



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# **MODELO NUMERICO DEL COMPORTAMIENTO INELASTICO DEL CONCRETO REFORZADO CON FIBRAS CORTAS DE ACERO**

**FABIAN AUGUSTO LAMUS BAEZ**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ingeniería, Departamento de Mecánica y Mecatrónica  
Doctorado en Ingeniería – Ciencia y Tecnología de Materiales  
Bogotá, Colombia

2014



# **MODELO NUMERICO DEL COMPORTAMIENTO INELASTICO DEL CONCRETO REFORZADO CON FIBRAS CORTAS DE ACERO**

**FABIAN AUGUSTO LAMUS BAEZ**

Tesis de investigación presentada como requisito parcial para optar al título de:  
**Doctor en Ingeniería – Ciencia y Tecnología de Materiales**

Director (a):

Doctor Dorian Luis Linero Segrera

Línea de Investigación:

Mecánica estructural, optimización y modelamiento de materiales

Grupo de Investigación:

Análisis, Diseño y Materiales - GIES

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ingeniería, Departamento de Mecánica y Mecatrónica

Doctorado en Ingeniería – Ciencia y Tecnología de Materiales

Bogotá, Colombia

2014



*A mis padres, mi hermana y mi esposa,  
...porque son el motor de mi vida.*



## Agradecimientos

Esta tesis es el resultado de las contribuciones de diferentes personas quienes con su tiempo, sus orientaciones e incluso sus desvelos fueron de gran ayuda en los momentos precisos.

En primer lugar quiero agradecer enormemente al Dr. Dorian Luis Linero Segrera, quien invirtió una gran cantidad de horas en la dirección de esta tesis, por brindarme la oportunidad de enriquecer mis conocimientos con sus lecciones, tanto en el aula como fuera de ella y porque más allá de ser un tutor en lo académico, se ha convertido para mí en un gran amigo.

Agradezco a mis profesores del Doctorado en Ingeniería – Ciencia y Tecnología de materiales, y de la maestría en Estructuras por sus contribuciones a mi formación profesional y académica, en especial a Ing. Caori Patricia Takeuchi Tam, por que con su ejemplo aprendí el gusto por despiezar los conocimientos hasta llegar a las raíces de los mismos, adicionalmente le agradezco por facilitarme el uso del laboratorio para la elaboración de ensayos de arrancamiento. A la ing. Patricia Luna Tamayo por su disposición y orientación en el uso de los equipos durante el desarrollo de los ensayos experimentales. Al Dr. Ruben Dario Guevara González, por su valiosa asesoría y sus importantes aportes para el tratamiento estadístico de los datos funcionales en esta tesis. Al Dr. Osvaldo Luis Manzoli, por brindarme la oportunidad de desarrollar mi pasantía en la facultade de Engenharia de la Universidade Estadual Paulista “Julio Mesquita Filho” y por su orientación durante el desarrollo de la misma.

Quiero agradecer especialmente a la ingeniera Jenny Magaly Pira Ruiz por todo su apoyo en la preparación de las probetas de arrancamiento y de tracción, así como en la ejecución

de los ensayos correspondientes, y por todo el tiempo dedicado a la elaboración de las gráficas de este documento.

Gracias al Lic. Humberto Lamus Bohorquez, mi padre quien leyó y corrigió innumerables versiones de este documento y quien junto a mi madre, Flor de María Báez, fueron mi constante aliento y soporte, al igual que mi esposa la Ing. Sofia Andrade Pardo, quien además de acompañarme en largas horas de desvelos, ayudó a organizar los numerosos datos anexos a este documento.

## Resumen

En esta tesis doctoral, de la Universidad Nacional de Colombia, se presenta el desarrollo de un modelo numérico que permite estimar el comportamiento inelástico del concreto reforzado con fibras cortas de acero SFRC, empleando una simulación numérica estocástica mediante el Método de los Elemento Finitos – FEM, de miembros estructurales solicitados en un estado plano de esfuerzos. En la simulación del material compuesto se utiliza la teoría de mezclas (Truesdell & Toupin, 1960) y la metodología de las discontinuidades fuertes de continuo (Oliver, 1996b), para representar el proceso de fractura (Oliver, et al., 2008). La matriz de concreto se considera homogénea y su comportamiento se representa por un modelo constitutivo de daño continuo bidimensional de resistencias diferenciadas a tracción y compresión (Oliver, et al., 1990). Por otra parte, el conjunto de fibras de acero se representan mediante un modelo de plasticidad unidimensional que involucra la posibilidad de deslizamiento de la fibra respecto a la matriz de concreto. El carácter aleatorio en la distribución y orientación de las fibras se consideró permitiendo predecir un rango de posibilidades de respuesta que emula la dispersión presentada en los ensayos experimentales. El tratamiento estadístico de la muestra se realizó con base en el concepto de profundidad (López-Pintado & Romo, 2009) en estadística funcional (Ramsay & Silverman, 2005), teniendo como resultado la estimación de intervalos de confianza para la respuesta estructural del material. Por último, se simulan pruebas experimentales de miembros SFRC sometidos a tensión y flexión. La respuesta estructural y los patrones de fisuración obtenidos de la simulación numérica son satisfactorios.

**Palabras clave:** Concreto, Fibras, Acero, FEM, Fisuración.

## Abstract

In this doctoral thesis, a numerical model was developed to estimate the inelastic behavior of concrete reinforced with short steel fibers SFRC, by a stochastic numerical simulation using the Finite Element Method – FEM of structural members, under a plane stress state. The mixture theory (Truesdell & Toupin, 1960) and the continuum strong discontinuity approach (Oliver, 1996b) are used in the simulation of the composite material representing the fracture process (Oliver, et al., 2008). The concrete matrix is considered homogeneous and its behavior is represented by a constitutive model of two-dimensional continuum damage with differentiated tensile and compressive strengths (Oliver, 1990). Moreover, the set of steel fibers is represented by a model of one dimensional plasticity which involves the possibility of slippage of fiber relative to the concrete matrix. The randomness in the distribution and fiber orientation was considered allowing to predict a range of possible responses that emulates the dispersion presented in the experimental tests. The statistical treatment of the sample was based on the concept of depth (López-Pintado & Romo, 2009) in functional statistic (Ramsay & Silverman, 2005), resulting in the estimation of confidence intervals for the structural response of the material. Finally, experimental tests of SFRC members subjected to tension and bending were simulated. The structural response and crack patterns obtained from the numerical simulation are satisfactory.

**Keywords:** Concrete, Fibers, Steel, FEM, Cracking.

# Contenido

	<b>Pág.</b>
<b>1. Generalidades del concreto reforzado con fibras cortas de acero.....</b>	<b>49</b>
1.1 Comportamiento mecánico del SFRC .....	49
1.2 Modelación numérica del proceso de fisuración del concreto simple y reforzado 52	
1.2.1 Modelos de la mecánica de la fractura para el concreto simple .....	52
1.2.2 Modelos de la mecánica de la fractura para concreto reforzado con barras ..	55
1.2.3 Modelos de la mecánica de la fractura para concreto reforzado con fibras ...	57
1.3 Seguridad en el diseño .....	62
1.3.1 Factores de seguridad.....	63
1.3.2 Variabilidad en la resistencia de miembros estructurales de concreto reforzado con fibras .....	64
1.3.3 La incertidumbre en la modelación .....	65
<b>2. Comportamiento de las fibras de acero embebidas en la matriz de concreto ..</b>	<b>67</b>
2.1 Fibras de acero .....	67
2.1.1 Propiedades geométricas de las fibras de acero.....	68
2.1.2 Propiedades mecánicas de las fibras de acero .....	73
2.2 Contenido y distribución de las fibras .....	76
2.2.1 Dosificaciones comunes para las fibras de acero .....	78
2.2.2 Efectos de la variación del contenido de fibras sobre las propiedades mecánicas.....	79
2.2.3 Dispersión del contenido de fibras .....	81
2.3 Orientación de las fibras .....	82
2.3.1 Proyección en el plano y efecto pared .....	83
2.3.2 Orientaciones preferenciales de las fibras.....	89
2.4 Deslizamiento de las fibras en la matriz .....	98
2.4.1 Ensayos de arrancamiento.....	98
2.4.2 Variables que afectan el arrancamiento .....	102
2.4.3 Parámetros de arrancamiento para varias fibras.....	110
2.4.4 Degradación de los mecanismos de adherencia.....	114

<b>3. Formulación e implementación del modelo numérico desarrollado para el SFRC</b>	<b>117</b>
3.1 Consideraciones básicas .....	117
3.2 Relación constitutiva de un punto de material compuesto a través de la teoría de mezclas .....	120
3.3 Modelo constitutivo para la matriz de concreto simple .....	123
3.4 Modelo constitutivo de las fibras y su deslizamiento con respecto a la matriz.	127
3.4.1 Comportamiento axial de las fibras y su deslizamiento con respecto a la matriz	127
3.4.2 Acción pasador de las fibras .....	133
3.5 Modelo constitutivo del material compuesto.....	137
3.6 Metodología de discontinuidades fuertes en SFRC .....	142
3.6.1 Descripción cinemática del material compuesto.....	143
3.6.2 Condiciones de equilibrio en el material compuesto .....	147
3.6.3 Análisis de discontinuidad fuerte en el material compuesto.....	148
3.6.4 Análisis de bifurcación en el SFRC.....	150
3.7 Implementación de la formulación en el Método de los Elementos Finitos.....	152
3.7.1 Elementos finitos con discontinuidades embebidas .....	152
3.7.2 Vector de la tasa del esfuerzo del material compuesto.....	158
3.7.3 Matriz del operador constitutivo tangente del material compuesto .....	159
3.7.4 Matriz de localización del material compuesto .....	160
3.7.5 Algoritmo de cálculo .....	160
3.8 Modelo estocástico del SFRC.....	162
3.8.1 Definición del coeficiente de participación volumétrico total en un elemento finito bidimensional.....	163
3.8.2 Distribución del coeficiente de participación volumétrico total en las direcciones r y s dentro de un elemento finito .....	164
3.8.3 Dirección aleatoria de las fibras .....	166
3.8.4 Asignación del material al elemento finito.....	167
<b>4. Aplicación de la estadística funcional.....</b>	<b>171</b>
4.1 Datos funcionales.....	174
4.2 Profundidad de banda.....	176
4.3 Box Plot .....	181
4.4 Bootstrap .....	182
4.5 Intervalos de Confianza .....	184
<b>5. Análisis de sensibilidad.....</b>	<b>187</b>
5.1 Descripción del ensayo de sensibilidad.....	187
5.2 Sensibilidad al tamaño del paso .....	189
5.3 Sensibilidad al número de eventos.....	192

---

5.4	Sensibilidad al tamaño de la malla .....	200
5.5	Sensibilidad al coeficiente de anisotropía .....	204
5.6	Influencia de la cuantía de fibras en la respuesta a la tracción del SFRC .....	208
5.7	Influencia de la resistencia del concreto y de la curva de arrancamiento en la respuesta a la tracción en el SFRC .....	210
<b>6.</b>	<b>Ejemplos de validación y aplicación.....</b>	<b>213</b>
6.1	Ensayo de tracción directa.....	213
6.1.1	Materiales .....	215
6.1.2	Descripción del ensayo de tracción .....	218
6.1.3	Descripción del modelo numérico .....	222
6.1.4	Resultados.....	225
6.2	Ensayo de flexión de tres puntos, con entalla .....	236
6.2.1	Materiales .....	237
6.2.2	Descripción del ensayo de flexión.....	240
6.2.3	Descripción del modelo numérico .....	243
6.2.4	Resultados.....	245
6.3	Ejemplo de aplicación en miembros estructurales .....	252
6.3.1	Descripción del ensayo .....	252
6.3.2	Materiales usados en las vigas de concreto reforzado y fibras de acero .....	254
6.3.3	Descripción de la modelación .....	255
<b>7.</b>	<b>Conclusiones y recomendaciones .....</b>	<b>261</b>
7.1	Conclusiones.....	263
7.2	Recomendaciones .....	265



## Lista de figuras

### Pág.

<b>Figura 1-1:</b>	Relación esfuerzo-apertura de una fisura en FRC.....	51
<b>Figura 1-2:</b>	Superposición en el modelo de Zhang y Li .....	58
<b>Figura 1-3:</b>	Componentes de SFRC en el modelo de Bui.....	59
<b>Figura 1-4:</b>	Componentes de SFRC en el modelo de Radke et al. ....	60
<b>Figura 1-5:</b>	Componentes de SFRC en el modelo de Prós .....	60
<b>Figura 1-6:</b>	Modelación de una viga de tres puntos con entalla (Mora, 2013) .....	62
<b>Figura 2-1:</b>	Propiedades geométricas y mecánicas de las fibras cortas de acero ....	68
<b>Figura 2-2:</b>	Relación de eficiencia intrínseca para secciones transversales comunes en las fibras de acero. ....	70
<b>Figura 2-3:</b>	Fibras onduladas.....	71
<b>Figura 2-4:</b>	Fibras con gancho en el extremo .....	71
<b>Figura 2-5:</b>	Fibras con cabeza o aplastamiento en el extremo.....	71
<b>Figura 2-6:</b>	Fibras torsionadas.....	71
<b>Figura 2-7:</b>	Ensayo de tracción directa para las fibras.....	74
<b>Figura 2-8:</b>	Curvas esfuerzo-deformación para el ensayo de tracción en tres tipos de fibras. ....	75
<b>Figura 2-9:</b>	Patrones de distribución de fibras en SFRC: número de fibras por cm <sup>2</sup> . 77	
<b>Figura 2-10:</b>	Resultados de tracción directa para especímenes ensayados en dos direcciones perpendiculares entre sí.....	78
<b>Figura 2-11:</b>	Variación del coeficiente de dispersión. ....	82
<b>Figura 2-12:</b>	Distribución de las fibras en un bloque de concreto fisurado .....	83
<b>Figura 2-13:</b>	Posibles orientaciones de fibra, proyectadas sobre el plano de análisis xy. .....	84
<b>Figura 2-14:</b>	Rango de orientaciones para una fibra cercana a la formaleta .....	85
<b>Figura 2-15:</b>	Localización de la fibra respecto a la formaleta en un plano perpendicular al plano de análisis .....	85
<b>Figura 2-16:</b>	Definición de la orientación $\varphi^f$ de la fibra fuera del plano de análisis.....	86
<b>Figura 2-17:</b>	Valores del coeficiente $g_z$ en función de la posición de la fibra .....	87
<b>Figura 2-18:</b>	Valores del coeficiente $g_z$ en función de la posición de la fibra .....	88
<b>Figura 2-19:</b>	Valores del coeficiente $g_i$ como función del espesor del elemento.....	89
<b>Figura 2-20:</b>	Distribución de frecuencias de direcciones de las fibras evaluada en dos proyecciones ortogonales entre sí. ....	90
<b>Figura 2-21:</b>	Imagen de una de las radiografías analizadas.....	91

<b>Figura 2-22:</b>	Esquema de los diferentes tamaños de cuadrícula. ....	92
<b>Figura 2-23:</b>	Medición de las longitudes de fibras en cada dirección.....	92
<b>Figura 2-24:</b>	Cálculo de las proyecciones de las fibras .....	93
<b>Figura 2-25:</b>	Rotación del sistema de referencia para el cálculo de las proyecciones.	94
<b>Figura 2-26:</b>	Coeficiente de isotropía $c_\phi$ vs coeficiente de dispersión $c_\rho$ .....	95
<b>Figura 2-27:</b>	Coeficiente de isotropía vs cuantía volumétrica promedio.....	95
<b>Figura 2-28:</b>	Relación entre el coeficiente de isotropía y el tamaño del área de referencia. .....	96
<b>Figura 2-29:</b>	Coeficiente de isotropía vs espesor del elemento.....	97
<b>Figura 2-30:</b>	Esquema del ensayo de arrancamiento .....	99
<b>Figura 2-31:</b>	Probeta para el ensayo de arrancamiento .....	101
<b>Figura 2-32:</b>	Montaje para el ensayo de arrancamiento .....	101
<b>Figura 2-33:</b>	Relación carga-deslizamiento en ensayos de arrancamiento. Influencia de altas adherencias en la reducción de la ductilidad. ....	102
<b>Figura 2-34:</b>	Relación carga-deslizamiento en ensayos de arrancamiento. Influencia del diámetro de la fibra. ....	104
<b>Figura 2-35:</b>	Relación carga-deslizamiento en ensayos de arrancamiento. Influencia del tipo de fibras.....	105
<b>Figura 2-36:</b>	Relación carga-deslizamiento en ensayos de arrancamiento. Influencia del gancho y la fricción en la adherencia fibra – matriz.....	105
<b>Figura 2-37:</b>	Relación carga-deslizamiento en ensayos de arrancamiento. Influencia de la longitud en la adherencia fibra – matriz .....	106
<b>Figura 2-38:</b>	Relación carga-deslizamiento en ensayos de arrancamiento. Influencia del gancho y la fricción en la adherencia fibra – matriz.....	107
<b>Figura 2-39:</b>	Influencia del ángulo entre el eje de la fibra y la dirección de la carga en la resistencia al arrancamiento de fibras con gancho.....	108
<b>Figura 2-40:</b>	Relación carga-deslizamiento en ensayos de arrancamiento. Influencia de la calidad de la matriz. ....	109
<b>Figura 2-41:</b>	Relación carga-deslizamiento en ensayos de arrancamiento. Influencia de la resistencia de la matriz en la resistencia al arrancamiento .....	109
<b>Figura 2-42:</b>	Influencia de la cuantía de fibras en la resistencia al arrancamiento ....	110
<b>Figura 2-43:</b>	Relación carga-deslizamiento en ensayos de arrancamiento para dos grupos de especímenes .....	111
<b>Figura 2-44:</b>	Parámetros de arrancamiento para las fibras A.....	113
<b>Figura 2-45:</b>	Modos de falla del ensayo de arrancamiento.....	114
<b>Figura 2-46:</b>	Esquema del modelo de poleas con fricción .....	115
<b>Figura 2-47:</b>	Fases en el proceso de arrancamiento. ....	116
<b>Figura 3-1:</b>	Esquema general del procedimiento .....	118
<b>Figura 3-2:</b>	Descripción de un punto de material compuesto .....	121
<b>Figura 3-3:</b>	Modelo reológico de un material compuesto de acuerdo con la teoría de mezclas .....	123
<b>Figura 3-4:</b>	Modelo de daño con degradación diferenciada a compresión y tracción.... .....	126
<b>Figura 3-5:</b>	Curvas de arrancamiento típicas.....	128

**Figura 3-6:** Relación esfuerzo normal *versus* deformación longitudinal y densidad de energía total de deformación, si la fuerza máxima de adherencia es menor que la carga de fluencia de las fibras:..... 130

