componentes [31, 32]

$$\begin{aligned}
G_{00} &= 2\nabla^2\psi - 6\mathcal{H}\psi' + 3\mathcal{H}^2. \\
G_{0j} &= 2\partial_j(\psi' + \mathcal{H}\phi); \\
G_{ij} &= (-\mathcal{H}^2 - 2\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2\phi + 2\mathcal{H}^2\psi + 4\mathcal{H}'\phi + 4\mathcal{H}'\psi + 4\mathcal{H}\psi' + 2\mathcal{H}\phi' - \nabla^2\psi + \nabla^2\phi + 2\psi'')\delta_{ij} \\
&\quad + \partial_i\partial_j(\psi - \phi)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

3.6. Componentes del Tensor Energía-Momentum Perturbado Para un Modelo de Polvo

El tensor energía-momentum para un modelo de polvo está definido como

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu. \tag{3.9}$$

donde u^μ es la velocidad comóvil del sistema

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau_p}, \tag{3.10}$$

donde τ_p es el tiempo propio. De aquí se obtiene que la componente 0 – 0 es

$$T^{00} = \rho(x, \tau) \frac{dx^0}{d\tau_p} \frac{dx^0}{d\tau_p} \tag{3.11}$$

donde $\frac{dx^0}{d\tau_p}$ se obtiene tomando la definición de tiempo propio

$$\begin{aligned}
ds^2 = -c^2 d\tau_p^2 &= -a^2(\tau) [(1 + 2\phi)d\tau^2] \\
cd\tau_p &= a(\tau) [(1 + 2\phi)]^{1/2} d\tau \\
&\approx a(\tau) [(1 + \phi)] d\tau.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Luego (tomando $c = 1$),

$$\begin{aligned}
\frac{d\tau}{d\tau_p} &= \frac{1}{a(\tau)} \frac{1}{(1 + \phi)} \\
&\approx \frac{1}{a(\tau)} (1 - \phi).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

De modo que

$$\frac{dx^0}{d\tau_p} = \frac{dx^0}{d\tau} \frac{d\tau}{d\tau_p}, \tag{3.14}$$

así

$$T^{00} = \frac{\rho(x, \tau)}{a^2(\tau)}(1 - \phi)^2 \approx \frac{\rho(x, \tau)}{a^2(\tau)}(1 - 2\phi). \quad (3.15)$$

De esta manera

$$\begin{aligned} T = T_0^0 = g_{00}T^{00} &= -a^2(\tau)(1 + 2\phi)\frac{\rho(x, \tau)}{a^2(\tau)}(1 - 2\phi) \\ &= -\rho(1 + 2\phi)(1 - 2\phi) \\ &\approx -\rho. \end{aligned} \quad (3.16)$$

La componente $0 - j$ del tensor de momentum-energía es igual a cero porque no hay disipación de energía en este primer orden de aproximación.

3.7. Ecuación de Campo Perturbada y Modelo de Polvo

Teniendo todas las componentes calculadas de la ecuación de campo de primer orden, procedemos a retirar el fondo y quedarnos sólo con las perturbaciones netas, así la ecuación de campo de Einstein sin el fondo se escribe así

$$\delta G_{\mu\nu} = 8\pi G\delta T_{\mu\nu} \quad (3.17)$$

De la componente $0 - 0$ de esta ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} \delta G_{00} &= 8\pi G\delta T_{00} \\ 2\nabla^2\psi - 6\mathcal{H}\psi' &= 8\pi Ga^2(\delta\rho + 2\rho\phi) \\ \nabla^2\psi &= 3\mathcal{H}\psi' + 4\pi Ga^2\delta\rho + 8\pi Ga^2\rho\phi. \end{aligned} \quad (3.18)$$

De la componente $0 - j$, para este caso en particular, obtenemos una condición sobre el potencial ψ' en el tiempo conforme

$$\begin{aligned} \delta G_{0j} &= 8\pi G\delta T_{0j} = 0 \\ 2\partial_j(\psi' + \mathcal{H}\phi) &= 0 \\ \psi' + \mathcal{H}\phi &= 0 \\ \psi' &= -\mathcal{H}\phi. \end{aligned} \quad (3.19)$$

La condición $\psi' - \mathcal{H}\phi = 0$ es satisfecha mediante la escogencia de velocidades peculiares pequeñas comparadas con la velocidad de la luz.

Tomando la condición (3.19) y remplazandola en (3.18) tenemos

$$\nabla^2\psi = -3\mathcal{H}^2\phi + 4\pi Ga^2\delta\rho + 8\pi Ga^2\rho\phi. \quad (3.20)$$

Teniendo en cuenta que la ecuación de Friedmann a orden cero en el tiempo conforme es

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G}{3}a^2\rho, \quad (3.21)$$

la remplazamos en la ecuación (3.20) y obtenemos finalmente la componente 0 – 0 de la ecuación de campo de Einstein

$$\nabla^2\psi = -3\left(\frac{8\pi G}{3}a^2\rho\right)\phi + 4\pi Ga^2\delta\rho + \cancel{8\pi Ga^2\rho\phi}$$

$$\boxed{\nabla^2\psi = 4\pi Ga^2\delta\rho.} \quad (3.22)$$

La ecuación (3.22) es análoga a la ecuación de Poisson en gravedad de Newton, cuya solución en coordenadas comóviles es

$$\psi(x, \tau) = -4\pi Ga(\tau)^2 \int \frac{\delta\rho(x', \tau)}{|x - x'|} d^3x'. \quad (3.23)$$

La ecuación de movimiento para partículas de materia oscura en tiempo conforme es

$$\frac{d^2\mathbf{x}_c}{d\tau^2} + \mathcal{H}(\tau)\frac{d\mathbf{x}_c}{d\tau} = -\nabla_{\mathbf{x}}\phi \quad (3.24)$$

La relación entre ϕ y ψ está dada por la ecuación de campo (3.19).

Así mismo, la componente $i - j$ de la ecuación (3.17) da

$$\delta G_{ij} = 0$$

$$[2\mathcal{H}^2(\phi + \psi) + 4\mathcal{H}'(\phi + \psi) + 2\mathcal{H}(2\psi' + \phi') + \nabla^2(\phi - \psi) + 2\psi] \delta_{ij} + \partial_i\partial_j(\psi - \phi) = 0$$

por la condición (3.19) se tiene

$$[2\mathcal{H}^2(\phi + \psi) + 4\mathcal{H}'(\phi + \psi) + 2\mathcal{H}(-2\mathcal{H}\phi + \phi')] + \nabla^2(\phi - \psi) + 2(-\mathcal{H}'\phi - \mathcal{H}\phi') \delta_{ij} + \partial_i\partial_j(\psi - \phi) = 0$$

$$[2\mathcal{H}^2(\phi - \psi) + 2\mathcal{H}'(2\phi + \psi) + \nabla^2(\phi - \psi)] \delta_{ij} + \partial_i\partial_j(\psi - \phi) = 0 \quad (3.25)$$

Por otro lado, la ecuación de Raychaudhuri para un modelo de polvo en tiempo conforme tiene la forma

$$2\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = 0. \quad (3.26)$$

Esto nos lleva a la condición

$$\mathcal{H}' = \frac{a''}{a} - \left(\frac{a'}{a}\right)^2$$

$$2\mathcal{H}' = \cancel{2\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2} - 3\left(\frac{a'}{a}\right)^2$$

$$2\mathcal{H}' = 3\mathcal{H}^2. \quad (3.27)$$

Así, remplazando la condición (3.27) en la ecuación (3.25) obtenemos

$$[2\mathcal{H}^2(\phi - \psi) - 3\mathcal{H}'(2\phi + \psi) + \nabla^2(\phi - \psi)] \delta_{ij} + \partial_i\partial_j(\psi - \phi) = 0$$

$$[\nabla^2(\phi - \psi) - \mathcal{H}^2(4\psi + 5\phi)] \delta_{ij} + \partial_i\partial_j(\psi - \phi) = 0. \quad (3.28)$$

La discusión de cómo las irregularidades del comportamiento en la distribución de materia en un universo en expansión es enormemente simplificada por el hecho de que una aproximación limitada de la relatividad general, la mecánica Newtoniana, aplica en una región muy pequeña comparada al radio de la longitud de Hubble d_H (cH^{-1}) (y grande comparada al radio de Schwarzschild de cualquier objeto colapsado). El resto del universo puede afectar la región sólo a través de fuerzas de mareas [33].

3.8. Conclusiones

Al retirar el fondo y analizar solamente la parte neta perturbada de las ecuaciones de campo de Einstein de primer orden, obtuvimos que sus componentes se presentan en forma de ecuación tipo Poisson. Es importante destacar que se van a seguir estos procedimientos en el capítulo 8 para encontrar las ecuaciones análogas en estas mismas condiciones dentro del marco de la teoría de gravedad modificada $f(R)$. Los resultados presentados aquí servirán de referencia cuando tengamos que reducir el resultado de la teoría extendida.

Colapso Gravitacional Esférico con Gravedad de Einstein

La formación de estructuras en el universo se estudia desde el punto de vista del colapso gravitacional, donde, regiones con densidad local δ , conocida como densidad de contraste, comienzan una evolución diferente a la del fondo ρ_b . Se espera que la gravedad local de estas regiones detengan progresivamente su expansión y eventualmente colapsen.

En este capítulo estudiaremos un caso particular a la ecuación (3.23) para una región esféricamente simétrica en el régimen tanto para el régimen lineal (lineal en las perturbaciones métricas y no lineales en las cantidades) y no lineal de la teoría del colapso gravitacional desde el marco de la relatividad general para el modelo de polvo. Se exponen las condiciones de evolución de un perfil de densidad sobredensa, teniendo en cuenta aspectos como el tiempo de evolución y el proceso de virialización posterior al colapso. Finalmente, un caso particular en relatividad general, usando una métrica tipo Lemaître-Tolmann-Bondi (LTB) en el que se incluyen las perturbaciones en la métrica, y del cual se puede obtener una solución analítica completa. Los resultados obtenidos son comparables con las ecuaciones que se plantean en el régimen no lineal de la teoría. Presentaremos un perfil de densidad de masa al proponer una solución a las ecuaciones de campo resultantes para este tipo de métrica.

4.1. Modelo de una Región Sobredensa Esféricamente Simétrica

Consideremos la densidad de contraste $\delta(\mathbf{x}, t_i)$ en el universo para un tiempo t_i .

$$\delta(\mathbf{x}, t_i) = \frac{\rho(x, t_i) - \rho_b(t_i)}{\rho_b(t_i)} \quad (4.1)$$

Definida como las fluctuaciones relativas en la densidad de masa, donde ρ_b es la densidad de masa del universo de fondo. La densidad de contraste dará cuenta de las regiones sobredensas ($\delta > 0$) y subdensas ($\delta < 0$) del universo. Se espera que las regiones que sean significativamente sobredensas colapsarán y, eventualmente, formen estructuras. En estas regiones sobredensas, la auto-gravedad de la concentración de masa local actuará *en contra* de la expansión del universo; *e. i.*, esta región se expande progresivamente a una tasa de expansión más lenta comparada con la del fondo. Este proceso incrementa la densidad de contraste entre la región y el universo de fondo y - consecuentemente - hará que el potencial gravitacional de la concentración de masa local, en esa región, sea cada vez más dominante. Eventualmente la región colapsará bajo su propia gravedad y formará una estructura. El proceso anterior dependerá de la densidad

inicial del perfil. El modelo más simple que podemos estudiar analíticamente se basa en la suposición que la región sobredensa es esféricamente simétrica. Supongamos entonces que la región de interés tiene una distribución de densidad inicial [34]

$$\begin{aligned}\rho(r, t_i) &= \rho_b + \delta\rho(r, t_i), \\ &= \rho_b(1 + \delta_i(r)).\end{aligned}\tag{4.2}$$

donde $\delta_i(r) = \delta(r, t_i)$ es la densidad inicial de contraste. Para este caso consideremos $\lambda \ll d_H$, luego el radio R de la región será $R \ll d_H$.

En el límite Newtoniano, es conveniente usar la cordenada radial $r = a(t)|\mathbf{x}|$ donde \mathbf{x} es la cordenada comóvil. La dinámica de la región sobredensa está determinada por el potencial gravitacional [34]

$$\begin{aligned}\phi_{\text{total}}(r, t) &= \phi_b(r, t) + \delta\phi(r, t), \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) r^2 + \delta\phi(r, t), \\ &= \frac{2\pi G}{3} \rho_b r^2 + \delta\phi(r, t).\end{aligned}\tag{4.3}$$

Donde ϕ_b es el potencial Newtoniano de fondo de la métrica de Friedmann y $\delta\phi(r, t)$ es el potencial generado por la densidad $\delta\rho(r, t)$. El movimiento de un cascarón de partículas ubicado a una distancia r (donde r es la cordenada Euleriana definida como $\mathbf{r} = a\mathbf{x}$ y \mathbf{x} como cordenada comóvil) está gobernada por la ecuación

$$\begin{aligned}\frac{d^2 r}{dt^2} &= -\nabla\phi_{\text{total}} \\ &= -\frac{4\pi G\rho_b}{3}\mathbf{r} - \nabla(\delta\phi) \\ &= -\frac{GM_b}{r^3}\mathbf{r} - \frac{G\delta M(r, t)}{r^3}\mathbf{r}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Rescribiendo el segundo término de (4.4), tomando en cuenta que para una distribución de densidad simétrica la fuerza gravitacional sólo depende de la masa δM contenida en el cascarón tomando [34]

$$M_b = \frac{4}{3}\pi\rho_b(t)r^3 = \frac{4}{3}\pi\rho_b(t)a^3x^3 = \text{Const.}\tag{4.5}$$

$$\delta M(r, t) = 4\pi \int_0^r \delta\rho(q, t)q^2 dq = 4\pi\rho_b(t) \int_0^r q^2 \delta(q, t) dq.\tag{4.6}$$

Para simplificar el análisis del problema asumiremos que los cascarones esféricos no se cruzan unos con otros durante su evolución. Esto es, si identificamos los cascarones con los números 1, 2, 3, ... etc, con los radios $r_1 < r_2 < r_3 < \dots$ etc. Entonces se asume que la evolución preservará el orden. En tal caso, la masa contenida dentro de la esfera de radio r no cambia con el tiempo: $\delta M(r, t) = \delta M(r, t_i) = \text{constante}$. Ahora podemos combinar los dos términos en la ecuación (4.4) para escribir [34]

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2},\tag{4.7}$$

donde

$$M = \rho_b \left(\frac{4}{3} \pi r_i^3 \right) (1 + \bar{\delta}_i), \quad \bar{\delta}_i = \left(\frac{3}{4\pi r_i^3} \right) \int_0^{r_i} \delta_i(r) 4\pi r^2 dr. \quad (4.8)$$

Aquí r_i es el radio inicial de la esfera con masa M y $\bar{\delta}_i$ es el valor promedio de δ dentro de r_i en el tiempo t_i . Calculamos a continuación la primera integral de (4.7) y para ello la describimos de la forma

$$y'' + cy^{-2} = 0 \quad (4.9)$$

tomemos

$$\begin{aligned} P(y) &= y' \\ y'' &= \frac{dP(y)}{dx} = \frac{dP}{dy} \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{dP}{dy} y' \end{aligned} \quad (4.10)$$

Dado que $y' = P(y)$ entonces

$$y'' = \frac{dP}{dy} P \quad (4.11)$$

Luego, la ecuación (4.9) se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dy} P &= -\frac{c}{y^2} \\ \int P dP &= -c \int \frac{dy}{y^2} \\ \frac{1}{2} P^2 + E &= \frac{c}{y} \end{aligned} \quad (4.12)$$

como $P = y'$ reemplazando se obtiene

$$\frac{1}{2} (y')^2 + E = \frac{c}{y} \quad (4.13)$$

o

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{r} = E. \quad (4.14)$$

Donde E es una constante de integración. El signo de E determinará si dada una masa del cascarón, éste se expandirá por siempre o se desacople de la expansión y colapse. Si $E > 0$ de (4.14) se observa que \dot{r}^2 nunca será cero y el cascarón se expande por siempre. Por otra parte, si $E < 0$ entonces, r se incrementa con \dot{r} , eventualmente llegará a cero y más tarde negativo, lo que implica una contracción y colapso [34]. Esta condición para el colapso se puede describir como sigue:

Para un tiempo t_i supongamos que las velocidades peculiares v_i son despreciables, luego, $\dot{r}_i = (\dot{a}/a)r_i = H(t_i)r_i \equiv H_i r_i$, y la energía cinética será [34]

$$K_i \equiv \left(\frac{\dot{r}^2}{2} \right)_{t=t_i} = \frac{H_i^2 r_i^2}{2} \quad (4.15)$$

La energía potencial en $t = t_i$ es $U = -|U|$ donde

$$|U| = \left(\frac{GM}{r} \right)_{t=t_i} = G \frac{4\pi}{3} \rho_b(t_i) r_i^2 (1 + \bar{\delta}_i) = \frac{1}{2} H_i^2 r_i^2 \Omega_i (1 + \bar{\delta}_i) = K_i \Omega_i (1 + \bar{\delta}_i) \quad (4.16)$$

donde $\Omega_i = (\rho_b/\rho_c)$ es el valor inicial del parámetro de densidad Ω del universo de fondo. La energía total del cascarón es, por lo tanto,

$$E = K_i - K_i \Omega_i (1 + \bar{\delta}_i) = K_i \Omega_i [\Omega_i^{-1} - (1 + \bar{\delta}_i)]. \quad (4.17)$$

Así, la condición $E < 0$ para que el cascarón colapse llega a ser $(1 + \bar{\delta}_i) > \Omega_i^{-1}$ o

$$\bar{\delta}_i > [\Omega_i^{-1} - 1]. \quad (4.18)$$

Si el universo es cerrado o plano (con $\Omega_i^{-1} \leq 1$), esta condición se satisface para cualquier región sobredensa con $\bar{\delta} > 0$. En este caso las regiones sobredensas siempre colapsarán. Para un universo abierto con $\Omega < 1$, la sobredensidad tiene que estar por encima del valor crítico para que el colapso pueda ocurrir [34].

Consideremos ahora un cascarón con $E < 0$, que se expande a un radio máximo r_m y entonces colapsa. Encontramos una expresión para este radio máximo r_m . En el instante de expansión máxima, $\dot{r} = 0$ y una expresión para el radio máximo r_m es

$$\begin{aligned} E &= -\frac{GM}{r_m} \\ &= -\frac{G}{r_m} \rho_b \left(\frac{4}{3} \pi r_i^3 \right) (1 + \bar{\delta}_i) \\ &= -\frac{r_i}{r_m} G \rho_b \frac{4}{3} \pi r_i^2 (1 + \bar{\delta}_i) * \frac{2H^2}{2H^2} \\ &= -\frac{r_i}{r_m} \rho_b \frac{8\pi G}{3H^2} \frac{H^2}{2} r_i^2 (1 + \bar{\delta}_i) \\ &= -\frac{r_i}{r_m} \frac{\rho_b}{\rho_c} \frac{H^2 r_i^2}{2} (1 + \bar{\delta}_i) \\ &= -\frac{r_i}{r_m} \Omega K_i (1 + \bar{\delta}_i) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Igualando esta expresión para E con la ecuación (4.17), obtenemos

$$\begin{aligned} -\left(\frac{r_i}{r_m} \right) K_i \Omega_i (1 + \bar{\delta}_i) &= K_i \Omega_i [\Omega_i^{-1} - (1 + \bar{\delta}_i)] \\ \frac{r_m}{r_i} &= \frac{(1 + \bar{\delta}_i)}{\bar{\delta}_i - (\Omega_i^{-1} - 1)} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Evidentemente, $r_m \gg r_i$ si $\bar{\delta}_i \gtrsim (\Omega_i^{-1} - 1)$; los cascarones que sean ligeramente sobredensos, comparados con el valor crítico $(\Omega_i^{-1} - 1)$, se expandirán mucho más y pueden tomar un tiempo mayor para colapsar [34].

4.2. Evolución de la Densidad de Contraste

El tiempo de evolución puede ser encontrado integrando las ecuaciones de movimiento. La solución a la ecuación (4.14), para $E < 0$, está dada por [34]

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{GM}{r} + E. \quad (4.21)$$

para $E < 0$, podemos escribirla como

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \pm \left(\frac{2(GM - Er)}{r} \right)^{1/2}, \\ \pm dt &= \left(\frac{r}{2(GM - Er)} \right)^{1/2} dr, \\ &= \left(\frac{r}{2E \left(\frac{GM}{E} - r \right)} \right)^{1/2} dr, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2E}} \left(\frac{r}{\frac{GM}{E} - r} \right)^{1/2} dr, \end{aligned} \quad (4.22)$$

La ecuación diferencial anterior, de variables separables, se puede integrar tomando el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned} r &= \frac{GM}{2E} (1 - \cos\theta) \\ dr &= \frac{GM}{2E} \operatorname{sen}\theta d\theta. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial (4.22) obtenemos

$$\begin{aligned} \pm dt &= \frac{1}{\sqrt{2E}} \left(\frac{\frac{GM}{2E} (1 - \cos\theta)}{\frac{GM}{E} - \frac{GM}{2E} (1 - \cos\theta)} \right)^{1/2} \frac{GM}{2E} \operatorname{sen}\theta d\theta, \\ &= \frac{GM}{(2E)^{3/2}} \left(\frac{\frac{1}{2}(1 - \cos\theta)}{\frac{1}{2}(1 + \cos\theta)} \right)^{1/2} \operatorname{sen}\theta d\theta, \\ &= \frac{GM}{(2E)^{3/2}} \left(\frac{(1 - \cos\theta)^2}{(1 - \cos^2\theta)} \right)^{1/2} \operatorname{sen}\theta d\theta, \\ \int \pm dt &= \int \frac{GM}{(2E)^{3/2}} (1 - \cos\theta) d\theta, \\ \pm t &= \frac{GM}{(2E)^{3/2}} (\theta - \operatorname{sen}\theta) + C \end{aligned} \quad (4.24)$$

Entonces, la solución en forma paramétrica es

$$\begin{aligned} r &= \frac{GM}{2E} (1 - \cos\theta) \\ t &= \pm \frac{GM}{(2E)^{3/2}} (\theta - \operatorname{sen}\theta). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Ahora, sea

$$A = \frac{GM}{2E} \quad (4.26)$$

y

$$B = \frac{GM}{(2E)^{3/2}} \quad (4.27)$$

De (4.26) se obtiene $2E = \frac{GM}{A}$, reemplazando esta relación en (4.27) obtenemos

$$\begin{aligned} B &= \frac{GM}{(GM/A)^{3/2}} \\ &= A^{3/2}(GM)^{-1/2} \\ B(GM)^{1/2} &= A^{3/2} \\ A^3 &= GMB^2. \end{aligned} \quad (4.28)$$

En resumen [34],

$$r = A(1 - \cos\theta), \quad t + T = B(\theta - \sin\theta), \quad A^3 = GMB^2, \quad (4.29)$$

donde A y B son constantes relacionadas como se muestra en (4.29). El parámetro θ aumenta con el aumento de t , mientras r aumenta hasta un máximo valor antes de disminuir a cero. La constante T nos permite establecer la condición inicial para $t = t_i$, $r = r_i$. Un cascarón encerrando una masa M e inicialmente expandiéndose con el fondo del universo progresivamente irá más lento, alcanza un radio máximo en $\theta = \pi$, se ‘devuelve’ y colapsa. La época del radio máximo se conoce también como la época de ‘retorno’. En el ‘retorno’, $dr/dt = 0$ y $r = r_m$ [34].

Las constantes A y B pueden ser determinadas usando la ecuación (4.20). Para $\theta = \pi$, $r(\pi) = r_m = 2A$; comparando con (4.20) obtenemos

$$A = \frac{r_i}{2} \frac{(1 + \bar{\delta}_i)}{[\bar{\delta}_i - (\Omega_i^{-1} - 1)]}. \quad (4.30)$$

Usando la relación $A^3 = GMB^2$ y la expresión para M de (4.8) encontramos que B es

$$\begin{aligned} B &= \frac{A^{3/2}}{(GM)^{1/2}} \\ &= \left(\frac{r_i}{2}\right)^{3/2} \frac{(1 + \bar{\delta}_i)^{3/2}}{(\rho_b(4\pi r_i^3/3))^{1/2} (1 + \bar{\delta}_i)^{1/2} [\bar{\delta}_i - (\Omega_i^{-1} - 1)]^{3/2}} \\ &= \frac{1 + \bar{\delta}_i}{2H_i\Omega_i^{1/2}[\bar{\delta}_i - (\Omega_i^{-1} - 1)]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

El valor de T se puede fijar estableciendo $r = r_i$ en $t = t_i$. Como ejemplo consideremos el caso en el cual el universo de fondo es plano ($\Omega_i = 1$). Entonces

$$A = \frac{r_i}{2} \frac{1 + \bar{\delta}_i}{\bar{\delta}_i}; \quad B = \frac{1}{2H_i} \frac{1 + \bar{\delta}_i}{\bar{\delta}_i^{3/2}}. \quad (4.32)$$

Para $t = t_i$ debemos satisfacer las condiciones [34]

$$r_i = \frac{r_i}{2} \left(\frac{1 + \bar{\delta}_i}{\bar{\delta}_i} \right) (1 - \cos\theta_i) \quad (4.33)$$

$$t_i + T = \frac{1}{2H_i} \left(\frac{1 + \bar{\delta}_i}{\bar{\delta}_i^{3/2}} \right) (\theta_i - \sin\theta_i). \quad (4.34)$$

De la ecuación (4.33), obtenemos, $\cos\theta_i = (1 - \bar{\delta}_i)(1 + \bar{\delta}_i)^{-1}$. Dado que δ_i es muy pequeño, podemos aproximar esta relación como $\cos\theta_i \approx 1 - 2\delta_i$, obteniendo $\theta_i^2 = 4\delta_i$. Sustituyendo en (4.34) obtenemos

$$H_i(t_i + T) = \frac{2}{3}(1 + \delta_i), \quad (4.35)$$

o, como $H_i t_i = (2/3)$ para un universo con $\Omega = 1$, $H_i T = (2/3)\delta_i$. Esto muestra que $(T/t_i) = \delta_i \ll 1$. Por lo tanto, ignoraremos T en lo que sigue.

La ecuación (4.29), con constantes A y B fijados por (4.30) y (4.31), da la información completa acerca de como cada cascarón de masa evoluciona. Estas ecuaciones pueden ser usadas para trabajar todas las características de una perturbación esférica [34].