**Figura 3-7:** Fibra deformable – deslizante Relación esfuerzo normal *versus* deformación longitudinal y densidad de energía total de deformación, si la fuerza máxima de adherencia es mayor que la carga de fluencia de las fibras. .... 131

**Figura 3-8:** Modelo unidimensional de plasticidad para el acero de las fibras. .... 132

**Figura 3-9:** Mecanismos de la acción pasador. .... 134

**Figura 3-10:** Modelo unidimensional de plasticidad para el efecto pasador. .... 135

**Figura 3-11:** Esfuerzos en los materiales componentes..... 139

**Figura 3-12:** Modelo reológico considerado en la componente normal en  $r$  ..... 139

**Figura 3-13:** Modelo reológico considerado en la componente normal en  $s$  ..... 140

**Figura 3-14:** Modelo reológico considerado en la componente cortante en el plano  $rs$  .  
..... 140

**Figura 3-15:** Esquema de respuesta estructural de una probeta de material compuesto tipo SFRC solicitado a tracción ..... 142

**Figura 3-16:** Cinemática de la discontinuidad fuerte en una dimensión..... 143

**Figura 3-17:** Aplicación de la CSDA a materiales compuestos: ..... 144

**Figura 3-18:** Aplicación de la CSDA a materiales compuestos: ..... 145

**Figura 3-19:** Grados de libertad (desplazamientos compatibles y saltos)..... 153

**Figura 3-20:** Elemento con discontinuidad embebida..... 154

**Figura 3-21:** Función Delta de Dirac regularizada ..... 155

**Figura 3-22:** Modelo constitutivo del material compuesto. Diagrama de flujo de cálculo del tensor de esfuerzos, el tensor constitutivo tangente y el análisis de localización. .... 161

**Figura 3-23:** Modelación estadística del coeficiente de participación volumétrica total en el plano de análisis ..... 164

**Figura 3-24:** Orientaciones discretas de las fibras de dirección  $r$ ..... 166

**Figura 3-25:** Asignación del material compuesto en la malla de elementos finitos.... 168

**Figura 3-26:** Influencia de la distribución de las fibras en la respuesta estructural.... 168

**Figura 3-27:** Dos eventos que generan diferentes asignaciones de material sobre la malla de elementos finitos ..... 170

**Figura 4-1:** Alta dispersión en los resultados experimentales. .... 172

**Figura 4-2:** Ejemplo de dato funcional..... 175

**Figura 4-3:** Ejemplos de bandas para establecer la profundidad ..... 177

**Figura 4-4:** Ejemplos de bandas en una muestra de cuatro curvas. .... 178

**Figura 4-5:** Evaluación de la inclusión de una curva dentro de una banda..... 179

**Figura 4-6:** Representación de una muestra funcional mediante box-plot..... 182

**Figura 4-7:** Proceso de remuestreo – Bootstrap..... 183

**Figura 5-1:** Probeta usada en las pruebas de sensibilidad..... 188

**Figura 5-2:** Ejemplo de malla usada en el análisis de sensibilidad ..... 188

**Figura 5-3:** Variación de la respuesta con el tamaño del paso para diferentes tamaños máximos de elementos finitos en la malla ..... 189

**Figura 5-4:** Carga máxima en función del tamaño del paso para diferentes tamaños máximos de elementos finitos en la malla ..... 190

<b>Figura 5-5:</b>	Carga máxima en función del tamaño del paso para concretos de diferentes resistencias .....	191
<b>Figura 5-6:</b>	Ejemplo de asignación de materiales .....	192
<b>Figura 5-7:</b>	Ejemplo de malla usada en el análisis de sensibilidad .....	193
<b>Figura 5-8:</b>	Evolución de la variable de daño y del desplazamiento para tres eventos . .....	194
<b>Figura 5-9:</b>	Muestra de n=211 simulaciones .....	197
<b>Figura 5-10:</b>	Variación de la curva promedio en función del tamaño de la muestra ..	197
<b>Figura 5-11:</b>	Variación del promedio de los parámetros de diseño en función del tamaño de la muestra .....	198
<b>Figura 5-12:</b>	Variación de la relación $F_3 / F_1$ en función del tamaño de la muestra ....	199
<b>Figura 5-13:</b>	Mallas de diferentes tamaños usada en el ensayo de tracción directa .	200
<b>Figura 5-14:</b>	Envolventes para las curvas de carga vs, desplazamiento obtenidas en el ensayo de tracción usando diferentes tamaños de malla.....	201
<b>Figura 5-15:</b>	Curvas promedio de la relación carga contra desplazamiento para diferentes tamaños de malla .....	202
<b>Figura 5-16:</b>	Variación de la resistencia promedio en función del tamaño de la malla .... .....	202
<b>Figura 5-17:</b>	Dispersión de la respuesta para diferentes tamaños de malla. ....	203
<b>Figura 5-18:</b>	Envolventes para las curvas de carga vs, desplazamiento obtenidas en el ensayo de tracción usando diferentes coeficientes de isotropía .....	205
<b>Figura 5-19:</b>	Curvas promedio de la relación carga contra desplazamiento para diferentes coeficientes de isotropía.....	206
<b>Figura 5-20:</b>	Variación de la resistencia promedio en función del tamaño del coeficiente de isotropía.....	206
<b>Figura 5-21:</b>	Dispersión de la respuesta para diferentes coeficientes de isotropía ...	207
<b>Figura 5-22:</b>	Envolventes para las curvas de carga vs, desplazamiento obtenidas en el ensayo de tracción usando diferentes cuantías volumétricas de fibras .....	208
<b>Figura 5-23:</b>	Curvas promedio de la relación carga contra desplazamiento para diferentes cuantías volumétricas de fibras .....	209
<b>Figura 5-24:</b>	Envolventes para las curvas de carga vs, desplazamiento obtenidas en el ensayo de tracción usando diferentes matrices de concreto.....	211
<b>Figura 5-25:</b>	Curvas promedio de la relación carga contra desplazamiento para diferentes matrices de concreto .....	211
<b>Figura 6-1:</b>	Ejemplo de probetas para ensayos de tracción de SFRC. ....	214
<b>Figura 6-2:</b>	Probetas prismáticas.....	215
<b>Figura 6-3:</b>	Fibras cortas de acero Dramix ® RL 45/50 BN .....	216
<b>Figura 6-4:</b>	Ejemplo de un modelo constitutivo de la fibra deformable – deslizante, para la fibra Dramix ® RL 45/50 BN.....	218
<b>Figura 6-5:</b>	Formaleta empleada y proceso de fundición de las probetas .....	219
<b>Figura 6-6:</b>	Esquema de los soportes para los dos LVDT. ....	219
<b>Figura 6-7:</b>	Esquema de las mordazas del montaje. ....	220
<b>Figura 6-8:</b>	Esquema de configuración del ensayo e instrumentación.....	220
<b>Figura 6-9:</b>	Ensayo de tracción directa en probeta de concreto simple. ....	221

<b>Figura 6-10:</b>	Evolución de la fisura, arrancamiento total de las fibras y total pérdida de integridad del elemento .....	222
<b>Figura 6-11:</b>	Dimensiones de la probeta usada en la modelación. Ensayo de tracción directa .....	223
<b>Figura 6-12:</b>	Malla usada en la modelación del ensayo de tracción.....	224
<b>Figura 6-13:</b>	Ejemplo de asignación de materiales en un evento para el ensayo de tracción .....	224
<b>Figura 6-14:</b>	Condiciones de frontera y aplicación del desplazamiento unitario .....	225
<b>Figura 6-15:</b>	Ensayo de tracción directa, muestra de cien (100) simulaciones numéricas Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 0.5% .....	226
<b>Figura 6-16:</b>	Ensayo de tracción directa, Media y envolvente.....	226
<b>Figura 6-17:</b>	Ensayo de tracción directa, Mediana, profundidad de banda e intervalos de confianza. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 0.5%.....	227
<b>Figura 6-18:</b>	Ensayo de tracción directa, comparación de resultados experimentales y numéricos. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 0.5% .....	227
<b>Figura 6-19:</b>	Ensayo de tracción directa, muestra de cien (100) simulaciones numéricas Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 1% .....	228
<b>Figura 6-20:</b>	Ensayo de tracción directa, Media y envolvente.....	228
<b>Figura 6-21:</b>	Ensayo de tracción directa, Mediana, profundidad de banda e intervalos de confianza. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 1%.....	229
<b>Figura 6-22:</b>	Ensayo de tracción directa, comparación de resultados experimentales y numéricos. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 1% .....	229
<b>Figura 6-23:</b>	Ensayo de tracción directa, muestra de cien (100) simulaciones numéricas Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 1.5% .....	230
<b>Figura 6-24:</b>	Ensayo de tracción directa, Media y envolvente.....	230
<b>Figura 6-25:</b>	Ensayo de tracción directa, Mediana, profundidad de banda e intervalos de confianza. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 1.5%.....	231
<b>Figura 6-26:</b>	Ensayo de tracción directa, comparación de resultados experimentales y numéricos. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 1.5% .....	231
<b>Figura 6-27:</b>	Ensayo de tracción directa, Comparación de las medias para las tres cuantías volúmetricas. Curvas carga contra desplazamiento. ....	232
<b>Figura 6-28:</b>	Ensayo de tracción directa, Ejemplo de simulaciones numérica. Curvas carga contra desplazamiento. ....	233
<b>Figura 6-29:</b>	Ensayo de tracción directa, Evolución del daño en los puntos a, b, c y d. Simulación Numérica.....	234
<b>Figura 6-30:</b>	Ensayo de tracción directa, estado elástico. ....	235
<b>Figura 6-31:</b>	Ensayo de tracción directa, inicio de la fisuración.....	235
<b>Figura 6-32:</b>	Ensayo de tracción directa, Fisuración avanzada.....	236
<b>Figura 6-33:</b>	Ensayo de Flexión.....	237
<b>Figura 6-34:</b>	Ejemplo de un modelo constitutivo de la fibra deformable – deslizante, para la fibra empleada en el ensayo de flexión.....	239
<b>Figura 6-35:</b>	Formaleta empleada y proceso de fundidad de las probetas. Ensayo de Flexión .....	240
<b>Figura 6-36:</b>	Fotografía del ensayo a flexión.....	241

<b>Figura 6-37:</b>	Ensayo flexión en la probeta de concreto simple.....	241
<b>Figura 6-38:</b>	Evolución de la fisura, arrancamiento total de las fibras y pérdida de integridad del elemento. Ensayo de flexión .....	242
<b>Figura 6-39:</b>	Dimensiones de la probeta del modelo. Ensayo de Flexión .....	243
<b>Figura 6-40:</b>	Malla usada en la simulación del ensayo de Flexión .....	244
<b>Figura 6-41:</b>	Ejemplo de asignación de materiales en un evento para el ensayo de flexión. ....	244
<b>Figura 6-42:</b>	Condiciones de apoyo y aplicación del desplazamiento unitario. Ensayo de flexión .....	245
<b>Figura 6-43:</b>	Ensayo de flexión, muestra de cien (100) simulaciones numéricas Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 1%.....	246
<b>Figura 6-44:</b>	Ensayo de flexión, Media y envolvente. ....	246
<b>Figura 6-45:</b>	Ensayo de flexión Mediana, profundidad de banda e intervalos de confianza. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 1%.....	247
<b>Figura 6-46:</b>	Ensayo de flexión, comparación de resultados experimentales y numéricos. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 1% .....	247
<b>Figura 6-47:</b>	Ensayo de flexión, muestra de cien (100) simulaciones numéricas Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 2%.....	248
<b>Figura 6-48:</b>	Ensayo de flexión, Media y envolvente. ....	248
<b>Figura 6-49:</b>	Ensayo de flexión Mediana, profundidad de banda e intervalos de confianza. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 2%.....	249
<b>Figura 6-50:</b>	Ensayo de flexión, comparación de resultados experimentales y numéricos. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 2% .....	249
<b>Figura 6-51:</b>	Ensayo de flexión, Ejemplo de simulaciones numérica. Curvas carga contra desplazamiento.....	250
<b>Figura 6-52:</b>	Ensayo de flexión, Evolución del daño en los puntos a, b, c y d. Simulación Numérica.....	251
<b>Figura 6-53:</b>	Dimensiones la viga de concreto reforzado y fibras de acero. ....	252
<b>Figura 6-54:</b>	Construcción de los especímenes para los ensayos experimentales de flexión en vigas de concreto reforzado y fibras de acero. ....	253
<b>Figura 6-55:</b>	Montaje para los ensayos experimentales de flexión en vigas de concreto reforzado y fibras de acero. ....	254
<b>Figura 6-56:</b>	Condiciones de apoyo y aplicación del desplazamiento unitario. Viga simplemente apoyada en una luz de 2m.....	256
<b>Figura 6-57:</b>	Distribución de materiales. Viga simplemente apoyada en una luz de 3m . ....	256
<b>Figura 6-58:</b>	Evolución de la variable de daño y de los desplazamientos. Viga simplemente apoyada en una luz de 2m. ....	257
<b>Figura 6-59:</b>	Muestra de cien (100) simulaciones numéricas. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 0.35%. Viga simplemente apoyada en una luz de 2m .....	258
<b>Figura 6-60:</b>	Media y envolvente. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 0.35%. Viga simplemente apoyada en una luz de 2m .....	258
<b>Figura 6-61:</b>	Ensayo de flexión Mediana, profundidad de banda e intervalos de confianza. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 0.35%.....	259

---

<b>Figura 6-62:</b> Ensayo de flexión, comparación de resultados experimentales y numéricos. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 0.35% .....	259
<b>Figura 6-63:</b> Ensayo de flexión, comparación de resultados experimentales y teóricos con límites de confianza. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 0.35% .....	260



## Lista de tablas

### Pág.

<b>Tabla 2-1:</b>	Resistencias mínimas para las fibras de acero según (CNR, 2006).....	73
<b>Tabla 2-2:</b>	Características geométricas de las fibras ensayadas a tracción.....	75
<b>Tabla 2-3:</b>	Propiedades mecánicas promedio obtenidas para las fibras usadas en esta investigación. ....	76
<b>Tabla 2-4:</b>	Plan de ensayos de arrancamiento.....	100
<b>Tabla 2-5:</b>	Dosificación de las mezclas de concreto para los ensayos de arrancamiento.....	100
<b>Tabla 2-6:</b>	Resultados de los ensayos de arrancamiento.....	112
<b>Tabla 3-1:</b>	Configuraciones de material compuesto.....	167
<b>Tabla 6-1:</b>	Dosificación de la mezcla de concreto – Ensayos Experimentales.....	216
<b>Tabla 6-2:</b>	Resistencia y dimensiones de las fibras cortas de acero Dramix ® RL 45/50 BN.....	217
<b>Tabla 6-3:</b>	Propiedades mecánicas a tracción directa de las fibras cortas de acero Dramix ® RL 45/50 BN.....	217
<b>Tabla 6-4:</b>	Valores de las variables empleadas en el modelo numerico.....	223
<b>Tabla 6-5:</b>	Dosificación de la mezcla de concreto, Ensayos Experimentales. Ensayo de flexión.....	238
<b>Tabla 6-6:</b>	Ficha técnica de las fibras cortas de acero. Ensayo de Flexión.....	238
<b>Tabla 6-7:</b>	Propiedades mecánicas a tracción directa de las fibras cortas de acero. Ensayo de flexión.....	239
<b>Tabla 6-8:</b>	Valores de las variables empleadas en el modelo numerico.....	243
<b>Tabla 6-9:</b>	Valores de las variables empleadas en el modelo numerico.....	255



# Lista de símbolos y abreviaturas

## Símbolos

Símbolo	Término
$\mathbf{A}$	Tensor de segundo orden definido como $\mathbf{A} = \mathbf{C} : \hat{\partial}_{\bar{\sigma}} \phi$
$A^f$	Área de la sección transversal de las fibras.
$A_m$	Sumatoria de las áreas de cada uno de los elementos a los cuales les fue asignado el material $m$ en una malla de elementos finitos.
$A_T$	Suma de las áreas de todos los elementos finitos en una malla.
$\mathbf{b}$	Vector de fuerzas de cuerpo en el sólido.
$\mathbf{C}^m$	Tensor constitutivo elástico de la matriz.
$\mathbf{C}_{tg}^m$	Tensor constitutivo tangente de la matriz.
$\mathbf{C}_{tg}$	Tensor constitutivo tangente del material compuesto.
$c_{\phi}$	Coefficiente de isotropía.
$c_{\rho}$	Coefficiente de dispersión.
$d^f$	Diámetro de las fibras fabricadas a partir de alambres redondos.
$d_e^f$	Diámetro equivalente de fibras con sección diferente a la circular.
$\mathbf{d}_i$	Vector de desplazamientos compatible en el nudo $i$ de un elemento finito en dos dimensiones.
$\dot{\mathbf{d}}_i$	

<b>Símbolo</b>	<b>Término</b>
	Vector de la tasa de desplazamientos compatible en el nudo $i$ de un elemento finito en dos dimensiones.
$d_n^m$	Variable escalar de daño para la matriz.
$d\bar{V}$	Diferencial de volumen de un punto de material compuesto.
$dV^c$	Diferencial de volumen de cada material constituyente.
$\dot{\mathbf{d}}^{(e)}$	Vector de tasa de desplazamientos compatibles de un elemento finito.
$E^f$	Módulo de Young del acero de las fibras.
$E^{fr}$	Pendiente de la rama ascendente del modelo de fibra deformable – deslizante para las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .
$E^{fs}$	Pendiente de la rama ascendente del modelo de fibra deformable – deslizante para las fibras paralelas al vector $\mathbf{s}$ .
$E_{tg}^f$	Pendiente de la rama inelástica del modelo de fibra deformable – deslizante.
$E_{tg}^{fr}$	Operador constitutivo tangente del comportamiento axial de las fibras deformables - deslizantes paralelas al vector $\mathbf{r}$ .
$E_{tg}^{fs}$	Operador constitutivo tangente del comportamiento axial de las fibras deformables - deslizantes paralelas al vector $\mathbf{s}$ .
$E^m$	Módulo de Young de la matriz.
$f^{f\tau}$	Función de fluencia del modelo que representa la acción pasador.
$f^{fr}$	Función de fluencia del modelo de plasticidad de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .
$f^{fs}$	Función de fluencia del modelo de plasticidad de las fibras paralelas al vector $\mathbf{s}$ .
$f^m$	Función de daño de la matriz.
$G^{f\tau}$	Módulo cortante equivalente en la fibra asociado a la acción pasador.
$G_{tg}^{f\tau}$	Operador constitutivo tangente del modelo que representa la acción pasador.

<b>Símbolo</b>	<b>Término</b>
$G_f^m$	Energía de fractura de la matriz.
$G_{tg}$	Módulo de cortante tangente.
$G_{ext}$	Energía Externa.
$H^{f\tau}$	Parámetro de ablandamiento del modelo que representa la acción pasador.
$H^{fr}$	Parámetro de ablandamiento del modelo de plasticidad de la fibra paralela al vector $\mathbf{r}$ .
$H^{fs}$	Parámetro de ablandamiento del modelo de plasticidad de la fibra paralela al vector $\mathbf{s}$ .
$H^m$	Parámetro de ablandamiento del modelo de daño de la matriz.
$\mathcal{H}_s$	Función de Heaviside en la superficie de discontinuidad.
$\overline{H}^{f\tau}$	Parámetro de ablandamiento discreto del modelo de acción pasador.
$\overline{H}^{fr}$	Parámetro de ablandamiento discreto de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .
$\overline{H}^{fs}$	Parámetro de ablandamiento discreto de las fibras paralelas al vector $\mathbf{s}$ .
$\overline{H}^m$	Parámetro de ablandamiento discreto en la matriz.
$k^c$	Coefficiente de participación volumétrica, calculado como $k^c = dV^c/d\bar{V}$ .
$k^f$	Cada uno de los coeficientes de participación volumétrica total correspondiente a una probabilidad acumulada.
$k^{fr}$	Coefficiente de participación volumétrica de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .
$k^{fs}$	Coefficiente de participación volumétrica de las fibras paralelas al vector $\mathbf{s}$ .
$k^m$	Coefficiente de participación volumétrica de la matriz.
	Coefficiente de participación volumétrica nominal total de las fibras en el plano de análisis.

Símbolo	Término
$k_n^f$	
$k_1^f$	Coeficiente de participación volumétrica total correspondiente a la probabilidad acumulada de 12.5%.
$k_2^f$	Coeficiente de participación volumétrica total correspondiente a la probabilidad acumulada de 37.5%.
$k_3^f$	Coeficiente de participación volumétrica total correspondiente a la probabilidad acumulada de 62.5%.
$k_4^f$	Coeficiente de participación volumétrica total correspondiente a la probabilidad acumulada de 87.5%.
$l_e^f$	Longitud embebida de la fibra.
$l_n^f$	Longitud nominal de una fibra.
$l_p^f$	Longitud de una fibra proyectada sobre el plano de análisis.
$l^r$	Apertura de una fisura paralela al eje longitudinal de la fibra, que representa la luz libre de una fibra doblemente empotrada sometida a flexión (acción pasador).
$\mathcal{M}_s$	Función elemental de salto unitario en el continuo.
$\mathbf{n}$	Vector unitario normal a la superficie de discontinuidad.
$n_\sigma$	Cociente entre la resistencia a compresión $\sigma_{u(c)}^m$ y a tracción $\sigma_{u(t)}^m$ de la matriz
$N_i$	Funciones de forma de un elemento finito triangular lineal.
$\mathbf{n}_{loc}$	Vector unitario normal a la superficie de discontinuidad en el instante de bifurcación.
$p_e^f$	Perímetro equivalente de una fibra.
$P^f$	Carga aplicada al extremo de una fibra en el ensayo de arrancamiento.

<b>Símbolo</b>	<b>Término</b>
$P_{máx}^f$	Carga máxima alcanzada en una fibra en el ensayo de arrancamiento.
$p_j$	Probabilidad de que cada una de las configuraciones materiales sea asignada a un punto material.
$P_m$	Frecuencia de asignación de una configuración material relativa al volumen del miembro estructural.
$P_y$	Fuerza de fluencia de una fibra.
$q^{f\tau}$	Variable interna tipo esfuerzo del modelo que representa la acción pasador.
$\dot{q}^{f\tau}$	Tasa de la variable interna tipo esfuerzo del modelo que representa la acción pasador.
$q^{fr}$	Variable interna tipo esfuerzo en el modelo de plasticidad de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .
$\dot{q}^{fr}$	Tasa de la variable interna tipo esfuerzo en el modelo de plasticidad de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .
$q^{fs}$	Variable interna tipo esfuerzo en el modelo de plasticidad de las fibras paralelas al vector $\mathbf{s}$ .
$\dot{q}^{fs}$	Tasa de la variable interna tipo esfuerzo en el modelo de plasticidad de las fibras paralelas al vector $\mathbf{s}$ .
$q_s^{f\tau}$	Variable interna tipo esfuerzo del modelo de acción pasador, definida la superficie $S$ .
$q_{s(SD)}^{f\tau}$	Variable interna tipo esfuerzo del modelo de acción pasador, definida la superficie $S$ y para el instante de discontinuidad fuerte.
$q_s^{fr}$	Variable interna tipo esfuerzo de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ , definida la superficie $S$ .
$q_{s(SD)}^{fr}$	Variable interna tipo esfuerzo de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ , definida en $S$ y para el instante de discontinuidad fuerte.
$q_s^{fs}$	Variable interna tipo esfuerzo de las fibras paralelas al vector $\mathbf{s}$ , definida la superficie $S$ .
$q_{s(SD)}^{fs}$	Variable interna tipo esfuerzo de las fibras paralelas al vector $\mathbf{s}$ , definida en $S$ y para el instante de discontinuidad fuerte.
	Variable interna tipo esfuerzo del modelo de daño de la matriz.

<b>Símbolo</b>	<b>Término</b>
$q^m$	
$\dot{q}^m$	Derivada respecto al tiempo de la variable interna tipo esfuerzo del modelo de daño de la matriz.
$\mathbf{Q}^m$	Tensor de localización elástico de la matriz.
$q_s^m$	Variable interna tipo esfuerzo de la matriz en $S$ .
$q_{s(SD)}^m$	Variable interna tipo esfuerzo de la matriz en $S$ y para el instante de discontinuidad fuerte.
$\mathbf{Q}_{tg}^m$	Tensor tangente de localización de la matriz.
$\mathbf{Q}_{tg}$	Tensor tangente de localización del material compuesto.
$\mathbf{r}$	Vector unitario paralelo al eje longitudinal del primer grupo de fibras.
$r^m$	Variable interna tipo deformación del modelo de daño de la matriz.
$\dot{r}^m$	Derivada respecto al tiempo de la variable interna tipo deformación del modelo de daño de la matriz.
$r_n^f$	Esbitez o relación de forma nominal de las fibras.
$\mathbf{s}$	Vector unitario paralelo al eje longitudinal del segundo grupo de fibras. Se considera que $\mathbf{s}$ es perpendicular a $\mathbf{r}$ .
$S$	Superficie de discontinuidad en el interior del sólido.
$t$	Espesor de un miembro estructural, perpendicular al plano de análisis.
$t^f$	Espesor de las secciones de fibras cortadas de láminas o alambres planos
$\mathbf{t}^*$	Vector de tracciones preescritas en el sólido.
$\mathbf{t}_S$	Vector de tracciones del material compuesto en $S$ .
$\mathbf{u}$	Vector de desplazamiento en un punto de material compuesto.
$\dot{\mathbf{u}}$	Tasa de desplazamiento en un punto de material compuesto.
$\ddot{\mathbf{u}}$	

<b>Símbolo</b>	<b>Término</b>
	Parte continua de la tasa de desplazamiento en un punto de material compuesto.
$U_T^f$	Densidad de energía total de deformación obtenida de un ensayo de arrancamiento.
$V$	Fuerza cortante en la fibra producida por la acción pasador.
$V^{fr}$	Volumen de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .
$V^{fs}$	Volumen de las fibras paralelas al vector $\mathbf{s}$ .
$V^m$	Volumen de matriz en un punto material.
$\bar{V}$	Volumen total del material compuesto.
$V_y$	Fuerza cortante de fluencia en la fibra asociada con la acción pasador.
$w^f$	Ancho de las secciones de fibras cortadas de láminas o alambres planos.
$w_s$	Apertura de la fisura.
$z_{CM}$	Distancia entre la formaleta y el centroide de la fibra.
$\alpha$	Rango de posibles orientaciones de una fibra en un plano perpendicular al plano de análisis.
$\alpha^c$	Vector de variables internas para el modelo constitutivo del material compuesto.
$\alpha^{f\tau}$	Variable interna tipo deformación del modelo que representa la acción pasador.
$\alpha^{fr}$	Variable interna tipo deformación en el modelo de plasticidad del comportamiento axial de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .
$\dot{\alpha}^{fr}$	Tasa de la variable interna tipo deformación en el modelo de plasticidad del comportamiento axial de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .
$\alpha^{fs}$	Variable interna tipo deformación en el modelo de plasticidad del comportamiento axial de las fibras paralelas al vector $\mathbf{s}$ .

<b>Símbolo</b>	<b>Término</b>
$\dot{\alpha}^{fs}$	Tasa de la variable interna tipo deformación en el modelo de plasticidad del comportamiento axial de las fibras paralelas al vector $\mathbf{S}$ .
$\bar{\alpha}^{f\tau}$	Variable interna discreta del modelo de acción pasador.
$\bar{\alpha}^{fr}$	Variable interna discreta de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .
$\bar{\alpha}^{fs}$	Variable interna discreta de las fibras paralelas al vector $\mathbf{S}$ .
$\bar{\alpha}^m$	Variable interna discreta en la matriz.
$\dot{\bar{\alpha}}^m$	Tasa de la variable interna discreta en la matriz.
$\beta$	Grados de libertad asociados al salto del desplazamiento.
$\beta^{(e)}$	Vector de saltos de desplazamientos de un elemento finito en dos dimensiones.
$\dot{\beta}^{(e)}$	Vector de saltos de la tasa de desplazamientos de un elemento finito en dos dimensiones.
$\gamma^f$	Deformación angular en las fibras.
$\gamma_p^f$	Deformación plástica en el modelo que representa la acción pasador.
$\gamma_{rs}^f$	Deformación angular en las fibras en el plano $rs$ .
$\dot{\gamma}_{rs}^f$	Tasa de la deformación angular en las fibras en el plano $rs$ .
$\gamma_{rs}^m$	Deformación angular en la matriz en el plano $rs$ .
$\dot{\gamma}_{rs}^m$	Tasa de la deformación angular en la matriz en el plano $rs$ .
$\gamma_{rs}$	Deformación angular en el compuesto en el plano $rs$ .
$\dot{\gamma}_{rs}$	Tasa de la deformación angular en el compuesto en el plano $rs$ .
	Peso específico del acero de las fibras.

Símbolo	Término
$\mathcal{V}_s$	
$\Gamma_\sigma$	Contorno del sólido donde se prescribe la tasa de tracción.
$\delta^f$	Desplazamiento de la fibra en el ensayo de arrancamiento.
$\delta_S^k$	Función delta de Dirac regularizada.
$\delta_S$	Función delta de Dirac en la superficie de discontinuidad.
$\delta^\tau$	Desplazamiento relativo entre las caras de una fisura, perpendicular al eje longitudinal de la fibra, producido por la acción pasador.
$\Delta$	Desplazamiento.
$\Delta_\delta$	Tamaño del paso - ArcLength
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor de deformación en el material compuesto.
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$	Tasa de deformación en el material compuesto.
$\boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega \setminus S}$	Tensor de deformación en el material compuesto $\Omega \setminus S$ .
$\boldsymbol{\varepsilon}^f$	Deformación longitudinal calculada para el ensayo de arrancamiento.
$\boldsymbol{\varepsilon}^{fr}$	Deformación en el modelo de fibra deformable deslizante para el paquete de fibras en la dirección $\mathbf{r}$ .
$\boldsymbol{\varepsilon}^{fs}$	Deformación en el modelo de fibra deformable deslizante para el paquete de fibras en la dirección $\mathbf{s}$ .
$\varepsilon_{rr}$	Deformación longitudinal del compuesto en la dirección $\mathbf{r}$ .
$\dot{\varepsilon}_{rr}$	Tasa de la deformación longitudinal del compuesto en la dirección $\mathbf{r}$ .
$\varepsilon_{ss}$	Deformación longitudinal del compuesto en la dirección $\mathbf{s}$ .
$\dot{\varepsilon}_{ss}$	Tasa de la deformación longitudinal del compuesto en la dirección $\mathbf{s}$ .

<b>Símbolo</b>	<b>Término</b>
$\epsilon_{final}^f$	Deformación de ruptura o deslizamiento total del modelo de fibra deformable – deslizante.
$\epsilon_{máx}^f$	Deformación para el esfuerzo máximo en el modelo de fibra deformable - deslizante.
$\epsilon_p^{fr}$	Deformación axial plástica de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .
$\dot{\epsilon}_p^{fr}$	Tasa de la deformación axial plástica de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .
$\epsilon_p^{fs}$	Deformación axial plástica de las fibras paralelas al vector $\mathbf{s}$ .
$\dot{\epsilon}_p^{fs}$	Tasa de la deformación axial plástica de las fibras paralelas al vector $\mathbf{s}$ .
$\epsilon_{rr}^{fr}$	Deformación longitudinal de las fibras en la dirección $\mathbf{r}$ .
$\dot{\epsilon}_{rr}^{fr}$	Tasa de deformación longitudinal de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .
$\epsilon_{ss}^{fs}$	Deformación longitudinal de las fibras en la dirección $\mathbf{s}$ .
$\dot{\epsilon}_{ss}^{fs}$	Tasa de la deformación longitudinal de las fibras en la dirección $\mathbf{s}$ .
$\epsilon_{rr}^m$	Deformación longitudinal de la matriz en la dirección $\mathbf{r}$ .
$\dot{\epsilon}_{rr}^m$	Tasa de la deformación longitudinal de la matriz en la dirección $\mathbf{r}$ .
$\epsilon_{ss}^m$	Deformación longitudinal de la matriz en la dirección $\mathbf{s}$ .
$\dot{\epsilon}_{ss}^m$	Tasa de la deformación longitudinal de la matriz en la dirección $\mathbf{s}$ .
$\boldsymbol{\epsilon}^m$	Tensor de deformación de la matriz.
$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^m$	Tasa de deformación en la matriz.
$\frac{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\boldsymbol{\epsilon}}$	Parte continua de la tasa de deformación en un punto de material compuesto.
$\boldsymbol{\epsilon}_S$	Tensor de la tasa deformación del material compuesto en $S$ .

Símbolo	Término
$\boldsymbol{\varepsilon}^c$	Tensor de deformación de cada uno de los materiales componentes.
$\boldsymbol{\eta}'$	Desplazamientos discontinuos.
$\bar{\boldsymbol{\eta}}$	Desplazamientos regulares admisibles.
$\theta_{loc}$	Ángulo conformado entre la dirección principal $I$ en deformaciones y el vector $\mathbf{n}_{loc}$ , o ángulo de localización.
$\theta_n$	Ángulo conformado entre la dirección principal $I$ en deformaciones y el vector $\mathbf{n}$ .
$\theta_r$	Ángulo formado entre el eje $x$ y la dirección $\mathbf{r}$
$\lambda^{f\tau}$	Multiplicador plástico del modelo que representa la acción pasador.
$\lambda^{fr}$	Multiplicador plástico del comportamiento axial de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .
$\lambda^{fs}$	Multiplicador plástico del comportamiento axial de las fibras paralelas al vector $\mathbf{s}$ .
$\lambda^m$	Multiplicador de daño en el modelo de la matriz.
$\nu^f$	Relación de Poisson del acero de las fibras.
$\nu^m$	Relación de Poisson de la matriz.
$\rho_{nw}^f$	Dosificación en peso de las fibras por cada unidad de volumen.
$\rho_{nv}^f$	Cuantía volumétrica nominal de las fibras.
$\sigma$	Esfuerzo normal en el SFR.
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de esfuerzo del material compuesto.
$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$	Tensor de la tasa de esfuerzo del material compuesto.
$\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S}$	Tensor de esfuerzo del material compuesto en $\Omega \setminus S$ Esfuerzo normal calculado en el ensayo de arrancamiento.

Símbolo	Término
$\sigma^f$	
$\sigma_{máx}^f$	Esfuerzo pico de arrancamiento.
$\sigma_{rr}^{fr}$	Esfuerzo normal en la fibra en la dirección $\mathbf{r}$ .
$\dot{\sigma}_{rr}^{fr}$	Tasa de esfuerzo normal en la fibra en la dirección $\mathbf{r}$ .
$\sigma_{ss}^{fs}$	Esfuerzo normal en la fibra en la dirección $\mathbf{s}$ .
$\dot{\sigma}_{ss}^{fs}$	Tasa de esfuerzo normal en la fibra en la dirección $\mathbf{s}$ .
$\sigma_u^{fr}$	Esfuerzo en el límite elástico para el modelo de fibra deformable – deslizante en la dirección $\mathbf{r}$ .
$\sigma_u^{fs}$	Esfuerzo en el límite elástico para el modelo de fibra deformable – deslizante en la dirección $\mathbf{s}$ .
$\sigma_y^f$	Esfuerzo de fluencia del acero de las fibras.
$\sigma^m$	Tensor de esfuerzo en la matriz.
$\dot{\sigma}^m$	Tasa de esfuerzo en la matriz.
$\bar{\sigma}^m$	Tensor de esfuerzo efectivo en la matriz.
$\bar{\sigma}_i^m$	Esfuerzo efectivo de la matriz en la dirección principal $i$ .
$\sigma_{rr}^m$	Esfuerzo normal en la matriz en la dirección $\mathbf{r}$ .
$\sigma_{ss}^m$	Esfuerzo normal en la matriz en la dirección $\mathbf{s}$ .
$\sigma_{u(t)}^m$	Resistencia a tracción de la matriz.
$\sigma_{u(c)}^m$	Resistencia a compresión de la matriz.
$\sigma_{rr}, \sigma_{ss}, \sigma_{rs}$	Componentes de esfuerzo del material compuesto en la base $\mathbf{rs}$ .