4.3. Perfil de Densidad de Contraste

Dado que M es constante para cada cascarón de masa, la densidad media dentro de un cascarón es

$$\bar{\rho}(t) = (3M/4\pi r^3) = \frac{3M}{4\pi A^3(1 - \cos\theta)^3}. \quad (4.36)$$

En este caso especial en el cual la densidad inicial contenida es homogénea, la densidad promedio calculada anteriormente es también la densidad actual (El perfil de densidad de una esfera con densidad constante es a menudo referido como el perfil ‘top-hat’). Para trabajar el tiempo de evolución de la densidad de contraste $\bar{\delta}(r, t)$, necesitamos saber como evoluciona la densidad del fondo. En el caso más simple de un universo plano con $K = 0$, el factor de expansión $a(t)$ y densidad $\rho_b(t)$ del fondo están dadas por [34]

$$a \propto t^{2/3}; \quad \rho_b(t) = \frac{1}{6\pi G t^2}. \quad (4.37)$$

Dividiendo la densidad media $\bar{\rho}(r, t)$ en la ecuación (4.36) por la densidad de fondo, obtenemos la densidad media de contraste

$$\frac{\bar{\rho}(r, t)}{\rho_b} = 1 + \bar{\delta}(r, t) = \frac{3M}{4\pi A^3} \frac{6\pi G B^2 (\theta - \sin\theta)^2}{(1 - \cos\theta)^3} \quad (4.38)$$

donde hemos usado la relación entre t y θ dadas en la ecuación (4.29) para $T = 0$. Dado que $A^3 = GMB^2$ se obtiene que

$$\bar{\delta} = \frac{9(\theta - \text{sen}\theta)^2}{2(1 - \text{cos}\theta)^3} - 1. \quad (4.39)$$

La evolución lineal para el promedio de la densidad de contraste se recupera en el límite para t pequeños. En este límite, de la relación (4.29), obtenemos [34]

$$t \approx \frac{B\theta^3}{6}, \quad (4.40)$$

esta aproximación resulta para la densidad de la ecuación (4.39) (Tomando la serie del seno y el coseno a segundo orden) lo siguiente

$$\begin{aligned} \bar{\delta} &= \frac{9\left(\frac{\theta^3}{3!} - \frac{\theta^5}{5!}\right)^2}{2\left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!}\right)^3} - 1 \\ &= \frac{9\frac{\theta^6}{(3!)^2}\left(1 - \frac{\theta^2}{4*5}\right)^2}{2\frac{\theta^6}{(2!)^3}\left(1 - \frac{\theta^2}{3*4}\right)^3} - 1 \\ &= \frac{9}{2}\frac{8}{36}\frac{\left(1 - \frac{\theta^2}{20}\right)^2}{\left(1 - \frac{\theta^2}{12}\right)^3} - 1 \\ &\approx \left(1 - \frac{\theta^2}{10}\right)\left(1 + \frac{\theta^2}{4}\right) - 1 \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{10} + \frac{\theta^2}{4} - \frac{\theta^4}{40} - 1 \\ &= \theta^2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10}\right) - \frac{\theta^4}{40} \\ &= \frac{6}{40}\theta^2 - \frac{\theta^4}{40} \\ &\approx \frac{3}{20}\theta^2. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Así que

$$\bar{\delta} = \frac{3}{20}\left(\frac{6t}{B}\right)^{2/3}. \quad (4.42)$$

Para un universo plano con $\Omega_i = 1$ y $H_i = 2/(3t_i)$ en (4.31) tenemos

$$B = \frac{3}{4}\frac{t_i}{\bar{\delta}^{3/2}}(1 + \bar{\delta}_i). \quad (4.43)$$

Usando este valor de B en la ecuación (4.42) encontramos, a primer orden

$$\bar{\delta} = \frac{3}{5}\bar{\delta}_i\left(\frac{t}{t_i}\right)^{2/3} \propto a(t). \quad (4.44)$$

Esta es la ley apropiada para el crecimiento ($\delta \propto t^{2/3}$) para los modos puramente crecientes en el régimen lineal si la velocidad peculiar es cero. Para el modelo $\Omega_i = 1$, A y B están dados por (4.32). Asumiendo que $\bar{\delta}_i$ es pequeño comparado con la unidad y tomando solamente los términos a primer orden de $\bar{\delta}_i$ en A y B , resulta [34]

$$A \approx \frac{r_i}{2\bar{\delta}_i}; \quad B \approx \frac{3t_i}{4\bar{\delta}_i^{3/2}}. \quad (4.45)$$

Es conveniente usar otras dos variables x y $\bar{\delta}_0$ en lugar de r_i y δ_i , donde la cantidad x es el radio comóvil: $x = r_i[a(t_0)/a(t_i)]$ correspondiente a r_i ; el parámetro $\bar{\delta}_0$ definido como: $\bar{\delta}_0 = [a(t_0)/a(t_i)](3\delta_i/5) = (3/5)\delta_i(1 + z_i)$, que es el valor actual de la densidad de contraste como lo predice la teoría lineal si la densidad de contraste era δ_i en el corrimiento al rojo z_i . De esta manera, en los nuevos términos tenemos (En adelante se omitirá la barra sobre $\bar{\delta}$) [34]

$$A \approx \frac{r_i}{2\bar{\delta}_i} = \frac{x \frac{a_i}{a_0}}{2 \frac{5}{3} \frac{a_i}{a_0} \bar{\delta}_0} = \frac{3x}{10\bar{\delta}_0}; \quad (4.46)$$

Por otro lado, de la ecuación (4.44) se tiene que

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{3}{5} \delta_i \left(\frac{t_0}{t_i} \right)^{2/3} \\ \delta_0 &= \frac{3}{5} * \frac{5}{3} \delta_0 \frac{a_i}{a_0} \left(\frac{t_0}{t_i} \right)^{2/3} \\ \frac{a_0}{a_i} &= \left(\frac{t_0}{t_i} \right)^{2/3} \\ t_i &= t_0 \left(\frac{a_i}{a_0} \right)^{3/2}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Por lo tanto

$$B \approx \frac{3t_i}{4\bar{\delta}_i^{3/2}} \quad (4.48)$$

$$= \frac{3}{4} \frac{t_0 \left(\frac{a_i}{a_0} \right)^{3/2}}{\left(\frac{5}{3} \delta_0 \frac{a_i}{a_0} \right)^{3/2}} \quad (4.49)$$

$$= \left(\frac{3}{5} \right)^{3/2} \frac{3t_0}{4\bar{\delta}_0^{3/2}}. \quad (4.50)$$

Poniendo todos los resultados juntos, la evolución de una región sobredensa se puede resumir en la siguientes ecuaciones [34]

$$r(t) = \frac{r_i}{2\bar{\delta}_i}(1 - \cos\theta) = \frac{3x}{10\bar{\delta}_0}(1 - \cos\theta), \quad (4.51)$$

$$t = \frac{3t_i}{4\bar{\delta}_i^{3/2}}(\theta - \sin\theta) = \left(\frac{3}{5} \right)^{3/2} \frac{3t_0}{4\bar{\delta}_0^{3/2}}(\theta - \sin\theta), \quad (4.52)$$

$$\bar{\rho}(t) = \rho_b \frac{9(\theta - \sin\theta)^2}{2(1 - \cos\theta)^3}, \quad (4.53)$$

La densidad puede ser expresada en términos del corrimiento al rojo usando la relación $(t/t_i)^{2/3} = (1+z_i)(1+z)^{-1}$, reemplazando esto en la ecuación (4.52)

$$(1+z) = \left(\frac{4}{3}\right)^{2/3} \frac{\delta_i(1+z_i)}{(\theta - \text{sen}\theta)^{2/3}} = \left(\frac{5}{3}\right) \left(\frac{4}{3}\right)^{2/3} \frac{\delta_0}{(\theta - \text{sen}\theta)^{2/3}}; \quad (4.54)$$

$$\delta = \frac{9(\theta - \text{sen}\theta)^2}{2(1 - \text{cos}\theta)^3} - 1. \quad (4.55)$$

Dada una densidad de contraste inicial en z_i , estas ecuaciones definen (implícitamente) la función $\delta(z)$ para $z > z_i$. La ecuación (4.54) define θ en términos de z (implícitamente); la ecuación (4.55) da la densidad de contraste para un $\theta(z)$. Por comparación note que la evolución lineal [29] da la densidad de contraste δ_L donde [34]

$$\delta_L = \frac{\rho_L}{\rho_b} - 1 = \frac{3}{5} \frac{\delta_i(1+z_i)}{1+z} = \frac{3}{5} \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3} (\theta - \text{sen}\theta)^{2/3}. \quad (4.56)$$

Podemos estimar la precisión de la teoría lineal comparando $\delta(z)$ y $\delta_L(z)$. Para empezar, para $z \gg 1$, tenemos $\theta \ll 1$ obtenemos $\delta(z) \approx \delta_L(z)$. Cuando $\theta = \pi/2$, $\delta_L = (3/5)(3/4)^{2/3}(\pi/2 - 1)^{2/3} = 0,341$ mientras que $\delta = (9/2)(\pi/2 - 1)^2 - 1 = 0,466$; así que la densidad de contraste actual es cerca del 40% más alta. Cuando $\theta = (2\pi/3)$, $\delta_L = 0,568$ y $\delta = 1,01 \approx 1$. Si interpretamos $\delta = 1$ como un punto de transición a no linelidad, entonces una transición ocurre para $\theta = 2\pi/3$, $\delta_L = 0,57$. De la ecuación (4.54), vemos que esto ocurre para un corrimiento al rojo $(1+z_{nl}) = 1,06\delta_i(1+z_i) = \delta_0/0,57$. El siguiente estado importante ocurre para $\theta = \pi$ cuando la región esférica alcanza el radio máximo de expansión. De nuestras ecuaciones encontramos que el corrimiento al rojo z_m , el radio máximo del casacarón r_m y la densidad de contraste promedio δ_m para la época de retorno son [34]

$$(1+z_m) = \frac{\delta_i(1+z_i)}{\pi^{2/3}(3/4)^{2/3}} = 0,57(1+z_i)\delta_i = \frac{5}{3} \frac{\delta_0}{(3\pi/4)^{2/3}} \approx \frac{\delta_0}{1,062}, \quad (4.57)$$

$$r_m = \frac{3x}{5\delta_0}, \quad (4.58)$$

$$\left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_b}\right) = 1 + \bar{\delta}_m = \frac{9\pi^2}{16} \approx 5,6. \quad (4.59)$$

La primera ecuación nos da el corrimiento al rojo del retorno para una región, parametrizada por la densidad lineal de contraste δ_0 en la época actual. Si, por ejemplo, $\delta_i \approx 10^{-3}$ para $z_i \approx 10^4$, tales perturbaciones podrían tener una época de retorno para $(1+z_m) \approx 5,7$ o cuando $z_m \approx 4,7$. La segunda ecuación da un radio máximo alcanzado por la perturbación. La tercera ecuación muestra que la región bajo consideración está cerca a las 6 veces más densa que la del universo de fondo, en la época de retorno. Esto corresponde a una densidad de contraste de $\delta_m \approx 4,6$ lo cual está definitivamente en el régimen no lineal. La evolución lineal da $\delta_L = 1,063$ en $\theta = \pi$.

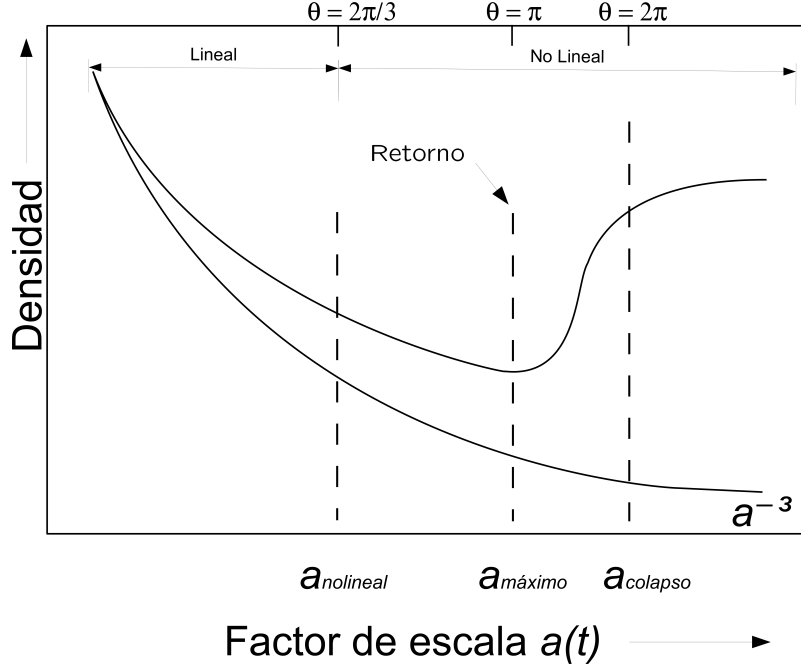


Figura 4.1: La figura muestra la evolución de la densidad con el factor de escala para el caso de la aproximación lineal y el caso del perfil top hat. Inicialmente se muestra como las curvas se van alejando en el régimen lineal, la densidad alcanza un valor mínimo, vuelve a tomar algunos valores anteriores y se estabiliza.

4.4. Proceso de Virialización

Una vez que la región esférica retorna, esta se continuará contrayendo. La ecuación (4.51) sugiere que en $\theta = 2\pi$ toda la masa colapsará en un punto. Sin embargo, antes que esto suceda, la aproximación en la que la materia es un cascarón esférico con velocidades aleatorias de las partículas pequeñas, se terminará. Las componentes de la densidad sin colisión, como la materia oscura, alcanzarán un equilibrio virial por un proceso conocido como ‘relajación violenta’.

Las órbitas que deberían seguir las partículas durante la evolución del sistema, bajo el supuesto de que la masa se distribuye de manera suave en el espacio, se modifica. Este fenómeno recibe el nombre de relajación. El tiempo que le lleva a un sistema relajarse recibe el nombre de tiempo de relajación t_R . Durante el colapso habrán fluctuaciones muy grandes en el potencial gravitacional, en una escala de tiempo del orden del tiempo de colapso de caída libre, tiempo que se puede obtener de la ecuación (4.37) [34]

$$t_{col} \approx (G\rho)^{-1/2}. \quad (4.60)$$

Dado que el potencial está cambiando con el tiempo, las partículas individuales no siguen órbitas que conserven la energía. El cambio en la energía de una partícula depende de una forma compleja de su posición inicial y velocidad, así que, un potencial variando en el tiempo puede proveer un mecanismo de relajación para las partículas que operan en una escala de tiempo t_{col} , que es pequeña comparada con el tiempo de relajación t_R . Cuando el sistema se estabiliza como un todo se dice que la estructura se virializa.

El anterior proceso relajará las componentes que no colisionen (materia oscura) a una configuración con radio r_{vir} velocidad de dispersión v y densidad ρ_{col} . Tal sistema virializado puede ser usado para modelar las estructuras que vemos en el universo. Estimaremos ahora los parámetros físicos de tal sistema.

Después de la virialización del cascarón colapsado, la energía potencial U y la energía cinética estarán relacionadas por $|U| = 2K$ así que la energía total $E_{tot} = U + K = -K$. Para $t = t_m$ toda la energía estaba en forma de energía potencial. La energía potencial para un sistema de partículas se describe a través del *tensor de energía potencial de Chandrasekhar*

$$U_{jk} = - \int \rho(\mathbf{x}) x_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} d^3 \mathbf{x}, \quad (4.61)$$

donde la integral es tomada sobre todo el espacio. Para el caso especial de un cuerpo esférico, podemos encontrar una expresión para U directamente del (4.61) tomando su traza

$$U = - \int \rho \mathbf{x} \cdot \nabla \Phi d^3 x \quad (4.62)$$

Para un sistema esférico tomando el potencial Newtoniano

$$\nabla \Phi = \frac{d\Phi}{dr} \hat{e}_r = \frac{GM(r)}{r^2} \hat{e}_r. \quad (4.63)$$

Sustituimos esta expresión en (4.62) e integramos

$$U = -4\pi G \int_0^\infty \rho M(r) r dr \quad (4.64)$$

consideremos el caso de una distribución homogénea con radio $r = r_m$ y densidad ρ . Tenemos que $M(r) = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$ entonces

$$\begin{aligned} U &= -\frac{16\pi^2}{3} G \rho^2 \int_0^{r_m} r^4 dr \\ &= -\frac{16}{15} \pi^2 G \rho^2 r_m^5 \\ &= -\frac{16}{15} \pi^2 G \frac{M^2}{\left(\frac{4}{3}\pi r_m^3\right)^2} r_m^5 \\ &= -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{r_m}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Así, para un sistema esféricamente simétrico con densidad constante, $E_{tot} \approx -3GM^2/5r_m$. La ‘velocidad virial’ v y el ‘radio virial’ r_{vir} para la masa colapsando puede ser estimada por la ecuaciones [34]

$$U(r_{vir}) = -2K(r_{vir}); \quad E = U + K = U(r_m) = \frac{1}{2}U(r_{vir}) \quad (4.66)$$

Luego $r_{vir} = \frac{1}{2}r_m$ dado que $U \propto r^{-1}$. Por otro lado,

$$K = \frac{Mv^2}{2} = -E_{tot} = \frac{3GM^2}{5r_m}, \quad (4.67)$$

Obtenemos

$$v = (6GM/5r_m)^{1/2}; \quad r_{vir} = r_m/2 \quad (4.68)$$

El tiempo que le toma a la fluctuación alcanzar el equilibrio virial, t_{col} , es esencialmente el tiempo correspondiente a $\theta = 2\pi$. De la ecuación (4.54), encontramos que el corrimiento al rojo para el colapso, z_{col} es [34]

$$(1 + z_{col}) = \frac{\delta_i(1 + z_i)}{(2\pi)^{2/3}(3/4)^{3/4}} = 0,36\delta_i(1 + z_i) = 0,63(1 + z_m) = \frac{\delta_0}{1,686}. \quad (4.69)$$

La densidad del objeto colapsado puede ser determinado muy facilmente. Dado que $r_{vir} = r_m/2$, la densidad promedio del objeto colapsado es $\rho_{col} = 8\rho_m$ donde ρ_m es la densidad del objeto en el retorno. Además, $\rho_m \approx 5,6\rho_b(t_m)$ y $\rho(t_m) = (1 + z_m)(1 + z_{col})^{-3}\rho_b(t_{col})$. Combinando estas relaciones, obtenemos [34]

$$\rho_{col} \approx 2^3\rho_m \approx 44,8\rho_b(t_m) \approx 170\rho_0(1 + z_{col})^3. \quad (4.70)$$

Donde ρ_0 es la densidad cosmológica actual. Este resultado determina ρ_{col} en términos del corrimiento al rojo de formación del objeto. Una vez el sistema se haya virializado, su densidad y tamaño no cambian. Dado que $\rho_b \propto a^{-3}$, la densidad de contraste δ se incrementa como a^3 para $t > t_{col}$.

Consideremos ahora el colapso de la componente bariónica, para el cual se toman resultados similares. Durante el colapso, la mezcla gaseosa de hidrogeno y helio producen choques recalentandose a una temperatura en la cual el balance de presión puede prevenir un colapso mayor. En este periodo la energía térmica será comparable a la energía del potencial gravitacional. La temperatura del gas, T_{vir} , está relacionada a la velocidad de dispersión v^2 por [34]

$$3\rho_{gas}T_{vir}/2\mu = \rho_{gas}v^2/2, \quad (4.71)$$

donde ρ_{gas} es la densidad del gas y μ es su peso molecular promedio. Esto da

$$T_{vir} = \frac{\mu v^2}{3}. \quad (4.72)$$

Es útil expresar el resultado anterior con los números típicos para varias cantidades mostradas explícitamente. Si la fracción del peso del He es Y y el gas está completamente ionizado, entonces,

$$\mu = \frac{m_H n_H + m_{He} n_{He}}{2n_H + 3n_{He}} = \frac{m_H}{2} \left(\frac{1 + Y}{1 + 0,37Y} \right) \approx 0,57m_H, \quad (4.73)$$

Si $Y = 0,25$. Aparte de los parámetros cosmológicos, dos parámetros necesitan ser especificados. Estos pueden ser, la masa M de la región densa y el corrimiento al rojo de formación z_{col} . Usando los parámetros cosmológicos

$$\rho_0 = 1,88 \times 10^{-29} \Omega h^2 gcm^{-3}, \quad (4.74)$$

$$x = 0,92(\Omega h^2)^{-1/3} (M/10^{12} M_\odot)^{1/3} \text{Mpc}, \quad (4.75)$$

$$t_0 = 0,65 \times 10^{10} h^{-1} \text{yr}, \quad (4.76)$$

y $\delta_0 = 1,686(1 + z_{col})$, encontramos

$$\begin{aligned}
r_{vir} &= 258(1 + z_{col})^{-1} \left(\frac{M}{10^{12} M_{\odot}} \right)^{1/3} h_{0,5}^{-2/3} \text{kpc} \\
&= 434\delta_0^{-1} h_{0,5} M_{12}^{1/3} \text{kpc}, \\
v &= 100(1 + z_{col})^{1/2} \left(\frac{M}{10^{12} M_{\odot}} \right)^{1/3} h_{0,5}^{1/3} \text{km s}^{-1} \\
&= 434\delta_0^{-1} h_{0,5} M_{12}^{1/3} \text{kpc}, \\
T_{vir} &= 2,32 \times 10^5 (1 + z_{col}) \left(\frac{M}{10^{12} M_{\odot}} \right)^{2/3} h_{0,5}^{2/3} \text{K} \\
&= 2,32 \times 10^5 \delta_0 h_{0,5}^{2/3} M_{12}^{2/3} \text{K}.
\end{aligned} \tag{4.77}$$

También note que

$$t_{col} = t_0(1 + z_{col})^{-3/2}; \quad (1 + z_m) = 1,59(1 + z_{col}). \tag{4.78}$$

Estas expresiones usan $h_{0,5}$, la constante de Hubble en unidades de $50 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$.; tenemos también que $\Omega = 1$. Los resultados anteriores pueden ser usados para estimar los parámetros típicos del colapso de objetos una vez se tenga M y el corrimiento al rojo del colapso. Por ejemplo, si hay objetos con $M = 10^{12} M_{\odot}$ (que es la masa de una galaxia típica) colapsa para un corrimiento al rojo de, digamos 2, entonces se obtiene un $r_{vir} = 86 \text{kpc}$, $t_{col} \approx 1,2 \times 10^9 \text{yr}$, $v \approx 173 \text{km/s}$, $T_{vir} \approx 7 \times 10^5 \text{K}$. La densidad de contraste de la galaxia en el presente será $(\rho_{col}/\rho_0) \approx 170(1 + z_{col})^3 \approx 4,6 \times 10^3$. Estos valores están generalmente de acuerdo con los parámetros que uno asocia con un halo galáctico. La evolución lineal, combinada con el modelo de colapso esférico, parece ser capaz de producir estructuras de magnitudes correctas. El radio virial del contenido bariónico de la galaxia será mucho más pequeño porque los bariones pueden enfriarse por procesos radiativos y de contracción [34].

El modelo esférico de top-hat puede ser usado para estimar la densidad de contraste no lineal de la siguiente forma: Empezamos con una densidad de contraste $\delta_0 = (3/5)\delta_i(1 + z_i)$. La densidad actual de contraste, por supuesto, será más alta y puede ser calculada como sigue

- (1) Si $\delta_0 < 1,063$, entonces podemos encontrar un $\theta(\delta_0)$ en el rango $0 < \theta < \pi$ invirtiendo la relación (4.56)

$$\delta_0 = (3/5)(3/4)^{2/3}(\theta - \text{sen}\theta)^{2/3}. \tag{4.79}$$

La densidad de contraste correcta puede ser ahora obtenida de (4.55) usando este valor de $\theta(\delta_0)$.

- (2) Si $\delta_0 > 1,686$, entonces nuestro análisis muestra que una estructura deberá ya tener formado para $(1 + z_{col}) = (\delta_0/1,686)$ con densidad $\rho_{col} \approx 170\rho_0(1 + z_{col})^3 = (170/1,686^3)\rho_0\delta_0^3 \approx 35,5\rho_0\delta_0^3$. La densidad correcta de contraste es, de esta manera, $\delta = (\rho_{col}/\rho_0) - 1 = 35,5\delta_0^3 - 1$.
- (3) Para $1,063 < \delta_0 < 1,686$, el modelo de colapso esférico es una mala aproximación y no puede ser usada para hacer predicciones reales. La densidad de contraste actual se incrementa dos ordenes de magnitud durante este intervalo [34].

4.5. Descripción Métrica de una Perturbación en Relatividad General

Una solución simple en relatividad general que describe la evolución de una inhomogeneidad en el universo de Friedmann puede ser descrita por una métrica de la forma [34]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(x, t) \left[\frac{dx^2}{1 - k(x)x^2} \left[\frac{(ax)'}{a} \right]^2 + x^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right] \quad (4.80)$$

donde $a(x, t)$ es un ‘factor de escala’ que depende tanto del tiempo cosmológico como del espacio, $k(x)$ es una función de curvatura que depende del espacio. La métrica puede ser escrita en la forma anterior siempre que la masa del cascarón para diferentes valores de x no se crucen; una condición que será satisfecha por la distribución de densidad $\rho(x, t)$ el cual decese monotonamente con x .

Calculemos las ecuaciones de Einstein

$$g_{00} = -1 \quad (4.81)$$

$$g_{0i} = g_{i0} = 0 \quad (4.82)$$

$$g_{11} = \frac{(ax)'^2}{1 - kx^2} \quad (4.83)$$

$$g_{22} = a^2x^2 \quad (4.84)$$

$$g_{33} = a^2x^2 \text{sen}^2\theta \quad (4.85)$$

$$(4.86)$$

Los simbolos de Christoffel resultantes no nulos son

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{(ax)'(\dot{ax})'}{1 - kx^2} \quad (4.87)$$

$$\Gamma_{22}^0 = a\dot{a}x^2 \quad (4.88)$$

$$\Gamma_{33}^0 = a\dot{a}x^2 \text{sen}^2\theta \quad (4.89)$$

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{(\dot{ax})'}{(ax)'} \quad (4.90)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \left[\frac{2(ax)''}{(ax)'} + \frac{(kx^2)'}{1 - kx^2} \right] \quad (4.91)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -(1 - kx^2) \frac{ax}{(ax)'} \quad (4.92)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -(1 - kx^2) \frac{ax}{(ax)'} \text{sen}^2\theta. \quad (4.93)$$

$$\Gamma_{02}^2 = \frac{\dot{a}}{a} \quad (4.94)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{(ax)'}{ax} \quad (4.95)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\text{sen}\theta\text{cos}\theta \quad (4.96)$$

$$\Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a} \quad (4.97)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{(ax)'}{ax} \quad (4.98)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \frac{\text{cos}\theta}{\text{sen}\theta} \quad (4.99)$$

Las componentes del tensor de Ricci que sobreviven son

$$R_{00} = - \left[\frac{(\ddot{a}x)'}{(ax)'} + 2\frac{\ddot{a}}{a} \right]. \quad (4.100)$$

$$R_{01} \equiv 0. \quad (4.101)$$

$$R_{11} = \frac{(ax)'}{1-kx^2} \left[\frac{(\ddot{a}x)'}{(ax)'} + \frac{(kx^2)'}{ax(ax)'} + \frac{2\dot{a}(\dot{a}x)'}{a(ax)'} \right]. \quad (4.102)$$

$$R_{22} = (ax)^2 \left[\frac{a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{a^2} + \frac{(kx^2)'}{2ax(ax)'} + \frac{\dot{a}(\dot{a}x)'}{a(ax)'} \right]. \quad (4.103)$$

$$R_{33} = \text{sen}^2\theta R_{22}. \quad (4.104)$$

$$(4.105)$$

Así, el escalar de Ricci resulta

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} \quad (4.106)$$

$$= 2 \left[\frac{(\ddot{a}x)'}{(ax)'} + \frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{a^2} + \frac{(kx^2)'}{ax(ax)'} + \frac{2\dot{a}(\dot{a}x)'}{a(ax)'} \right]. \quad (4.107)$$

Las componentes del tensor de Einstein son

$$G_{00} = \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} + \frac{((\dot{a}^2 + k)x^2)'}{ax(ax)'} \quad (4.108)$$

$$G_{11} = -\frac{(ax)'}{1-kx^2} \left[\frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{a^2} \right]. \quad (4.109)$$

$$G_{22} = -\frac{ax}{2(ax)'} \left[((2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k)x^2)' \right]. \quad (4.110)$$

$$G_{33} = \text{sen}^2\theta G_{22}. \quad (4.111)$$

Por otro lado, de las ecuaciones de movimiento se obtiene

$$T_{\rho;\mu}^\nu = T_{\rho,\mu}^\nu - \Gamma_{\rho\mu}^\nu T_\sigma^\nu + \Gamma_{\lambda\mu}^\nu T_\rho^\lambda \quad (4.112)$$

$$T_{\rho;\nu}^\nu = T_{\rho,\nu}^\nu - \Gamma_{\rho\nu}^\nu T_\sigma^\nu + \Gamma_{\lambda\nu}^\nu T_\rho^\lambda \quad (4.113)$$

$$T_{0;\nu}^\nu = T_{0,\nu}^\nu - \Gamma_{0\nu}^\nu T_\sigma^\nu + \Gamma_{\lambda\nu}^\nu T_0^\lambda = 0. \quad (4.114)$$

Lo que para un modelo de polvo resulta

$$\begin{aligned} T_{0;0}^0 &= T_{0,0}^\nu + (\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) T_0^0. \\ &= \dot{\rho} + \rho \left(\frac{(\dot{a}x)'}{(ax)'} + 2\frac{\dot{a}}{a} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.115)$$

Sabemos también que al sistema no se le está adicionando masa y se puede obtener de acuerdo al siguiente cálculo

$$M = \int \rho \sqrt{h} d^3x, \quad (4.116)$$

$$= \int \rho \left(\frac{a^2 x^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{1-kx^2}} \right) dx d\Omega, \quad (4.117)$$

donde, $h = \det g_{ij} = a^4 x^4 \text{sen}^2\theta (ax)' (1-kx^2)^{-1}$. Tomando la derivada temporal de M se tiene

$$\frac{dM}{dt} = \frac{x^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{1-kx^2}} \int \frac{d}{dt} [a^2 (ax)' \rho] dx d\Omega = 0 \quad (4.118)$$

Esto implica que

$$\frac{d}{dt} [a^2 (ax)' \rho] \equiv 0 \quad (4.119)$$

por la ecuación (4.115) de esta manera la cantidad

$$a^2 (ax)' \rho = \text{cte} \quad (4.120)$$

o

$$\frac{\rho (ax)'}{a} = \frac{C}{a^3}. \quad (4.121)$$

Ahora, las ecuaciones de Einstein determinan el tiempo de evolución del factor de escala $a(x, t)$ y la densidad de materia $\rho(x, t)$ resultan

$$\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} + \frac{((\dot{a}^2 + k)x^2)'}{ax(ax)'} = 8\pi G\rho = \frac{C}{a^2(ax)'}. \quad (4.122)$$

Donde C es una constante. En este caso (4.122) representa dos ecuaciones, una da la evolución de a y la otra la de ρ . Si tanto ρ , como a y k fueran independientes de x estas ecuaciones se reducen a las ecuaciones estándar para el universo de Friedmann [34].