Símbolo	Término
$\sigma^c$	Esfuerzo en el material componente c.
$\tau$	Esfuerzo cortante en el material compuesto.
$\dot{\tau}$	Tasa de esfuerzo cortante en el material compuesto.
$\tau^{f\tau}$	Esfuerzo cortante medio en la fibra.
$\tau_{rs}^f$	Esfuerzo cortante en fibras en el plano $rs$ .
$\dot{\tau}_{rs}^f$	Tasa del esfuerzo cortante en fibras en el plano $rs$ .
$\tau_y^f$	Esfuerzo cortante equivalente en la fibra asociada a la acción pasador.
$\tau_{rs}$	Esfuerzo cortante en el material compuesto en el plano $rs$ .
$\dot{\tau}_{rs}$	Tasa del esfuerzo cortante en el material compuesto en el plano $rs$ .
$\tau_{rs}^m$	Esfuerzo cortante en la matriz en el plano $rs$ .
$\dot{\tau}_{rs}^m$	Tasa del esfuerzo cortante en la matriz en el plano $rs$ .
$\phi$	Parámetro de amplificación de la norma de deformaciones del modelo de daño con tracción y compresión diferenciados.
$\varphi$	Función continua arbitraria.
$\varphi^f$	Orientación de una fibra fuera del plano de análisis.
$\psi$	Energía libre en el modelo de daño de la matriz.
$\Omega$	Dominio del sólido.
$\Omega^+, \Omega^-$	Parte del dominio delimitada por el contorno y la superficie de discontinuidad, en el sentido del vector $\mathbf{n}$ , y contrario a él, respectivamente.
$\mathcal{G}_i$	Coeficiente que representa el promedio de las posibles proyecciones de una serie de fibras localizadas sobre un mismo plano a lo ancho del elemento.

<b>Símbolo</b>	<b>Término</b>
$g_Z$	Coficiente que representa el promedio de las posibles proyecciones de una fibra localizada a una distancia $Z_{CM}$ de la formaleta.
$[\mathbf{B}^{(e)}], [\mathbf{G}^{(e)}]$	Matrices deformación – desplazamiento.
$[C_{tg}^{dr}]$	Matriz del operador constitutivo tangente del modelo de fibra deslizante paralela al vector $\mathbf{r}$ , en notación de Voigt.
$[C_{tg}^{ds}]$	Matriz del operador constitutivo tangente del modelo de fibra deslizante paralela al vector $\mathbf{s}$ , en notación de Voigt.
$[C_{tg}^{f\tau}]$	Matriz del operador constitutivo tangente del modelo de la acción pasador, en notación de Voigt.
$[C_{tg}^m]$	Matriz del operador constitutivo tangente de la (componente) matriz en notación de Voigt.
$[C_{tg}]$	Matriz del operador constitutivo tangente del material compuesto en notación de Voigt.
$\{\dot{\mathbf{F}}_{ext}^{(e)}\}$	Vector de la tasa de fuerzas externas en el elemento finito.
$[\mathbf{K}^{(e)}]$	Matriz de rigidez del elemento finito.
$[Q_{tg}^{dr}]$	Matriz de localización del modelo de fibra deslizante paralela al vector $\mathbf{r}$ .
$[Q_{tg}^{ds}]$	Matriz de localización del modelo de fibra deslizante paralela al vector $\mathbf{s}$ .
$[Q_{tg}^{f\tau}]$	Matriz de localización del modelo de la acción pasador.
$[Q_{tg}^m]$	Matriz de localización de la (componente) matriz.
$[Q_{tg}]$	Matriz de localización del material compuesto.
$\{\dot{\mathbf{r}}^{(e)}\}$	Vector de la tasa de fuerzas residuales asociado a los grados de libertad del salto del desplazamiento en el elemento finito.
$\{\dot{\mathbf{R}}^{(e)}\}$	Vector de la tasa de fuerzas residuales asociado a los grados de libertad compatibles en el elemento finito.
$\dot{\mathbf{u}}$	Salto de la tasa de desplazamiento en un punto de material compuesto.

---

<b>Símbolo</b>	<b>Término</b>
$\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\}$	Vector de la tasa de deformación del material compuesto en notación de Voigt.
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$	Diferencia entre la tasa de deformación dentro y fuera de la superficie discontinuidad.
$\{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\}$	Vector de la tasa de esfuerzo del material compuesto en notación Voigt.
$\{\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{f\tau}\}$	Vector de la tasa de esfuerzo del modelo de la acción pasador, escrito en notación Voigt.
$\{\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{fr}\}$	Vector de la tasa de esfuerzo de las fibras en dirección $\mathbf{r}$ , escrito en notación Voigt.
$\{\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{fs}\}$	Vector de la tasa de esfuerzo de las fibras en dirección $\mathbf{s}$ , escrito en notación Voigt.
$\{\dot{\boldsymbol{\sigma}}^m\}$	Vector de la tasa de esfuerzo de la matriz en notación de Voigt.
$\{\bar{\boldsymbol{\eta}}\}$	Vector de desplazamientos regulares.

\*Página intencionalmente en blanco

## Abreviaturas

### Abreviatura Término

---

<i>ACI</i>	American Concrete Institute – Instituto Americano del Concreto
<i>ASTM</i>	American Society for Testing and Materials – Sociedad Americana para Pruebas y Materiales
<i>CEN</i>	Comité Européen de Normalisation – Comité Europeo de Normalización
<i>CM</i>	Centro de Masa
<i>CNR</i>	Consiglio Nazionale delle Ricerche – Consejo Nacional de Investigación
<i>CSDA</i>	Continuum Strong Discontinuity Approach - Discontinuidades fuertes de continuo
<i>CTOD</i>	Crack Tip Opening Displacement - Apertura de la punta de la fisura
<i>FDA</i>	Functional Data Analysis – Análisis de Datos Funcionales
<i>FIER</i>	Fiber Intrinsic Efficiency Ratio - Relación de eficiencia intrínseca de la fibra
<i>FRC</i>	Fiber Reinforced Concrete - Concreto reforzado con fibras
<i>HPFRCC</i>	High Performance Fiber Reinforced Cement Composites - Compuestos Cementicios de Alto Desempeño Reforzados con Fibras
<i>JSCE</i>	Japan Society of Civil Engineers – Sociedad Japonesa de Ingenieros Civiles
<i>SCFRC</i>	Self-Compacting Fibre Reinforced Concrete - Concreto Reforzado con Fibras Auto-Compactante
<i>SFRC</i>	Steel Fiber Reinforced Concrete - Concreto Reforzado con Fibras de Acero
<i>SIFCON</i>	Slurry Infiltrated Fiber Concrete - Concreto de Fibras Infiltradas con Lechada
<i>TM</i>	Tamaño de malla

\*Página intencionalmente en blanco.

# Introducción

El concreto de cemento hidráulico, uno de los materiales de construcción más usados en el mundo (Meyer, 2002), presenta un comportamiento cuasi-frágil y una reducida resistencia a los esfuerzos de tracción y cortante, en comparación con su resistencia a la compresión. Estas características llevaron al desarrollo de estructuras de concreto reforzado, generalmente con barras de acero corrugado dispuesto principalmente para transmitir los esfuerzos de tracción a través de las fisuras del concreto y brindarle ductilidad al material después del inicio del daño (Park & Paulay, 1975).

Sin embargo, las dificultades para el armado del refuerzo en secciones reducidas, lo dispendioso y delicado de esta labor que convencionalmente es realizada por mano de obra no calificada y la vulnerabilidad que presenta el acero de refuerzo a la corrosión, siguen siendo un reto a la ingeniería.

Otra técnica que ha sido el resultado de la evolución de prácticas ancestrales, consiste en agregar fibras de diversos materiales como polímeros y metales, dentro de la mezcla de concreto con la misma finalidad que la del uso de las barras de refuerzo. De acuerdo con Rodríguez y Prado (1984) la adición de fibras cortas de acero al concreto fue reportada inicialmente por Graham en 1911, pero solo hasta 1920 Griffith dió inicio a una larga lista de investigaciones sobre el comportamiento del material. En la actualidad se estima que alrededor del 50% del concreto reforzado con fibras cortas empleado en la construcción ha sido dosificado usando fibras de acero.

El interés en el desarrollo de materiales compuestos para ser usados en aplicaciones tecnológicas empezó a principios de los sesentas (Herakovich, 1998). En esa misma década el uso de fibras de acero empezó a ser aceptado como una alternativa para el reemplazo de las fibras de asbesto, debido principalmente a los riesgos que este último genera en la salud humana (ACI, 2009). Desde entonces la demanda de este material se

ha incrementado conforme la experiencia y el conocimiento al respecto del mismo han ido creciendo. De esta forma el número de aplicaciones del Concreto Reforzado con Fibras de Acero – *Steel Fiber Reinforced Concrete* (SFRC) aceptadas por la comunidad de ingenieros, se ha extendido a diferentes tipos de obras civiles como losas para usos industriales y aeroportuarios, silos para misiles, puentes, presas, recubrimientos de túneles y contención de taludes, entre otros (ACI, 2009).

Simultáneamente, durante estas últimas décadas, se han desarrollado investigaciones con el fin de estudiar el comportamiento mecánico del SFRC como material compuesto solicitado especialmente a tracción y a cortante (Prós, 2011). Así mismo otras investigaciones han hecho énfasis en el mecanismo de interacción entre las fibras y la matriz de concreto (ACI, 2009).

En estos trabajos se han identificado dos aspectos importante. Primero, el comportamiento del material compuesto depende de las propiedades mecánicas de la matriz de concreto y de las fibras de acero, de la forma de las fibras, de su cuantía volumétrica, de su orientación y distribución dentro de la matriz. También depende de la adherencia entre las fibras y la matriz de concreto, siendo este factor un resultado de la combinación de los demás (Banthia, 1990).

Segundo, aunque podrían ejercerse exhaustivos controles de calidad sobre la mayoría de los parámetros para mantenerlos casi constantes, la orientación y distribución de las fibras dentro de la matriz tienden a producir una alta dispersión en los resultados experimentales, principalmente en el rango inelástico (Stähli & van Mier, 2007) (Ferrara & Meda, 2006).

Algunos modelos numéricos deterministas intentan predecir el comportamiento del SFRC, considerando que los parámetros de los materiales componentes son constantes (Soe Htut, 2010). Los resultados obtenidos han sido en general satisfactorios; sin embargo, solo describen la respuesta promedio del comportamiento real de la estructura, sin identificar su dispersión estadística.

Lo anterior ha motivado a desarrollar un modelo estocástico, que pueda ser implementado en el método de los elementos finitos, capaz de predecir un rango de respuestas mecánicas de una estructura construida con SFRC. Tal modelo se basa en la formulación

de los modelos deterministas, pero considera la variabilidad de algunas propiedades de las fibras. Esto permite identificar un intervalo de confianza de la respuesta estructural.

A continuación se presentan los objetivos de la tesis, así como una explicación de la metodología con que fue desarrollada la investigación y la forma como se encuentran ordenados los contenidos de la disertación en los capítulos.

## **OBJETIVOS**

El objetivo general de este trabajo es desarrollar un modelo numérico que describa el comportamiento inelástico de elementos estructurales de Concreto Reforzado con Fibras Cortas de Acero, bajo la acción de cargas estáticas, en condición plana de esfuerzos y considerando deformaciones infinitesimales, cumpliendo las siguientes metas parciales:

- Desarrollar un modelo constitutivo para el Concreto Reforzado con Fibras Cortas de Acero a partir de modelos constitutivos particulares de los materiales componentes, incluyendo los efectos de interacción entre ellos.
- Implementar el modelo desarrollado, en el marco del método de los elementos finitos, a través de un análisis no lineal y considerando deformaciones infinitesimales.
- Describir la formación y propagación de fisuras en el Concreto Reforzado con Fibras Cortas con base en la mecánica computacional de la fractura.
- Obtener los campos de los desplazamientos, de las deformaciones y de los esfuerzos, considerando un comportamiento inelástico y un proceso de fractura del material compuesto para diferentes porcentajes de fibra.

## **ESTRUCTURA DE LA TESIS**

En el capítulo 1 se presenta el estado del conocimiento del Concreto Reforzado con Fibras cortas de Acero, el cual se divide en dos secciones; la primera está enfocada al estudio experimental del comportamiento mecánico del material y la segunda presenta algunas

aproximaciones a la modelación numérica de su comportamiento mecánico, incluyendo la fisuración del mismo. El capítulo 2 describe las propiedades geométricas y mecánicas de los tipos de fibras de acero más comunes. Así mismo, indica la influencia de la cuantía volumétrica, la distribución y la orientación de las fibras dentro de la matriz, en el mecanismo de deslizamiento de las fibras embebidas en la matriz de concreto.

En el capítulo 3 se presenta la formulación del modelo numérico desarrollado para el SFRC y la implementación del mismo en el Método de los Elementos Finitos para solucionar el problema mecánico de forma determinista. Este capítulo abarca: las consideraciones básicas de la aproximación empleada para modelar el material compuesto, la descripción de los modelos constitutivos de los componentes y del compuesto, la cinemática del material compuesto mediante la metodología de las discontinuidades fuertes del continuo, la descripción de los elementos finitos usados para la implementación del modelo y la descripción de la componente estocástica incluida en el mismo. En el capítulo 4 se describen los elementos de la estadística funcional utilizados en el modelo estocástico y la implementación de tal modelo para describir el comportamiento del material.

El Capítulo 5 contiene un análisis de la sensibilidad de algunas variables del modelo, involucradas en la respuesta estructural del material, tales como el incremento del desplazamiento impuesto, el tamaño de los elementos finitos, el número de eventos simulados, el coeficiente de isotropía, la cuantía volumétrica de fibras y la curva de arrancamiento fibra-matriz.

En el Capítulo 6 se pueden apreciar algunos ejemplos de validación y aplicación del modelo numérico, en los cuales se describe el proceso de fractura de dos ensayos experimentales y se predice el comportamiento un elemento estructural. Finalmente, en el Capítulo 7 se indican las conclusiones y las recomendaciones para futuros trabajos, obtenidas a partir del análisis de los resultados en la presente tesis.

## **RESULTADOS**

En esta tesis se desarrolló la formulación de un modelo numérico bidimensional capaz de describir el proceso de fractura en los miembros estructurales de concreto reforzado con fibras cortas de acero (SFRC), a partir de la cuantía volumétrica de las fibras y las propiedades mecánicas tanto del hormigón como de la fibra deslizante-deformable. El

modelo se implementó en el método de los elementos finitos con elementos triangulares de deformación constante enriquecidos en el campo de los desplazamientos.

Para el modelo se desarrolló un concepto de coeficiente de isotropía para el SFRC, que permite determinar la menor relación entre el aporte de las fibras en una dirección y las fibras en la dirección ortogonal en un punto de material compuesto. Se realizó además el cálculo de un factor de participación de las fibras en el plano de análisis, considerando la influencia de la relación entre la longitud de las fibras y el espesor del elemento.

Mediante la aplicación del modelo, es posible predecir una colección de respuestas posibles para un elemento estructural de SFRC, como una función de la distribución y orientación de las fibras dentro del mismo, las cuales pueden variar aleatoriamente en cada simulación o evento.

Mediante el uso de la estadística funcional, a partir del concepto de profundidad de banda y usando un proceso de Bootstrap se obtienen los intervalos de confianza para la respuesta estructural. Así mismo es posible obtener la función mediana para los resultados.

El modelo fue validado mediante la comparación con resultados de ensayos experimentales, encontrando que la respuesta estructural y los patrones de fisuración obtenidos de la simulación numérica son satisfactorios.

## **LIMITACIONES Y ALCANCE**

En la formulación del modelo se introducen parámetros que se desarrollaron para ser usados en la modelación bidimensional de miembros. La extensión del modelo al espacio tridimensional requiere revisar el planteamiento de los mismos.

El coeficiente de isotropía desarrollado para el modelo, se consideró constante en la extensión de cada uno de los miembros estructurales simulados.

Para el modelo de fibra deformable – deslizante se considera que las fibras se encuentran centradas respecto a la fisura. Adicionalmente se desprecia el efecto de la inclinación de la fibra respecto a la dirección de la fisura en la resistencia al arrancamiento obtenida experimentalmente.

\*Página dejada intencionalmente en blanco.

# **1. Generalidades del concreto reforzado con fibras cortas de acero**

El concreto reforzado con fibras cortas de acero (SFRC) es un material compuesto conformado por un conjunto de fibras cortas de acero embebidas en una matriz de concreto simple. El SFRC se utiliza en la construcción de túneles, losas industriales y pistas de aeropuertos, y en general en aplicaciones de concreto masivo como presas, silos y tanques. La adición de fibras de acero proporciona un incremento en la ductilidad del concreto y una reducción de la apertura de las fisuras producidas por tracción.

En este capítulo se presenta un recuento del estado del conocimiento, en relación al comportamiento mecánico del SFRC, a la modelación numérica del proceso de fisuración tanto del concreto simple como del concreto reforzado, bien sea con barras largas o con fibras cortas de acero y a la variabilidad del comportamiento mecánico de este tipo de materiales.

## **1.1 Comportamiento mecánico del SFRC**

Las propiedades de mayor importancia para un amplio rango de aplicaciones de materiales en estructuras son la resistencia a la tracción y al cortante en combinación con la ductilidad requerida para responder en el rango inelástico ante sollicitaciones cuando los límites de resistencia han sido excedidos. Generalmente los materiales cementicios como el concreto presentan un comportamiento cuasi-frágil durante su falla, relacionado principalmente con su debilidad para resistir esfuerzos de tracción y cortante. Cerca de la resistencia por

tracción, estos materiales exhiben la formación de fisuras y la rápida propagación de las mismas hasta ocasionar el colapso

Para prevenir la falla frágil e incrementar la ductilidad del material para resistir esfuerzos de tracción es necesario disponer de un mecanismo apropiado de transmisión de fuerzas a través de la fisura. Lo anterior se puede lograr con un material compuesto conformado al adicionar fibras de acero dentro de la matriz de concreto (Soe Htut, 2010). El uso de este material se ha incrementado significativamente en los últimos años, porque permite un control de la apertura y del deslizamiento entre las caras de cada fisura del concreto.

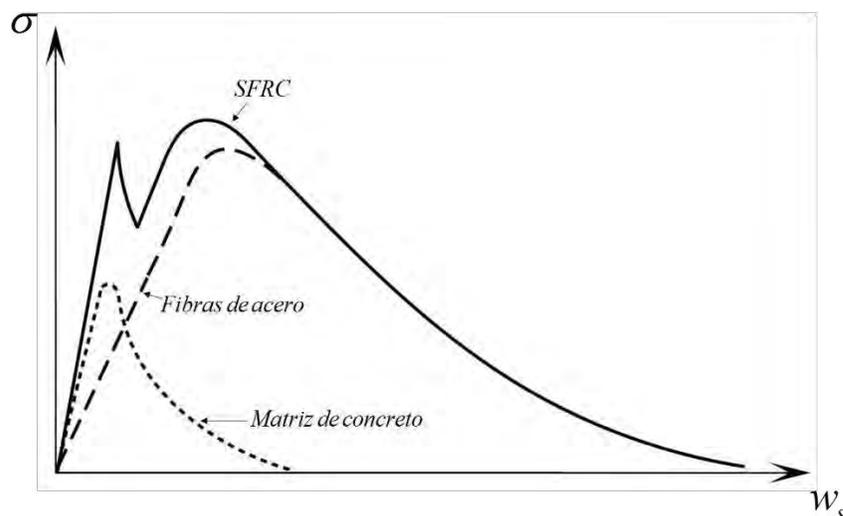
El comportamiento mecánico de los compuestos discontinuos, aquellos en los cuales se cuenta con fibras discontinuas embebidas en una matriz, está determinado tanto por las propiedades de los componentes y de la interface fibra matriz, como por la longitud, orientación y dispersión de las fibras (Soulioti, et al., 2011). En particular, el concreto reforzado con fibras cortas de acero SFRC puede clasificarse como un material compuesto discontinuo, debido precisamente a que cada fibra, a diferencia de las barras de acero usadas convencionalmente, tiene una región de influencia limitada por su corta longitud. En el caso del SFRC, la forma, y la esbeltez de las fibras también influyen en su comportamiento, especialmente en el rango inelástico.

Las fibras contribuyen principalmente a la respuesta posterior a la fisuración mediante la transmisión de esfuerzos entre las caras de las fracturas y oponiéndose a la apertura de las mismas, lo que a su vez depende del mecanismo de adherencia de la interface fibra-matriz (Naaman, 2007) (Nofal, 1997). En consecuencia, la resistencia residual y la disipación de energía del material en el rango inelástico se incrementan (Suwaka & Fukuyama, 2006) (Gopalaratnam, 1995).

En un ensayo de tracción, se observa que la relación entre el esfuerzo normal en el SFRC,  $\sigma$ , y la apertura de la fisura,  $w_s$ , puede considerarse como la suma de los aportes del concreto y de las fibras (figura 1-1). Mientras que el concreto presenta ablandamiento después de la fisuración, el esfuerzo aportado por las fibras va incrementando a medida que la fisura se abre, hasta que se alcanza el valor pico de resistencia al arrancamiento y posteriormente se presenta un ablandamiento relacionado con la pérdida paulatina de adherencia entre la fibra y la matriz.

La inclusión de fibras de acero en las matrices cementicias tiene como resultado general un pequeño aumento tanto en la resistencia pico, y un incremento de la ductilidad posterior a la fisuración del concreto, cuando el mismo está solicitado a esfuerzos de tracción (Düzgün, et al., 2005) (Lofgren, et al., 2005). El comportamiento del concreto a flexión ha sido tal vez uno de los más estudiados para este material compuesto (Altun, et al., 2007) (Taylor, et al., 1997) (Yazici, et al., 2007) (Düzgün, et al., 2005) (Barros & Cruz, 2001) (Johnston & Skarendahl, 1992) (Antonaci, et al., 2006), (Soulioti, et al., 2011) (Choi & Lee, 2003) (Barros, et al., 2005). Una viga de SFRC conserva su integridad estructural mientras se forman múltiples fisuras, mientras que en las vigas de concreto simple se forma una única fisura que establece su colapso (ACI, 2009).

**Figura 1-1:** Relación esfuerzo-apertura de una fisura en FRC



El efecto de la inclusión de las fibras de acero en la resistencia a la compresión del concreto por lo general representa pequeños incrementos (Yazici, et al., 2007) (Düzgün, et al., 2005) (Lamus & Segura, 2013), especialmente cuando se tienen cuantías volumétricas de fibras inferiores al 2% (Williamson, 1974), y dependiendo de la forma, el tamaño y la cantidad de fibras pueden oscilar entre el 4% y 19% (Yazici, et al., 2007). Sin embargo, la adición de fibras puede incrementar el rango de deformaciones admisibles por el concreto en compresión antes de la falla. (ACI, 1993).

En cuanto al comportamiento del SFRC al corte directo, la investigación ha sido limitada (Van de Loock, 1987) (Valle & Buyukozturk, 1993) (Khaloo & Kim, 1997) (Lee & Foster,

2006). Sin embargo, en general puede concluirse que tanto la resistencia como la tenacidad del material ante este tipo de solicitaciones, es proporcional al contenido de fibras (Appa Rao & Sreenivasa Rao, 2009).

Los resultados experimentales del comportamiento posterior a la fisuración del SFRC presentan una dispersión importante, reflejada en coeficientes de variación considerables. Tal dispersión depende de la variabilidad de las propiedades mecánicas de la matriz y las fibras, pero principalmente del volumen, distribución y orientación de estas últimas, producto de los métodos de mezcla y los métodos de colocación (Oliveira de Barros, 1995) (Kooiman, 2000).

## **1.2 Modelación numérica del proceso de fisuración del concreto simple y reforzado**

Se han desarrollado diversas aproximaciones para representar del comportamiento del concreto simple y del concreto reforzado, tanto en forma analítica, como numérica. Algunas de ellas se enfocan en predecir su resistencia, mientras que otras describen el comportamiento posterior a la fisuración del material. A continuación se indican algunos de aquellos modelos numéricos del concreto simple y reforzado, que han sido implementados en el método de los elementos finitos.

### **1.2.1 Modelos de la mecánica de la fractura para el concreto simple**

La teoría de fallo del material, dada por la mecánica de la fractura, identifica la formación de una fisura mediante un criterio de energía, asociado a la fluencia o a la resistencia última del material. Así mismo, establece una superficie de propagación de la fractura en el interior del sólido (Bazant & Planas, 1998).

Para la mecánica de la fractura, el proceso de fractura correspondiente a la formación, crecimiento e incluso la estabilidad de una discontinuidad en el material, puede representarse mediante el uso de entidades discretas aisladas o embebidas dentro del

continuo. De esta forma, la modelación de dicho proceso puede describirse usando modelos de fractura discreta o modelos de fractura distribuida.

Los modelos de fractura discreta tienen por objetivo simular el inicio y propagación de fracturas dominantes; en cambio, los modelos de fractura distribuida suponen la formación de un número considerable de pequeñas fisuras en una misma zona, que podrían representar una fisura dominante en etapas de carga avanzadas. La relación constitutiva del material describe la formación de pequeñas fisuras como una degradación de la rigidez. Por otra parte, algunas metodologías permiten establecer un vínculo entre los dos modelos.

- Modelos de fisura discreta – *Discrete crack approach*

En esta aproximación, las caras de una fisura corresponden a dos superficies inicialmente superpuestas que se separan progresivamente con la aplicación de la carga. Tal separación de las caras de la fisura genera un salto en el campo del desplazamiento y un valor no acotado del campo de la deformación, denominado *discontinuidad fuerte*; sin embargo, los vectores tracción que actúan sobre las caras de la fisura tienen la misma magnitud y dirección, con sentidos opuestos. En estos modelos se representa el comportamiento cohesivo del material mediante una relación entre decrecimiento del esfuerzo y el aumento de la separación normal a las caras de la fisura (Planas, et al., 2003).

Los primeros modelos de este tipo requerían fisuras discretas preexistentes (Dugdale, 1960) (Barenblatt, 1962), posteriormente se desarrolló el modelo de fisura ficticia permitiendo la formación y propagación de fisuras en cualquier lugar del sólido (Hillerborg, et al., 1976) (Hillerborg, 1985). La aplicación de este tipo de modelos para representar el proceso de fractura del concreto reforzado con fibras incluyen la rigidez y resistencia axial de las fibras que atraviesan las fisuras y el deslizamiento entre la fibra y la matriz (Li, 1992) (Li, et al., 1993) (Bartos & Duris, 1994) (Kullaa, 1994) (Lange - Kornbak & Karihaloo, 1998).

- Modelos de fisura distribuida – *Smearred crack model*

En los modelos de fisura distribuida se supone una distribución uniforme de pequeñas fisuras en una región o banda, en la cual se presenta un salto en el campo de las deformaciones mientras el campo de los desplazamientos se mantiene continuo. Este comportamiento cinemático se denomina discontinuidad débil.

En el proceso de fractura del concreto simple se considera que el esfuerzo normal se reduce al tiempo que aumentan las deformaciones inelásticas, produciendo un ablandamiento del material o una degradación de su rigidez.

Comparando los modelos anteriores, algunos autores indican que los modelos de fisuración distribuida se pueden interpretar como un modelo de fisura discreta, en el cual la apertura de fisura se distribuye en una banda alrededor de la fractura (Planas, et al., 2003) (Mora, 2013).

- Aproximación de la mecánica del continuo – *Continuum mechanics approach*

En la aproximación básica de la mecánica del continuo, la localización de la deformación provocada por la formación de una fisura, conserva un campo continuo de la deformación y del desplazamiento. Lo anterior permite aplicar la misma ecuación constitutiva del material en cualquier lugar del sólido (Oliver, 1996a). Sin embargo, entre las caras de una fisura se induce un salto en el campo de los desplazamientos y valores no acotados de la deformación. Para representar este fenómeno, algunos modelos de este tipo, como el método de deformaciones mejoradas asumidas (*assumed enhanced strain methods*) (Oliver, 1996a) (Simó & Rifaí, 1990), definen el campo de la deformación como la suma de la parte continua convencional y la parte asociada a la discontinuidad del desplazamiento.

- Implementación en el método de los elementos finitos

Una de las formas de implementar los modelos de fractura en el método de los elementos finitos, consiste en enriquecer los modos de desplazamiento continuo de los elementos finitos convencionales con desplazamientos discontinuos adicionales. Se

pueden distinguir dos familias de aproximación dependiendo del soporte de los modos de desplazamiento discontinuo enriquecido (Oliver, et al., 2006). El *método de los elementos finitos con enriquecimiento elemental* o E-FEM establece que el soporte de cada modo está dado por los elementos finitos (Alfaiate, 2003).

En cambio, el *método de los elementos finitos extendidos* o X-FEM indica que el soporte de cada modo está dado por funciones de forma nodales, es decir, las funciones de forma de los elementos que rodean un nudo específico (Belytschko, et al., 2001) (Sukumar, et al., 2000) (Benvenuti, 2008). Esta técnica se ha desarrollado en el contexto del método de la partición de la unidad (Melenk & Babuska, 1996).

### **1.2.2 Modelos de la mecánica de la fractura para concreto reforzado con barras**

El modelo constitutivo para concreto reforzado con barras planteado por Feenstra & de Borst (1995) está basado en la teoría de mezclas de materiales compuestos, la cual establece que el total de la resistencia es asumida por ambos componentes, lo cual implica que el comportamiento durante la fisuración se obtenga mediante la superposición de las rigideces del concreto simple, del refuerzo y de la interfaz. El comportamiento del concreto simple tanto en tracción como en compresión se describe mediante un modelo de daño continuo, en donde las fisuras distribuidas son controladas por la energía de fractura. El modelo de energía de fractura desarrollado para concreto simple es igualmente aplicado para el concreto reforzado, suponiendo que la energía total liberada corresponde a la energía de fractura de una fisura actuando en un área tributaria que depende de una longitud equivalente y la separación promedio entre fisuras determinada en función del diámetro de la barra, el recubrimiento del concreto y la cuantía (modelo del código CEB-FIP 1990).

Vecchio y colaboradores en (Vecchio, 2000), (Vecchio, 2001), (Vecchio & Collins, 1986), (Selby & Vecchio, 1997) formularon e implementaron un modelo constitutivo para el concreto reforzado en el marco del método de los elementos finitos. Dicho modelo describe el comportamiento de la fractura del concreto reforzado mediante una formulación híbrida entre el modelo de rotación de la fisura y el modelo de fractura fija (Jirásek & Zimmermann, 1998). El modelo incluye un análisis de compatibilidad, equilibrio y

relaciones constitutivas que permiten la reorientación de las deformaciones y esfuerzos principales mediante un tratamiento adecuado del esfuerzo cortante en la superficie de fisuración.

En el trabajo de Kwak & Filippou (1990) el acero de refuerzo y el concreto están representados por modelos de material separados, que se combinan junto con un modelo de la interacción presente en la interfaz a través de enlaces de deslizamiento, para describir el comportamiento del material compuesto. El comienzo de la fractura del concreto se describe por dos superficies de falla en el espacio biaxial de esfuerzos y una superficie de falla en el espacio biaxial de deformaciones. El concreto se asume como un material elástico lineal para estados de esfuerzo que se encuentran dentro de la superficie inicial de carga. Para esfuerzos fuera de esta superficie el comportamiento del hormigón se describe por un modelo ortotrópico no lineal, cuyos ejes de ortotropía son paralelos a las direcciones principales de deformación. La relación esfuerzo-deformación del concreto se deriva de las relaciones uniaxiales equivalentes en los ejes de ortotropía. El comportamiento de la fractura en el concreto es representado por un sistema de fisuras ortogonales, que siguen las direcciones principales de deformación y están girando de este modo durante la historia de carga. La fractura o fisuración del concreto se produce cuando las deformaciones se propagan finalmente fuera de la superficie de espacio biaxial de deformaciones.

En el trabajo propuesto por Stramandinoli & La Rovere (2008) se aplica un modelo constitutivo para elementos de concreto reforzado que tiene en cuenta el comportamiento elástico a tracción del concreto entre las fisuras, efecto conocido como *tension-stiffening*. En el modelo, la curva de esfuerzo-deformación a la tracción del concreto muestra una pérdida exponencial de resistencia en el intervalo posterior a la fractura, definida por un parámetro que depende de la cuantía y de la relación entre módulos de elasticidad del acero y del concreto. Este parámetro se derivó tomando como base el modelo de *tension-stiffening* CEB.

Para realizar una formulación bidimensional del proceso de fractura del concreto reforzado, Linero, Oliver, & Huespe (2008) plantean un modelo constitutivo del material compuesto mediante la teoría de mezclas, asignando a cada material componente un modelo constitutivo particular. Para el concreto simple, se usa un modelo de daño de tracción y

compresión diferenciado (Oliver, et al., 1990); y para el acero, un modelo de plasticidad unidimensional adoptado de los trabajos de Simó & Hughes (1998). El modelo encuentra el instante y la dirección de la propagación de la fisura a través de la metodología de discontinuidades fuertes de continuo (Oliver, 1996a). Además cuenta con un algoritmo de trazado de las líneas de discontinuidad (Samaniego, 2002) y se considera un material no lineal y deformaciones infinitesimales.

### **1.2.3 Modelos de la mecánica de la fractura para concreto reforzado con fibras**

Oliveira (1995) representó el proceso de fractura del concreto reforzado con fibras (FRC) en estado plano de esfuerzos, mediante un modelo de fisura distribuida rotatoria (Gupta & Akbar, 1984). Él implementó un modelo constitutivo no lineal del material, considerando la descomposición aditiva de la deformación elástica e inelástica y, por otro lado, separando el proceso de fractura del concreto reforzado con fibras y el comportamiento mecánico de las barras de refuerzo convencional (Vecchio & Collins, 1986). El modelo fue validado mediante la comparación de los resultados numéricos con curvas experimentales.

Nofal (1997), combinó un modelo de daño y la teoría general de la plasticidad, que incluye degradación de la rigidez y deformación plástica en descarga. Para reproducir el proceso de fractura, consideró una distribución aleatoria de micro-vacíos elípticos en la matriz de concreto simple. El comportamiento de las fibras se representó con un modelo de plasticidad unidimensional, incluyendo el deslizamiento con respecto a la matriz de concreto y la fluencia del acero. En este modelo, las fibras se distribuyen de forma aleatoria, y la matriz de rigidez se calcula a partir de la integral de una función de probabilidad del ángulo de orientación de la fibra en el plano.

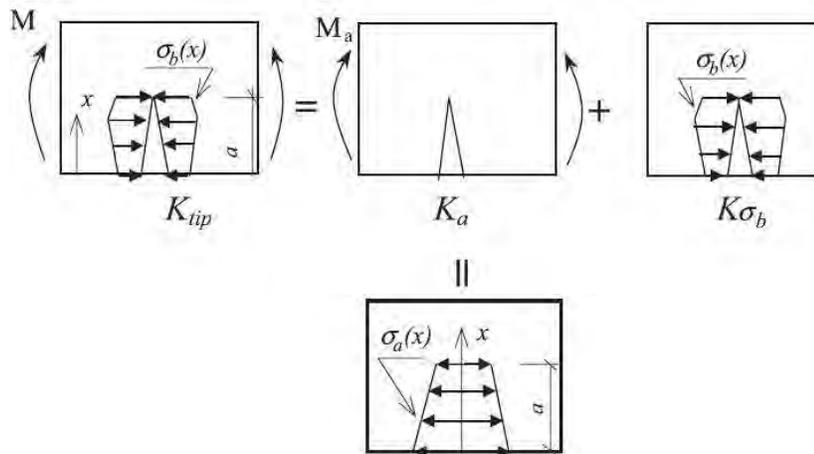
Peng y Meyer (2000) elaboraron un modelo simplificado, basado en la mecánica de daño del continuo, que permite describir el comportamiento inelástico del concreto reforzado con fibras cortas distribuidas aleatoriamente. Para esto adoptaron un modelo escalar de daño. El efecto de las fibras en la reducción del daño se toma en cuenta mediante un parámetro de daño dependiente de la cuantía volumétrica de fibras.

En los trabajos de Li y Li (2001), la ecuación constitutiva del material compuesto se representa mediante modelos independientes de daño continuo unidimensional, tanto de la matriz de concreto como de las fibras, incluyendo los efectos del deslizamiento entre la fibra y la matriz. En este modelo el módulo de elasticidad del material compuesto es igual a la suma de los módulos de elasticidad del concreto y del acero, ponderados por los factores de participación volumétrica. El conjunto de fibras de orientación aleatoria se representa mediante una componente isotrópica, afectada por la participación en el plano normal a la dirección de las cargas.

Zhang y Li (2004) presentaron un modelo para describir la fractura elementos de FRC en modo I (apertura), correspondiente a la separación de las caras de la fisura debido a la aplicación de esfuerzos normales al plano de la misma, fundamentado en la mecánica de la fractura y usando un método de superposición para el cálculo del factor de intensidad del esfuerzo en la punta de la fractura. Los principales parámetros de entrada para el modelo son la tenacidad de la matriz y la relación entre el esfuerzo normal y la apertura de la fisura.