Esta generalización del universo homogéneo ofrece una considerable intuición en la forma como se comporta una sobredensidad esférica. La ecuación (4.122) muestra que el comportamiento de un cascarón de masa para un radio x está completamente especificado por el valor local de la curvatura k . Si para algún x , $k(x) \leq 0$, la masa correspondiente al cascarón se expandirá por siempre, mientras que si $k(x) \geq 0$, este alcanzará algún estado y colapsará.

La parte temporal de la ecuación de campo se puede describir de la forma

$$G_{00} = \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} + \frac{((\dot{a}^2 + k)x^2)'}{ax(ax)'} \quad (4.123)$$

$$= \frac{x(ax)'\dot{a}^2 + x(ax)'k + a(\dot{a}^2x^2 + kx^2)'}{a^2x(ax)'} * \frac{x}{x} \quad (4.124)$$

$$= \frac{\dot{a}^2x^2(ax)' + ax(\dot{a}^2x^2)' + kx^2(ax)' + ax(kx^2)'}{(ax)^2(ax)'} * \frac{3}{3} \quad (4.125)$$

$$= \frac{3((a\dot{a}^2x^3)' + (akx^3)')}{((ax)^3)'} \quad (4.126)$$

$$= \frac{3(a\dot{a}^2x^3 + akx^3)'}{((ax)^3)'} \quad (4.127)$$

Así, para el modelo de polvo se obtiene [33]

$$(a\dot{a}^2x^3 + akx^3)' = \frac{8\pi G}{3}\rho [(ax)^3]' \quad (4.128)$$

Por otro lado, la componente espacial 1 – 1 de las ecuaciones de campo para el modelo de polvo es

$$G_{11} = 2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k = 0 \quad (4.129)$$

La ecuación (4.129) multiplicada por \dot{a} da

$$\frac{\partial}{\partial t}(\dot{a}^2a + ak) = 0, \quad (4.130)$$

luego

$$\dot{a}^2a + ak = F(x). \quad (4.131)$$

Una manera de interpretar esta ecuación se tiene cuando el segundo sumando toma la siguiente forma $ak = F(x) + G(x, t)$, dado que, el término \dot{a}^2a debe ser una función de (x, t) . Remplazando esta expresión en (4.131) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{a}^2a &= G(x, t), \\ \frac{da}{dt}a^{1/2} &= G^{1/2} \\ \int a^{1/2}da &= \int \tilde{G}(x, t)dt \\ \frac{2}{3}a^{3/2} + C &= \int \tilde{G}(x, t)dt \end{aligned} \quad (4.132)$$

Asumiendo que la función $\tilde{G}(x, t)$ es de variables separables $\tilde{G}(x, t) = u(x)v(t)$ y tomando $C = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}a^{3/2} &= \int u(x)v(t)dt \\ \frac{2}{3}a^{3/2} &= u(x) \int v(t)dt \\ a(x, t) &= \left(\frac{3}{2}u(x)V(t) \right)^{2/3} \end{aligned} \quad (4.133)$$

Donde $V(t)$ es la función primitiva de $v(t)$. Se observa entonces que $a(x, t)$ tendrá esta forma general bajo esta aproximación.

La función $F(x)$ puede ser ajustada arreglando las cordenadas asignadas x sobre la hipersuperficie inicial. En particular, si el espacio no está fuertemente perturbado, podemos hacer F independiente de x , así las ecuaciones (4.128) y (4.131) se convierten en

$$\dot{a}^2 a + ak = A = \text{constante}, \quad \frac{8\pi G\rho}{3} a^2 (ax)' = A. \quad (4.134)$$

Una interpretación geométrica de este modelo se da para el caso $k \equiv R^{-2} \geq 0$ y $t = \text{cte}$ es representado por una superficie dos dimensional axialmente simétrica en la figura 4.2 [33].

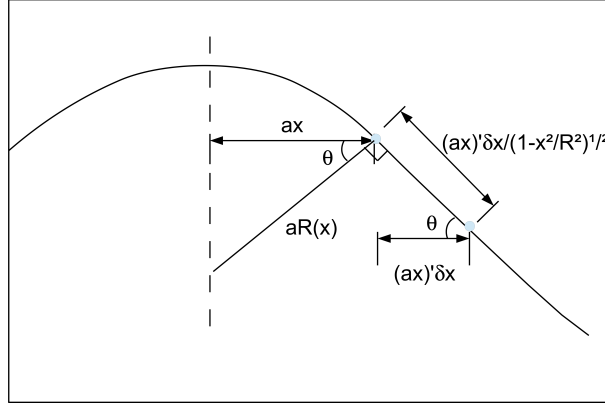


Figura 4.2: La longitud propia medida para un t fijo se supone medida sobre la hoja. Los dos círculos abiertos sobre la hoja representan dos puntos en el mismo tiempo y ángulos polares para una posición en la cordenada radial x y $x + \delta x$. La distancia perpendicular desde el eje es $a(x, t)x$, así que, la circunferencia del círculo $x = \text{cte.}$ es $2\pi ax$.

La distancia radial medida entre dos puntos sobre la superficie es [33]

$$\delta r = \frac{(ax)' \delta x}{(1 - x^2/R^2)^{1/2}}, \quad (4.135)$$

de acuerdo con la distancia propia dada en la ecuación (4.80), la pendiente de la superficie en la dirección radial es

$$\cos\theta = \frac{ax}{aR} = \frac{x}{R}, \quad (4.136)$$

$$\sin\theta = \frac{(ax)' \delta x}{\delta x (1 - x^2/R^2)^{1/2}} = \frac{1}{(1 - x^2/R^2)^{1/2}}, \quad (4.137)$$

luego,

$$m = \tan\theta = \frac{x}{R(1 - x^2/R^2)^{1/2}}, \quad (4.138)$$

y así la normal a la superficie intersecta al eje a una distancia aR del eje. Si la curvatura de la hoja es constante, aR es la curvatura. Si $x = R(x)$, la superficie es vertical y habrá un bulbo; si $x \ll R$ en todas

partes, el espacio se arrugará ligeramente.

Una medida útil de la distancia efectiva r_e a un cascarón de masa x del centro es la cantidad

$$r_e = ax \quad (4.139)$$

La longitud propia de la circunferencia en x es $2\pi r_e$, así que, si $R(x) \gg x$, concordará con lo que normalmente llamamos distancia propia aún si la materia al interior de x sufra un colapso. La aceleración gravitacional para r_e , para un observador moviéndose libremente en $x = \text{cte}$, es

$$\dot{a}^2 a + a/R^2 = A, \quad R(x) \gg x, \quad \dot{a}^2 a = A \quad \dot{a}^2 = \frac{A}{a} \quad (4.140)$$

derivando respecto el tiempo obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{a}^2 a &= A \\ 2\dot{a}\ddot{a}a + \dot{a}^3 &= 0 \\ 2\ddot{a}a + \dot{a}^2 &= 0 \\ \ddot{a} &= -\frac{\dot{a}^2}{2a} = -\frac{A}{2a} * \frac{x^3}{x^3} \\ \ddot{a}x &= -\frac{Ax^3}{2r_e^2}. \end{aligned} \quad (4.141)$$

Una medida de la masa gravitacional dentro de r_e es entonces

$$\begin{aligned} F = m_i \ddot{a}x &= -\frac{Gm_i M_e}{r_e^2} \\ -\frac{Ax^3}{2r_e^2} &= -\frac{Gm_i M_e}{r_e^2} \\ M_e &= \frac{Ax^3}{2G}. \end{aligned} \quad (4.142)$$

La rata de cambio de esta masa efectiva con r_e para un t fijo es

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_e}{\partial r_e} &= \frac{\partial x}{\partial r_e} \frac{\partial M_e}{\partial x} \\ &= \frac{1}{\frac{\partial r_e}{\partial x}} \frac{3Ax^2}{2G} \\ &= \frac{3Ax^2}{G(ax)'} = 4\pi\rho r_e^2, \end{aligned} \quad (4.143)$$

que es acorde con la expresión usual Newtoniana.

Consideremos ahora la evolución de una fluctuación de densidad positiva que sea lo suficientemente fuerte para hacer que $R^{-2} > 0$. La solución a las ecuaciones (4.134) es, para R^{-2} [33],

$$a = \frac{1}{2}R^2 A(1 - \cos\eta), \quad t = \frac{1}{2}R^3 A(\eta - \sin\eta), \quad (4.144)$$

Solución que coincide con la solución paramétrica (4.29) estudiada en la sección 4.2

4.5.1. Solución Analítica Propuesta

La ecuación (4.129) sugiere que el factor de escala $a(x, t)$ se puede expresar como una función de variables separables $a(x, t) = f(t)k(x)$ debido a la forma explícita de $k(x)$. De modo que rescribiendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} + \frac{((\dot{a}^2 + k)x^2)'}{ax(ax)'} &= C, \\ 8\pi G\rho a^2(ax)' &= C, \\ 2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k &= 0\end{aligned}\tag{4.145}$$

para $a(x, t) = f(t)k(x)$, se obtiene

$$\frac{\dot{f}^2 k + 1}{f^2 k} + \frac{((\dot{f}^2 k + 1)kx^2)'}{f^2 kx(kx)'} = C,\tag{4.146}$$

$$8\pi Gf^3 k^2 (kx)'\rho = C,\tag{4.147}$$

$$2f\ddot{f} + \dot{f}^2 + 1 = 0\tag{4.148}$$

Solucionemos la ecuación (4.148) rescribiendola de la forma

$$2\ddot{f} + \frac{\dot{f}^2}{f} + \frac{1}{f} = 0\tag{4.149}$$

ahora, tomando la siguiente sustitución $u(f) = \dot{f}^2$ la ecuación anterior se reduce a una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$u' + \frac{u}{f} + \frac{1}{f} = 0\tag{4.150}$$

Esta ecuación tiene la forma de la ecuación de Bernoulli

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha\tag{4.151}$$

para $\alpha = 0$ cuya solución general de esta forma es

$$u(y) = e^{-\int P(y)dy} \left(\int Q(y)e^{\int P(y)dy} dy + C_1 \right)\tag{4.152}$$

Así, remplazando para el caso de $P(f) = \frac{1}{f}$ y $Q(f) = -\frac{1}{f}$ obtenemos

$$\begin{aligned}u(f) &= \frac{1}{f} \left(\int -df + C_1 \right) \\ &= \frac{1}{f}(-f + C_2) \\ &= \frac{C_2}{f} - 1\end{aligned}\tag{4.153}$$

Ahora, resolviendo la sustitución $u(f) = \dot{f}^2$ da

$$\begin{aligned}
\dot{f}^2 &= \frac{C_2}{f} - 1 \\
\dot{f} &= \left(\frac{C_2}{f} - 1 \right)^{1/2} = \left(\frac{C_2 - f}{f} \right)^{1/2} \\
\int dt &= \int \left(\frac{f}{C_2} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{1 - \frac{f}{C_2}} \right)^{1/2} df \\
t + C_3 &\approx \int \left(\frac{f}{C_2} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{f}{2C_2} \right) df \\
t + C_3 &\approx \int \left(\frac{1}{C_2} f^{1/2} + \frac{1}{2C_2} f^{3/2} \right) df \\
t &\approx \frac{2}{3} f^{3/2} + \frac{2}{10} f^{5/2} + C_4
\end{aligned} \tag{4.154}$$

Si tomamos el intervalo del dominio donde primer término domina sobre el segundo resulta

$$f \approx \left(\frac{3}{2} (t + C_4) \right)^{2/3} \tag{4.155}$$

Bajo esta aproximación se obtiene la forma funcional correcta para la evolución del factor de escala para la época de materia.

Analicemos la ecuación (4.146)

$$\frac{\dot{f}^2 k + 1}{f^2 k} + \frac{\left((\dot{f}^2 k + 1) k x^2 \right)'}{f^2 k x (kx)'} = C, \tag{4.156}$$

esta la podemos describir de la siguiente forma

$$\frac{\dot{f}^2}{f^2} + \frac{1}{f^2 k} + \frac{\dot{f}^2 (k^2 x^2)'}{f^2 k x (kx)'} + \frac{(kx^2)'}{f^2 k x (kx)'} = C, \tag{4.157}$$

Dado que $(k^2 x^2)' = 2kx(kx)'$ y $(kx^2)' = kx + \frac{kx(kx)'}{k}$ la ecuación anterior se describe como

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{f}^2}{f^2} + \frac{1}{f^2 k} + 2 \frac{\dot{f}^2}{f^2} + \frac{1}{f^2} \left(\frac{1}{(kx)'} + \frac{1}{k} \right) &= C \\
3\dot{f}^2 - C f^2 + \frac{2}{k} + \frac{1}{(kx)'} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.158}$$

Ecuación que es de la forma: $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, por lo tanto

$$\alpha_1 = 3\dot{f}^2 - C f^2 \tag{4.159}$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{k} + \frac{1}{(kx)'} \tag{4.160}$$

Para (4.159) da

$$\dot{f} = \sqrt{\frac{1}{3}} (\alpha_1 + C f^2)^{1/2} \quad (4.161)$$

Utilizando separación de variables e integrando el resultado es

$$\int_0^t dt = \int_0^f \frac{df}{\sqrt{\frac{\alpha_1}{3}} \left(1 + \left(\frac{C}{\alpha_1}\right) f^2\right)^{1/2}} \quad (4.162)$$

$$t = \sqrt{\frac{3}{C}} \operatorname{asinh} \left(\sqrt{\frac{C}{\alpha_1}} f \right). \quad (4.163)$$

de esta forma

$$f = \sqrt{\frac{\alpha_1}{C}} \sinh \left(\sqrt{\frac{C}{3}} t \right). \quad (4.164)$$

Se observa entonces que en para la función $f(t)$ la constante α_1 debe ser mayor o igual que cero para que siempre tenga un rango real. Por otro lado, para (4.160) se tiene que

$$\begin{aligned} (kx)' &= \frac{k}{\alpha_2 k - 2} \\ k'x &= k \left(\frac{3 - \alpha_2 k}{\alpha_2 k - 2} \right) \end{aligned} \quad (4.165)$$

Haciendo separación de variables e integrando se obtiene

$$\int_{x_i}^x \frac{dx}{x} = \int_{k_i}^k \frac{dk}{k} \left(\frac{\alpha_2 k - 2}{3 - \alpha_2 k} \right) \quad (4.166)$$

$$\ln(x) - \ln(x_i) = \int_{k_i}^k \frac{dk}{k} \left(\frac{\frac{\alpha_2}{3}k - \frac{2}{3}}{1 - \frac{\alpha_2}{3}k} \right) \quad (4.167)$$

$$\ln(x) - \ln(x_i) = -\frac{1}{3} \left[\ln\left(3 - \frac{\alpha_2}{3}k\right) + 2\ln k \right] + \frac{1}{3} \left[\ln\left(3 - \frac{\alpha_2}{3}k_i\right) + 2\ln k_i \right] \quad (4.168)$$

Así,

$$\ln(x) = \ln \left[k^2 - \frac{\alpha_2}{3}k^3 \right]^{-\frac{1}{3}} + C.I. \quad (4.169)$$

Entonces

$$\begin{aligned} x &= \left[3k^2 - \frac{\alpha_2}{3}k^3 \right]^{-\frac{1}{3}} \\ x &\approx \left[-\frac{\alpha_2}{3}k^3 \right]^{-\frac{1}{3}} \\ k &= -\left(\frac{3}{\alpha_2} \right)^{\frac{1}{3}} x^{-1}. \end{aligned} \quad (4.170)$$

El perfil de densidad lo obtenemos con la ecuación (4.147)

$$\begin{aligned}
\rho &= C (8\pi G f^3 k^2 (k + k'x))^{-1} \\
&= C \left(8\pi G f^3 k^3 \left(1 + \frac{k'x}{k} \right) \right)^{-1} \\
&\approx C (8\pi G f^3 k^3)^{-1} \left(1 - \frac{k'x}{k} \right) \\
&= C (8\pi G f^3 k^3)^{-1} (2) \\
&= \frac{2C}{8\pi G \left(\sqrt{\frac{\alpha_1}{C}} \sinh \left(\sqrt{\frac{C}{3}} t \right) \left(- \left(\frac{3}{\alpha_2} \right)^{\frac{1}{3}} x^{-1} \right) \right)^3} \\
&= \sqrt{\frac{\alpha_1^3}{C}} \frac{-\alpha_2 \frac{2}{3} x^3}{8\pi G \sinh^3 \left(\sqrt{\frac{C}{3}} t \right)}
\end{aligned} \tag{4.171}$$

Dado que $\alpha_2 = -\alpha_1$ se tiene que

$$\rho = \sqrt{\frac{\alpha_1^5}{C}} \frac{\frac{2}{3} x^3}{8\pi G \sinh^3 \left(\sqrt{\frac{C}{3}} t \right)} \tag{4.172}$$

Finalmente, tomando $\alpha_1 = C = 1$ con $C \neq 0$ resulta

$$\rho(t, x) = \frac{\frac{2}{3} x^3}{8\pi G \sinh^3 \left(\sqrt{\frac{1}{3}} t \right)}. \tag{4.173}$$

Esta aproximación recupera la evolución de la densidad de fondo para materia en el universo de FLRW (donde, $\rho \propto a^{-3}$) tomando un valor constante para la cordenada espacial y haciendo una expansión de la función seno hiperbólico a primer orden. De manera que es un perfil de densidad coherente.

4.6. Conclusiones

El colapso gravitacional sobre una región esféricamente simétrica en el análisis del régimen no lineal de la teoría conllevan a una implicación cosmológica importante sobre el parámetro de densidad del universo. La ecuación (4.18) es la condición general en el universo para que exista el colapso gravitacional. Si se tiene un universo cerrado o plano (con $\Omega_i^{-1} \leq 1$), de la condición (4.18) para cualquier región sobredensa con $\bar{\delta} > 0$ siempre habrá colapso. Sin embargo, para un universo abierto con $\Omega < 1$, la sobredensidad tiene que estar por encima del valor crítico para que el colapso pueda ocurrir. El modelo análogo en gravedad $f(R)$ se podrá analizar hasta obtener la ecuación de Poisson modificada que dependerá del modelo $f(R)$ específico que se escoja. Para detalles ver el capítulo 8.

La descripción métrica tipo LTB en el que está incluida la perturbación nos da una aproximación analítica para un perfil de densidad en el régimen no lineal. Este perfil de densidad es equivalente a la evolución del perfil de densidad para la época de materia en el universo de FLRW.

Ecuaciones de Campo en Teorías de Gravedad Modificada $f(R)$

En este capítulo deduciremos las ecuaciones de campo concernientes a las teorías de gravedad modificada en $f(R)$ a partir de una acción de Hilbert-Einstein en el modelo de teorías métrico-afín. Adicionalmente, incluiremos un término de frontera S_{bound} en la acción tipo el cual anula naturalmente los términos de frontera que surgen de la primera acción.

5.1. Acción de Hilbert-Einstein en $f(R)$

La acción general que incluye un término de frontera se puede escribir [35]

$$S_{mod} = S_{met} + S_{bound} + S_M = \int_{\nu} d^4x \left(\frac{R\sqrt{-g}}{2k} + L_M\sqrt{-g} \right), \quad (5.1)$$

Donde el lagrangiano de la acción de Hilbert-Einstein del cual se deriva la ecuación de campo de Einstein se generaliza a

$$S_{met} = \int_{\nu} d^4x \left(\frac{f(R)\sqrt{-g}}{2k} \right), \quad (5.2)$$

donde $k = 8\pi G$ es constante. El término de frontera en este marco es [35]

$$S_{bound} = 2 \oint_{\partial\nu} d^3y \varepsilon \sqrt{|h|} f_R(R) K, \quad (5.3)$$

con $f_R(R) = df(R)/dR$. Además, S_M es la acción asociada a los campos de materia. Tomando el principio variacional con extremos fijos se obtiene [36, 37]

$$\delta S_{mod} = \int_{\nu} d^4x \left(\left[\frac{1}{2k} \frac{\delta(f(R)\sqrt{-g})}{\delta g^{\alpha\beta}} + \frac{\delta(L_M\sqrt{-g})}{\delta g^{\alpha\beta}} \right] \delta g^{\alpha\beta} \right) = 0. \quad (5.4)$$

La primera integral resulta en (se asume en adelante que las variaciones son respecto de la métrica)

$$\delta S_{met} = \int_{\nu} d^4x \frac{1}{2k} \delta(f(R)\sqrt{-g}) = \frac{1}{2k} \int d^4x (\sqrt{-g} \delta f(R) + f(R) \delta(\sqrt{-g})). \quad (5.5)$$

Inicialmente desarrollamos el segundo término de (5.5). Consideremos una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ con $B = (b^{ij})$ cuya inversa es [38]

$$b^{ij} = \frac{1}{a}(A^{ij})^T = \frac{1}{a}A^{ji}, \quad (5.6)$$

en donde, $a = \det(a_{ij})$ y A^{ij} es el cofactor de a_{ij} . Fijando una fila i , el producto es

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}A^{ij} = a, \quad (5.7)$$

así que derivando parcialmente respecto a_{ij} se obtiene,

$$A^{ij} = \frac{\partial a}{\partial a_{ij}}. \quad (5.8)$$

Dado que el determinante es una funcional de a_{ij} depende de las cordenadas x^σ

$$a = a((a_{ij}(x^\sigma))), \quad (5.9)$$

se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x^\sigma} &= \frac{\partial a}{\partial a_{ij}} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^\sigma}, \\ &= A^{ij} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^\sigma}, \\ &= ab^{ji} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^\sigma}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Aplicando este resultado al determinante de la métrica y recordando que $g^{\alpha\beta}$ es simétrica se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_\sigma g &= gg^{\alpha\beta} \partial_\sigma g_{\alpha\beta}, \quad \circ \\ \delta g &= gg^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

De esta manera

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}) &= \frac{1}{2}(-g)^{-1/2}(-g)g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}, \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Sin embargo, es conveniente dejar la variación en términos de $\delta g^{\alpha\beta}$ y para ello se usa el siguiente resultado [23]

$$\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (5.13)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}) &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} \delta g^{\mu\nu}, \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g} \delta_\mu^\beta g_{\beta\nu} \delta g^{\mu\nu}, \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Adicionalmente, en esta primera integral de (5.5) obtenemos

$$\delta f(R) = f_R(R)\delta R, \quad (5.15)$$

en donde, $f_R(R)$ es la derivada de $f(R)$ respecto de R . A continuación se encuentra la variación del escalar de Ricci δR a partir del siguiente cálculo

$$\begin{aligned} R_{\sigma\mu\nu}^\rho &= \partial_\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu\Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\gamma}^\rho\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda, \\ \delta R_{\sigma\mu\nu}^\rho &= \partial_\mu\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu\delta\Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \delta\Gamma_{\mu\gamma}^\rho\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\gamma}^\rho\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \delta\Gamma_{\nu\lambda}^\rho\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho\delta\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Se observa que

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu'\nu'}^{\lambda'} &= \partial_\rho x^{\lambda'}\partial_{\mu'}x^\sigma\partial_{\nu'}x^\tau\Gamma_{\sigma\tau}^\rho - \partial_{\sigma\tau}^2 x^{\lambda'}\partial_{\mu'}x^\sigma\partial_{\nu'}x^\tau, \\ \delta\Gamma_{\mu'\nu'}^{\lambda'} &= \partial_\rho x^{\lambda'}\partial_{\mu'}x^\sigma\partial_{\nu'}x^\tau\delta\Gamma_{\sigma\tau}^\rho. \end{aligned} \quad (5.17)$$

La variación de la conexión métrica transforma como tensor. Por su parte, podemos obtener la variación del tensor de Ricci a partir de la identidad de Palatini ($R_{\mu\nu} = \nabla_\nu(\Gamma_{\mu\rho}^\rho) - \nabla_\mu(\Gamma_{\nu\rho}^\rho)$) usando las variaciones de la conexión métrica [36, 37],

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho) &= \partial_\lambda\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho + \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho\delta\Gamma_{\nu\mu}^\sigma - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma\delta\Gamma_{\sigma\mu}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\rho, \\ \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\mu\sigma}^\rho) - \nabla_\mu(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\rho) &= \partial_\nu\delta\Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho\delta\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^\rho - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\rho \\ &\quad - \partial_\mu\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \Gamma_{\lambda\mu}^\rho\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^\rho + \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda\delta\Gamma_{\nu\lambda}^\rho. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Luego,

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\rho\nu}^\rho = \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\mu\rho}^\rho) - \nabla_\mu(\delta\Gamma_{\nu\rho}^\rho). \quad (5.19)$$

Dado que $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$, entonces

$$\delta R = \delta g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}, \quad (5.20)$$

reemplazando la identidad de Palatini (5.19) se obtiene [36, 37]

$$\begin{aligned} \delta R &= \delta g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}\left(\nabla_\gamma(\delta\Gamma_{\beta\alpha}^\gamma) - \nabla_\beta(\delta\Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma)\right), \\ &= \delta g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + \nabla_\sigma\left(g^{\alpha\beta}(\delta\Gamma_{\beta\alpha}^\sigma) - g^{\alpha\sigma}(\delta\Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma)\right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

donde el término (Un análisis completo de este resultado se encuentra en el apéndice B) [36, 37],

$$g^{\alpha\beta}(\delta\Gamma_{\beta\alpha}^\sigma) - g^{\alpha\sigma}(\delta\Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma) = g_{\mu\nu}\nabla_\sigma\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\gamma\delta g^{\sigma\gamma}. \quad (5.22)$$

Remplazando (5.22) en (5.21)

$$\begin{aligned} \delta R &= \delta g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + \nabla_\sigma\left(g^{\alpha\beta}(\delta\Gamma_{\beta\alpha}^\sigma) - g^{\alpha\sigma}(\delta\Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma)\right), \\ &= \delta g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + \nabla_\sigma(g_{\mu\nu}\nabla_\sigma\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\gamma\delta g^{\sigma\gamma}), \\ &= \delta g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + g^{\mu\nu}\nabla_\sigma\nabla^\sigma\delta g_{\mu\nu} - \nabla_\sigma\nabla_\gamma\delta g^{\sigma\gamma}, \\ &= \delta g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + g_{\mu\nu}\square\delta g^{\alpha\beta} - \nabla_\alpha\nabla_\beta\delta g^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Remplazando los resultados (5.14) y (5.23) en (5.5) se obtiene [36, 37]

$$\begin{aligned}
\delta S_{met} &= \frac{1}{2k} \int_{\nu} d^4x \left(f(R) \delta \sqrt{-g} + \sqrt{-g} f'(R) \delta R \right), \\
&= \frac{1}{2k} \int_{\nu} d^4x \left(-\frac{1}{2} f(R) \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} \right. \\
&\quad \left. + f_R(R) \sqrt{-g} \left(\delta g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + g_{\mu\nu} \square \delta g^{\alpha\beta} - \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \delta g^{\alpha\beta} \right) \right), \\
&= \frac{1}{2k} \int_{\nu} d^4x \sqrt{-g} \left(f_R(R) \left(\delta g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + g_{\mu\nu} \square \delta g^{\alpha\beta} - \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \delta g^{\alpha\beta} \right) - \frac{1}{2} f(R) g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \right). \quad (5.24)
\end{aligned}$$

Consideremos las siguientes integrales [36, 37]

$$\int_{\nu} d^4x \sqrt{-g} f_R(R) g_{\alpha\beta} \square \delta g^{\alpha\beta}, \quad (5.25)$$

$$\int_{\nu} d^4x \sqrt{-g} f_R(R) \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \delta g^{\alpha\beta}. \quad (5.26)$$

Escribamos estas integrales de una forma diferente realizando la integración por partes. Para esto definimos las siguientes cantidades

$$M_{\tau} = f_R(R) g_{\alpha\beta} \nabla_{\tau} (\delta g^{\alpha\beta}) - \delta g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \nabla_{\tau} (f_R(R)), \quad (5.27)$$

$$N^{\sigma} = f_R(R) \nabla_{\gamma} (f_R(R)). \quad (5.28)$$

Tomando la derivada covariante para M_{τ}

$$\begin{aligned}
\nabla^{\tau} M_{\tau} &= \nabla^{\tau} \left(f_R(R) g_{\alpha\beta} \nabla_{\tau} (\delta g^{\alpha\beta}) \right) - \nabla^{\tau} \left(\delta g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \nabla_{\tau} (f_R(R)) \right), \\
&= \nabla^{\tau} (f_R(R)) g_{\alpha\beta} \nabla_{\tau} (\delta g^{\alpha\beta}) + f_R(R) g_{\alpha\beta} \square (\delta g^{\alpha\beta}) \\
&\quad - \nabla^{\tau} (\delta g^{\alpha\beta}) g_{\alpha\beta} \nabla_{\tau} (f_R(R)) - \delta g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \square (f_R(R)), \\
&= f_R(R) g_{\alpha\beta} \square (\delta g^{\alpha\beta}) - \delta g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \square (f_R(R)). \quad (5.29)
\end{aligned}$$

Integrando (5.29)

$$\begin{aligned}
\int_{\nu} d^4x \sqrt{-g} \nabla^{\tau} M_{\tau} &= \int_{\nu} d^4x \sqrt{-g} f_R(R) g_{\alpha\beta} \square (\delta g^{\alpha\beta}) \\
&\quad - \int_{\nu} d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \square (f_R(R)). \quad (5.30)
\end{aligned}$$

Por el teorema de Gauss-Stokes la parte izquierda de (5.30) se escribe

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial\nu} d^3y \varepsilon \sqrt{|h|} n^{\tau} M_{\tau} &= \int_{\nu} d^4x \sqrt{-g} f_R(R) g_{\alpha\beta} \square (\delta g^{\alpha\beta}) \\
&\quad - \int_{\nu} d^4x \delta g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \square (f_R(R)), \quad (5.31)
\end{aligned}$$

Esto se puede expresar como

$$\begin{aligned}
\int_{\nu} d^4x \sqrt{-g} f_R(R) g_{\alpha\beta} \square (\delta g^{\alpha\beta}) &= \int_{\nu} d^4x \delta g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \square (f_R(R)) \\
&\quad + \oint_{\partial\nu} d^3y \varepsilon \sqrt{|h|} n^{\tau} M_{\tau}. \quad (5.32)
\end{aligned}$$

Igualmente para N^σ

$$\begin{aligned}
\nabla_\sigma N^\sigma &= \nabla_\sigma (f_R(R) \nabla_\gamma (\delta g^{\sigma\gamma})) - \nabla_\sigma (\delta g^{\sigma\gamma} \nabla_\gamma (f_R(R))), \\
&= \nabla_\sigma (f_R(R)) \nabla_\gamma (\delta g^{\sigma\gamma}) + f_R(R) \nabla_\sigma \nabla_\gamma (\delta g^{\sigma\gamma}) \\
&\quad - \nabla_\sigma (\delta g^{\sigma\gamma}) \nabla_\gamma (f_R(R)) - \delta g^{\sigma\gamma} \nabla_\sigma \nabla_\gamma (f_R(R)), \\
&= f_R(R) \nabla_\sigma \nabla_\beta (\delta g^{\sigma\beta}) - \delta g^{\sigma\beta} \nabla_\sigma \nabla_\beta (f_R(R)).
\end{aligned} \tag{5.33}$$

integrando (5.33)

$$\begin{aligned}
\int_\nu d^4x \sqrt{-g} \nabla_\sigma N^\sigma &= \int_\nu d^4x \sqrt{-g} f_R(R) \nabla_\sigma \nabla_\beta (\delta g^{\sigma\beta}) \\
&\quad - \int_\nu d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\sigma\beta} \nabla_\sigma \nabla_\beta (f_R(R)),
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Por el teorema de Gauss-Stokes, la parte izquierda de (5.34) se escribe

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial\nu} d^3y \varepsilon \sqrt{|h|} n_\sigma N^\sigma &= \int_\nu d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\sigma\beta} \nabla_\sigma \nabla_\beta (f_R(R)) \\
&\quad - \int_\nu d^4x \sqrt{-g} f_R(R) \nabla_\sigma \nabla_\beta (\delta g^{\sigma\beta}).
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int_\nu d^4x \sqrt{-g} f_R(R) \nabla_\sigma \nabla_\beta (\delta g^{\sigma\beta}) &= \int_\nu d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\sigma\beta} \nabla_\sigma \nabla_\beta (f_R(R)) \\
&\quad + \oint_{\partial\nu} d^3y \varepsilon \sqrt{|h|} n_\sigma N^\sigma.
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\delta S_{met} &= \frac{1}{2k} \int_\nu d^4x \sqrt{-g} \left(f_R(R) R_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \square f_R(R) - \nabla_\alpha \nabla_\beta f_R(R) - \frac{1}{2} f(R) g_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta} \\
&\quad + \oint_{\partial\nu} d^3y \varepsilon \sqrt{|h|} n^\tau M_\tau + \oint_{\partial\nu} d^3y \varepsilon \sqrt{|h|} n_\sigma N^\sigma.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

5.2. Evaluación de los Términos de Frontera en el Formalismo Métrico $f(R)$

A continuación presentaremos la contribución en la frontera de (5.37) y mostraremos que este término se cancela con las variaciones de la acción S_{bound} .

En primer lugar es conveniente expresar las cantidades M_τ y N^σ en función de las variaciones $\partial g_{\alpha\beta}$. Usando los resultados (5.11) en (5.27) y (5.28) tenemos [36, 37]

$$M_\tau = -f_R(R) g^{\alpha\beta} \nabla_\tau (\delta g_{\alpha\beta}) + g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} \nabla_\tau (f_R(R)), \tag{5.38}$$

$$N^\sigma = -f_R(R) g^{\sigma\mu} g^{\gamma\nu} \nabla_\gamma (\delta g_{\mu\nu}) + g^{\sigma\mu} g^{\gamma\nu} \delta g_{\mu\nu} \nabla_\gamma (f_R(R)) \tag{5.39}$$

Para evaluar estas cantidades en la frontera usamos el hecho $\delta g_{\alpha\beta}|_{\partial\nu} = \delta g^{\alpha\beta}|_{\partial\nu} = 0$, de modo que los únicos términos no nulos son las derivadas de $\partial g_{\alpha\beta}$ en las derivadas covariantes.

$$M_\tau|_{\partial\nu} = -f_R(R) g^{\alpha\beta} \nabla_\tau (\delta g_{\alpha\beta}), \tag{5.40}$$

$$N^\sigma|_{\partial\nu} = -f_R(R) g^{\sigma\mu} g^{\gamma\nu} \nabla_\gamma (\delta g_{\mu\nu}). \tag{5.41}$$

Calculamos ahora los términos $n^\tau M_\tau|_{\partial\nu}$ y $n_\sigma N^\sigma|_{\partial\nu}$ en las integrales sobre la frontera de (5.37)

$$\begin{aligned} n^\tau M_\tau|_{\partial\nu} &= -f_R(R)n^\tau(\varepsilon n^\alpha n^\beta + h^{\alpha\beta})\partial_\tau(\delta g_{\alpha\beta}), \\ &= -f_R(R)n^\sigma h^{\alpha\beta}\partial_\sigma(\delta g_{\alpha\beta}), \end{aligned} \quad (5.42)$$

donde hemos renombrado el índice mudo τ . A su vez

$$\begin{aligned} n_\sigma N^\sigma|_{\partial\nu} &= -f_R(R)n^\sigma(\varepsilon n^\sigma n^\mu + h^{\sigma\mu})(\varepsilon n^\gamma n^\nu + h^{\gamma\nu})\partial_\gamma(\delta g_{\mu\nu}), \\ &= -f_R(R)n^\mu(\varepsilon n^\gamma n^\nu + h^{\gamma\nu})\partial_\gamma(\delta g_{\mu\nu}), \\ &= -f_R(R)n^\mu h^{\gamma\nu}\partial_\gamma(\delta g_{\mu\nu}), \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Donde hemos usado $\varepsilon^2 = 1$; $g_{\alpha\beta}$ como la suma de la métrica inducida en la hipersuperficie de frontera y una componente perpendicular a ella $g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta$, así que $n^\alpha h_{\alpha\beta} = 0$ y la derivada tangencial $h^{\gamma\nu}\partial_\gamma(\delta g_{\mu\nu})$ nula. Con estos resultados la variación de la acción S_{met} es

$$\begin{aligned} \delta S_{met} &= \frac{1}{2k} \int_\nu d^4x \sqrt{-g} \left(f_R(R)R_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}\square f_R(R) - \nabla_\alpha \nabla_\beta f_R(R) - \frac{1}{2}f(R)g_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta} \\ &\quad - \oint_{\partial\nu} d^3y \varepsilon \sqrt{|h|} f_R(R) n^\sigma h^{\alpha\beta} \partial_\sigma(\delta g_{\alpha\beta}). \end{aligned} \quad (5.44)$$

La variación del término de frontera S_{bound} en la acción total es

$$S_{bound} = 2 \oint_{\partial\nu} d^3y \varepsilon \sqrt{|h|} f_{RR}(R) \delta R K \quad (5.45)$$

$$+ \oint_{\partial\nu} d^3y \varepsilon \sqrt{|h|} f_R(R) n^\sigma h^{\alpha\beta} \partial_\sigma(\delta g_{\alpha\beta}). \quad (5.46)$$

Observamos que el segundo término en (5.45) cancela el término de frontera en la variación (5.44), adicionalmente necesitamos imponer $\delta R = 0$ en la frontera. Un estudio completo de este tópico se presenta en [36, 37].

Finalmente, la variación total de la acción modificada $f(R)$ es $\delta S_{mod} = 0$. Entonces

$$f_R(R)R_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}\square f_R(R) - \nabla_\alpha \nabla_\beta f_R(R) - \frac{1}{2}f(R)g_{\alpha\beta} = kT_{\alpha\beta} \quad (5.47)$$

En donde, el tensor de energía momentum $T_{\alpha\beta}$ se obtiene a partir de la variación del Lagrangiano de materia

$$\begin{aligned} \delta S_M &= \int_\nu d^4x \delta(\sqrt{-g} L_M), \\ &= \int_\nu d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{\partial L_M}{\partial g^{\alpha\beta}} \delta g^{\alpha\beta} + L_M \delta \sqrt{-g} \right), \\ &= \int_\nu d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{\partial L_M}{\partial g^{\alpha\beta}} - \frac{1}{2} L_M g_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Por definición se tiene que

$$T_{\alpha\beta} \equiv -2 \frac{\partial L_M}{\partial g^{\alpha\beta}} + L_M g_{\alpha\beta} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\alpha\beta}}, \quad (5.49)$$

entonces

$$\delta S_M = -\frac{1}{2} \int_\nu d^4x T_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}. \quad (5.50)$$

5.3. Conclusiones

Partiendo de los argumentos dados en relatividad general, se puede modificar el lagrangiano de la acción de Hilbert-Einstein tomando una funcional del escalar de Ricci $f(R)$, obteniéndose así una ecuación de campo extendida del lado geométrico. Evaluando adecuadamente los términos en la frontera se muestra, que los argumentos de la acción métrica que allí aparecen se anulan naturalmente con los de la variación del término de frontera S_{bound} . Esta derivación se obtiene en el marco del modelo métrico-afín, y respeta los principales postulados de la relatividad general, de modo que en el límite correcto se recupera la ecuación de campo de Einstein.

Simetría Esférica en Gravedad Modificada $f(R)$

Los test clásicos de relatividad general le pertenecen al reino de las soluciones esféricamente simétricas en el límite de campo débil. Una de las propiedades fundamentales de una teoría gravitacional es la probabilidad de una planitud asintótica, i.e., obtener un espacio-tiempo Minkowskiano muy lejos de la distribución de masa-energía localizada. Las teorías gravitacionales alternativas pueden o no exhibir esta propiedad física, la cual permite una comparación consistente con relatividad general. Este punto es, algunas veces, olvidado en el estudio del límite de campo débil de las teorías de gravedad modificada alternativas y serán discutidas en general considerando el significado de las soluciones esféricas en teorías de gravedad extendidas, cuando los resultados estándar de relatividad general son recobrados en el límite de $r \rightarrow \infty$ y $f(R) \rightarrow R$. Las soluciones esféricas pueden ser clasificadas usando el escalar de curvatura de Ricci R como

- Soluciones con $R = 0$,
- Soluciones con escalar de Ricci constante $R = R_0 \neq 0$,
- Soluciones con escalar de Ricci $R(r)$ dependiente sólo de la cordenada radial r , y
- Soluciones con $R(r, t)$ dependiente del tiempo.

En los primeros tres casos el teorema de Jepsen-Birkhoff es válido, significando que las soluciones esféricamente simétricas estacionarias son necesariamente estáticas. Sin embargo, este teorema no se toma para cada situación de gravedad $f(R)$ porque la evolución temporal puede surgir de una teoría de perturbaciones en algún orden de aproximación.

Un rol crucial para la existencia de las soluciones esféricas exactas es jugado por la relación entre los potenciales métricos y por las relaciones entre estos últimos y el escalar de Ricci. La relación entre los potenciales métricos y R puede ser vista como una restricción que asume la forma de la ecuación de Bernoulli. En principio, las soluciones esféricamente simétricas pueden ser obtenidas por cualquier función analítica $f(R)$ resolviendo esta ecuación de Bernoulli, tanto para el caso del escalar de Ricci constante y $R = R_0$. Estas soluciones esféricamente simétricas pueden ser usadas como fondo para testear que tan genérica la gravedad $f(R)$ puede desviarse de relatividad general. En este capítulo estudiaremos estos dos casos en particular, i.e., soluciones con escalar de Ricci constante y $R = R_0$ [10].

6.1. Escalar de Ricci en Simetría Esférica

Al imponer que la métrica del espacio-tiempo es esféricamente simétrica [10],

$$ds^2 = -A(r, t)dt^2 + B(r, t)dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \quad (6.1)$$

Los simbolos de Christoffel que se obtienen son los siguientes

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} \frac{\dot{A}}{A}, \quad (6.2)$$

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} \frac{A'}{A}, \quad (6.3)$$

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2} \frac{\dot{B}}{A}, \quad (6.4)$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} \frac{A'}{B}, \quad (6.5)$$

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2} \frac{\dot{B}}{B}, \quad (6.6)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \frac{B'}{B}, \quad (6.7)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{r}{B}, \quad (6.8)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -\frac{r \sin^2 \theta}{B} \quad (6.9)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad (6.10)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta \quad (6.11)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad (6.12)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \quad (6.13)$$

Donde las primas y los puntos denotan las derivadas con respecto a r y t respectivamente. Las componentes del tensor de Ricci [10]

$$R_{00} = -\frac{1}{4} \frac{1}{B^2 A r} (2r A'' AB - 2r \ddot{B} AB - r B A'^2 + r B \dot{A} \dot{B} \dot{B}^2 - r A' B' + 4A' B A) \quad (6.14)$$

$$R_{01} = -\frac{\dot{B}}{r B} \quad (6.15)$$

$$R_{11} = -\frac{1}{4} \frac{1}{A^2 B r} (-2r A'' AB + 2r \ddot{B} AB + r B A'^2 - r B \dot{A} \dot{B} - r A \dot{B}^2 + r A A' B' + 4B' A^2) \quad (6.16)$$

$$R_{22} = \frac{1}{2} \frac{1}{B^2 A} (B' r A + 2B^2 A - A' r B - 2AB) \quad (6.17)$$

$$R_{33} = \text{sen}^2 \theta (R_{22}). \quad (6.18)$$

El escalar de Ricci puede ser expresado como [10]

$$R = \left\{ B(\dot{A}\dot{B} - A'^2)r^2 + A \left[r(\dot{B}^2 - A'B') + 2B(2A' + rA'' - r\ddot{B}) \right] - 4A^2 [B^2 - B + rB'] \right\} (2r^2 A^2 B^2)^{-1}, \quad (6.19)$$

Si la métrica (6.1) es independiente del tiempo, i.e., $A(r,t) = a(r)$ y $B(r,t) = b(r)$, entonces el escalar de Ricci asume la siguiente forma

$$R(r) = \{a [2b (2a' + ra'') - ra'b'] - ba'^2r^2 - 4a^2 (b^2 - b + rb')\} (2r^2a^2b^2)^{-1}. \quad (6.20)$$

Se puede ver la ecuación anterior como una restricción sobre las funciones $a(r)$ y $b(r)$ una vez se de específicamente la forma del escalar de Ricci. La ecuación anterior se reduce a la ecuación de Bernoulli [10]

$$b'(r) + h(r)b(r) + l(r)b^2(r) = 0 \quad (6.21)$$

para la componente métrica $b(r)$, i.e.,

$$b' + \left\{ \frac{r^2a'^2 - 4a^2 - 2ra [2a' + ra'']}{ra [4a + ra']} \right\} b + \left\{ \frac{2a}{r} \left[\frac{2 + r^2R}{4a + ra'} \right] \right\} b^2 = 0. \quad (6.22)$$

La solución general de (6.22) es

$$b(r) = \frac{\exp \left[- \int dr h(r) \right]}{K + \int dr l(r) \exp \left[- \int dr h(r) \right]}. \quad (6.23)$$

donde K es una constante de integración y $h(r)$ y $l(r)$ son los coeficientes de los términos lineales y cuadráticos en $b(r)$, respectivamente. Inspeccionando esta ecuación de Bernoulli revela que las soluciones corresponden a $l(r) = 0$ existe, el cual tiene un escalar de curvatura de Ricci que escala como $R \sim -2/r^2$ cuando se toma el límite al infinito espacialmente como aproximación. Las soluciones no reales existen si $h(r)$ desaparece idénticamente. El límite $r \rightarrow +\infty$ necesita un cuidado especial: para tener el límite Minkowskiano correcto para el potencial $b(r)$, ambas funciones $h(r)$ y $l(r)$ deben ir a cero probando que la cantidad $r^2R(r)$ es constante. Este hecho implica que $b'(r) = 0$, y, finalmente, también el potencial métrico $b(r)$ tiene el límite Minkowskiano correcto.

Si la planitud asintótica de la métrica es impuesta, la curvatura del escalar de Ricci debe ir como r^{-n} cuando $r \rightarrow +\infty$, donde $n \geq 2$ es un entero [10],

$$r^2R(r) \approx r^{-n} \text{ cuando } r \rightarrow +\infty. \quad (6.24)$$

Cualquier otro comportamiento del escalar de Ricci debe comprometer la planitud asintótica, como se observa de la ecuación (6.22). De hecho, consideremos el caso más simple de simetría esférica en el cual [10]

$$ds^2 = -a(r)dt^2 + \frac{dr^2}{a(r)} + r^2d\Omega_2^2. \quad (6.25)$$

Para esto obtenemos

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} \frac{a'}{a}, \quad (6.26)$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} aa', \quad (6.27)$$

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{2} \frac{a'}{a}, \quad (6.28)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -ar, \quad (6.29)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -ar \sin^2 \theta \quad (6.30)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad (6.31)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta \quad (6.32)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad (6.33)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \quad (6.34)$$

Así, las componente del tensor de Ricci son

$$R_{00} = -\frac{1}{2r} (aa'' + 2a'), \quad (6.35)$$

$$R_{11} = \frac{1}{2ar} (a'' + 2a'), \quad (6.36)$$

$$R_{22} = a'r - 1 + a, \quad (6.37)$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta (R_{22}). \quad (6.38)$$

Para el cual obtenemos el siguiente escalar de Ricci

$$R = \frac{1}{r^2} (r^2 a'' + 4a'r - 2 + 2a). \quad (6.39)$$

Luego rescribiendo la ecuación (6.39)

$$\begin{aligned} r^2 a'' + 4a'r - 2 + 2a - r^2 R &= 0, \\ \int dr r^2 a'' + \int dr 4a'r - \int dr 2 + \int dr 2a - \int dr r^2 R &= 0, \end{aligned} \quad (6.40)$$

Integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned} r^2 a' - 2ar + \int dr 2a + 4ar - \int dr 4ar - 2r - k_1 + \int dr 2a - \int dr r^2 R &= 0, \\ r^2 a' + 2ar - 2r - k_1 - \int dr r^2 R &= 0, \end{aligned} \quad (6.41)$$

Integrando nuevamente

$$\begin{aligned} \int dr r^2 a' + \int dr 2ar - \int dr 2r - \int dr k_1 - \int dr \left[\int dr r^2 R \right] &= 0, \\ ar^2 - \int dr 2ar + \int dr 2ar - r^2 - k_2 - k_1 r - k_2 - \int dr \left[\int dr r^2 R \right] &= 0, \end{aligned} \quad (6.42)$$

Despejando $a = a(r)$ se obtiene finalmente

$$a(r) = 1 + \frac{k_1}{r} + \frac{k_2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \int dr \left[\int r^2 R(r) \right], \quad (6.43)$$

De esta manera, la ecuación de Bernoulli (6.22) es facilmente integrada en la métrica potencial más general $a(r)$ compatible con la restricción (6.20) donde k_1 y k_2 son constantes de integración. El límite Minkowskiano $a(r) \rightarrow 1$ cuando $r \rightarrow \infty$ se obtiene solo si la condición (6.24) se satisface, de otro modo el potencial gravitacional diverge [10].

6.2. Métrica con Simetría Esférica en Gravedad $f(R)$.

Para una función $f(R)$ se tienen las ecuaciones de campo de cuarto orden [10]

$$f_R(R)R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}f(R)g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}\square f_R(R) - \nabla_\alpha \nabla_\beta f_R(R) = kT_{\alpha\beta}. \quad (6.44)$$

cuya traza es

$$3\square f_R(R) + f_R(R)R - 2f(R) = kT. \quad (6.45)$$

Rescribiendo la ecuación (6.44) como

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(curv)} + T_{\mu\nu}^{(m)}, \quad (6.46)$$

$$T_{\mu\nu}^{(curv)} = \frac{1}{f_R(R)} \{g_{\mu\nu} [f(R) - Rf_R(R)] + f_R(R)^{;\rho\sigma} (g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\rho\sigma}g_{\mu\nu})\}. \quad (6.47)$$

La materia entra en la ecuación (6.46) a través del tensor momentum-energía modificado

$$T_{\mu\nu}^{(m)} = \frac{\kappa T_{\mu\nu}}{f_R(R)}. \quad (6.48)$$

La métrica esféricamente simétrica puede ser vista como

$$ds^2 = -m_1(t', r')dt'^2 + m_2(t', r')dr'^2 + m_3(t', r')dt' dr' + m_4(t', r')d\Omega_2^2, \quad (6.49)$$

donde m_i son funciones del radio r' y del tiempo t' . Una transformación de cordenadas $t = U_1(t', r')$, $r = U_2(t', r')$ diagonaliza la métrica (6.49) e introduce el radio r tal que $m_4(t', r') = r^2$, dando

$$ds^2 = -A(r, t)dt^2 + B(r, t)dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \quad (6.50)$$

así, la ecuación (6.50) puede ser tomada como la métrica con simetría esférica libre de torsión más general sin pérdida de generalidad. Las ecuaciones de campo (6.44) y (6.45) para esta métrica se reducen a [10]

$$f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f g_{\mu\nu} + H_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}, \quad (6.51)$$

$$f_R R - 2f + H = kT. \quad (6.52)$$

donde

$$\nabla_\mu \nabla_\nu f_R = \nabla_\mu (\partial_\nu f_R), \quad (6.53)$$

$$\therefore \partial_\nu f_R = \frac{\partial f_R}{\partial x^\nu} = \frac{\partial R}{\partial x^\nu} \frac{\partial f_R}{\partial R} = R_{,\nu} f_{RR} \quad (6.54)$$

$$\nabla_\mu (R_{,\nu} f_{RR}) = R_{,\nu} R_{,\mu} f_{RRR} + f_{RR} (R_{,\mu\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho R_{,\rho}) \quad (6.55)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \square f_R &= g_{\mu\nu} \nabla^\rho \nabla_\rho f_R = g_{\mu\nu} \nabla^\rho (R_{,\rho} f_{RR}), \\ &= g_{\mu\nu} R_{,\rho} \nabla^\rho f_{RR} + g_{\mu\nu} f_{RR} \nabla^\rho R_{,\rho}, \\ &= g_{\mu\nu} [g^{\rho\sigma} R_{,\rho} R_{,\sigma} f_{RRR}] + g_{\mu\nu} f_{RR} [g^{\rho\sigma} (R_{,\rho\sigma} - \Gamma_{\sigma\kappa}^\kappa R_{,\rho})]. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Así,

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu} &= -f_{R;\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square f_R \\ &= -f_{RR} [R_{,\mu\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho R_{,\rho} - g_{\mu\nu} [g^{\rho\sigma} (R_{,\rho\sigma} - \Gamma_{\sigma\kappa}^\kappa R_{,\rho})]] - f_{RRR} [R_{,\mu} R_{,\nu} - g_{\mu\nu} [g^{\rho\sigma} R_{,\rho} R_{,\sigma}]] \\ &= -f_{RR} [R_{,\mu\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho R_{,\rho} - g_{\mu\nu} [g^{\rho\sigma} R_{,\rho\sigma} + (g_{,\sigma}^{\rho\sigma} + g^{\rho\sigma} \ln \sqrt{-g}_{,\sigma}) R_{,\rho}]] \\ &\quad - f_{RRR} [R_{,\mu} R_{,\nu} - g_{\mu\nu} [g^{\rho\sigma} R_{,\rho} R_{,\sigma}]]. \end{aligned} \quad (6.57)$$

$$H = 3f_{RR} [g^{\rho\sigma} R_{,\rho\sigma} + (g_{,\sigma}^{\rho\sigma} + g^{\rho\sigma} \ln \sqrt{-g}_{,\sigma}) R_{,\rho}] + 3f_{RRR} [g^{\rho\sigma} R_{,\rho} R_{,\sigma}] \quad (6.58)$$

Ver apéndice C, para ver los pasos intermedios [40].

6.3. Soluciones con Escalar de Ricci Constante

Asumamos ahora que el escalar de Ricci es constante, $R = R_0$. La ecuación de campo (6.51) y (6.52) con $H_{\mu\nu} = 0$ son [10]

$$f_{R_0} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f_0 g_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu}^m, \quad (6.59)$$

$$f_{R_0} R_0 - 2f_0 = k T^m, \quad (6.60)$$

donde $f_0 \equiv f(R_0)$ y $f_{R_0} \equiv df(R_0)/dR$, y estas las podemos describir como

$$R_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = q k T_{\mu\nu}^m, \quad (6.61)$$

$$R_0 = q k T^m - 4\lambda, \quad (6.62)$$

donde $\lambda = \frac{-f_0}{2f_{R_0}}$ y $q^{-1} = f_{R_0}$. Restringimos a los lagrangianos que se reducen al de Hilbert-Einstein cuando $R \rightarrow 0$ y que no contienen constante cosmológica Λ ,

$$f(R) \approx R \quad \text{cuando } R \rightarrow 0. \quad (6.63)$$

Entonces, la ecuación (6.60) indica que *en el vacío* ($T_{\mu\nu}^m = 0$) se obtiene una clase de soluciones con curvatura constante de Ricci $R = R_0$.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial R} \right|_{R_0} = \left. \frac{2f}{R} \right|_{R_0}, \quad (6.64)$$

En particular, existen soluciones con $R_0 = 0$ para esta ecuación diferencial. Consideremos ahora el problema de encontrar la solución general de las ecuaciones (6.59) y (6.60) para una métrica esféricamente simétrica (6.50). Las sustituciones de esta métrica dentro de las componentes (r,t) de (6.59) da $\frac{\dot{B}(t,r)}{rB(t,r)} = 0$, lo que significa que $B(t,r)$ debe ser independiente del tiempo, $B(t,r) = b(r)$. Por otro lado, la componente (2,2) de la ecuación (6.59) da

$$\begin{aligned} f_{R_0} R_{22} - \frac{1}{2} f_0 g_{22} &= \kappa T_{22}^{(m)} \\ f_{R_0} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{b^2 A} (b' r A + 2b^2 A - A' r b - 2Ab) \right] - \frac{1}{2} f_0 r^2 &= \kappa P r^2 \\ \frac{1}{2} \frac{1}{b^2 A} (b' r A + 2b^2 A - A' r b - 2Ab) + \lambda r^2 &= q \kappa P r^2 \\ \frac{1}{2} \frac{b' r}{b^2} + 1 - \frac{A' r}{2Ab} - \frac{1}{b} &= q \kappa P r^2 - \lambda r^2 \\ -\frac{A' r}{A} \frac{r}{2b} &= q \kappa P r^2 - \lambda r^2 + \frac{1}{b} - 1 - \frac{1}{2} \frac{b' r}{b^2} \\ \frac{A'}{A} &= \frac{b}{r} [-2q \kappa P r^2 + 2\lambda r^2 + 2] - \frac{2}{r} + \frac{b'}{b} \end{aligned} \quad (6.65)$$

Así, $\frac{A'(t,r)}{A(t,r)} = \zeta(r)$, donde $\zeta(r)$ es una función independiente del tiempo y

$$\begin{aligned} A(t,r) &= \tilde{a}(t) e^{\int \zeta(r) dr} \\ &= \tilde{a} e^{\int \left(-\frac{2}{r} + \frac{b'}{b} \right) dr} e^{\int dr \frac{[2+r^2(2\lambda-2q\kappa P)]b}{r}} \\ &= \tilde{a} e^{-2\ln r + \ln b} e^{\int dr \frac{[2+r^2(2\lambda-2q\kappa P)]b}{r}} \\ &= \tilde{a} \frac{b}{r^2} e^{\int dr \frac{[2+r^2(2\lambda-2q\kappa P)]b}{r}} \end{aligned} \quad (6.66)$$

donde P es la presión de un fluido perfecto con tensor de momentum-energía

$$T_{\mu\nu}^m = (P + \rho) u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}. \quad (6.67)$$

La función $A(t,r)$ es separable, $A(t,r) = \tilde{a}a(r)$, y el elemento de línea se escribirá entonces [10]

$$ds^2 = -\tilde{a}a(r)dt^2 + b(r)dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 \quad (6.68)$$

y esta puede describirse como

$$ds^2 = -a(r)d\tilde{t}^2 + b(r)dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 \quad (6.69)$$

redefiniendo la cordenada temporal $t \rightarrow \tilde{t}$ cuando $d\tilde{t} = \sqrt{\tilde{a}} dt$. En lo que sigue, la tilde será absorbida por la cordenada temporal. Para resumir, en un espacio-tiempo con escalar de curvatura constante, cualquier simetría esférica de fondo es necesariamente estática o, el teorema de Jebsen-Birkhoff se toma para gravedad $f(R)$ con curvatura constante [10].