**Figura 1-2:** Superposición en el modelo de Zhang y Li

Fuente: (Zhang & Li, 2004)



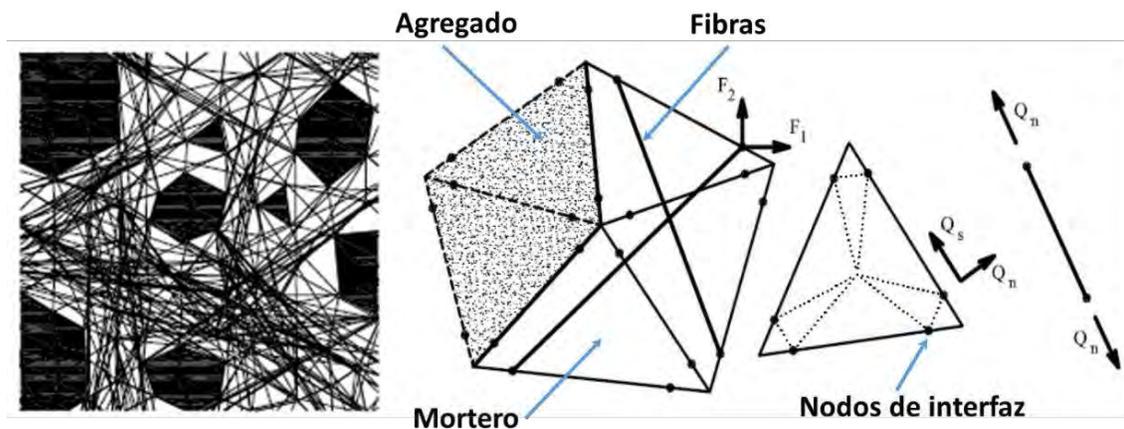
Kabele (2007) aplicó una aproximación multiescala secuencial a la modelación de la fractura en compuestos cementicios de alto desempeño reforzados con fibras. Para esto describió cada escala, identificó las subestructuras dominantes y los mecanismos físicos

de deformación asociados, asegurando la interconexión apropiada entre las diferentes escalas del modelo.

Bui (2007) desarrolla un modelo de fractura discreta implementado en el Método de los Elementos Finitos, considerando por separado el mortero, el agregado grueso y las fibras. En la modelación se emplean superelementos triangulares de seis nudos, denominados de interface (figura 1-3). Los granos de agregado grueso se representan en la malla mediante uno o varios elementos finitos, rodeados por otros elementos que representan el mortero. Las fibras son modeladas como elementos lineales interconectados con algunos nudos de interface, pertenecientes a los elementos de mortero. El inicio de la fractura se establece mediante el criterio de Mohr-Coulomb, y su evolución obedece a una ley constitutiva de ablandamiento aplicada directamente sobre los nodos de la interface mientras que los elementos triangulares conservan un comportamiento elástico.

**Figura 1-3:** Componentes de SFRC en el modelo de Bui

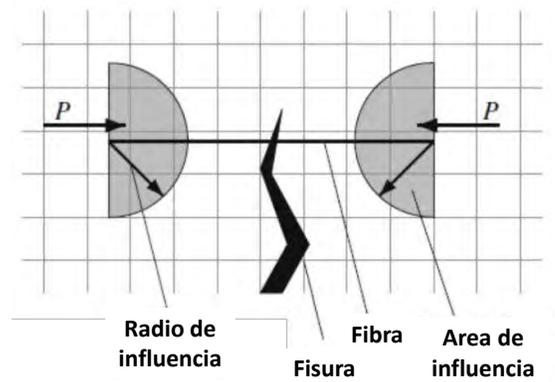
Fuente: (Bui, 2007)



Radtke, Simone, & Sluys (2010) propusieron una formulación para describir el proceso de fractura del FRC, en la cual la malla está conformada por elementos finitos de concreto simple y la acción de las fibras se representa mediante la aplicación de fuerzas discretas sobre los nudos (figura 1-4). Los puntos de aplicación de las fuerzas son determinados por la posición hipotética de los extremos de las fibras distribuidas sobre la matriz. Las fuerzas aplicadas se obtienen de ensayos de arrancamiento o a partir de modelos micro-mecánicos. El comportamiento de la matriz se representa mediante un modelo isotrópico de daño con ablandamiento exponencial.

**Figura 1-4:** Componentes de SFRC en el modelo de Radke et al.

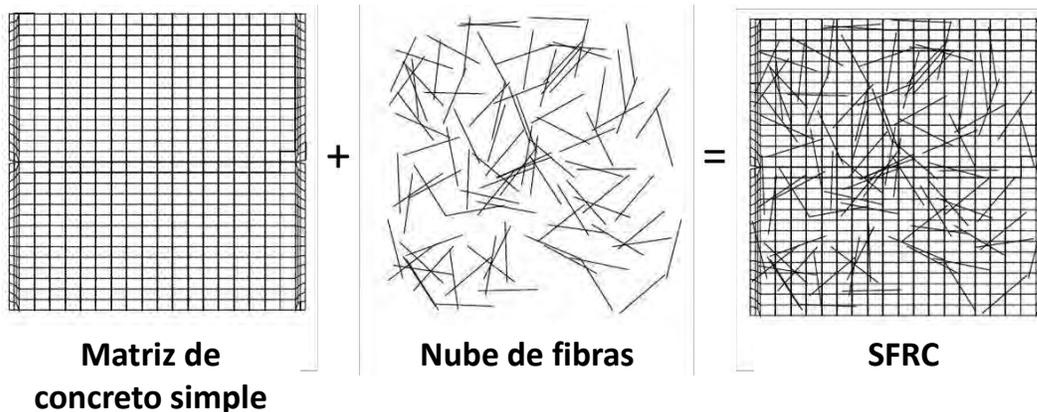
Fuente: (Radtke, et al., 2010)



El modelo numérico propuesto por Prós (2011) describe a las fibras como elementos unidimensionales discretos, cuya ubicación y orientación es aleatoria y no coincide con la malla de elementos bi- o tri-dimensionales que representan la matriz de concreto simple (figura 1-5). El acoplamiento entre las fibras y matriz se impone a través de la compatibilidad del desplazamiento. El comportamiento mecánico del concreto simple se representa mediante el modelo de daño no local de Mazars, mientras que las fibras de acero y su interacción con la matriz se describen mediante un modelo de plasticidad unidimensional. Los parámetros mecánicos de este último modelo son obtenidos de un ensayo de arrancamiento.

**Figura 1-5:** Componentes de SFRC en el modelo de Prós

Fuente: (Prós, 2011)



De los tres modelos anteriores se resalta, que en cada simulación se obtiene una distribución y orientación diferente de las fibras, presentando diferentes respuestas mecánicas del mismo ensayo.

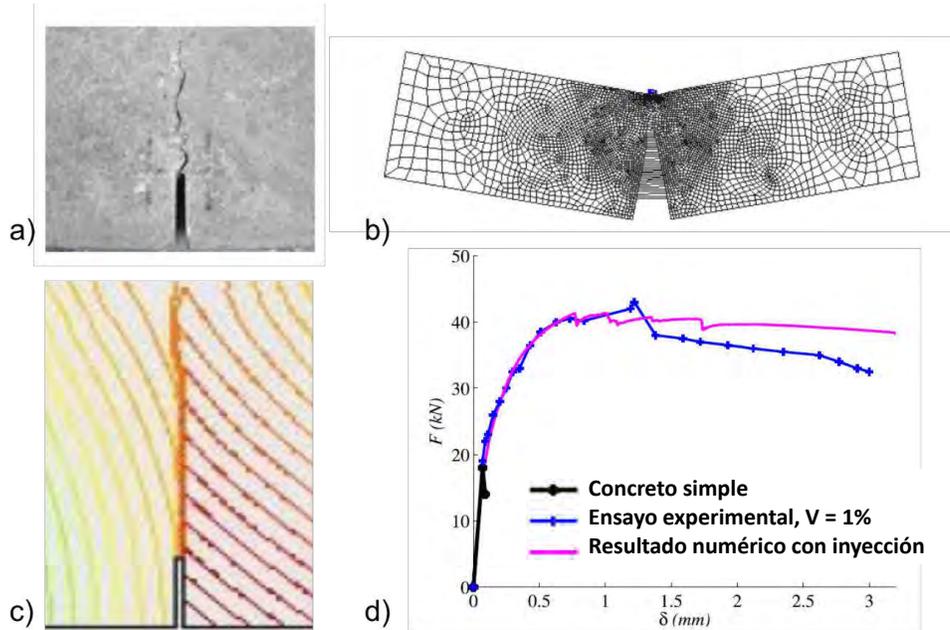
Luccioni et al. (2012) modelaron el comportamiento del SFRC mediante una modificación de la teoría de mezclas para materiales compuestos. La matriz de concreto se representa mediante un modelo acoplado de daño y plasticidad, mientras que el conjunto de fibras se representa mediante un modelo ortotrópico de plasticidad, incluyendo los efectos de pérdida de adherencia y deslizamiento en la interface. Este último simplifica el aporte unidireccional de múltiples fibras distribuidas aleatoriamente a un comportamiento ortotrópico homogéneo equivalente.

Mora (2013) desarrolló un modelo constitutivo de concreto reforzado con fibras, utilizando la teoría de mezclas y la teoría de los campos múltiples (Mariano & Stazi, 2005). Esta última establece que el material cuenta con una estructura micromórfica, en la escala meso o microscópica, que influye fuertemente en el comportamiento macroscópico del material. En la escala microscópica se identifica el comportamiento axial de las fibras y su deslizamiento con respecto a la matriz.

El comportamiento del concreto se representa mediante un modelo de daño diferenciado entre tracción y compresión (Oliver, et al., 1990). En cambio, la respuesta mecánica de las fibras y su deslizamiento con respecto a la matriz se describen con modelos de plasticidad unidimensional. El proceso de fractura del material compuesto se describe mediante el análisis de bifurcación discontinuo (Oliver, et al., 2010), (Linero, et al., 2008) y la metodología de la inyección de la deformación localizada (Dias, et al., 2011) implementada en una formulación mixta de elementos finitos.

En cada punto material se combina el comportamiento de la matriz y de varios paquetes de fibras de diferente orientación. En un ejemplo de validación de una viga de tres puntos con entalla, el concreto reforzado con fibras orientadas de forma aleatoria se representa mediante nueve paquetes de fibras de orientaciones definidas entre 0 y 90 grados, como lo indica la figura 1-6.

**Figura 1-6:** Modelación de una viga de tres puntos con entalla (Mora, 2013)  
 (a) Trayectoria experimental de la fisura, (b) Resultado de la simulación, Configuración deformada (c) Curvas de iso-desplazamiento (d) Carga aplicada contra deflexión en el punto central.



### 1.3 Incertidumbre en el diseño

Durante el proceso de diseño de una estructura, e incluso después de haber sido construida, surgen incertidumbres sobre el comportamiento exacto de la misma frente a las solicitaciones dadas durante su vida útil (Kooiman, 2000). Esto se debe a la dispersión estadística en la magnitud de las cargas externas y en las propiedades mecánicas de los materiales; como también, en el control de calidad de los procesos constructivos.

Las metodologías tradicionales de diseño, en ocasiones no incluyen factores que consideren este tipo de incertidumbres dentro de los cálculos a pesar de reconocer la existencia de las mismas. La consecuencia de sobreestimar las incertidumbres en ocasiones conlleva a un diseño estructural demasiado conservador, por lo tanto ineficiente

y costoso, o en el peor de los casos, si se subestiman pueden no satisfacerse los requisitos de seguridad (Dalton, et al., 2013).

### **1.3.1 Factores de seguridad**

La existencia de incertidumbres en el diseño y la necesidad de que sean tenidas en cuenta, conduce a la aplicación de los factores de seguridad (Kooiman, 2000). Inicialmente estos factores de seguridad eran establecidos sólo por medio del juicio de ingenieros en su ejercicio práctico como una cuestión de conveniencia, no por necesidad. Cada nuevo tipo de estructura debía desarrollar su propio conjunto de factores de seguridad obtenidos en primera instancia del juicio y luego de la experiencia acumulada (Madsen, et al., 1986).

A partir de 1967 hubo un rápido interés académico en la teoría de la confiabilidad estructural con base probabilística (Madsen, et al., 1986). Inicialmente tuvo poca aceptación y grandes impases, hasta llegar a la práctica actual, denominada factores de resistencia y de carga.

El cálculo probabilístico de dichos factores de seguridad se realiza con base en la distribución de una población de resistencias de un grupo de estructuras similares y la distribución de los efectos máximos de las cargas, que se espera que ocurran en aquellas estructuras durante su vida útil (MacGregor, 1997).

De acuerdo con MacGregor (1997) existen tres razones principales por las cuales es necesario usar algún tipo de factor de seguridad en el diseño estructural: la variabilidad en la rigidez y resistencia de los elementos estructurales, la variabilidad en las cargas externas aplicadas y las consecuencias esperadas en el instante de la falla.

La variabilidad de la rigidez y la resistencia de cada elemento estructural es producto de las diferencias entre los valores estimados y reales de la geometría de los elementos y de las propiedades mecánicas de los materiales. Habitualmente estas diferencias ocurren en el momento de la construcción de la estructura.

La variabilidad en las cargas o de las acciones sobre la estructura tiene en cuenta que estas son procesos generalmente estocásticos en el tiempo y en el espacio físico (Madsen, et al., 1986).

Las consecuencias esperadas en el instante de la falla determinan el nivel de seguridad aceptado para un tipo particular de estructura. Esto incluye aspectos como las pérdidas humanas y económicas, y otros como el tipo de falla, advertencia de falla, existencia de rutas de carga alternativas y la importancia de los elementos estructurales. En consecuencia, el nivel de seguridad requerido puede no ser tan grande para una viga como para una columna. En algunas estructuras, la fluencia o la falla de un miembro causa redistribución de carga a miembros adyacentes. En otras estructuras, la falla de un miembro causa el colapso completo. Si no es posible la redistribución, se requiere un nivel aún más alto de seguridad (MacGregor, 1997).

### **1.3.2 Variabilidad en la resistencia de miembros estructurales de concreto reforzado con fibras**

En estructuras en concreto reforzado, la variabilidad de la resistencia depende en gran parte de la resistencia del concreto y del acero de refuerzo, sabiendo que en ensayos realizados a diferentes especímenes obtenidos de la misma muestra, que teóricamente deben tener las mismas características mecánicas, se va a presentar dispersión de los datos, en función de muchas variables aleatorias como lo son, la distribución de los agregados en la matriz, los materiales que componen la matriz de concreto, la elaboración del espécimen y el procedimiento de ensayo, entre otros.

Para determinar los factores de seguridad que incluyen la variabilidad en el concreto reforzado fueron necesarias extensas investigaciones experimentales, hasta llegar a lo que se utiliza y se presenta en los códigos de diseño actuales.

Por su parte, la determinación de los factores de seguridad en estructuras de concreto reforzado con fibras de acero requiere conocer el comportamiento del material después de la fisuración (Kooiman, 2000). Tal comportamiento está determinado por las propiedades mecánicas de la matriz de concreto y de las fibras de acero, el carácter aleatorio de la orientación de las fibras, su geometría, distribución y cuantía volumétrica. Lo anterior

conlleva a una dispersión mayor de la respuesta mecánica del concreto reforzado con fibras comparada con la del concreto simple (Jansson, et al., 2008).

Algunos códigos y recomendaciones de diseño actualmente aceptan el aporte de las fibras cortas a la resistencia de los elementos estructurales, en algunos casos restringido al refuerzo de cortante (ACI, 1988) (ACI, 2008) y en otros participando en la resistencia a flexión e incluso a la tracción (AFGC-SETRA, 2002) (CNR, 2006). Sin embargo, los factores de seguridad adoptados al calcular los valores de resistencia para diseño, propuestos en cada uno de estos códigos, resultan bastante disímiles con los demás, porque se basan en resultados experimentales que no son representativos para un determinado tipo de estructura.

Teniendo en cuenta lo anterior, es claro que se requiere un análisis probabilístico de estas variables, con el fin de predecir con una confiabilidad determinada el comportamiento de dicho material y brindar la información que conlleve a un diseño más aproximado a la realidad

### 1.3.3 La incertidumbre en la modelación

La incertidumbre, por su parte, comúnmente ha sido clasificada en dos tipos de acuerdo con la fuente que la genera: la incertidumbre aleatoria y la incertidumbre epistémica (Moller, et al., 2008). La palabra aleatorio proviene del latín *alea*, que hace referencia al azar, por lo cual se puede interpretar que la incertidumbre aleatoria está relacionada con aquella información que, a pesar de mostrar una tendencia, cambia entre un ensayo y otro; por ejemplo la orientación de las fibras en una matriz de concreto. No se espera este tipo de incertidumbre que se pueda reducir mediante la modelación probabilística.

La palabra epistémica proviene del griego *epistème*, que se refiere al conocimiento; por lo tanto, las causas de la incertidumbre epistémica impiden la aplicación de un modelo puramente probabilístico debido a la subjetividad, imprecisión y ambigüedad de la información o del conocimiento, como por ejemplo la escasez de datos del problema. (Beer, et al., 2013). Tal incertidumbre se puede reducir utilizando muestras más grandes o refinando los modelos (Der Kiureghian & Ditlevsen, 2009).

En la representación del comportamiento mecánico del concreto reforzado con fibras se pueden distinguir las incertidumbres que tienen el potencial de ser reducidas y aquellas que, por el contrario, obedecen estrictamente a procesos estocásticos, (Der Kiureghian & Ditlevsen, 2009). En particular, la distribución y orientación de las fibras dentro de la matriz de concreto es diferente entre dos probetas, a pesar que la mezcla de concreto y las dimensiones del elemento estructural sean las mismas. Tal variabilidad ocasiona incertidumbre aleatoria de la respuesta mecánica, principalmente en el rango inelástico.

## **2. Comportamiento de las fibras de acero embebidas en la matriz de concreto**

En el presente capítulo, en primer lugar se presentan las propiedades geométricas y mecánicas de los tipos de fibras de acero más utilizados, posteriormente se estudia el contenido, la distribución y la orientación de las fibras dentro de la matriz, y finalmente se presenta una descripción del mecanismo de deslizamiento de las fibras embebidas en la matriz de concreto.

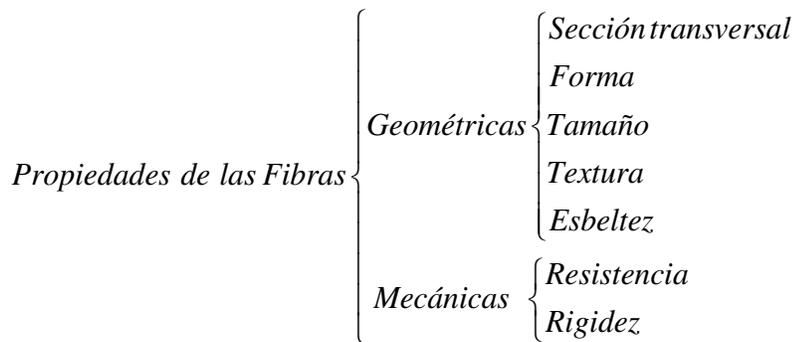
### **2.1 Fibras de acero**

El *Comité Européen de Normalisation* – CEN, en la norma europea EN 14889-1:2006 (CEN, 2006) define las fibras cortas de acero como aquellos “elementos rectos y deformados de alambres de acero estirado en frío, recortes de fibras de acero rectas o deformadas, fibras extraídas fundidas, fibras estiradas en frío y fibras molidas de bloques de acero que son adecuados para su mezcla homogénea con hormigón o mortero”. Por su parte, el comité 544 del *American Concrete Institute* – ACI, en su reporte sobre concreto reforzado con fibras (ACI, 2009), define este tipo de fibras cortas como aquellas que presentan una relación longitud/diámetro entre 20 y 100, con cualquier sección transversal y que son lo suficientemente pequeñas para ser distribuidas aleatoriamente en el volumen de concreto mediante los procedimientos comunes de mezcla. Las definiciones anteriores son similares entre ellas, y abarcan un amplio espectro de posibilidades en sí; en el mercado actualmente existe un buen número de combinaciones de formas, tamaños y materiales de fibras cortas de acero empleadas como refuerzo en el concreto. Lo que hace necesario establecer algunas clasificaciones de las mismas.