Un comentario está a la orden en este punto. Hemos asumido un espacio-tiempo con constante escalar de Ricci y deducido las condiciones en forma de potenciales gravitacionales. El problema inverso también puede ser considerado: si el potencial gravitacional $a(t, r)$ es una función separable y $b(r, t)$ es independiente del tiempo, usando la definición del escalar de Ricci, esto es $R = R_0 = \text{const.}$ y al mismo tiempo las soluciones de las ecuaciones de campo sean estáticas si se impone simetría esférica. Para completar el análisis de este problema, se debe tener en cuenta las ecuaciones de campo remanentes contenidas en (6.61) y (6.62) las cuales se satisfacen teniendo en cuenta la expresión del escalar de Ricci (6.20). Debemos entonces resolver el sistema [10]

$$R_{00} - \lambda a(r) - q\kappa [\rho + P(1 - a(r))] = 0, \quad (6.70)$$

$$R_{11} + \lambda b(r) - q\kappa P b(r) = 0, \quad (6.71)$$

$$R_0 - q\kappa(3P - \rho) + 4\lambda = 0, \quad (6.72)$$

$$R(a(r), b(r)) = R_0. \quad (6.73)$$

Donde

$$a(r) = \frac{b}{r^2} e^{\int dr \frac{[2+r^2(2\lambda-2q\kappa P)]b}{r}} \quad (6.74)$$

$$a' = \zeta a \quad (6.75)$$

$$a'' = (\zeta' + \zeta^2) a. \quad (6.76)$$

y

$$\zeta(r) = \frac{b}{r} [-2q\kappa P r^2 + 2\lambda r^2 + 2] - \frac{2}{r} + \frac{b'}{b}. \quad (6.77)$$

Para este caso tenemos que (6.14) se reduce a

$$R_{00} = \frac{a''}{2b} - \frac{a'b'}{4b^2} + \frac{a'}{rb} - \frac{a'^2}{4ab} \quad (6.78)$$

Remplazamos (6.75) y (6.76) en la anterior se obtiene

$$R_{00} = (\zeta' + \zeta^2) \frac{a}{2b} - \frac{\zeta b' a}{4b^2} + \frac{\zeta a}{rb} - \frac{\zeta^2 a^2}{4ab}, \quad (6.79)$$

$$= \frac{a}{2b} \left(\zeta' + \zeta^2 - \frac{\zeta b'}{2b} + \frac{2\zeta}{r} - \frac{\zeta^2}{2} \right), \quad (6.80)$$

$$= \frac{a}{4b} \left(2\zeta' + \zeta^2 - \zeta \left[\frac{b'}{b} - \frac{4}{r} \right] \right). \quad (6.81)$$

Calculemos a continuación ζ' y ζ^2

$$\zeta' = \left(\frac{b'}{r} + \frac{b}{r^2} \right) [-2q\kappa P r^2 + 2\lambda r^2 + 2] - \frac{4b}{r^2} + \frac{2}{r^2} + \frac{b''}{b} - \frac{b'^2}{b^2}. \quad (6.82)$$

$$\begin{aligned} \zeta^2 &= \frac{b^2}{r^2} [-2q\kappa P r^2 + 2\lambda r^2 + 2]^2 + \frac{2b}{r} \left(-\frac{2}{r} + \frac{b'}{b} \right) [-2q\kappa P r^2 + 2\lambda r^2 + 2] + \left(-\frac{2}{r} + \frac{b'}{b} \right)^2, \\ &= \frac{b^2}{r^2} [-2q\kappa P r^2 + 2\lambda r^2 + 2]^2 + \left(-\frac{4b}{r^2} + \frac{2b'}{r} \right) [-2q\kappa P r^2 + 2\lambda r^2 + 2] + \frac{4}{r^2} - \frac{4b'}{rb} + \frac{b'^2}{b^2}. \end{aligned} \quad (6.83)$$

En adelante usaremos los corchetes \square para denotar la cantidad $[-2q\kappa Pr^2 + 2\lambda r^2 + 2]$. Luego

$$\begin{aligned} 2\zeta' + \zeta^2 &= \left(\frac{2b'}{r} + \frac{2b}{r^2}\right) \square - \frac{8b}{r^2} + \frac{4}{r^2} + \frac{2b''}{b} - \frac{2b'^2}{b^2} + \frac{b^2}{r^2} \square^2 + \left(-\frac{4b}{r^2} + \frac{2b'}{r}\right) \square + \frac{4}{r^2} - \frac{4b'}{rb} + \frac{b'^2}{b^2}, \\ &= \frac{b^2}{r^2} \square^2 + \left(\frac{4b'}{r} - \frac{2b}{r^2}\right) \square + \frac{8}{r^2} - \frac{8b}{r^2} - \frac{4b'}{rb} + \frac{2b''}{b} - \frac{b'^2}{b^2}. \end{aligned} \quad (6.84)$$

Tomando en este último resultado en (6.79) se tiene

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{a}{4b} \left[\frac{b^2}{r^2} \square^2 + \left(\frac{4b'}{r} - \frac{2b}{r^2}\right) \square + \frac{8}{r^2} - \frac{8b}{r^2} - \frac{4b'}{rb} + \frac{2b''}{b} - \frac{b'^2}{b^2} + \left(\frac{4b}{r^2} - \frac{b'}{r}\right) \square - \left(\frac{b'}{b} - \frac{4}{r}\right) \left(\frac{b'}{b} - \frac{2}{r}\right) \right], \\ &= \frac{a}{4b} \left[\frac{b^2}{r^2} \square^2 + \left(\frac{3b'}{r} + \frac{2b}{r^2}\right) \square + \frac{8}{r^2} - \frac{8b}{r^2} - \frac{4b'}{rb} + \frac{2b''}{b} - \frac{b'^2}{b^2} - \left(\frac{b'^2}{b^2} - \frac{6b'}{rb} + \frac{8}{r^2}\right) \right], \\ &= \frac{a}{4b} \left[\frac{b^2}{r^2} \square^2 + \left(\frac{3b'}{r} + \frac{2b}{r^2}\right) \square - \frac{8b}{r^2} + \frac{2b'}{rb} + \frac{2b''}{b} - \frac{2b'^2}{b^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.85)$$

Finalmente, de la ecuación (6.70) obtenemos

$$\begin{aligned} R_{00} - a(-q\kappa P + \lambda) - q\kappa(\rho + P) &= 0, \\ \frac{a}{4b} \left[\frac{b^2}{r^2} \square^2 + \left(\frac{3b'}{r} + \frac{2b}{r^2}\right) \square - \frac{8b}{r^2} + \frac{2b'}{rb} + \frac{2b''}{b} - \frac{2b'^2}{b^2} - \frac{2b}{r^2} \square + \frac{4b}{r^2} \right] - q\kappa(\rho + P) &= 0, \\ \frac{1}{4b^2 r^4} e^{\int dr \frac{[2+r^2(2\lambda-2q\kappa P)]b}{r}} \left[b^4 \square^2 + 3b'b^2 r \square - 4b^3 + 2b'br + 2b''br^2 - 2b'^2 r^2 \right] - q\kappa(\rho + P) &= 0. \end{aligned} \quad (6.86)$$

De esta misma forma (6.16) se reduce a

$$\begin{aligned} R_{11} &= -\frac{a''}{2a} + \frac{a'b'}{4ab} + \frac{b'}{rb} + \frac{a'^2}{4a^2} \\ &= -\frac{1}{2} (\zeta' + \zeta^2) + \frac{\zeta b'}{4b} + \frac{b'}{rb} + \frac{1}{4} \zeta^2 \\ &= -\frac{1}{4} (2\zeta' + \zeta^2) + \frac{b'}{b} \left(\frac{1}{4} \zeta + \frac{1}{r} \right). \end{aligned} \quad (6.87)$$

Luego

$$\begin{aligned} R_{11} &= -\frac{1}{4} \left[\frac{b^2}{r^2} \square^2 + \left(\frac{4b'}{r} - \frac{2b}{r^2}\right) \square + \frac{8}{r^2} - \frac{8b}{r^2} - \frac{4b'}{rb} + \frac{2b''}{b} - \frac{b'^2}{b^2} + \frac{b'}{b} \left(-\frac{b}{r} \square + \frac{2}{r} - \frac{b'}{b} - \frac{4}{r} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{4} \left[\frac{b^2}{r^2} \square^2 + \left(\frac{3b'}{r} - \frac{2b}{r^2}\right) \square + \frac{8}{r^2} - \frac{8b}{r^2} - \frac{6b'}{rb} + \frac{2b''}{b} - \frac{2b'^2}{b^2} \right] \end{aligned} \quad (6.88)$$

Así, de la ecuación (6.71) obtenemos

$$\begin{aligned} R_{11} + \lambda b(r) - q\kappa P b(r) &= 0, \\ -4R_{11} - \frac{2b}{r^2} \square + \frac{4b}{r^2} &= 0 \\ \frac{b^2}{r^2} \square^2 + \left(\frac{3b'}{r} - \frac{2b}{r^2}\right) \square + \frac{8}{r^2} - \frac{8b}{r^2} - \frac{6b'}{rb} + \frac{2b''}{b} - \frac{2b'^2}{b^2} - \frac{2b}{r^2} \square + \frac{4b}{r^2} &= 0 \\ \frac{b^2}{r^2} \square^2 + \left(\frac{3b'}{r} - \frac{4b}{r^2}\right) \square + \frac{8}{r^2} - \frac{4b}{r^2} - \frac{6b'}{rb} + \frac{2b''}{b} - \frac{2b'^2}{b^2} &= 0 \\ b^4 \square^2 + (3b'b^2 r - 4b^3) \square + 8b^2 - 4b^3 - 6b'br + 2b''br^2 - 2b'^2 r^2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.89)$$

Finalmente, para la ecuación (6.73) tomamos la ecuación (6.20)

$$\begin{aligned}
a [2b (2a' + ra'') - ra'b'] - ba'^2r^2 - 4a^2 (b^2 - b + rb') &= (2r^2a^2b^2)R_0 \\
4b\zeta + 2br (\zeta' + \zeta^2) - b'r\zeta - br^2\zeta^2 - 4 (b^2 - b + rb') &= (2r^2b^2)R_0 \\
\zeta (4b - b'r) + 2br(\zeta' + \zeta^2) - br^2\zeta^2 - 4 (b^2 - b + rb') &= (2r^2b^2)R_0 \\
&\quad \frac{4b^2}{r} \square - \frac{8b}{r} + 4b' - b'b \square + 2b' - \frac{b'^2r}{b} \\
+ 2br \left[\frac{b^2}{r^2} \square^2 + \left(\frac{3b'}{r} - \frac{3b}{r^2} \right) \square + \frac{6}{r^2} - \frac{4b}{r^2} - \frac{4b'}{rb} + \frac{b''}{b} \right] \\
- br^2 \left[\frac{b^2}{r^2} \square^2 + \left(\frac{2b'}{r} - \frac{4b}{r^2} \right) \square + \frac{4}{r^2} - \frac{4b'}{rb} + \frac{b'^2}{b^2} \right] - 4 (b^2 - b + rb') &= (2r^2b^2)R_0 \\
b^3 \left(\frac{2}{r} - 1 \right) \square^2 + \left(\frac{4b^2}{r} - b'b + 6b'b - \frac{6b^2}{r} - 2b'br + 4b^2 \right) \square \\
- \frac{8b}{r} + 6b' - \frac{b'^2r}{b} + \frac{12b}{r} - \frac{8b^2}{r} - 8b' + 2b''r - 4b + 4b'r - \frac{b'^2r^2}{b} - 4b^2 + 4b - 4b'r &= (2r^2b^2)R_0 \\
\left\{ b^3 \left(\frac{2}{r} - 1 \right) \square^2 + \left(4b^2 + 5b'b - \frac{2b^2}{r} - 2bb'r \right) \square \right. \\
\left. + \frac{4b}{r} - 2b' - \frac{b'^2r^2}{b} - \frac{b'r}{b} - \frac{8b^2}{r} + 2b''r - 4b^2 \right\} * br &= (2r^2b^2)R_0 \\
b^4 (2 - r) \square^2 + (4b^3r + 5b'b^2r - 2b^3 - 2b^2b'r^2) \square \\
+ 4b^2 - 2b'br - b'^2r^3 - b'^2r^2 - 8b^3 - 4b^3r + 2b''br^2 &= (2r^3b^3)R_0 \quad (6.90)
\end{aligned}$$

Rescribiendo el último término y tomando la ecuación (6.72)

$$\begin{aligned}
R_0 &= qk(3P - \rho) - 4\lambda \\
2b^3r^3R_0 &= 2b^3r^3 [qk(3P - \rho) - 4\lambda]. \quad (6.91)
\end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
b^4 (2 - r) \square^2 + ((4r - 2) \square - 8 - 4r - 2r^3 [qk(3P - \rho) - 4\lambda]) b^3 \\
+ ((5b'r - 2b'r^2) \square + 4) b^2 + 2r(b''r - b')b - b'^2r^3 - b'^2r^2 = 0, \quad (6.92)
\end{aligned}$$

el único potencial desconocido es ahora $b(r)$. Una solución general se encuentra para el caso particular de la ecuación de estado $P = -\rho$ [10]

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{k_1}{r} + \frac{qk\rho - \lambda}{3} r^2 \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{k_1}{r} + \frac{qk\rho - \lambda}{3} r^2} + r^2 d\Omega^2. \quad (6.93)$$

En el caso del escalar de Ricci constante $R = R_0$, todas las teorías $f(R)$ admiten soluciones con comportamiento tipo de Sitter aún en el límite de campo débil. Esta es una de las razones por las que energía oscura puede ser remplazada por gravedad $f(R)$ [39, 41, 42].

Déjenos considerar ahora gravedad $f(R)$ con una función lagrangiana analítica $f(R)$, el cual escribiremos como

$$f(R) = \Lambda + \Psi_0 R + \Psi(R), \quad (6.94)$$

donde Ψ_0 es una constante, Λ el rol de la constante cosmológica, y $\Psi(R)$ es una función analítica de R que satisface la condición

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{\Psi(R)}{R^2} = \Psi_1 \quad (6.95)$$

Con Ψ_1 otra constante. Despreciando la constante cosmológica Λ y llevando Ψ_0 a cero, una nueva clases de teorías son obtenidas las cuales, en el límite $R \rightarrow 0$, no se reproduce relatividad general (La ecuación (6.95) implica que $f(R) \approx R^2$ cuando $R \rightarrow 0$). En este caso, analizando el conjunto completo de ecuaciones (6.59) y (6.60), uno puede observar que tanto soluciones con curvatura cero y constante (pero no nulo) son posibles. En particular, si $R = R_0 = 0$ las ecuaciones de campo se resuelven para cualquier forma del potencial gravitacional que aparece en la simetría esférica de fondo (6.69), hace que la ecuación de Bernoulli (6.22) que relaciona estas funciones es satisfecha por $R = 0$. Las soluciones son así definidas por la relación [10]

$$b(r) = \frac{e^{-\int dr h(r)}}{K + 4 \int \frac{dra(r)e^{-\int dr h(r)}}{r[a(r)+ra'(r)]}}. \quad (6.96)$$

6.4. Soluciones con $R = R(r)$

Hasta el momento, hemos discutido el comportamiento de gravedad $f(R)$ buscando soluciones esféricamente simétricas con curvatura de Ricci constante. En Relatividad general esta situación es bien conocida y da paso a las soluciones de Schwarzschild con $R = 0$ y las soluciones de Schwarzschild-de Sitter con $R = R_0 \neq 0$. La búsqueda de soluciones esféricamente simétricas pueden ser generalizadas a gravedad $f(R)$ permitiendo que el escalar de Ricci dependa de la cordenada radial. Esta aproximación es interesante porque, en general, teorías de gravedad de alto orden admiten naturalmente este tipo de solución, con varios ejemplos reportados en la literatura [43, 44]. A continuación nos acercamos al problema desde un punto de vista general. Si escogemos el escalar de Ricci como una función generica $R(r)$ de la cordenada radial, es posible mostrar que también en este caso la solución de las ecuaciones de campo (6.51) y (6.52) son independientes del tiempo (si $T_{\mu\nu}^{(m)} = 0$). En otras palabras, se toma el teorema de Jepsen-Birkhoff. Así como en relatividad general, es crucial estudiar las componentes fuera de la diagonal (r, t) de (6.51) que, para una $f(R)$ generica, da [10]

$$\frac{d}{dr} [r^2 f_R(R)] \dot{B}(t, r) = 0, \quad (6.97)$$

y dos posibilidades pueden ocurrir. Primero, podemos escoger $\dot{B}(t, r) \neq 0$, implicando que $f_R(R) \approx 1/r^2$. En este caso la ecuación de campo remanente no se satisface y hay incompatibilidad. La única posible solución está dada por $\dot{B}(t, r) = 0$ y $B(t, r) = b(r)$. La ecuación (2,2) es entonces usada para determinar que el potencial $A(r, t)$ puede ser factorizado con respecto al tiempo, las soluciones son del tipo (6.68), y la métrica puede ser rescrita en forma esféricamente simétrica estacionaria (6.69) por una transformación de cordenadas adecuado. Aún, el caso radial dependiente más general admite soluciones independientes del tiempo. De la ecuación de la traza y la ecuación (2, 2), la relación [10]

$$a(r) = b(r) \frac{e^{\frac{2}{3} \int \frac{(Rf_R - 2f)b(r)}{R'f_{RR}} dr}}{r^4 R'^2 f_{RR}^2} \quad (6.98)$$

($conf_{RR} > 0$) vinculando $a(r)$ y $b(r)$ se puede obtener, además de

$$b(r) = \frac{6 [f_R(rR'f_{RR})' - rR'^2f_{RR}^2]}{rf(rR'f_{RR} - 4f') + 2f_R[rR(f_R - rR'f_{RR}) - 3R'f_{RR}]}. \quad (6.99)$$

De nuevo, tres ecuaciones mas han de ser satisfechas para completar la solución del sistema (respectivamente las componentes (0, 0) y (1, 1) de las ecuaciones de campo además de la restricción del escalar de Ricci), mientras que las únicas funciones desconocidas son $f(R)$ y el escalar de Ricci $R(r)$. Si ahora consideramos una teoría de cuarto orden descrita por $f(R) = R + \Phi(R)$ con $\Phi(R) \ll R$ estamos en condiciones de satisfacer el conjunto completo de ecuaciones hasta tercer orden in Φ . En particular, podemos resolver el conjunto completo de ecuaciones; las relaciones (6.98) y (6.99) proveerán la solución general dependiente solo de la forma de las funciones $\Phi(r)$ y $R(r)$, *e.i.* [10]

$$a(r) = b(r) \frac{-\frac{2}{3} \int \frac{[R+(2\Phi-R\Phi_R)]b(r) dr}{R'\Phi_{RR}}}{r^4 R'^2 \Phi_{RR}^2}, \quad (6.100)$$

$$b(r) = -\frac{3(rR'\Phi_{RR})_{,r}}{rR}. \quad (6.101)$$

De nuevo la dependencia radial del escalar de curvatura se obtiene, la ecuación (6.100) nos permite obtener la solución de las ecuaciones de campo y, el potencial gravitacional, puede ser evaluado comparandolo con los datos astrofísicos (*e.g.*, [45]).

6.5. Conclusiones

En simetría esférica se destaca un vinculo importante entre los potenciales métricos y la ecuación de Bernoulli, mediante la forma que toma el escalar de Ricci bajo el teorema de Jebsen-Birkhoff, en el cual los potenciales son independientes del tiempo. Estas condiciones especiales permiten rescribir la métrica en términos de un único potencial que dependerá sólo de la componente radial, y es posible obtener una solución exacta por medio de la ecuación de Bernoulli (6.23) una vez se conozca la forma de este potencial. El límite Minkowskiano se obtiene para un caso particular de la ecuación de Bernoulli, en el cual se requiere que $b(r) = \text{cte}$ conllevando también a que la cantidad $r^2R = \text{cte}$, de otro modo el comportamiento asintótico estaría comprometido.

Este análisis va a tener un impacto en el contexto de la gravedad modificada $f(R)$. Tomando una ecuación de campo libre de torsión se demuestra que los potenciales métricos son independientes del tiempo en simetría esférica. Una vez más se puede dejar la métrica en términos de un único potencial desconocido. Para el caso de la ecuación de campo con Ricci constante, aparece una ecuación tipo Bernoulli no lineal de segundo orden. Para el caso de Ricci radial, se presentan las mismas condiciones del caso constante y se demuestra que la métrica es una vez más independiente del tiempo; la solución general para el potencial está dado por el sistema de ecuaciones (6.98) y (6.99).

Universo de FLRW con Gravedad Modificada $f(R)$ y Fluido Perfecto

A continuación se derivan las ecuaciones dinámicas de Friedmann, Raychaudhuri y continuidad para un universo de FLRW y fluido perfecto a partir de la ecuación de campo en gravedad modificada $f(R)$ deducida en el capítulo 5. En adelante, tomaremos la función $f(R)$ de la forma $f(R) = R + f(R)$. Las ecuaciones aquí obtenidas dominarán ahora la dinámica del universo de fondo y serán nuestra base cuando consideremos las perturbaciones de primer orden a la métrica.

7.1. Derivación de la Ecuación de Friedmann y Raychaudhuri en $f(R)$

Tomamos a continuación la función $f(R) = R + f(R)$ en donde R reproduce la relatividad general y $f(R)$ la modificación a la ecuación de campo de Einstein

$$S_{met} = \int_{\nu} d^4x \left(\frac{R + f(R)}{2k} \sqrt{-g} + L_M \sqrt{-g} \right), \quad (7.1)$$

De la cual obtenemos la siguiente ecuación de campo[36, 37]

$$G_{\alpha\beta} + f_R(R)R_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} \left(\frac{f(R)}{2} - \square f_R(R) \right) - \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} f_R(R) = kT_{\alpha\beta} \quad (7.2)$$

Que podemos describir como

$$(1 + f_R)R_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} \left(\frac{R + f(R)}{2} - \square f_R(R) \right) - \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} f_R(R) = kT_{\alpha\beta}, \quad (7.3)$$

donde, $\square = \nabla_{\sigma} \nabla^{\sigma}$, $f_R(R) = df(R)/dR$ y $k = 8\pi G$. Cuya traza es

$$-(1 - f_R(R))R - 2f_R(R) + 3\square f_R(R) = kT. \quad (7.4)$$

Podemos describir la ecuación (7.3) como

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{1 + f_R(R)} \left(kT_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \left(\frac{R + f(R)}{2} - \square f_R(R) \right) + \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} f_R(R) \right). \quad (7.5)$$

Tomando las ecuaciones (7.5) y (7.4) es posible describir las ecuaciones de campo en gravedad modificada $f(R)$ en forma de ecuaciones de campo de Einstein considerando un tensor de energía-momentum efectivo $T_{\alpha\beta}^{eff}$ [36, 37],

$$\begin{aligned}
G_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R \\
&= \frac{1}{1+f_R(R)} \left(kT_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \frac{R + f(R) - R(1+f_R(R))}{2} - g_{\alpha\beta}\square f_R(R) + \nabla_\alpha \nabla_\beta f_R(R) \right) \\
&= \frac{1}{1+f_R(R)} \left(kT_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \frac{f(R) - Rf_R(R)}{2} - g_{\alpha\beta}\square f_R(R) + \nabla_\alpha \nabla_\beta f_R(R) \right)
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Se observa que

$$G_{\alpha\beta} = \frac{k}{1+f_R(R)} \left(T_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta}^{eff} \right), \tag{7.7}$$

donde

$$T_{\alpha\beta}^{eff} = \frac{1}{k} \left(g_{\alpha\beta} \frac{f(R) - Rf_R(R)}{2} - g_{\alpha\beta}\square f_R(R) + \nabla_\alpha \nabla_\beta f_R(R) \right). \tag{7.8}$$

El cual puede ser interpretado como un fluido compuesto por un término de curvatura. Definimos el operador

$$\mathcal{D} \equiv \nabla_\alpha \nabla_\beta - g_{\alpha\beta}\square. \tag{7.9}$$

Calculemos los términos no nulos de este operador para una métrica de FLRW con constante de curvatura nula ($K = 0$). Para el operador D'Alambertiano se tiene

$$\begin{aligned}
\square f_R &= g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta f_R \\
&= g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha (\partial_\beta f_R) \\
&= g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\kappa \partial_\kappa f_R)
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Recordemos que para FLRW los términos no nulos de los símbolos de Christoffel son

$$\Gamma_{ij}^0 = a\dot{a}\delta_{ij}, \quad \Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i. \tag{7.11}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\square f_R &= g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\kappa \partial_\kappa f_R) \\
&= -\partial^0 \partial_0 f_R - g^{00} \overset{0}{\Gamma_{00}^k} \partial_k f_R - g^{lm} \Gamma_{lm}^k \partial_k f_R \\
&= -\partial^0 \partial_0 f_R - \frac{1}{a^2} \delta^{lm} (\Gamma_{lm}^0 \partial_0 f_R) \\
&= -\partial^0 \partial_0 f_R - \frac{1}{a^2} \delta^{lm} (\delta_{lm} \dot{a} \partial_0 f_R) \\
&= -\partial^0 \partial_0 f_R - 3 \frac{\dot{a}}{a} \partial_0 f_R \\
&= -\partial_0^2 f_R - 3H \partial_0 f_R.
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Esto es

$$\begin{aligned}\partial_0 f_R &= f_{RR} \dot{R} \\ \partial_0 \partial_0 f_R &= \partial_0 (f_{RR} \dot{R}) = f_{RR} \ddot{R} + \dot{R}^2 f_{RRR}\end{aligned}\quad (7.13)$$

finalmente

$$\square f_R = -f_R \ddot{R} - \dot{R}^2 f_{RRR} - 3H \partial_0 f_R. \quad (7.14)$$

Así, la parte temporal del operador $\mathcal{D}_{\alpha\beta} f_R$ resulta [36, 37]

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{00} f_R &= \nabla_0 \nabla_0 f_R - g_{00} \square f_R \\ &= \nabla_0 (f_{RR} \dot{R}) - f_{RR} \ddot{R} - \dot{R}^2 f_{RRR} - 3H \partial_0 f_R \\ &= f_{RR} \ddot{R} + \dot{R}^2 f_{RRR} - f_{RR} \ddot{R} - \dot{R}^2 f_{RRR} - 3H \partial_0 f_R \\ &= -3H f_{RR} \dot{R}.\end{aligned}\quad (7.15)$$

Y su parte espacial es

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{ij} f_R &= \nabla_i \partial_j f_R - g_{ij} \square f_R \\ &= \partial_i \partial_j f_R - g_{ij} \square f_R \\ &= g_{ij} \partial_0^2 f_R + 3H g_{ij} f_{RR} \dot{R} \\ &= g_{ij} \partial_0 (f_{RR} \dot{R}) + 3H g_{ij} f_{RR} \dot{R} \\ &= g_{ij} (f_{RR} \ddot{R} + f_{RRR} \dot{R}^2) + 3H g_{ij} f_{RR} \dot{R}.\end{aligned}\quad (7.16)$$

Para obtener la ecuación de Friedmann y Raychaudhuri debemos igualar las componentes $0 - 0$ e $i - j$ respectivamente en la ecuación de campo (7.2). Así, la componente $0 - 0$ del lado izquierdo (Para $R_{00} = -3\ddot{a}/a$ y $R_{ij} = \delta_{ij}(2\dot{a}^2 + a\ddot{a})$)

$$\begin{aligned}G_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2}g_{00}R \\ &= -3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right) \\ &= 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \\ &= 3H^2.\end{aligned}\quad (7.17)$$

Luego, del lado derecho

$$\begin{aligned}\frac{k}{1+f_R} (T_{00} + T_{00}^{eff}) &= \frac{1}{1+f_R} \left(kT_{00} + g_{00} \frac{f - Rf_R}{2} + \mathcal{D}_{00} f_R \right) \\ &= \frac{1}{1+f_R} \left(k\rho_m + \frac{Rf_R - f}{2} - 3Hf_{RR} \dot{R} \right).\end{aligned}\quad (7.18)$$

Igualando (7.17) y (7.18) se obtiene la ecuación de Friedmann generalizada

$$3H^2 = \frac{1}{1+f_R} \left(k\rho_m + \frac{Rf_R - f}{2} - 3Hf_{RR} \dot{R} \right). \quad (7.19)$$

De igual manera para la componente $i - j$ en el lado izquierdo

$$\begin{aligned}
G_{ij} &= \left(2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} \right) g_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} \\
&= \left(2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} \right) g_{ij} - 3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right) g_{ij} \\
&= - \left(2\dot{H}^2 + 3H^2 \right) g_{ij}
\end{aligned} \tag{7.20}$$

Luego, del lado derecho

$$\begin{aligned}
\frac{k}{1 + f_R} \left(T_{ij} + T_{ij}^{eff} \right) &= \frac{1}{1 + f_R} \left(k T_{ij} + g_{ij} \frac{f - R f_R}{2} + \mathcal{D}_{ij} f_R \right) \\
&= \frac{1}{1 + f_R} \left(k P_m g_{ij} + g_{ij} \frac{f - R f_R}{2} + g_{ij} (f_{RR} \ddot{R} + f_{RRR} \dot{R}^2) + 2H g_{ij} f_{RR} \dot{R} \right).
\end{aligned} \tag{7.21}$$

Igualando (7.20) y (7.21) se obtiene la ecuación de Raychaudhuri generalizada

$$\begin{aligned}
- \left(2\dot{H}^2 + 3H^2 \right) g_{ij} &= \frac{g_{ij}}{1 + f_R} \left(k P_m + \frac{f - R f_R}{2} + f_{RR} \ddot{R} + f_{RRR} \dot{R}^2 + 2H f_{RR} \dot{R} \right) \\
- \left(2\dot{H}^2 + 3H^2 \right) &= \frac{1}{1 + f_R} \left(k P_m + \frac{f - R f_R}{2} + f_{RR} \ddot{R} + f_{RRR} \dot{R}^2 + 2H f_{RR} \dot{R} \right).
\end{aligned} \tag{7.22}$$

A partir de las ecuaciones (7.19) y (7.22), podemos definir una densidad y una presión asociados a los términos adicionales de curvatura en la forma [36, 37]

$$\rho_{curv} = \frac{1}{1 + f_R} \left(\frac{R f_R - f}{2} - 3H f_{RR} \dot{R} \right). \tag{7.23}$$

$$P_{curv} = \frac{1}{1 + f_R} \left(2H \dot{R} f_{RR} + \frac{f - R f_R}{2} + \ddot{R} f_{RR} + \dot{R}^2 f_{RRR} \right). \tag{7.24}$$

De modo que la ecuación de estado puede escribirse como [36, 37]

$$\begin{aligned}
\omega_{curv} = \frac{P_{curv}}{\rho_{curv}} &= \frac{2H \dot{R} f_{RR} + \frac{f - R f_R}{2} + \ddot{R} f_{RR} + \dot{R}^2 f_{RRR}}{\frac{R f_R - f}{2} - 3H f_{RR} \dot{R}} \\
&= \frac{3H \dot{R} f_{RR} - H \dot{R} f_{RR} - \frac{R f_R - f}{2} + \ddot{R} f_{RR} + \dot{R}^2 f_{RRR}}{- \left(3H f_{RR} \dot{R} - \frac{R f_R - f}{2} \right)} \\
&= \frac{\ddot{R} f_{RR} + \dot{R}^2 f_{RRR} - H \dot{R} f_{RR}}{\frac{R f_R - f}{2} - 3H f_{RR} \dot{R}} - 1.
\end{aligned} \tag{7.25}$$

7.2. Ecuación de Continuidad

Tomando las ecuaciones (7.19) y (7.22) con $P_m = 0$ podemos obtener la ecuación de continuidad modificada derivando (7.19) respecto al tiempo [36, 37]

$$\begin{aligned} 6H\dot{H} &= \frac{k\dot{\rho}_m + (1 + f_R)\dot{\rho}_{curv} + \rho_{curv}f_{RR}\dot{R}}{1 + f_R} - \frac{f_{RR}\dot{R}(k\rho_m + (1 + f_R)\rho_{curv})}{(1 + f_R)^2} \\ 2\dot{H} &= \frac{1}{3H(1 + f_R)} \left(k\dot{\rho}_m + (1 + f_R)\dot{\rho}_{curv} - \frac{f_{RR}\dot{R}k\rho_m}{1 + f_R} \right). \end{aligned} \quad (7.26)$$

Remplazando el resultado anterior en (7.22)

$$-3H^2 = P_{curv} + \frac{1}{3H(1 + f_R)} \left(k\dot{\rho}_m + (1 + f_R)\dot{\rho}_{curv} - \frac{f_{RR}\dot{R}k\rho_m}{1 + f_R} \right). \quad (7.27)$$

Ahora, remplazando (7.19) en lo anterior se obtiene

$$\begin{aligned} -\frac{1}{1 + f_R} (k\rho_m + (1 + f_R)\rho_{curv}) - P_{curv} &= \frac{1}{3H(1 + f_R)} \left(k\dot{\rho}_m + (1 + f_R)\dot{\rho}_{curv} - \frac{f_{RR}\dot{R}k\rho_m}{1 + f_R} \right) \\ -3Hk\rho_m - 3H(1 + f_R)\rho_{curv} - 3H(1 + f_R)P_{curv} &= k\dot{\rho}_m + (1 + f_R)\dot{\rho}_{curv} - \frac{f_{RR}\dot{R}k\rho_m}{1 + f_R} \\ -\cancel{k(\dot{\rho}_m + 3H\rho_m)} - 3H(1 + f_R)(\rho_{curv} + P_{curv}) - (1 + f_R)\dot{\rho}_{curv} &= -\frac{f_{RR}\dot{R}k\rho_m}{1 + f_R} \\ \dot{\rho}_{curv} + 3H\rho_{curv}(1 + \omega_{curv}) &= \frac{f_{RR}\dot{R}k\rho_m}{(1 + f_R)^2}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

7.3. Conclusiones

Las ecuaciones dinámicas en gravedad modificada $f(R) = R + f(R)$ presentan naturalmente términos que dan cuenta de la expansión acelerada del universo sin necesidad de incluir materia exótica. De este modo, la expansión del universo puede ser explicada como un fenómeno del espacio-tiempo, como se muestra en la ecuación (7.22)

Al rescribir las ecuaciones de campo con un término efectivo obtenemos una ecuación de estado que involucra una densidad y una presión asociados a la curvatura.

Ecuaciones de Campo Perturbadas en Gravedad Modificada $f(R)$ y Modelo de Polvo

Finalmente, obtendremos en este capítulo la ecuación tipo Poisson en el contexto de las ecuaciones de campo modificadas para un modelo de polvo mediante perturbaciones a primer orden de la teoría. Adicionalmente tendremos en cuenta en este caso la aproximación cuasi-estática.

8.1. Derivación de la Ecuación Tipo Poisson Bajo la Aproximación Cuasi-Estática

Consideremos ahora las ecuaciones de campo en $f(R) = R + f(R)$ introduciendo la métrica (3.1) la cual contiene las perturbaciones con campos escalares de gauge ψ y ϕ , teniendo en cuenta sólo perturbaciones a primer orden. Introduzcamos también en la acción el escalar de Ricci de modo que podamos comparar los escenarios de gravedad de Einstein con gravedad modificada bajo la aproximación cuasi-estática [46, 47, 48, 49]

$$S_{mod} = \int_{\nu} d^4x \left(\frac{R + f(R)}{2k} \sqrt{-g} + L_M \sqrt{-g} \right), \quad (8.1)$$

las variaciones respectivas a esta acción producen la siguiente ecuación de campo

$$G_{\alpha\beta} + f_R(R)R_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} \left(\frac{f(R)}{2} - \square f_R(R) \right) - \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} f_R(R) = kT_{\alpha\beta} \quad (8.2)$$

evidentemente, las variaciones respectivas del escalar de Ricci y de la función escalar reproducen en conjunto las ecuaciones de campo estudiadas en los capítulos 1 y 5. Esta ecuación la podemos rescribir como

$$(1 + f_R)R_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} \left(\frac{R + f}{2} - \square f_R(R) \right) - \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} f_R(R) = kT_{\alpha\beta} \quad (8.3)$$

cuya traza es

$$-(1 + f_R)R - 2f + 3\square f_R = kT \quad (8.4)$$

Tomando la aproximación cuasi-estática $\frac{f}{R} \ll 1$ entonces la ecuación (8.3) resulta

$$(1 + f_R)R_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} \left(\frac{R}{2} - \square f_R \right) - \nabla_\alpha \nabla_\beta f_R = kT_{\alpha\beta} \quad (8.5)$$

Ahora, tomando las siguientes aproximaciones cuasi-estáticas $f_R \ll 1$ y $\nabla f_R \gg f'_R$ entonces la ecuación (8.5) resulta

$$R_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} \left(\frac{R}{2} - \nabla^2 f_R \right) - \nabla_\alpha \nabla_\beta f_R = kT_{\alpha\beta} \quad (8.6)$$

o

$$G_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \nabla^2 f_R - \nabla_\alpha \nabla_\beta f_R = kT_{\alpha\beta} \quad (8.7)$$

cuya traza es

$$\nabla^2 f_R = \frac{1}{3} [kT + R] \quad (8.8)$$

Así para la componente 0 – 0 tenemos

$$G_{00} + g_{00} \nabla^2 f_R - \cancel{\nabla_\theta \nabla_0 f_R} = kT_{00} \quad (8.9)$$

Introduciendo las perturbaciones obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{G}_{00} + \delta G_{00} - a^2 (1 + 2\phi) \left(\frac{1}{3} [-k(\bar{\rho} + \delta\rho) + \bar{R} + \delta R] \right) &= a^2 k (\bar{\rho} + \delta\rho + 2\phi\bar{\rho}) \\ \bar{G}_{00} + \delta G_{00} - a^2 \left(\frac{1}{3} [-k\bar{\rho} + \bar{R}] + \frac{1}{3} [-k\delta\rho + \delta R] + \frac{2\phi}{3} [-k\bar{\rho} + \bar{R}] \right) &= a^2 k (\bar{\rho} + \delta\rho + 2\phi\bar{\rho}) \end{aligned} \quad (8.10)$$

Sustrayendo el fondo resulta

$$2\nabla^2 \psi - 6\mathcal{H}\psi' - a^2 \left(\frac{1}{3} [-k\delta\rho + \delta R] + \frac{2\phi}{3} [-k\bar{\rho} + \bar{R}] \right) = a^2 k (\delta\rho + 2\phi\bar{\rho}) \quad (8.11)$$

De la componente 0 – j del tensor de Einstein para el modelo de polvo se obtiene la condición

$$\psi' = -\mathcal{H}\phi. \quad (8.12)$$

Por su parte, la ecuación de Friedmann modificada a orden cero en el tiempo conforme bajo las condiciones de la aproximación cuasi-estática es

$$3\mathcal{H}^2 = a^2 \left(k\bar{\rho} + \frac{1}{3} [-k\bar{\rho} + \bar{R}] \right) \quad (8.13)$$

Por lo tanto, en la ecuación (8.11)

$$2\nabla^2 \psi + \cancel{6\mathcal{H}^2 \phi} - 2\phi a^2 \left(k\bar{\rho} + \frac{1}{3} [-k\bar{\rho} + \bar{R}] \right) = a^2 \left(k\delta\rho + \frac{1}{3} [-k\delta\rho + \delta R] \right) \quad (8.14)$$

De esta manera obtenemos una ecuación de tipo Poisson modificada en gravedad modificada $f(R)$ para el caso cuasi-estático

$$2\nabla^2\psi = a^2 \left(\frac{2}{3}k\delta\rho + \frac{1}{3}\delta R \right) \quad (8.15)$$

o

$$\boxed{\nabla^2\psi = a^2 \left(\frac{1}{3}k\delta\rho + \frac{1}{6}\delta R \right)} \quad (8.16)$$

Las ecuacion (8.16) y (8.8) definen un sistema de ecuaciones para el potencial gravitacional, solución que puede ser usada para la evolución de partículas de materia [20]. Note que en el límite ordinario de relatividad general, $\delta R = 8\pi G\delta\rho$, y la ecuación para el potencial gravitacional se reduce a la ecuación no modificada [48, 49],

$$\nabla^2\psi = 4\pi G\delta\rho. \quad (8.17)$$

En donde, δR incluye los efectos de la función $f(R)$ por medio de la ecuación de la traza de la ecuación de campo para el caso cuasi-estático (8.8) en la dinámica de esta ecuación, de modo que

$$\delta R = \delta R(f(R)). \quad (8.18)$$

A partir de la ecuación de la traza se encuentran las formas respectivas de la perturbación al escalar de Ricci para el modelo cuasi-estático. Por su parte, para obtener la variación δR de las perturbaciones para la ecuación de campo completa en gravedad modificada $f(R)$ se utilizará la traza (8.4) [50]

Por otra parte, de la componente $i - j$ de la ecuación (8.7) tenemos

$$G_{ij} + g_{ij}\nabla^2 f_R - \nabla_i \nabla_j f_R = kT_{ij} \quad (8.19)$$

Introduciendo las perturbaciones resulta

$$\begin{aligned} \bar{G}_{ij} + \delta G_{ij} + a^2(1-2\psi)\delta_{ij} \left(\frac{1}{3}[-k(\bar{\rho} + \delta\rho) + \bar{R} + \delta R] \right) - \nabla_i \nabla_j f_R &= 0 \\ \bar{G}_{ij} + \delta G_{ij} + a^2\delta_{ij} \left(\frac{1}{3}[-k\bar{\rho} + \bar{R}] + \frac{1}{3}[-k\delta\rho + \delta R] - \frac{2\psi}{3}[-k\bar{\rho} + \bar{R}] \right) - \nabla_i \nabla_j f_R &= 0 \end{aligned} \quad (8.20)$$

Retirando el fondo nos queda

$$\delta G_{ij} + a^2\delta_{ij} \left(\frac{1}{3}[-k\delta\rho + \delta R] - \frac{2\psi}{3}[-k\bar{\rho} + \bar{R}] \right) - \nabla_i \nabla_j f_R = 0 \quad (8.21)$$

Por otro lado, la ecuación de Raychaudhuri modificada a orden cero en el tiempo conforme bajo las condiciones de la aproximación cuasi-estática es

$$\begin{aligned} \bar{G}_{ij} + g_{ij}\nabla^2 f_R - \nabla_i \nabla_j f_R &= 0 \\ \bar{G}_{ij} + a^2(1-2\psi)\delta_{ij} \left(\frac{1}{3}[-k\bar{\rho} + \bar{R}] \right) &= \nabla_i \nabla_j f_R \end{aligned} \quad (8.22)$$

Retirando el fondo obtenemos la condición

$$\nabla_i \nabla_j f_R = -\frac{2a^2 \delta_{ij} \psi}{3} (-k\bar{\rho} + \bar{R}) \quad (8.23)$$

Remplazando la condición (8.23) en (8.21)

$$\begin{aligned} \delta G_{ij} + a^2 \delta_{ij} \left(\frac{1}{3} [-k\delta\rho + \delta R] - \frac{2\psi}{3} [-k\bar{\rho} + \bar{R}] \right) + \frac{2a^2 \delta_{ij} \psi}{3} (-k\bar{\rho} + \bar{R}) &= 0 \\ \delta G_{ij} + a^2 \delta_{ij} \left(\frac{1}{3} [-k\delta\rho + \delta R] \right) &= 0. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Una vez más, se recuperan las formas no modificadas en en límite de relatividad general $\delta R = 8\pi G\delta\rho$. La forma final de esta ecuación tomando la componente del tensor de Einstein $i - j$ perturbada hasta primer orden bajo la aproximación cuasi-estática es

$$\boxed{\nabla^2(\phi - \psi)\delta_{ij} = 2\mathcal{H}^2(\phi - \psi)\delta_{ij} + \partial_i \partial_j(\phi - \psi) + \frac{a^2}{3} [-k\delta\rho + \delta R] \delta_{ij}} \quad (8.25)$$

8.2. Conclusiones

Las componentes de las ecuaciones de campo en gravedad modificada perturbadas hasta primer orden bajo la aproximación cuasi-estática producen ecuaciones tipo Poisson que relacionan el potencial de la perturbación con el elemento de densidad perturbado más un término perturbado de la curvatura. Al comparar los escenarios de gravedad de Einstein con la de gravedad modificada dentro del marco de la función $f(R) = R + f(R)$, bajo la aproximación cuasi-estática, se recuperan las ecuaciones de campo perturbadas de primer orden en Relatividad General.

Conclusiones Generales y Perspectivas

En este trabajo se realizaron perturbaciones de primer orden a la teoría de la relatividad general, de manera que se pudiera trabajar independientemente la dinámica de las perturbaciones de la dinámica del fondo en el cual evolucionan. Nuestro estudio consideró un universo de FLRW y un modelo de polvo en el cual, las perturbaciones, presentan una forma tipo Poisson, siendo esto coherente con el marco Newtoniano de la teoría al que se debe reducir naturalmente.

En el capítulo 4, obtuvimos las condiciones para que ocurra el colapso gravitacional sobre una región esféricamente simétrica en el régimen no lineal dentro del marco de la relatividad general. Cabe resaltar que tales condiciones presentan una implicación cosmológica importante sobre el parametro de densidad inicial del universo, de modo que la formación de estructuras va a depender fuertemente si se considera uno de los tres tipos de universo: cerrado, plano y abierto. En este mismo marco consideramos una descripción métrica tipo LTB, en la cual se incluyen las perturbaciones, lo que permite tener una solución completa del sistema: fondo más perturbaciones lo que lo hace muy atractivo a la hora de obtener posibles soluciones analíticas en el régimen no lineal de la teoría. También obtuvimos de este análisis métrico un perfil de densidad que describe las perturbaciones analíticamente.

En el capítulo 6 estudiamos algunos aspectos de la simetría esférica en gravedad modificada $f(R)$, destacamos de este estudio que la generalización de las soluciones para el caso del escalar de Ricci constante o solamente dependiente del radio, están gobernadas por la ecuación de Bernoulli, por lo tanto, no fue casualidad que la solución propuesta para la ecuación de campo (4.148) en el caso de la métrica LTB tuviera una forma particular de la ecuación de Bernoulli, dado que el problema consideraba simetría esférica, y la teoría garantiza que la relación entre los potenciales métricos y el escalar de Ricci presenta una restricción que asume la forma general de la ecuación de Bernoulli.

Finalmente, el capítulo 8 estuvo dedicado a las perturbaciones de primer orden en el marco de las teorías de gravedad modificada $f(R)$, con el fin de obtener las ecuaciones tipo Poisson análogas a las del marco de la relatividad general. Para este fin, y procurando obtener los primeros efectos observables de esta teoría, se tomó el caso en el que $f(R) = R + f(R)$, modelo que reproduce paralelamente la ecuación de campo en relatividad y de gravedad modificada $f(R)$. Las aproximaciones cuasi-estáticas permiten reducir las ecuaciones dinámicas obtenidas al límite de la relatividad general correctamente. La ecuación tipo Poisson (8.16) junto a la ecuación de la traza (8.8) gobiernan la dinámica de las perturbaciones a las ecuaciones de campo en gravedad modificada $f(R)$ hasta primer orden de aproximación en las perturbaciones métricas.

Una perspectiva importante que deja este trabajo es la posibilidad de realizar simulaciones cosmológicas con los resultados obtenidos, tanto para los perfiles de densidad propuestos en el modelo métrico de LTB, como para las ecuación tipo Poisson encontrada con perturbaciones en relatividad general y de gravedad modificada $f(R)$, compararlos así con las simulaciones cosmológicas recientes realizadas dentro

de sus respectivos marcos[51]. El grupo de gravitación y cosmología produjo sus primeras simulaciones cosmológicas computacionales para el marco de la relatividad general[52], siendo el presente trabajo el pilar teórico que lo soporta y corroborando la validez e importancia científica del trabajo.

Perturbaciones Métricas con Gauge de Newton Conforme

A continuación se muestran los cálculos correspondientes a las perturbaciones métricas, hasta primer orden, de las conexiones métricas y los tensores de Ricci y Einstein tomando un gauge de Newton conforme

$$ds^2 = a^2(\tau) [-(1 + 2\phi)d\tau^2 + (1 - 2\psi)(dx^2 + dy^2 + dz^2)] \quad (\text{A.1})$$

Cuyas componentes métricas son

$$g_{00} = -a^2(1 + 2\phi); \quad g_{0i} = 0; \quad g_{ij} = a^2(1 - 2\psi)\delta_{ij}. \quad (\text{A.2})$$

$$g^{00} = -a^{-2}(1 - 2\phi); \quad g_{0i} = 0; \quad g^{ij} = a^{-2}(1 + 2\psi)\delta^{ij}. \quad (\text{A.3})$$

A.1. Componentes de la Conexión Métrica

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho} [g_{\mu\rho,\lambda} + g_{\lambda\rho,\nu} - g_{\mu\lambda,\rho}] \quad (\text{A.4})$$

Para $\mu = 0$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\lambda}^0 &= \frac{1}{2}g^{0\rho} [g_{\mu\rho,\lambda} + g_{\lambda\rho,\nu} - g_{\mu\lambda,\rho}] \\ &= \frac{1}{2}g^{00} [g_{\mu 0,\lambda} + g_{\lambda 0,\nu} - g_{\mu\lambda,0}] \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Para $\nu = \lambda = 0$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2}g^{00} [g_{00,0} + \cancel{g_{00,\sigma}} - \cancel{g_{00,\sigma}}] \\
&= \frac{1}{2}g^{00} [g_{00,0}] \\
&= \frac{1}{2}(-a^{-2}(1-2\phi))(\partial_0(-a^2(1+2\phi))) \\
&= \frac{1}{2}(-a^{-2}(1-2\phi))(2a^2\phi + 2aa'(1+2\phi)) \\
&= (1-2\phi)(\phi' + \mathcal{H}(1+2\phi)) \\
&= \phi' + \mathcal{H}(1+2\phi) - 2\phi\mathcal{H}(1+2\phi) \\
&= \phi' + \mathcal{H}.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Para $\nu = 0; \lambda = i$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0i}^0 &= \frac{1}{2}g^{00} [g_{00,i} + \cancel{g_{i0,0}} - \cancel{g_{0i,0}}] \\
&= \frac{1}{2}g^{00} [g_{00,i}] \\
&= \frac{1}{2}(-a^{-2}(1-2\phi))(\partial_i(-a^2(1+2\phi))) \\
&= (1-2\phi)(\partial_i\phi) \\
&= \partial_i\phi.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Para $\nu = j; \lambda = i$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ji}^0 &= \frac{1}{2}g^{00} [\cancel{g_{0j,i}} + \cancel{g_{i0,j}} - g_{ji,0}] \\
&= \frac{1}{2}g^{00} [-g_{ji,0}] \\
&= \frac{1}{2}(-a^{-2}(1-2\phi))(-\partial_0(a^2(1-2\psi)\delta_{ji})) \\
&= \frac{1}{2}(-a^{-2}(1-2\phi))(2a^2\psi' - 2aa'(1-2\psi))\delta_{ji} \\
&= (1-2\phi)(-\psi' + \mathcal{H}(1-2\psi)) - 2\mathcal{H}\phi(1-2\psi)\delta_{ji} \\
&= (-\psi' + \mathcal{H} - 2\mathcal{H}\psi - 2\mathcal{H}\phi)\delta_{ji} \\
&= (-\psi' + \mathcal{H}(1-2\phi-2\psi))\delta_{ij}.
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Para $\mu = k; \nu = 0; \lambda = 0$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^k &= \frac{1}{2}g^{kl} [g_{\theta,0}^0 + g_{\theta,0}^0 - g_{00,l}] \\
&= \frac{1}{2}g^{kl} [-g_{00,l}] \\
&= \frac{1}{2}(a^{-2}(1+2\psi))\delta^{kl}(-\partial_l(-a^2(1+2\phi))) \\
&= \frac{1}{2}(1+2\psi)(2\partial_k\phi) \\
&= (1+2\psi)(\partial_k\phi) \\
&= \partial_k\phi.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Para $\mu = k; \nu = 0; \lambda = i$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0i}^k &= \frac{1}{2}g^{kl} [g_{\theta,i}^0 + g_{il,0} - g_{\theta,i}^0] \\
&= \frac{1}{2}g^{kl} [g_{il,0}] \\
&= \frac{1}{2}(a^{-2}(1+2\psi))\delta^{kl}(\partial_0(a^2(1-2\psi))\delta_{il}) \\
&= (1+2\psi)(\mathcal{H}(1-2\psi) - \psi')\delta_i^k \\
&= (\mathcal{H}(1+2\psi)(1-2\psi) - (1+2\psi)\psi')\delta_i^k \\
&= (\mathcal{H} - \psi')\delta_i^k.
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Para $\mu = k; \nu = j; \lambda = i$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ji}^k &= \frac{1}{2}g^{kl} [g_{lj,i} + g_{il,j} - g_{ji,l}] \\
&= \frac{1}{2}(a^{-2}(1+2\psi))\delta^{kl}(\partial_i(a^2(1-2\psi))\delta_{lj} + \partial_j(a^2(1-2\psi))\delta_{li} - \partial_l(a^2(1-2\psi))\delta_{ij}) \\
&= (1-2\psi)\delta^{kl}(-\partial_i\psi\delta_{lj} - \partial_j\psi\delta_{li} + \partial_l\psi\delta_{ji}) \\
&= -(\partial_i\psi\delta_j^k + \partial_j\psi\delta_i^k - \partial_k\psi\delta_{ji}).
\end{aligned} \tag{A.11}$$

En resumen

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^0 &= \mathcal{H} + \phi'; \\
\Gamma_{0i}^0 &= \partial_i\phi; \\
\Gamma_{ji}^0 &= (-\psi' + \mathcal{H}(1-2\phi-2\psi))\delta_{ij}; \\
\Gamma_{00}^k &= \partial_k\phi; \\
\Gamma_{0i}^k &= (\mathcal{H} - \psi')\delta_i^k; \\
\Gamma_{ji}^k &= -(\partial_i\psi\delta_j^k + \partial_j\psi\delta_i^k - \partial_k\psi\delta_{ji}); \\
\Gamma_{0k}^k &= 3(\mathcal{H} - \psi'); \\
\Gamma_{ik}^k &= -3\partial_i\psi.
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}. \quad (\text{A.13})$$

Para $\mu = 0$

$$R_{0\nu} = \Gamma_{0\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{0\alpha,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha}\Gamma_{0\nu}^{\beta} - \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}\Gamma_{0\alpha}^{\beta}. \quad (\text{A.14})$$

Para $\nu = 0$

$$R_{00} = \Gamma_{00,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{0\alpha,0}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha}\Gamma_{00}^{\beta} - \Gamma_{\beta 0}^{\alpha}\Gamma_{0\alpha}^{\beta}. \quad (\text{A.15})$$