La *American Society for Testing and Materials* – ASTM, en la norma técnica A820 (ASTM, 2011), reconoce cuatro tipos de fibras de acuerdo con su fabricación: Tipo I - Alambres estirados en frío, Tipo II - Láminas cortadas, Tipo III - Extractos fundidos, Tipo IV – Otras fibras. Por su parte el CEN hace algo similar en la norma europea EN 14889-1:2006 (CEN, 2006) estableciendo cinco grupos: Grupo I – Alambres estirados en frío, Grupo II - Láminas cortadas, Grupo III – Extractos fundidos, Grupo IV – Conformados en frío y, Grupo V – Aserrados de bloques de acero. En contraposición, la *Japan Society of Civil Engineers* – JSCE, en la especificación JSCE-E 101 (JSCE, 2010), presenta una clasificación con solo tres tipos, con base en la forma de la sección recta de las fibras: Tipo 1 – sección cuadrada, Tipo 2 - sección circular y Tipo 3 - media luna. Sin embargo, estas no son las únicas características que afectan el comportamiento de la fibra dentro del concreto, en la figura 2-1 se presenta un resumen de las propiedades geométricas y mecánicas de interés.

Cabe anotar que algunas otras propiedades físicas y de composición química que no se mencionan aquí, resultan importantes cuando se evalúan otros comportamientos como la durabilidad, la resistencia al fuego, la resistencia a la abrasión y la resistencia al impacto.

**Figura 2-1:** Propiedades geométricas y mecánicas de las fibras cortas de acero



A continuación se presenta un resumen de las propiedades geométricas y mecánicas encontradas en diferentes fibras de acero de producción comercial utilizadas como refuerzo en el concreto.

### 2.1.1 Propiedades geométricas de las fibras de acero

Algunos autores han incluido en sus investigaciones el estudio de los efectos de la geometría y el tamaño de las fibras en las diferentes propiedades mecánicas del SFRC

usando algunos de los tipos más comunes de fibras en este aspecto (Yazici, et al., 2007) (Johnston & Skarendahl, 1992) (Soulioti, et al., 2011) (Barros, et al., 2005).

Debido a que existen diferentes procedimientos para fabricar las fibras de acero, así como diferentes fuentes de materia prima, el resultado es una amplia gama de tamaños y formas geométricas. Algunas de ellas son bastante simples, mientras que en otras se ha aplicado la ingeniería enfocada en el desarrollo de nuevas configuraciones geométricas que permitan obtener una mayor eficiencia en función de la capacidad de adherencia entre la fibra y la matriz de concreto (Naaman, 2003) (Banthia & Armelin, 2002) (Choi & Lee, 2003).

- Forma de la sección transversal

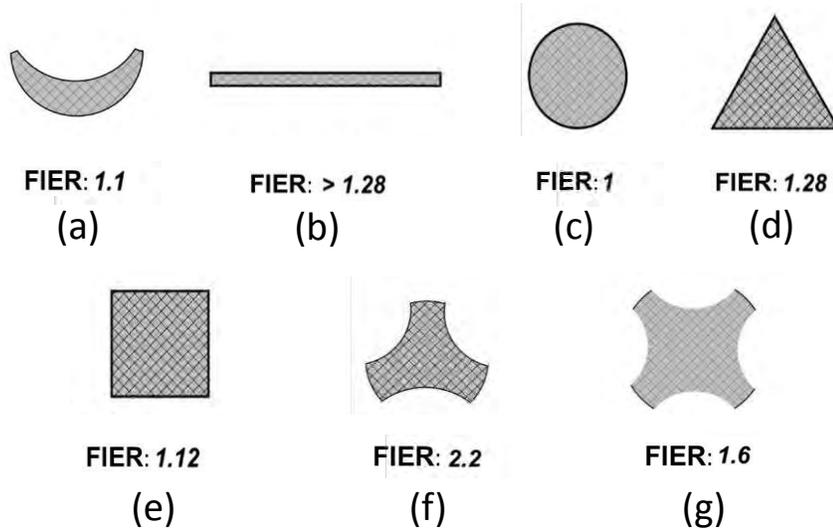
En primer lugar está la forma de la sección transversal. Tanto la normativa europea como la americana y la japonesa permiten el uso de fibras obtenidas a partir de aserrados de bloques de acero, y de fibras extraídas de fundidas de acero. Estas fibras presentan por lo general secciones transversales poco regulares que tienden a tener forma de medialuna (figura 2-2.a).

Por otra parte, las fibras que se obtienen cortando láminas delgadas tienden a presentar secciones rectangulares (figura 2-2.b). Finalmente las fibras fabricadas a partir del corte de alambres suelen tener secciones circulares (figura 2-2.c), aunque en algunos casos pueden presentar otro tipo de secciones como triangulares y cuadradas (figura 2-2.d y e). Incluso algunas formas más refinadas podrían desarrollarse para este tipo de fibras (figura 2-2.f y g).

La importancia de la forma de la sección en la capacidad de adherencia entre la fibra y la matriz radica en la relación que existe entre el área y el perímetro de la misma, ya que esto consecuentemente afecta la relación entre la fuerza de tracción que puede soportar la fibra y la fuerza de adherencia que puede desarrollarse en la interface fibra matriz. En la figura 2-2 se presentan algunos ejemplos de sección y un factor denominado relación de eficiencia intrínseca de la fibra – FIER (Naaman, 2003) el cual indica la eficiencia de una sección como la relación entre su perímetro y el perímetro de una sección circular con la misma área.

**Figura 2-2:** Relación de eficiencia intrínseca para secciones transversales comunes en las fibras de acero.

Adaptado de: (Naaman, 2003)



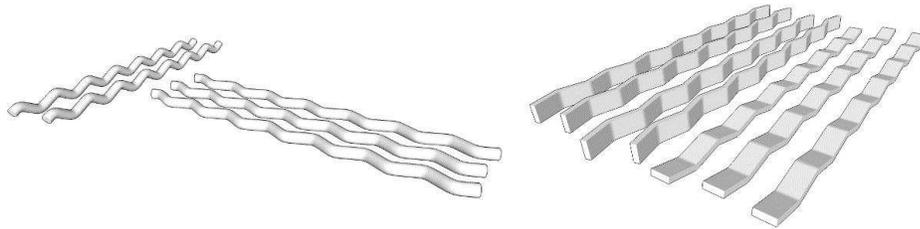
- Forma de su eje longitudinal

Algunas fibras, como aquellas obtenidas por los proceso de extracción de fundidas, o por aserrado y maquinado de bloques de acero, suelen presentar formas irregulares de su eje longitudinal y además su sección transversal puede variar a lo largo de la fibra. En cambio, las fibras obtenidas del corte de láminas o de alambres tienden a mantener una sección transversal uniforme.

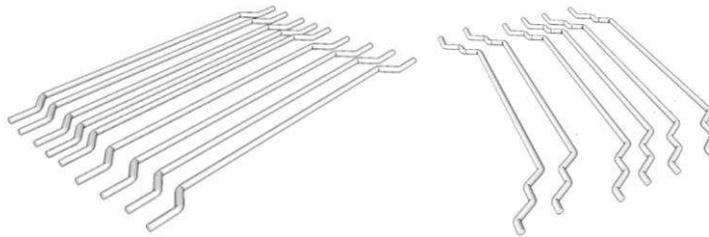
La presentación más simple de estas últimas cuenta con un eje longitudinal recto. Sin embargo, debido a que la adherencia de estas fibras a la matriz depende casi que únicamente de la fricción desarrollada en la interface (Soe Htut, 2010), a medida que la fibra es más corta tiende a tener menor capacidad para transmitir esfuerzos antes de que se presente su deslizamiento respecto a la matriz (Johnston & Skarendahl, 1992) (Barros, et al., 2005) (Soulioti, et al., 2011) (Choi & Lee, 2003). Por esta razón se han desarrollado fibras con diferentes formas de su eje longitudinal con el fin de obtener una mayor resistencia al arrancamiento de la misma. La modificación de la forma de la fibra mediante la aplicación de fuerzas contribuye a su adherencia con respecto a la matriz (Yazici, et al., 2007) (Soulioti, et al., 2011) (Choi & Lee, 2003).

Desde la figura 2-3 hasta la figura 2-6 se presentan algunas de las formas más comunes en estas fibras.

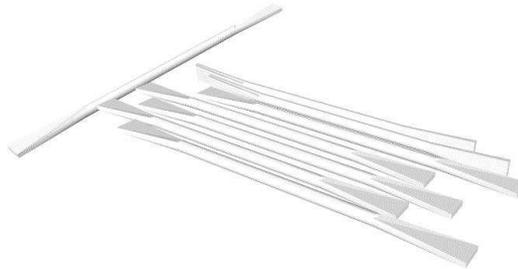
**Figura 2-3:** Fibras onduladas



**Figura 2-4:** Fibras con gancho en el extremo

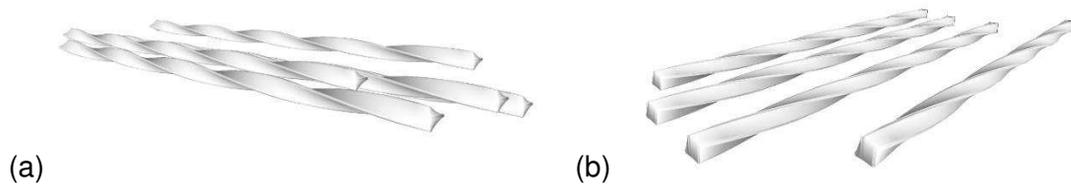


**Figura 2-5:** Fibras con cabeza o aplastamiento en el extremo



**Figura 2-6:** Fibras torsionadas

(a) Sección triangular, (b) sección cuadrada.



- Tamaño

En general, de acuerdo con el ACI (ACI, 2009) y el Consiglio Nazionale delle Ricerche – CNR (CNR, 2006) las fibras fabricadas a partir de alambres redondos pueden presentar diámetros  $d^f$  entre 0.25mm y 1mm, mientras que las fibras cortadas de láminas o alambres planos presentan secciones con espesores  $t^f$  entre 0.15mm y 0.64mm y anchos  $w^f$  entre 0.25mm a 2.03mm. Para aquellas fibras cuya sección es diferente a la circular se suele calcular un diámetro equivalente  $d_e^f$  a partir de su área  $A^f$  y su perímetro  $p_e^f$  mediante la ecuación 2-1 (ASTM, 2011).

$$d_e^f = \sqrt{\frac{4 \cdot A^f}{\pi}} \quad 2-1$$

El diámetro equivalente de las fibras puede oscilar entre 0.15mm y 1.20mm (CNR, 2006) siendo más frecuentes aquellas fibras con diámetros equivalentes entre 0.4mm y 1.0 mm (Soulioti, et al., 2011); (Naaman, 2003).

En cuanto a las longitudes de las fibras, generalmente se hace referencia a la longitud nominal  $l_n^f$  que difiere de la longitud real cuando se trata de fibras deformadas. La longitud nominal es medida sobre una línea recta a lo largo de la fibra, mientras que la longitud real se mide a lo largo del eje de la fibra deformada. Las longitudes nominales para las fibras de acero oscilan entre 6.4 mm y 76 mm (ACI, 2009), siendo las más comunes entre 25 mm y 60 mm (Naaman, 2003).

- Esbeltez

Un parámetro que influye considerablemente en el comportamiento de las fibras dentro del concreto es la esbeltez de las mismas, comúnmente designada como relación de forma nominal  $r_n^f$  y consiste en el cociente entre el diámetro equivalente  $d_e^f$  y la longitud nominal  $l_n^f$  de la fibra. La relación de forma comúnmente oscila entre 40 y 80 (CNR, 2006).

## 2.1.2 Propiedades mecánicas de las fibras de acero

De acuerdo con lo expuesto por el CNR en su guía para el diseño y construcción de estructuras de FRC (CNR, 2006), las fibras de acero para refuerzo del concreto pueden ser fabricadas con tres tipos de acero: Tipo R1 - Acero de baja aleación ( $C \leq 20\%$ ), Tipo R2 - Acero de alta aleación ( $C > 20\%$ ) y Tipo R3 - Acero inoxidable.

En función de su composición química el acero presentará diferentes propiedades físicas, químicas y mecánicas; para el presente trabajo son de principal interés las propiedades mecánicas, siendo las de mayor relevancia la resistencia a la tracción, el esfuerzo de fluencia y el módulo de elasticidad.

De acuerdo con el estandar A820 (ASTM, 2011), para las fibras de acero se requiere un esfuerzo de fluencia en tracción de 345 MPa mientras que la JSCE (JSCE, 2010) establece como requisito un mínimo de 552 MPa. Por su parte el CNR (CNR, 2006) presenta una tabla de requisitos mínimos de resistencia dependiendo del tipo de acero (tabla 2-1).

En cuanto al módulo de elasticidad de las fibras se puede considerar un valor de 200.000 MPa para los aceros R1 y R2, mientras que para el acero inoxidable, R3, este valor se puede tomar como 170.000MPa.

**Tabla 2-1:** Resistencias mínimas para las fibras de acero según (CNR, 2006)

Diámetro equivalente [mm]	Resistencia mínima a la tensión [MPa]											
	R1				R2				R3			
	A <sup>1</sup>		B <sup>2</sup>		A <sup>1</sup>		B <sup>2</sup>		A <sup>1</sup>		B <sup>2</sup>	
	$F_u$	$F_y^3$	$F_u$	$F_y^3$	$F_u$	$F_y^3$	$F_u$	$F_y^3$	$F_u$	$F_y^3$	$F_u$	$F_y^3$
0.15 ≤ dt < 0.50	400	320	480	400	800	720	1080	900	1700	1360	2040	1700
0.50 ≤ dt < 0.80	350	280	450	350	800	640	1040	800	1550	1240	2015	1550
0.80 ≤ dt ≤ 1.20	300	240	390	300	700	560	910	700	1400	1120	1820	1400

<sup>1</sup> A) Fibras rectas

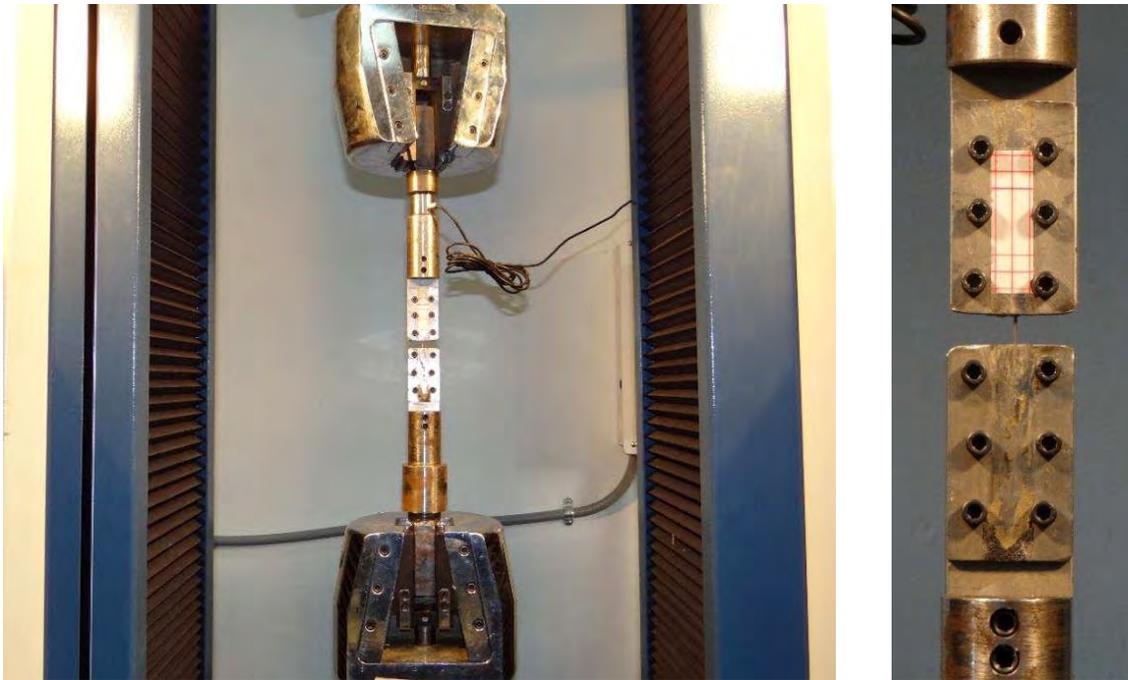
<sup>2</sup> B) Fibras deformadas

A pesar de que la resistencia de la fibra por lo general es varias veces mayor que la resistencia a la tracción del concreto, en ocasiones resulta de interés tener conocimiento del comportamiento de la relación esfuerzo-deformación para el acero de la fibra, puesto

que cuando la cuantía volumétrica de fibras es baja y se presenta una buena adherencia entre fibra y matriz, es posible que las fibras alcancen su esfuerzo de fluencia e incluso su resistencia a la tracción.

Para esta tesis se realizaron ensayos de tracción directa (figura 2-7) sobre tres tipos de fibras disponibles en el mercado, con el fin de conocer el comportamiento esfuerzo contra deformación y obtener el módulo de elasticidad, el esfuerzo de fluencia, la resistencia máxima y el índice de ductilidad de las mismas.

**Figura 2-7:** Ensayo de tracción directa para las fibras.

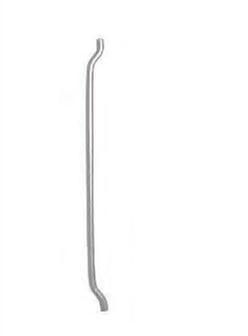
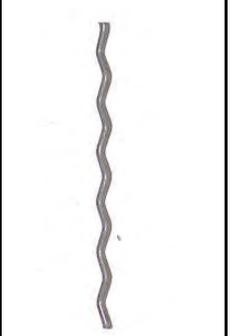


Se seleccionaron dos tipos de fibras rectas con ganchos en los extremos, con diferentes relaciones de forma y un tipo de fibras onduladas. Los tres tipos de fibras tenían sección circular. En la (tabla 2-2) se presenta un resumen de las características geométricas de las fibras que se usaron en esta investigación.