Donde

$$\begin{aligned} \Gamma_{00,\alpha}^{\alpha} &= \Gamma_{00,0}^0 + \Gamma_{00,k}^k \\ &= \phi'' + \mathcal{H}' + \partial_k \partial_k \phi \\ &= \phi'' + \mathcal{H}' + \nabla^2 \phi. \\ \Gamma_{0\alpha,0}^{\alpha} &= \Gamma_{00,0}^0 + \Gamma_{0k,0}^k \\ &= \phi'' + \mathcal{H}' + 3(\mathcal{H}' + \psi'') \\ &= 4\mathcal{H}' + \phi'' - 3\psi'' \\ \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha}\Gamma_{00}^{\beta} &= \Gamma_{0\alpha}^{\alpha}\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{m\alpha}^{\alpha}\Gamma_{00}^m \\ &= \Gamma_{00}^0\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{0k}^k\Gamma_{00}^0 + \cancel{\Gamma_{m0}^0\Gamma_{00}^m}^{2^{do}\mathcal{O}} + \cancel{\Gamma_{mk}^k\Gamma_{00}^m}^{2^{do}\mathcal{O}} \\ &= (\mathcal{H} + \phi')^2 + (3(\mathcal{H} - \psi'))(\mathcal{H} + \phi') \\ &= \mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}\phi' + 3\mathcal{H}^2 + 3\mathcal{H}\phi' - 3\mathcal{H}\psi' \\ &= 4\mathcal{H}^2 + 5\mathcal{H}\phi' - 3\mathcal{H}\psi'. \\ \Gamma_{\beta 0}^{\alpha}\Gamma_{0\alpha}^{\beta} &= \Gamma_{00}^{\alpha}\Gamma_{0\alpha}^0 + \Gamma_{m0}^{\alpha}\Gamma_{0\alpha}^m \\ &= \Gamma_{00}^0\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{00}^k\Gamma_{0k}^0 + \cancel{\Gamma_{m0}^0\Gamma_{00}^m}^{2^{do}\mathcal{O}} + \Gamma_{m0}^k\Gamma_{0k}^m \\ &= (\mathcal{H} + \phi')^2 + (\mathcal{H} - \psi')\delta_m^k(\mathcal{H} - \psi')\delta_k^m \\ &= 4\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}\phi' - 6\mathcal{H}\psi'. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Luego sumando los términos de acuerdo a la expresión (A.15) se obtiene

$$\begin{aligned} R_{00} &= \phi'' + \mathcal{H}' + \nabla^2 \phi - \phi'' - 4\mathcal{H}' + 3\psi'' + 4\mathcal{H}^2 + 5\mathcal{H}\phi' - 3\mathcal{H}\psi' - 4\mathcal{H}^2 - 2\mathcal{H}\phi' + 6\mathcal{H}\psi' \\ R_{00} &= -3\mathcal{H}' + \nabla^2 \phi + 3\psi'' + 3\mathcal{H}\phi' + 3\mathcal{H}\psi'. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Para $\mu = 0, \nu = j$

$$R_{0j} = \Gamma_{0j,\alpha}^\alpha - \Gamma_{0\alpha,j}^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \Gamma_{0j}^\beta - \Gamma_{\beta j}^\alpha \Gamma_{0\alpha}^\beta. \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0j,\alpha}^\alpha &= \Gamma_{0j,0}^0 + \Gamma_{0j,k}^k \\
&= \partial_0 \partial_j \phi + \partial_k (\mathcal{H} - \psi') \delta_j^k \\
&= \partial_j \phi' - \partial_k \psi' \delta_j^k \\
&= \partial_j \phi' - \partial_j \psi'. \\
\Gamma_{0\alpha,j}^\alpha &= \Gamma_{00,j}^0 + \Gamma_{0k,j}^k \\
&= \partial_j (\mathcal{H} + \phi') + \partial_j (3(\mathcal{H} - \psi')) \\
&= \partial_j \phi' - 3\partial_j \psi'. \\
\Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \Gamma_{0j}^\beta &= \Gamma_{0\alpha}^\alpha \Gamma_{0j}^0 + \Gamma_{m\alpha}^\alpha \Gamma_{0j}^m \\
&= \Gamma_{00}^0 \Gamma_{0j}^0 + \Gamma_{0k}^k \Gamma_{0j}^0 + \Gamma_{m0}^0 \Gamma_{0j}^m + \Gamma_{mk}^k \Gamma_{0j}^m \\
&= (\mathcal{H} + \phi') \partial_j \phi + 3(\mathcal{H} - \psi') \partial_j \phi + \partial_m \phi (\mathcal{H} - \psi') \delta_j^m - 3\partial_m \psi (\mathcal{H} - \psi') \delta_j^m \\
&= \mathcal{H} \partial_j \phi + 3\mathcal{H} \partial_j \phi + \mathcal{H} \partial_j \phi - 3\mathcal{H} \partial_j \psi \\
&= 5\mathcal{H} \partial_j \phi - 3\mathcal{H} \partial_j \psi. \\
\Gamma_{\beta j}^\alpha \Gamma_{0\alpha}^\beta &= \Gamma_{0j}^\alpha \Gamma_{0\alpha}^0 + \Gamma_{mj}^\alpha \Gamma_{0\alpha}^m \\
&= \Gamma_{0j}^0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{0j}^k \Gamma_{0k}^0 + \Gamma_{mj}^0 \Gamma_{00}^m + \Gamma_{mj}^k \Gamma_{0k}^m \\
&= \partial_j \phi (\mathcal{H} + \phi') + (\mathcal{H} - \psi') \delta_j^k \partial_k \phi + (-\psi' + \mathcal{H}(1 - 2\phi - 2\psi)) \delta_{mj} \partial_m \phi \\
&\quad - (\partial_m \psi \delta_j^k + \partial_j \psi \delta_m^k - \partial_k \psi \delta_{mj}) (\mathcal{H} - \psi') \delta_k^m \\
&= \mathcal{H} \partial_j \phi + \mathcal{H} \partial_j \phi + \mathcal{H}(1 - 2\phi + 2\psi) \partial_j \phi - \mathcal{H} \partial_j \psi - 3\mathcal{H} \partial_j \psi + \mathcal{H} \partial_j \psi \\
&= 3\mathcal{H} \partial_j \phi - 3\mathcal{H} \partial_j \psi.
\end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Luego sumando los términos de acuerdo al la expresión (A.18) se obtiene

$$R_{0j} = 2\partial_j \psi' + 2\mathcal{H} \partial_j \phi = 2\partial_j (\psi' + \mathcal{H}\phi). \quad (\text{A.20})$$

Para $\mu = i, \nu = j$

$$R_{ij} = \Gamma_{ij,\alpha}^\alpha - \Gamma_{i\alpha,j}^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \Gamma_{ij}^\beta - \Gamma_{\beta j}^\alpha \Gamma_{i\alpha}^\beta. \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij,\alpha}^\alpha &= \Gamma_{ij,0}^0 + \Gamma_{ij,k}^k \\ &= \partial_0(-\psi' + (1 - 2\phi - 2\psi)\mathcal{H})\delta_{ij} - \partial_k(\partial_i\psi\delta_j^k + \partial_j\psi\delta_i^k - \partial_k\psi\delta_{ij}) \\ &= (-\psi'' + (1 - 2\phi - 2\psi)\mathcal{H}' - 2\mathcal{H}\phi' - 2\mathcal{H}\psi')\delta_{ij} - \partial_i\partial_j\psi - \partial_i\partial_j\psi + \partial_k\partial_k\psi\delta_{ij}. \\ \Gamma_{i\alpha,j}^\alpha &= \Gamma_{i0,j}^0 + \Gamma_{ik,j}^k \\ &= \partial_j\partial_i\phi - \partial_j(3\partial_i\psi) \\ &= \partial_j\partial_i\phi - 3\partial_i\partial_j\psi. \\ \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \Gamma_{ij}^\beta &= \Gamma_{0\alpha}^\alpha \Gamma_{ij}^0 + \Gamma_{m\alpha}^\alpha \Gamma_{ij}^m \\ &= \Gamma_{00}^0 \Gamma_{ij}^0 + \Gamma_{0k}^k \Gamma_{ij}^0 + \Gamma_{m0}^0 \Gamma_{ij}^m + \Gamma_{mk}^k \Gamma_{ij}^m \quad \begin{matrix} \nearrow 2^{do} \mathcal{O} \\ \nearrow 2^{do} \mathcal{O} \end{matrix} \\ &= (\mathcal{H} + \phi')(-\psi' + (1 - 2\phi - 2\psi)\mathcal{H})\delta_{ij} + 3(\mathcal{H} - \psi')(-\psi' + (1 - 2\phi - 2\psi)\mathcal{H})\delta_{ij} \\ &= (-\mathcal{H}\psi' + (1 - 2\phi - 2\psi)\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}\phi')\delta_{ij} + 3(-2\mathcal{H}\psi' + (1 - 2\phi - 2\psi)\mathcal{H}^2)\delta_{ij} \\ &= (-7\mathcal{H}\psi' + 4(1 - 2\phi - 2\psi)\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}\phi')\delta_{ij}. \\ \Gamma_{\beta j}^\alpha \Gamma_{i\alpha}^\beta &= \Gamma_{0j}^\alpha \Gamma_{i\alpha}^0 + \Gamma_{mj}^\alpha \Gamma_{i\alpha}^m \\ &= \Gamma_{0j}^0 \Gamma_{i0}^0 + \Gamma_{0j}^k \Gamma_{ik}^0 + \Gamma_{mj}^0 \Gamma_{i0}^m + \Gamma_{mj}^k \Gamma_{ik}^m \quad \begin{matrix} \nearrow 2^{do} \mathcal{O} \\ \nearrow 2^{do} \mathcal{O} \end{matrix} \\ &= (\mathcal{H} - \psi')\delta_j^k(-\psi' + (1 - 2\phi - 2\psi)\mathcal{H})\delta_{ik} + (\mathcal{H} - \psi')\delta_j^m(-\psi' + (1 - 2\phi - 2\psi)\mathcal{H})\delta_{mi} \\ &= 2(-2\mathcal{H}\psi' + (1 - 2\phi - 2\psi)\mathcal{H}^2)\delta_{ij} \\ &= 2(\mathcal{H}^2 - 2\mathcal{H}\psi' - 2\mathcal{H}^2\phi - 2\mathcal{H}^2\psi)\delta_{ij} \\ &= (2\mathcal{H}^2 - 4\mathcal{H}\psi' - 4\mathcal{H}^2\phi - 4\mathcal{H}^2\psi)\delta_{ij}. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Luego sumando los términos de acuerdo al la expresión (A.21) se obtiene

$$\begin{aligned} R_{ij} &= (-\psi'' + (1 - 2\phi - 2\psi)\mathcal{H}' - 2\mathcal{H}\phi' - 2\mathcal{H}\psi')\delta_{ij} - \partial_i\partial_j\psi - \partial_i\partial_j\psi + \partial_k\partial_k\psi\delta_{ij} \\ &\quad - \partial_j\partial_i\phi + 3\partial_i\partial_j\psi + (-7\mathcal{H}\psi' + 4(1 - 2\phi - 2\psi)\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}\phi')\delta_{ij} \\ &\quad - (2\mathcal{H}^2 - 4\mathcal{H}\psi' - 4\mathcal{H}^2\phi - 4\mathcal{H}^2\psi)\delta_{ij} \\ &= (2\mathcal{H}^2 - 4\phi\mathcal{H}^2 - 4\psi\mathcal{H}^2 - \psi'' + (1 - 2\phi - 2\psi)\mathcal{H}' - \mathcal{H}(5\psi' + \phi') + \nabla^2\psi)\delta_{ij} + \partial_i\partial_j\psi - \partial_i\partial_j\phi. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

En resumen, las componentes del tensor de Ricci son

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\mathcal{H}' + \nabla^2\phi + 3\psi'' + 3\mathcal{H}\phi' + 3\mathcal{H}\psi'; \\ R_{0j} &= 2\partial_j(\psi' + \mathcal{H}\phi); \\ R_{ij} &= (2\mathcal{H}^2 - 4\phi\mathcal{H}^2 - 4\psi\mathcal{H}^2 - \psi'' + (1 - 2\phi - 2\psi)\mathcal{H}' - \mathcal{H}(5\psi' + \phi') + \nabla^2\psi)\delta_{ij} + \partial_i\partial_j\psi - \partial_i\partial_j\phi. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Escalar de Ricci

$$\begin{aligned}
R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{0j} R_{0j} + g^{ij} R_{ij} \\
&= (-a^{-2}(1-2\phi))(-3\mathcal{H}' + \nabla^2\phi + 3\psi'' + 3\mathcal{H}\phi' + 3\mathcal{H}\psi') \\
&\quad + (a^{-2}(1+2\psi)\delta^{ij})((2\mathcal{H}^2 - 4\phi\mathcal{H}^2 - 4\psi\mathcal{H}^2 - \psi'' + (1-2\phi-2\psi)\mathcal{H}' - \mathcal{H}(5\psi' + \phi') + \nabla^2\psi)\delta_{ij} \\
&\quad - \partial_i\partial_j\psi + \partial_i\partial_j\phi) \\
&= 3\mathcal{H}' - \nabla^2\phi - 3\psi'' - 3\mathcal{H}\phi' - 3\mathcal{H}\psi' - 6\mathcal{H}'\phi - 12\mathcal{H}^2\phi - 12\mathcal{H}^2\psi + 6\mathcal{H}^2 - 3\psi'' + 3(1-2\phi-2\psi)\mathcal{H}' \\
&\quad - 3\mathcal{H}(5\psi' + \phi') + 3\nabla^2\psi + 6\mathcal{H}'\psi + \nabla^2\psi - \nabla^2\phi + 12\mathcal{H}^2\psi \\
&= a^{-2}(6\mathcal{H}' + 6\mathcal{H}^2 - 6\psi'' - 2\nabla^2\phi + 4\nabla^2\psi - 6\mathcal{H}\phi' - 18\mathcal{H}\psi' - 12\mathcal{H}'\phi - 12\mathcal{H}^2\phi). \tag{A.25}
\end{aligned}$$

Componentes del Tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \tag{A.26}$$

$$\begin{aligned}
G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R \\
&= -3\mathcal{H}' + \nabla^2\phi + 3\psi'' + 3\mathcal{H}\phi' + 3\mathcal{H}\psi' \\
&\quad - \frac{1}{2}(-a^2(1+2\phi))(a^{-2}(6\mathcal{H}' + 6\mathcal{H}^2 - 6\psi'' - 2\nabla^2\phi + 4\nabla^2\psi - 6\mathcal{H}\phi' - 18\mathcal{H}\psi' - 12\mathcal{H}'\phi - 12\mathcal{H}^2\phi)); \\
&= 2\nabla^2\psi - 6\mathcal{H}\psi' + 3\mathcal{H}^2. \\
G_{0j} &= R_{0j} - \frac{1}{2}g_{0j}R \\
&= 2\partial_j(\psi' + \mathcal{H}\phi); \\
G_{ij} &= R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R \\
&= (2\mathcal{H}^2 - 4\phi\mathcal{H}^2 - 4\psi\mathcal{H}^2 - \psi'' + (1-2\phi-2\psi)\mathcal{H}' - \mathcal{H}(5\psi' + \phi') + \nabla^2\psi)\delta_{ij} + \partial_i\partial_j\psi - \partial_i\partial_j\phi \\
&\quad - \frac{1}{2}(a^2(1-2\psi)\delta_{ij}a^{-2}(6\mathcal{H}' + 6\mathcal{H}^2 - 6\psi'' - 2\nabla^2\phi + 4\nabla^2\psi - 6\mathcal{H}\phi' - 18\mathcal{H}\psi' - 12\mathcal{H}'\phi - 12\mathcal{H}^2\phi)). \\
&= (-\mathcal{H}^2 - 2\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2\phi + 2\mathcal{H}^2\psi + 4\mathcal{H}'\phi + 4\mathcal{H}'\psi + 4\mathcal{H}\psi' + 2\mathcal{H}\phi' - \nabla^2\psi + \nabla^2\phi + 2\psi'')\delta_{ij} \\
&\quad + \partial_i\partial_j(\psi - \phi)
\end{aligned} \tag{A.27}$$

Evaluación del término

$$g^{\alpha\beta}(\delta\Gamma_{\beta\alpha}^{\sigma}) - g^{\alpha\sigma}(\delta\Gamma_{\alpha\gamma}^{\gamma})$$

A continuación calculamos la evaluación del término

$$g^{\alpha\beta}(\delta\Gamma_{\beta\alpha}^{\sigma}) - g^{\alpha\sigma}(\delta\Gamma_{\alpha\gamma}^{\gamma}) \quad (\text{B.1})$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\beta\alpha}^{\sigma} &= \frac{1}{2}\delta g^{\sigma\gamma} [\partial_{\beta}g_{\gamma\alpha} + \partial_{\alpha}g_{\gamma\beta} - \partial_{\gamma}g_{\beta\alpha}] \\ &+ \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma} [\partial_{\beta}\delta g_{\gamma\alpha} + \partial_{\alpha}\delta g_{\gamma\beta} - \partial_{\gamma}\delta g_{\beta\alpha}], \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

además

$$\nabla_{\gamma}\delta g_{\alpha\beta} = \partial_{\gamma}\delta g_{\alpha\beta} - \Gamma_{\gamma\alpha}^{\sigma}\delta g_{\sigma\beta} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\sigma}\delta g_{\alpha\sigma}, \quad (\text{B.3})$$

luego, completando las derivadas covariantes en la ecuación (B.2) [36]

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\beta\alpha}^{\sigma} &= \frac{1}{2}\delta g^{\sigma\gamma} [\partial_{\beta}g_{\gamma\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda}\delta g_{\lambda\alpha} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}\delta g_{\lambda\gamma}] \\ &+ \partial_{\alpha}\delta g_{\gamma\beta} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda}\delta g_{\lambda\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}\delta g_{\lambda\gamma} \\ &- (\partial_{\gamma}\delta g_{\beta\alpha} - \Gamma_{\gamma\alpha}^{\lambda}\delta g_{\lambda\beta} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\lambda}\delta g_{\lambda\gamma})] + g^{\sigma\gamma}\Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}\delta g_{\lambda\gamma}, \\ &= \frac{1}{2}\delta g^{\sigma\gamma} [\partial_{\beta}g_{\gamma\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda}\delta g_{\lambda\alpha} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}\delta g_{\lambda\gamma}] \\ &+ \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma} [\nabla_{\beta}\delta g_{\gamma\alpha} + \nabla_{\alpha}\delta g_{\gamma\beta} - \nabla_{\gamma}\delta g_{\beta\alpha}] + g^{\sigma\gamma}\Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}\delta g_{\lambda\gamma}, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

tomando el resultado (5.13)

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma_{\beta\alpha}^{\sigma} &= \frac{1}{2}\delta g^{\sigma\gamma} \left[\partial_{\beta}g_{\gamma\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda}\delta g_{\lambda\alpha} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}\delta g_{\lambda\gamma} \right] - \delta g^{\mu\nu}g^{\sigma\nu}g_{\gamma\mu}g_{\lambda\nu}\Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda} \\
&+ \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma} \left[\nabla_{\beta}\delta g_{\gamma\alpha} + \nabla_{\alpha}\delta g_{\gamma\beta} - \nabla_{\gamma}\delta g_{\beta\alpha} \right] + g^{\sigma\gamma}\Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}\delta g_{\lambda\gamma}, \\
&= \frac{\delta g^{\sigma\gamma}g_{\lambda\gamma}\Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda} - \delta g^{\mu\nu}\delta_{\mu}^{\sigma}g_{\lambda\nu}\Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}}{2} \\
&+ \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma} \left[\nabla_{\beta}\delta g_{\gamma\alpha} + \nabla_{\alpha}\delta g_{\gamma\beta} - \nabla_{\gamma}\delta g_{\beta\alpha} \right], \\
&= \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma} \left[\nabla_{\beta}\delta g_{\gamma\alpha} + \nabla_{\alpha}\delta g_{\gamma\beta} - \nabla_{\gamma}\delta g_{\beta\alpha} \right].
\end{aligned} \tag{B.5}$$

igual para el término

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma_{\alpha\gamma}^{\gamma} &= \frac{1}{2}\delta g^{\sigma\gamma} [\partial_{\alpha}g_{\sigma\gamma} + \partial_{\gamma}g_{\sigma\alpha} - \partial_{\sigma}g_{\alpha\gamma}] \\
&+ \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma} [\partial_{\alpha}\delta g_{\sigma\gamma} + \partial_{\gamma}\delta g_{\sigma\alpha} - \partial_{\sigma}\delta g_{\alpha\gamma}] \\
&= \delta g^{\sigma\gamma}g_{\sigma\gamma}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} + \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma} \left[\nabla_{\alpha}\delta g_{\sigma\gamma} + \nabla_{\gamma}\delta g_{\sigma\alpha} - \nabla_{\sigma}\delta g_{\alpha\gamma} \right] + g^{\sigma\gamma}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda}\delta g_{\lambda\sigma}, \\
&= \delta g^{\sigma\gamma}g_{\sigma\gamma}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} - g^{\sigma\gamma}g_{\lambda\mu}g_{\sigma\nu}\delta g^{\mu\nu}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} + \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}\nabla_{\alpha}\delta g_{\sigma\gamma}, \\
&= \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}\nabla_{\alpha}\delta g_{\sigma\gamma}.
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Remplazando (B.5) y (B.6) en (B.1) el resultado es

$$\begin{aligned}
g^{\alpha\beta}(\delta\Gamma_{\beta\alpha}^{\sigma}) - g^{\alpha\sigma}(\delta\Gamma_{\alpha\gamma}^{\gamma}) &= g^{\alpha\beta} * \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma} \left[\nabla_{\beta}\delta g_{\gamma\alpha} + \nabla_{\alpha}\delta g_{\gamma\beta} - \nabla_{\gamma}\delta g_{\beta\alpha} \right] \\
&- g^{\alpha\sigma} * \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}\nabla_{\alpha}\delta g_{\sigma\gamma} \\
&= g_{\mu\nu}\nabla_{\sigma}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_{\gamma}\delta g^{\sigma\gamma}.
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Traza del Simbolo de Christoffel $\Gamma_{\sigma\kappa}^{\kappa}$

Para obtener la traza del simbolo de Christoffel consideremos la divergencia de un cuadrivector U^{κ} [40]

$$\nabla_{\kappa}U^{\kappa} = \partial_{\kappa}U^{\kappa} + \Gamma_{\sigma\kappa}^{\kappa}U^{\sigma}, \quad (\text{C.1})$$

donde,

$$\Gamma_{\mu\kappa}^{\kappa} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu} (\partial_{\sigma}g_{\mu\nu} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\mu}g_{\sigma\nu}). \quad (\text{C.2})$$

A partir de la identidad

$$g^{\mu\nu} = \partial_{\nu}g_{\sigma\mu}, \quad (\text{C.3})$$

se obtiene

$$\Gamma_{\sigma\kappa}^{\kappa} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}. \quad (\text{C.4})$$

Para continuar con los cálculos, recordemos la siguiente propiedad de las matrices inversas Sea \mathbf{A} una matriz diagonal cuya matriz inversa es \mathbf{A}^{-1} y $|a| = \det\mathbf{A}$ su determinante. La matriz inversa se puede representar por medio de matriz cofactores C^{ij} así

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \frac{C^{ij}}{|a|}, \quad (\text{C.5})$$

luego

$$\mathbf{I}|a| = \mathbf{A}C^{ij} \quad (\text{C.6})$$

Conocemos que $g^{\mu\nu}$ son los elementos de la matriz inversa de $g_{\mu\nu}$, entonces estos pueden ser expresados en términos de la matriz de cofactores $\Delta^{\mu\nu}$ y el determinante $g = \det(g_{\mu\nu})$, por medio de

$$g^{\mu\nu} = \frac{\Delta^{\mu\nu}}{g}. \quad (\text{C.7})$$

A partir de la ecuación (C.7) se deduce que el determinante puede ser escrito en términos de la matriz de cofactores de la siguiente forma

$$g = g_{\mu\nu} \Delta^{\mu\nu}, \quad (\text{C.8})$$

para cualquier μ fijo (sólo en este caso no se aplica la sumatoria de Einstein sobre índices repetidos sobre μ). Por lo tanto,

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = \Delta^{\mu\nu}. \quad (\text{C.9})$$

Sustituyendo (C.9) en (C.7) se obtiene

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} \quad (\text{C.10})$$

$$= \frac{1}{g} \frac{\partial x^\sigma}{\partial g_{\mu\nu}} \frac{\partial g}{\partial x^\sigma}, \quad (\text{C.11})$$

$$= \frac{1}{g \partial_\sigma g_{\mu\nu}} \frac{\partial g}{\partial x^\sigma}, \quad (\text{C.12})$$

de tal manera que la contracción (C.4) queda determinada por el determinante de la métrica, por medio de

$$\Gamma_{\sigma\kappa}^\kappa = \partial_\sigma (\ln \sqrt{-g}). \quad (\text{C.13})$$

Luego, la divergencia del cuadrivector U^κ toma la forma

$$\nabla_\kappa U^\kappa = \partial_\kappa U^\kappa + (\partial_\kappa \ln \sqrt{-g}) U^\kappa \quad (\text{C.14})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\kappa (\ln \sqrt{-g} U^\kappa). \quad (\text{C.15})$$

Soluciones con Escalar de Ricci Constante Definiendo la Signatura Como $(+, -, -, -)$

En este apéndice se elaboró para verificar las ecuaciones del libro: *Beyond Einstein Gravity*[10] propuestas en el capítulo 4: *Spherical Symmetry*.

Tomando la signatura $(+, -, -, -)$, para efectos de esta comprobación, la métrica resulta ahora

$$ds^2 = A(r, t)dt^2 - B(r, t)dr^2 - r^2 d\Omega_2^2, \quad (\text{D.1})$$

Asumamos ahora que el escalar de Ricci es constante, $R = R_0$. La ecuación de campo (6.51) y (6.52) con $H_{\mu\nu} = 0$ son [10]

$$f_{R_0} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f_0 g_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu}^m, \quad (\text{D.2})$$

$$f_{R_0} R_0 - 2f_0 = k T^m, \quad (\text{D.3})$$

donde $f_0 \equiv f(R_0)$ y $f_{R_0} \equiv df(R_0)/dR$, y estas las podemos describir como

$$R_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = q k T_{\mu\nu}^m, \quad (\text{D.4})$$

$$R_0 = q k T^m - 4\lambda, \quad (\text{D.5})$$

donde $\lambda = \frac{-f_0}{2f_{R_0}}$ y $q^{-1} = f_{R_0}$. Restringimos a los lagrangianos que se reducen al de Hilbert-Einstein cuando $R \rightarrow 0$ y que no contienen constante cosmológica Λ ,

$$f(R) \approx R \quad \text{cuando} \quad R \rightarrow 0. \quad (\text{D.6})$$

Entonces, la ecuación (D.3) indica que *en el vacío* ($T_{\mu\nu}^m = 0$) se obtiene una clase de soluciones con curvatura constante de Ricci $R = R_0$.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial R} \right|_{R_0} = \left. \frac{2f}{R} \right|_{R_0}, \quad (\text{D.7})$$

En particular, existen soluciones con $R_0 = 0$ para esta ecuación diferencial. Consideremos ahora el problema de encontrar la solución general de las ecuaciones (D.2) y (D.3) para una métrica esféricamente simétrica (D.1). Las sustituciones de esta métrica dentro de las componentes (r,t) de (D.2) da $\frac{\dot{B}(t,r)}{rB(t,r)} = 0$, lo que significa que $B(t, r)$ debe ser independiente del tiempo, $B(t, r) = b(r)$. Por otro lado, la componente (2, 2) de la ecuación (D.2) da

$$\begin{aligned}
f_{R_0} R_{22} - \frac{1}{2} f_0 g_{22} &= \kappa T_{22}^{(m)} \\
f_{R_0} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{b^2 A} (b' r A + 2b^2 A - A' r b - 2Ab) \right] - \frac{1}{2} f_0 r^2 &= \kappa P r^2 \\
\frac{1}{2} \frac{1}{b^2 A} (b' r A + 2b^2 A - A' r b - 2Ab) - \lambda r^2 &= q \kappa P r^2 \\
\frac{1}{2} \frac{b' r}{b^2} + 1 - \frac{A' r}{2Ab} - \frac{1}{b} &= q \kappa P r^2 + \lambda r^2 \\
-\frac{A' r}{A} \frac{1}{2b} &= q \kappa P r^2 + \lambda r^2 + \frac{1}{b} - 1 - \frac{1}{2} \frac{b' r}{b^2} \\
\frac{A'}{A} &= \frac{b}{r} [2 - r^2(2q \kappa P + 2\lambda)] - \frac{2}{r} + \frac{b'}{b} \quad (D.8)
\end{aligned}$$

Así, $\frac{A'(t,r)}{A(t,r)} = \zeta(r)$, donde $\zeta(r)$ es una función independiente del tiempo y

$$\begin{aligned}
A(t, r) &= \tilde{a}(t) e^{\int \zeta(r) dr} \\
&= \tilde{a} e^{\int \left(-\frac{2}{r} + \frac{b'}{b} \right) dr} e^{\int dr \frac{[2 - r^2(2\lambda + 2q \kappa P)] b}{r}} \\
&= \tilde{a} e^{-2 \ln r + \ln b} e^{\int dr \frac{[2 - r^2(2\lambda + 2q \kappa P)] b}{r}} \\
&= \tilde{a} \frac{b}{r^2} e^{\int dr \frac{[2 - r^2(2\lambda + 2q \kappa P)] b}{r}} \quad (D.9)
\end{aligned}$$

donde P es la presión de un fluido perfecto con tensor de momentum-energía

$$T_{\mu\nu}^m = (P + \rho) u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}. \quad (D.10)$$

La función $A(t, r)$ es separable, $A(t, r) = \tilde{a} a(r)$, y el elemento de línea se escribirá entonces [10]

$$ds^2 = \tilde{a} a(r) dt^2 - b(r) dr^2 - r^2 d\Omega_2^2 \quad (D.11)$$

y esta puede describirse como

$$ds^2 = a(r) d\tilde{t}^2 - b(r) dr^2 - r^2 d\Omega_2^2 \quad (D.12)$$

redefiniendo la cordenada temporal $t \rightarrow \tilde{t}$ cuando $d\tilde{t} = \sqrt{\tilde{a}} dt$. En lo que sigue, la tilde será absorbida por la cordenada temporal.

Para resumir, en un espacio-tiempo con escalar de curvatura constante, cualquier simetría esférica de fondo es necesariamente estática o, el teorema de Jebsen-Birkhoff se toma para gravedad $f(R)$ con curvatura constante [10].

Un comentario está a la orden en este punto. Hemos asumido un espacio-tiempo con constante escalar de Ricci y deducido las condiciones en forma de potenciales gravitacionales. El problema inverso también puede ser considerado: si el potencial gravitacional $a(t, r)$ es una función separable y $b(r, t)$ es independiente

del tiempo, usando la definición del escalar de Ricci, esto es $R = R_0 = \text{const.}$ y al mismo tiempo las soluciones de las ecuaciones de campo sean estáticas si se impone simetría esférica. Para completar el análisis de este problema, se debe tener en cuenta las ecuaciones de campo remanentes contenidas en (D.4) y (D.5) las cuales se satisfacen teniendo en cuenta la expresión del escalar de Ricci (6.20). Debemos entonces resolver el sistema [10]

$$R_{00} - \lambda a(r) - q\kappa [\rho + P(1 - a(r))] = 0, \quad (\text{D.13})$$

$$R_{11} - \lambda b(r) - q\kappa P b(r) = 0, \quad (\text{D.14})$$

$$R_0 - q\kappa(\rho - 3P) + 4\lambda = 0, \quad (\text{D.15})$$

$$R(a(r), b(r)) = R_0. \quad (\text{D.16})$$

Donde

$$a(r) = \frac{b}{r^2} e^{\int dr \frac{[2 - r^2(2q\kappa P + 2\lambda)]b}{r}} \quad (\text{D.17})$$

$$a' = \zeta a \quad (\text{D.18})$$

$$a'' = (\zeta' + \zeta^2) a. \quad (\text{D.19})$$

y

$$\zeta(r) = \frac{b}{r} [2 - r^2(2q\kappa P + 2\lambda)] - \frac{2}{r} + \frac{b'}{b}. \quad (\text{D.20})$$

Para este caso tenemos que (6.14) se reduce a

$$R_{00} = \frac{a''}{2b} - \frac{a'b'}{4b^2} + \frac{a'}{rb} - \frac{a'^2}{4ab} \quad (\text{D.21})$$

Remplazamos (D.18) y (D.19) en la anterior se obtiene

$$R_{00} = (\zeta' + \zeta^2) \frac{a}{2b} - \frac{\zeta b' a}{4b^2} + \frac{\zeta a}{rb} - \frac{\zeta^2 a^2}{4ab}, \quad (\text{D.22})$$

$$= \frac{a}{2b} \left(\zeta' + \zeta^2 - \frac{\zeta b'}{2b} + \frac{2\zeta}{r} - \frac{\zeta^2}{2} \right), \quad (\text{D.23})$$

$$= \frac{a}{4b} \left(2\zeta' + \zeta^2 - \zeta \left[\frac{b'}{b} - \frac{4}{r} \right] \right). \quad (\text{D.24})$$

Calculemos a continuación ζ' y ζ^2

$$\zeta' = \left(\frac{b'}{r} + \frac{b}{r^2} \right) [2 - r^2(2q\kappa P + 2\lambda)] + \frac{4b}{r^2} + \frac{2}{r^2} + \frac{b''}{b} - \frac{b'^2}{b^2}. \quad (\text{D.25})$$

$$\begin{aligned} \zeta^2 &= \frac{b^2}{r^2} [2 - r^2(2q\kappa P + 2\lambda)]^2 + \frac{2b}{r} \left(-\frac{2}{r} + \frac{b'}{b} \right) [2 - r^2(2q\kappa P + 2\lambda)] + \left(-\frac{2}{r} + \frac{b'}{b} \right)^2, \\ &= \frac{b^2}{r^2} [2 - r^2(2q\kappa P + 2\lambda)]^2 + \left(-\frac{4b}{r^2} + \frac{2b'}{r} \right) [2 - r^2(2q\kappa P + 2\lambda)] + \frac{4}{r^2} - \frac{4b'}{rb} + \frac{b'^2}{b^2}. \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

En adelante usaremos los corchetes \llbracket para denotar la cantidad $[2 - r^2(2q\kappa P + 2\lambda)]$. Luego

$$\begin{aligned} 2\zeta' + \zeta^2 &= \left(\frac{2b'}{r} + \frac{2b}{r^2}\right) \llbracket + \frac{8b}{r^2} + \frac{4}{r^2} + \frac{2b''}{b} - \frac{2b'^2}{b^2} + \frac{b^2}{r^2} \rrbracket^2 + \left(-\frac{4b}{r^2} + \frac{2b'}{r}\right) \llbracket + \frac{4}{r^2} - \frac{4b'}{rb} + \frac{b'^2}{b^2}, \\ &= \frac{b^2}{r^2} \llbracket^2 + \left(\frac{4b'}{r} - \frac{2b}{r^2}\right) \llbracket + \frac{8}{r^2} + \frac{8b}{r^2} - \frac{4b'}{rb} + \frac{2b''}{b} - \frac{b'^2}{b^2}. \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

Tomando en este último resultado en (D.22) se tiene

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{a}{4b} \left[\frac{b^2}{r^2} \llbracket^2 + \left(\frac{4b'}{r} - \frac{2b}{r^2}\right) \llbracket + \frac{8}{r^2} + \frac{8b}{r^2} - \frac{4b'}{rb} + \frac{2b''}{b} - \frac{b'^2}{b^2} + \left(\frac{4b}{r^2} - \frac{b'}{r}\right) \llbracket - \left(\frac{b'}{b} - \frac{4}{r}\right) \left(\frac{b'}{b} - \frac{2}{r}\right) \right], \\ &= \frac{a}{4b} \left[\frac{b^2}{r^2} \llbracket^2 + \left(\frac{3b'}{r} + \frac{2b}{r^2}\right) \llbracket + \frac{8}{r^2} + \frac{8b}{r^2} - \frac{4b'}{rb} + \frac{2b''}{b} - \frac{b'^2}{b^2} - \left(\frac{b'^2}{b^2} - \frac{6b'}{rb} + \frac{8}{r^2}\right) \right], \\ &= \frac{a}{4b} \left[\frac{b^2}{r^2} \llbracket^2 + \left(\frac{3b'}{r} + \frac{2b}{r^2}\right) \llbracket + \frac{8b}{r^2} + \frac{2b'}{rb} + \frac{2b''}{b} - \frac{2b'^2}{b^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

Finalmente, de la ecuación (D.13) obtenemos

$$\begin{aligned} R_{00} - a(-q\kappa P + \lambda) - q\kappa(\rho + P) &= 0, \\ \frac{a}{4b} \left[\frac{b^2}{r^2} \llbracket^2 + \left(\frac{3b'}{r} + \frac{2b}{r^2}\right) \llbracket + \frac{8b}{r^2} + \frac{2b'}{rb} + \frac{2b''}{b} - \frac{2b'^2}{b^2} - \frac{2b}{r^2} \llbracket + \frac{4b}{r^2} - 8\lambda b \right] - q\kappa(\rho + P) &= 0, \\ e^{\int dr \frac{[2 - r^2(2\lambda + 2q\kappa P)]b}{r}} \left[b^4 \llbracket^2 + 3b'b^2r \llbracket + 12b^3 + 2b'br + 2b''br^2 - 2b'^2r^2 - 8\lambda b^3r^2 \right] - 4r^4q\kappa(\rho + P)b^2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

De esta misma forma (6.16) se reduce a

$$\begin{aligned} R_{11} &= -\frac{a''}{2a} + \frac{a'b'}{4ab} + \frac{b'}{rb} + \frac{a'^2}{4a^2} \\ &= -\frac{1}{2}(\zeta' + \zeta^2) + \frac{\zeta b'}{4b} + \frac{b'}{rb} + \frac{1}{4}\zeta^2 \\ &= -\frac{1}{4}(2\zeta' + \zeta^2) + \frac{b'}{b} \left(\frac{1}{4}\zeta + \frac{1}{r} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

Luego

$$\begin{aligned} R_{11} &= -\frac{1}{4} \left[\frac{b^2}{r^2} \llbracket^2 + \left(\frac{4b'}{r} - \frac{2b}{r^2}\right) \llbracket + \frac{8}{r^2} + \frac{8b}{r^2} - \frac{4b'}{rb} + \frac{2b''}{b} - \frac{b'^2}{b^2} + \frac{b'}{b} \left(-\frac{b}{r} \llbracket + \frac{2}{r} - \frac{b'}{b} - \frac{4}{r} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{4} \left[\frac{b^2}{r^2} \llbracket^2 + \left(\frac{3b'}{r} - \frac{2b}{r^2}\right) \llbracket + \frac{8}{r^2} + \frac{8b}{r^2} - \frac{6b'}{rb} + \frac{2b''}{b} - \frac{2b'^2}{b^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.31})$$

Así, de la ecuación (D.14) obtenemos

$$\begin{aligned}
R_{11} - \lambda b(r) - q\kappa P b(r) &= 0, \\
-4R_{11} - \frac{2b}{r^2} \square + \frac{4b}{r^2} &= 0 \\
\frac{b^2}{r^2} \square^2 + \left(\frac{3b'}{r} - \frac{2b}{r^2} \right) \square + \frac{8}{r^2} + \frac{8b}{r^2} - \frac{6b'}{rb} + \frac{2b''}{b} - \frac{2b'^2}{b^2} - \frac{2b}{r^2} \square + \frac{4b}{r^2} &= 0 \\
\frac{b^2}{r^2} \square^2 + \left(\frac{3b'}{r} - \frac{4b}{r^2} \right) \square + \frac{8}{r^2} + \frac{12b}{r^2} - \frac{6b'}{rb} + \frac{2b''}{b} - \frac{2b'^2}{b^2} &= 0 \\
b^4 \square^2 + (3b'b^2r - 4b^3) \square + 8b^2 + 12b^3 - 6b'br + 2b''br^2 - 2b'^2r^2 &= 0 \tag{D.32}
\end{aligned}$$

Finalmente, para la ecuación (D.16) tomamos la ecuación (6.20)

$$\begin{aligned}
a [2b(2a' + ra'') - ra'b'] - ba'^2r^2 - 4a^2(b^2 - b + rb') &= (2r^2a^2b^2)R_0 \\
4b\zeta + 2br(\zeta' + \zeta^2) - b'r\zeta - br^2\zeta^2 - 4(b^2 - b + rb') &= (2r^2b^2)R_0 \\
\zeta(4b - b'r) + 2br(\zeta' + \zeta^2) - br^2\zeta^2 - 4(b^2 - b + rb') &= (2r^2b^2)R_0 \\
\frac{4b^2}{r} \square - \frac{8b}{r} + 4b' - b'b \square + 2b' - \frac{b'^2r}{b} \\
+ 2br \left[\frac{b^2}{r^2} \square^2 + \left(\frac{3b'}{r} - \frac{3b}{r^2} \right) \square + \frac{6}{r^2} + \frac{4b}{r^2} - \frac{4b'}{rb} + \frac{b''}{b} \right] \\
- br^2 \left[\frac{b^2}{r^2} \square^2 + \left(\frac{2b'}{r} - \frac{4b}{r^2} \right) \square + \frac{4}{r^2} - \frac{4b'}{rb} + \frac{b'^2}{b^2} \right] - 4(b^2 - b + rb') &= (2r^2b^2)R_0 \\
b^3 \left(\frac{2}{r} - 1 \right) \square^2 + \left(\frac{4b^2}{r} - b'b + 6b'b - \frac{6b^2}{r} - 2b'br + 4b^2 \right) \square \\
- \frac{8b}{r} + 6b' - \frac{b'^2r}{b} + \frac{12b}{r} + \frac{8b^2}{r} - 8b' + 2b''r - 4b + 4b'r - \frac{b'^2r^2}{b} - 4b^2 + 4b - 4b'r &= (2r^2b^2)R_0 \\
\left\{ b^3 \left(\frac{2}{r} - 1 \right) \square^2 + \left(4b^2 + 5b'b - \frac{2b^2}{r} - 2bb'r \right) \square \right. \\
\left. + \frac{4b}{r} - 2b' - \frac{b'^2r^2}{b} - \frac{b'r}{b} + \frac{8b^2}{r} + 2b''r - 4b^2 \right\} * br & \\
b^4(2-r) \square^2 + (4b^3r + 5b'b^2r - 2b^3 - 2b^2b'r^2) \square \\
+ 4b^2 - 2b'br - b'^2r^3 - b'^2r^2 + 8b^3 - 4b^3r + 2b''br^2 &= (2r^3b^3)R_0 \tag{D.33}
\end{aligned}$$

Rescribiendo el último término y tomando la ecuación (D.15)

$$\begin{aligned}
R_0 &= qk(\rho - 3P) - 4\lambda \\
2b^3r^3R_0 &= 2b^3r^3[qk(\rho - 3P) - 4\lambda]. \tag{D.34}
\end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
b^4(2-r) \square^2 + ((4r-2) \square + 8 - 4r - 2r^3[qk(\rho - 3P) - 4\lambda]) b^3 \\
+ ((5b'r - 2b'r^2) \square + 4) b^2 + 2r(b''r - b')b - b'^2r^3 - b'^2r^2 &= 0, \tag{D.35}
\end{aligned}$$

el único potencial desconocido es ahora $b(r)$.

Derivación de la Ecuación Tipo Poisson sin la Aproximación Cuasi-Estática

$f_R \ll 1$

A continuación haremos cálculo de la ecuación tipo Poisson en gravedad modificada $f(R)$ sin tener en cuenta la aproximación cuasi-estática $f_R \ll 1$

Tomando una la función $f(R)$ de la forma $f(R) = R + f$, la ecuación de campo resultante es

$$(1 + f_R)R_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} \left(\frac{R + f}{2} - \square f_R \right) - \nabla_\alpha \nabla_\beta f_R = kT_{\alpha\beta} \quad (\text{E.1})$$

o

$$(1 + f_R)G_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \left(\frac{f_R R}{2} + \square f_R \right) - \nabla_\alpha \nabla_\beta f_R = kT_{\alpha\beta} \quad (\text{E.2})$$

cuya traza es

$$f_R(R)R - R + 3\square f_R(R) = kT \quad (\text{E.3})$$

Ahora, tomando la aproximación cuasi-estática $\nabla f_R \gg f'_R$ entonces la ecuación (E.2) resulta

$$(1 + f_R)G_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \left(\frac{f_R R}{2} + \nabla^2 f_R \right) - \nabla_\alpha \nabla_\beta f_R = kT_{\alpha\beta} \quad (\text{E.4})$$

Cuya traza ahora resulta

$$\nabla^2 f_R(R) = \frac{1}{3} (kT + (1 - f_R)R) \quad (\text{E.5})$$

Remplazando (E.5) en (E.4) tenemos

$$(1 + f_R)G_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{3}kT + \frac{1}{6}f_R R \right) - \nabla_\alpha \nabla_\beta f_R = kT_{\alpha\beta} \quad (\text{E.6})$$

Así, para la componente $0 - 0$

$$(1 + f_R)G_{00} + g_{00} \left(\frac{1}{3}kT + \frac{1}{6}f_R R \right) - \cancel{\nabla_0 \nabla_0 f_R} = kT_{00} \quad (\text{E.7})$$

Introduciendo las perturbaciones resulta

$$(1 + f_R)(\bar{G}_{00} + \delta G_{00}) - a^2 (1 + 2\phi) \left(\frac{1}{3} [-k(\bar{\rho} + \delta\rho) + \bar{R} + \delta R] + \frac{1}{6}f_R(\bar{R} + \delta R) \right) = a^2 k (\bar{\rho} + \delta\rho + 2\phi\bar{\rho}) \quad (\text{E.8})$$

Sustrayendo el fondo obtenemos

$$(1 + f_R)(2\nabla^2\psi + 6\mathcal{H}\psi') - a^2 \left(\frac{1}{3} [-k\delta\rho + \delta R] + \frac{1}{6}f_R\delta R + \frac{2\phi}{3} [-k\bar{\rho} + \bar{R}] + \frac{1}{6}f_R\bar{R} \right) = a^2 k (\delta\rho + 2\phi\bar{\rho}) \quad (\text{E.9})$$

De la componente $0 - j$ del tensor de Einstein para el modelo de polvo se obtiene la condición

$$\psi' = -\mathcal{H}\phi. \quad (\text{E.10})$$

Por otro lado, la ecuación de Friedmann modificada, a orden cero, en el tiempo conforme, bajo las condiciones de la aproximación cuasi-estática es

$$3\mathcal{H}^2 = \frac{1}{1 + f_R} \left[a^2 \left(k\bar{\rho} + \frac{1}{3} [-k\bar{\rho} + \bar{R}] + \frac{1}{6}f_R\bar{R} \right) \right] \quad (\text{E.11})$$

Por lo tanto, en la ecuación (E.9)

$$(1 + f_R)(2\nabla^2\psi + \cancel{6\mathcal{H}^2\phi}) - 2\phi a^2 \left(k\bar{\rho} + \frac{1}{3} [-k\bar{\rho} + \bar{R}] + \frac{1}{6}f_R\bar{R} \right) = a^2 \left(k\delta\rho + \frac{1}{3} [-k\delta\rho + \delta R] - \frac{1}{6}f_R\delta R \right) \quad (\text{E.12})$$

De esta manera, obtenemos la ecuación de Poisson modificada

$$2(1 + f_R)\nabla^2\psi = a^2 \left(\frac{2}{3}k\delta\rho + \frac{1}{3}\delta R - \frac{1}{6}f_R\delta R \right) \quad (\text{E.13})$$

o

$$\boxed{\nabla^2\psi = \frac{a^2}{1 + f_R} \left(\frac{1}{3}k\delta\rho + \frac{1}{6}\delta R - \frac{1}{12}f_R\delta R \right)} \quad (\text{E.14})$$

o

$$\boxed{\nabla^2\psi = \frac{a^2}{1 + f_R} \left(\frac{1}{3}k\delta\rho + \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{2}f_R \right) \delta R \right)} \quad (\text{E.15})$$

Bibliografía

- [1] A. Friedmann, *Über die Krümmung des Raumes*, Zeitschrift für Physik A **10**: 377386, (1922).
- [2] A. Friedmann, *Über die Möglichkeit Einer Welt mit Konstanter Negativer Krümmung des Raumes*, Zeitschrift für Physik A **21**: 326332, (1924).
- [3] G. Lemaître, *The Evolution of the Universe: Discussion*. Nature **128** (3234): 699701, (1931).
- [4] E. P. Hubble, *Extragalactic nebulae*, Astroph. J. **64**, 321-369, (1926).
- [5] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press, (2008).
- [6] A. H. Guth, *Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems*, Phys. Rev D **23**: 347, (1981).
- [7] S. Capozziello, M. Francaviglia. *Extended Theories of Gravity and their Cosmological and Astrophysical Applications*, Gen. Rel. Grav. **40**: 357-420, (2008).
- [8] S. Capozziello, M. De Laurentis, *Extended Theories of Gravity*, Phys. Rept. **509**: 167-321, (2011).
- [9] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla, C. Skordis, *Modified Gravity and Cosmology*, Phys. Rept. **513**, 1-189 (2012).
- [10] S. Capozziello, V. Faraoni, *Beyond Einstein Gravity*, Springer (2011).
- [11] A. De Felice and S. Tsujikawa. *$f(R)$ Theories*, Living Rev. Rel. **13**:3 (2010). [<http://www.livingreviews.org/lrr-2010-3>].
- [12] S. M. Carroll et. al., *The Cosmology of Generalized Modified Gravity Models*, Phys. Rev. D **71**: 063513, (2005).
- [13] K. Gödel, *An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field equations of Gravitation*, Rev. Mod. Phys. **21**: 447, (1949).
- [14] H. Bondi, *Cosmology*, Cambridge University Press, (1952).
- [15] C. H. Brans, R. H. Dicke, *Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation*, Phys. Rev. **124**: 925 (1961).
- [16] A. A. Starobinsky, *A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity* Phys. Lett. B **91**, 99 (1980).

- [17] C. D. Peralta, Y. Rodríguez, *Identificando el Inflatón con el Bosón de Higgs del Modelo Estándar*, Rev. Acad. Colomb. Cienc. **36** (138): 25-36, (2012).
- [18] R. A. Knop et al., *New Constraints on Ω_M , Ω_Λ , and w from an Independent Set of Eleven High-Redshift Supernovae Observed with HST*, Astrophys. J. **598**: 102, (2003).
- [19] PLANCK homepage <http://www.rssd.esa.int/index.php?project=Planck>
- [20] A. Borisov, *Cosmological Implications of Modified Gravity: Spherical Collapse and Higher Order Correlations*, Publicly Accessible Penn Dissertations, Paper **47**, (2009).
- [21] C. Ordúz, L. Castañeda, *Ecuación de desvío geodésico en la métrica Lemaître Tolman Bondi*, (2012). <http://www.bdigital.unal.edu.co/7097/#sthash.bQMhtctf.dpuf>
- [22] J. M. Tejeiro, *Principios de Relatividad General*, Universidad Nacional de Colombia, (2005).
- [23] E. Poisson, *A Relativists Toolkit - The Mathematics of Black-Hole Mechanics*, Cambridge University Press, (2004).
- [24] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, (1984).
- [25] T. Padmanabhan, *Gravitation: Foundations and Frontiers*, Cambridge University Press, (2010).
- [26] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison Wesley, (2004).
- [27] S. Dodelson, *Modern Cosmology*, Academic Press, (2003).
- [28] K. A. Malik, D. Wands, *Cosmological Perturbations*, Phys. Rept. **475**: 1-51, (2009).
- [29] J. M Bardeen, *Gauge-Invariant Cosmological Perturbations*, Phys. Rev. D **22**: 1882, (1980).
- [30] J. Hortúa, L. Castañeda, J. M. Tejeiro, *Evolution of Magnetic Fields Through Cosmological Perturbation Theory*, Phys. Rev. D **87**: 103531, (2013).
- [31] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, R. Brandenberger, *Theory of Cosmological Perturbations*, Phys. Rept. **215**: 206 (1992).
- [32] C. Ma, E. Bertschinger, *Cosmological Perturbation Theory in the Synchronous vs. Conformal Newtonian Gauge*, Astrophys. J. **375**: 35, (1994).
- [33] P. J. E. Peebles, *Large Scale Structure of the Universe*, Princenton University Press, 1980.
- [34] T. Padmanabhan, *Structure Formation in the Universe*, Cambridge University Press, (1993).
- [35] E. Dyer, K. Hinterbichler, *Boundary Terms, Variational Principles and Higher Derivative Modified Gravity*, Phys. Rev. D **79**: 024028, (2009).
- [36] A. Guarizo, L. Castañeda, J. M. Tejeiro, *Boundary Term in Metric $f(R)$ Gravity: Field equations in the Metric Formalism*, Gen. Rel. Grav. **42**: 2713-2728, (2010).
- [37] A. Guarizo, L. Castañeda, J. M. Tejeiro, *Geodesic Deviation equation in $f(R)$ Gravity*, Gen. Rel. Grav. **43**: 2713-2728, (2011).

- [38] R. d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press, (2002).
- [39] J. D. Barrow, A. C. Ottewill, *The Stability of General Relativistic Cosmological Theory*, J. Phys. A **16**: 2757, (1983).
- [40] W. Almonacid, L. Castañeda, *The Two Extended Bodies Problem in General Relativity within the post-Newtonian Approximation*, arXiv:1404.1045, (2014).
- [41] S. Capozziello, *Curvature Quintessence*, Int. J. Mod. Phys. D **11**: 483, (2002).
- [42] S. Capozziello, V. F. Cardone, S. Carloni, A. Troisi, *Can Higher Order Curvature Theories Explain Rotation Curves of Galaxies?*, Int. J. Mod. Phys. D **12**: 1969, (2003).
- [43] S. Capozziello, V. F. Cardone, A. Troisi, *Dark Energy and Dark Matter as Curvature Effects?*, J. Cosmol. Astropart. Phys. **0608**: 001, (2006).
- [44] S. Capozziello, V. F. Cardone, A. Troisi, *Low Surface Brightness Galaxy Rotation Curves in the Low Energy Limit of R^n Gravity: no Need for Dark Matter?*, Mont. Not. R. Astr. Soc. **375**: 1423, (2007).
- [45] K. Kainulainen, J. Piilonen, V. Reijonen, D. Sunhede, *Spherically Symmetric Spacetimes in $f(R)$ Gravity Theories*, Phys. Rev. D **76**: 024020, (2007).
- [46] J. Noller, F. Braun-Bates, P. G. Ferreira, *Relativistic Scalar Fields and the Quasi-Static Approximation in Theories of Modified Gravity*, Phys. Rev. D **89**: 023521, (2014).
- [47] A. Hojjati, L. Pogosian, A. Silvestri, S. Talbot, *Practical Solutions for Perturbed $f(R)$ gravity*, Phys. Rev. D **86**: 123503, (2012).
- [48] H. Oyaizu, *Non-Linear Evolution of $f(R)$ Cosmologies I: Methodology*, Phys.Rev.D **78**: 123523, (2008).
- [49] H. Oyaizu, M. Lima, W. Hu, *Non-linear Evolution of $f(R)$ Cosmologies II: Power Spectrum*, Phys.Rev.D **78**: 123524, (2008).
- [50] D. Molano, L. Castañeda, *Some Mathematical Aspects of the Expanded Universe*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **121**, (Publicación January 14, 2015).
- [51] G. Zhao, *Modeling the Nonlinear Clustering in Modified Gravity Models I: A Fitting Formula for Matter Power Spectrum of $f(R)$ Gravity*, Astrophys.J.Suppl. **211**: 23, (2014).
- [52] J. Farieta, *Perturbaciones Cosmológicas en el Gauge de Poisson: Conexión con la Cosmología Newtoniana*, Universidad Nacional de Colombia, Tesis de Pregrado, Director: L. Castañeda, (2014).

Eventos Atendidos

- Summer School on Cosmology
International Center for Theoretical Physics (ICTP), Strada Costiera, 11 I - 34151 Trieste Italy (+39) 040 2240 111 E-mail: smr2354@ictp.it 16 July - 27 July 2012. *Asistente*.
- Workshop on Large Scale Structure
International Center for Theoretical Physics (ICTP), Strada Costiera, 11 I - 34151 Trieste Italy (+39) 040 2240 111 E-mail: smr2354@ictp.it 30 July - 2 August 2012. *Asistente*.
- III Congreso Colombiano de Astronomía
Facultad de Ciencias - Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia. Noviembre 5 - 8 de 2012. *Poster* - Implicaciones Cosmológicas del Colapso Gravitacional en Gravedad Modificada $f(R)$.
- Meetin On the Horizont
Instituto de Física - Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile
E-mail: horiz2014@gmail.com, tel: (+56 9) 68471574
March 10 - 14, 2014. *Exposición oral* - Implicaciones Cosmológicas del Colapso Gravitacional en Gravedad Modificada $f(R)$.
- Escuela de Astroestadística
Fundacion Universitaria Los Libertadores. Bogotá, Colombia.
E-mail: astroestadistica@libertadores.edu.co 9 al 13 de junio de 2014. *Exposición oral* - Colapso Gravitacional en $f(R)$.
- AstroTwinCoLO - Astronomy Twinning Program between University of Antioquia (Colombia) and the Leiden Observatory (Netherlands)
University of Antioquia. Medellín, Colombia.
E-mail: astronomia.udea@gmail.com, tel: (+57 4) 2195661.
August 19 - 29, 2014. *Poster* - Implicaciones Cosmológicas del Colapso Gravitacional en Gravedad Modificada $f(R)$.