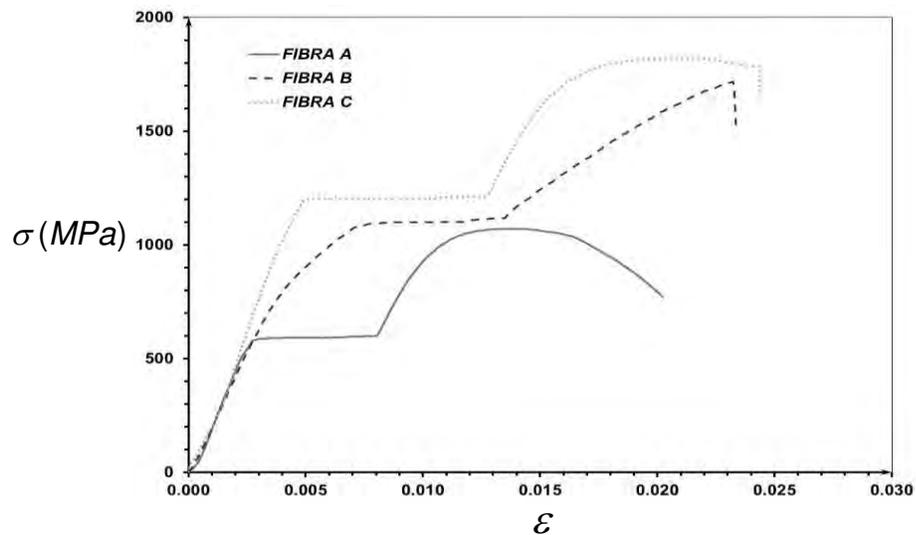
Para cada tipo de fibra se realizaron cinco ensayos de tracción siguiendo los lineamientos del estándar A370-12a (ASTM, 2012), sin embargo para la medición de la elongación se usó el valor del desplazamiento entre los platos de la máquina. En la figura 2-8 se presentan las gráficas esfuerzo deformación promedio para cada uno de los tres tipos de

fibras. Los resultados individuales de los ensayos se encuentran contenidos en el anexo A.

**Tabla 2-2:** Características geométricas de las fibras ensayadas a tracción según el fabricante.

<b>Nomenclatura</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>
<b>fotografía</b>			
<b>Area</b>	0. 8659 mm <sup>2</sup>	0. 95 mm <sup>2</sup>	0. 4417 mm <sup>2</sup>
<b>Diámetro</b>	1.05 mm +/- 10%	1.1 mm +/- 8%	0.75 mm +/- 3%
<b>Longitud</b>	50 mm +/- 3%	50 mm +/- 5 %	60 mm +/- 5%
<b>Relación L/D</b>	47	45	80

**Figura 2-8:** Curvas esfuerzo-deformación para el ensayo de tracción en tres tipos de fibras.



Para cada fibra ensayada se determinaron los valores del módulo de elasticidad, la resistencia a la tracción, el esfuerzo de fluencia y el índice de ductilidad y se calcularon los

promedios de estas propiedades para cada tipo de fibra. En la tabla 2-3 se presenta el resumen de los resultados promedio obtenidos.

**Tabla 2-3:** Propiedades mecánicas promedio obtenidas para las fibras usadas en esta investigación.

<b><i>Nomenclatura</i></b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>
<b><i>Resistencia a la tracción (Mpa)</i></b>	1070	1450	1800
<b><i>Esfuerzo de fluencia (Mpa)</i></b>	590	950	1160
<b><i>Módulo de elasticidad (Mpa)</i></b>	202360	215100	208160
<b><i>Índice de ductilidad</i></b>	11.9	5.2	9.5

## 2.2 Contenido y distribución de las fibras

El contenido de fibras de acero dentro de la matriz de concreto es uno de los factores que tiene un mayor efecto tanto en el comportamiento de la mezcla en estado fresco como sobre la respuesta inelástica del SFRC. La combinación del contenido con el tamaño y forma de la fibra adicionalmente afectan la manejabilidad de la mezcla y ésta a su vez condiciona la distribución de las fibras a través de la masa de concreto.

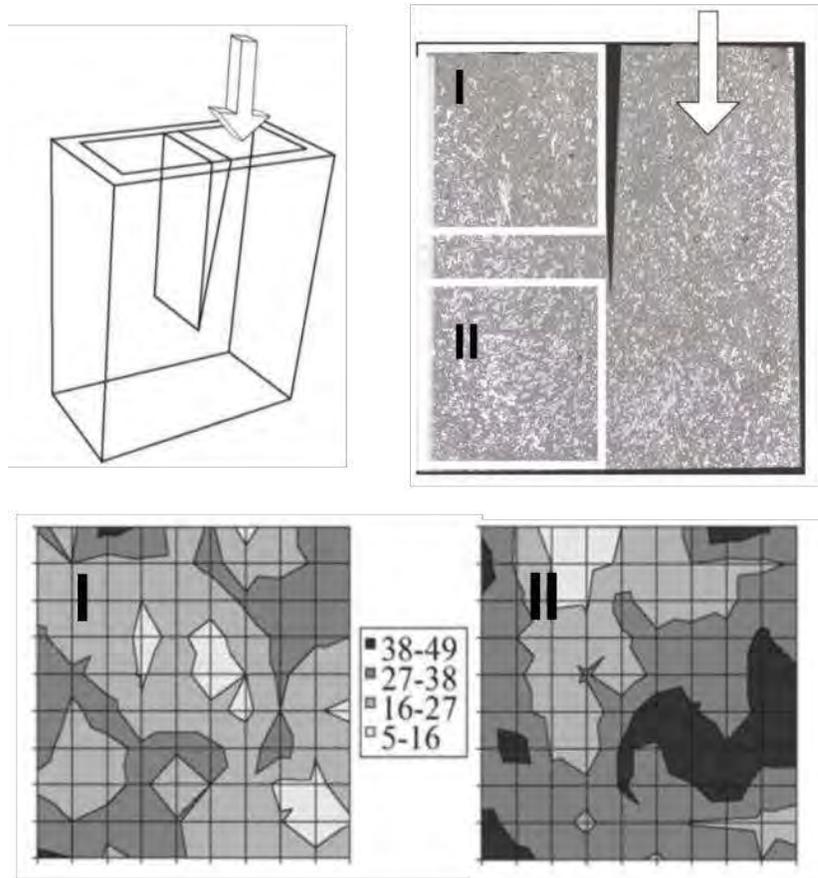
Aunque varias normativas, (ACI, 2009) (JSCE, 2010) (CEN, 2006), han establecido cuáles fibras aseguran su distribución homogénea en la matriz de concreto mediante métodos tradicionales de fabricación, en la práctica se observa que es difícil lograr dicha homogeneidad. Los métodos de vaciado, colocación y compactación del concreto, el tamaño del agregado, las dimensiones del elemento estructural, la geometría de la fibra y la cantidad de plastificantes adicionados a la mezcla afectan directamente la distribución de la fibras dentro de la matriz de concreto (Torrijos, et al., 2010) (Dössland, 2008) (Boulekbache, et al., 2010) (Robins, et al., 2003) (Grünwald, 2004) (Ferrara & Meda, 2006).

Stähli y van Mier (Stähli & van Mier, 2007) vaciaron un concreto reforzado con fibras hasta llenar dos cubículos, como se ilustra en la figura 2-9. A continuación contaron el número de fibras en un corte vertical, identificando zonas entre 38 y 49 fibras hasta zonas entre 5

y 16 fibras por centímetro cuadrado. Se observa que la distribución de las fibras no es uniforme, con una leve tendencia a concentrarse en la parte inferior de la probeta.

**Figura 2-9:** Patrones de distribución de fibras en SFRC: número de fibras por  $\text{cm}^2$ .

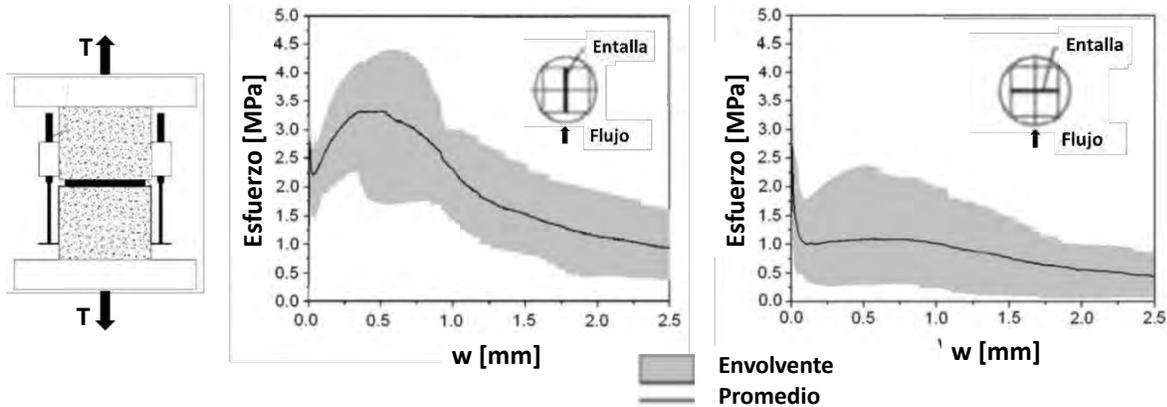
Fuente: (Stähli & van Mier, 2007)



Esta heterogeneidad, junto con otros factores como la orientación de las fibras, justifican las altas dispersiones obtenidas en los resultados experimentales de probetas elaboradas en una misma bacheada (Abrishambaf, et al., 2013) (Bordelon & Roesler, 2012) (Stähli & van Mier, 2007) . En la figura 2-10 se presentan los resultados de un ensayo de tracción directa sobre dos muestras de núcleos obtenidos de un mismo elemento en dos direcciones perpendiculares entre sí (Boulekbache, et al., 2010). En cada dirección existe una alta dispersión en el comportamiento inelástico. Así mismo se presenta una diferencia entre los comportamientos promedio de ambas direcciones.

**Figura 2-10:** Resultados de tracción directa para especímenes ensayados en dos direcciones perpendiculares entre sí.

Fuente: (Abrishambaf, et al., 2013)



### 2.2.1 Dosificaciones comunes para las fibras de acero

En la literatura, el contenido de fibras puede expresarse de diferentes maneras, siendo más común la cuantía volumétrica  $\rho_{mv}^f$  calculada como el volumen del acero de las fibras por unidad de material compuesto. Otra práctica común, especialmente entre los constructores, consiste en indicar el contenido como el peso de las fibras por unidad de volumen de material compuesto. En algunos casos, aunque de manera menos frecuente y casi que con finalidad informativa, se hace referencia al número de fibras por unidad de volumen de concreto.

De acuerdo con el comité 544 del ACI (ACI, 1993), el contenido de fibra puede variar entre  $30 \text{ kg/m}^3$  y  $157 \text{ kg/m}^3$ , para el concreto de peso normal. Si  $78 \text{ kg}$  de fibras de acero equivalen aproximadamente a una cuantía volumétrica del 1%, el contenido de fibras estará entre 0.38% y 2.01% del volumen del SFRC. Sin embargo, el contenido de fibras recomendado varía de acuerdo con el tipo de fibra, la aplicación estructural, las condiciones de mezclado y el sistema constructivo. Así mismo en función de la cantidad de fibras, el sistema constructivo y de la aplicación estructural, también es necesario variar la composición de la matriz.

De esta forma el SFRC mezclado y vaciado usando técnicas convencionales, por lo general presenta tamaños de agregado menores que el concreto reforzado con barras

continuas, aunque el comité 544 del ACI (ACI, 2009) contempla algunas recomendaciones en cuanto a la granulometría del agregado para tamaño máximo del agregado de hasta 38mm. Para este tipo de concreto, en la práctica los contenidos de fibras suelen estar limitados a cuantías volumétricas menores al 2% (Naaman, 2003) y generalmente oscilan entre 0.25% y 1.5% (ACI, 2009) debido a que con cuantías superiores la manejabilidad se reduce e incluso el uso de plastificantes resulta infructuoso.

Por otra parte, en el concreto lanzado (*Shotcrete*) usado en túneles y en reparaciones, las fibras son adicionadas de forma posterior a la mezcla del concreto, lo que permite el uso de cuantías mayores de fibras que pueden alcanzar hasta el 3%. A su vez, en los materiales conocidos como compuestos cementicios de alto desempeño reforzados con fibras (*High performance fiber reinforced cement composites* HPFRCC), los agregados son de menor tamaño, y se usan cuantías de fibras mayores al 1%. Finalmente, el concreto de fibras infiltradas con lechada (*Slurry infiltrated fiber concrete* SIFCON), permite el uso de un mayor contenido de fibras, las cuales son previamente acomodadas en la formaleta y posteriormente infiltradas, como su nombre lo indica, por una matriz cementicia de agregados finos muy fluída. En este caso la cuantía volumétrica de fibras puede estar entre el 4% y el 6% (Naaman, 2003).

### **2.2.2 Efectos de la variación del contenido de fibras sobre las propiedades mecánicas**

Un buen número de autores ha determinado la relación entre la cuantía volumétrica de fibras y algunas de las propiedades mecánicas del SFRC, como la ductilidad, la energía de fractura, la resistencia a la flexión, al cortante, a la tracción y a la compresión. Aunque estos estudios utilizaron diferentes tipos de ensayo, de fibras y de matrices, se puede determinar una tendencia general en los resultados:

- Comportamiento a compresión: el concreto simple presenta una mayor resistencia a compresión que ante cualquier otra sollicitación; sin embargo, la falla que presenta es cuasi-frágil, caracterizada por un corto rango de comportamiento inelástico. Al adicionar bajas cantidades de fibras de acero, aumentan muy poco la rigidez y la resistencia a la compresión del SRFC, mientras que su ductilidad se incrementa en

mayor proporción (Altun, et al., 2007) (Barros & Cruz, 2001) (Düzgün, et al., 2005) (Ibrahim & Che Bakar, 2011) (Lamus & Segura, 2013) (Nataraja, et al., 1999) (Neves & Fernandes de Almeida, 2005) (Yazici, et al., 2007). Sin embargo algunos autores han encontrado que con cuantías de fibras superiores al 2% se incrementa notoriamente la resistencia a la compresión (Yan, et al., 2002).

- Comportamiento a tracción: cuando se incrementa la cuantía de fibras, el comportamiento a tracción del SFRC se ve directamente influenciado. En ensayos de tracción directa (Amin, et al., 2013) e indirecta (Altun, et al., 2007) (Baran, et al., 2012) (Bayramov, et al., 2004) (Chenkui & Guofan, 1995) (Düzgün, et al., 2005) (Holschemacher & Muller, n.d.) (Ibrahim & Che Bakar, 2011) (Shende & Pande, 2011) (Yazici, et al., 2007) (Lofgren, et al., 2005) (Jansson, 2011), el valor de esfuerzo de fractura se incrementa levemente, mientras que la capacidad residual del material para resistir esfuerzos de tracción aumenta, llegando a presentar endurecimiento en el rango inelástico.
- Comportamiento a flexión: el incremento de la ductilidad y de la resistencia a la tracción del SFRC, refleja el aumento del módulo de rotura en elementos solicitados a flexión (Altun, et al., 2007) (Bayramov, et al., 2004) (Barros & Cruz, 2001) (Chenkui & Guofan, 1995) (Ibrahim & Che Bakar, 2011) (Johnston & Skarendahl, 1992) (Yazici, et al., 2007) (Lofgren, et al., 2005) (Soulioti, et al., 2009) (Walraven, 2009) (Yan, et al., 2002).
- Comportamiento a cortante: el esfuerzo máximo a cortante también se incrementa con el aumento de la cuantía volumétrica de fibras, al igual que su capacidad de resistencia posterior a la fisuración. (Lamus & Segura, 2013) (Khanlou, et al., 2013) (Valle & Buyukozturk, 1993) (Van de Loock, 1987) (Balaguru & Dipsia, 1993) (Khanlou, et al., 2013) (Mirsayah & Banthia, 2002).
- Ductilidad y Energía de fractura: la ductilidad y la energía de fractura son posiblemente las propiedades mecánicas que más se modifican por el incremento de la cuantía de fibras de acero dentro de la matriz de concreto. Estas propiedades aumentan considerablemente a medida que se adiciona un mayor contenido de fibras. Algunos autores han reportado, directa o indirectamente, el incremento de la ductilidad en

función de la cuantía (Antonaci, et al., 2006) (Baran, et al., 2012) (Boulekbache, et al., 2010) (Chenkui & Guofan, 1995) (Johnston & Skarendahl, 1992) (Soulioti, et al., 2009) (Soulioti, et al., 2011) (Taylor, et al., 1997); mientras otros, por su parte, han observado el aumento de la energía de fractura (Bayramov, et al., 2004) (Lamus & Segura, 2013).

### **2.2.3 Dispersión del contenido de fibras**

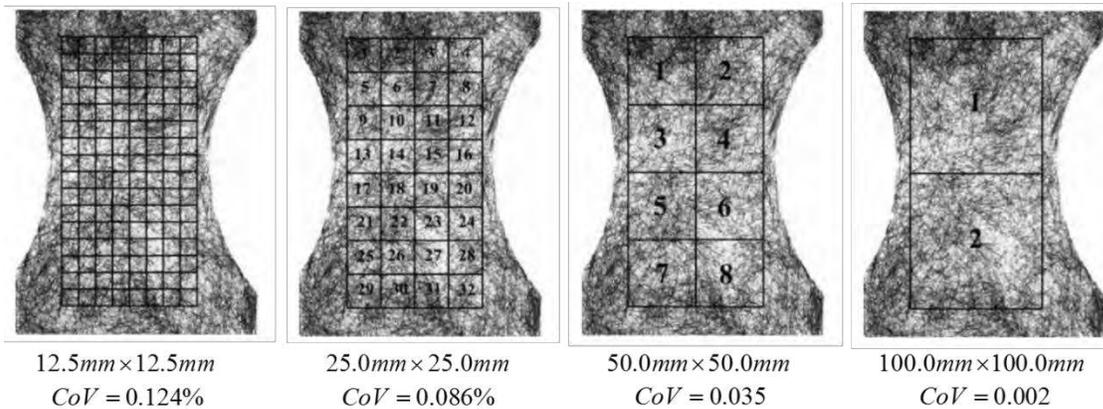
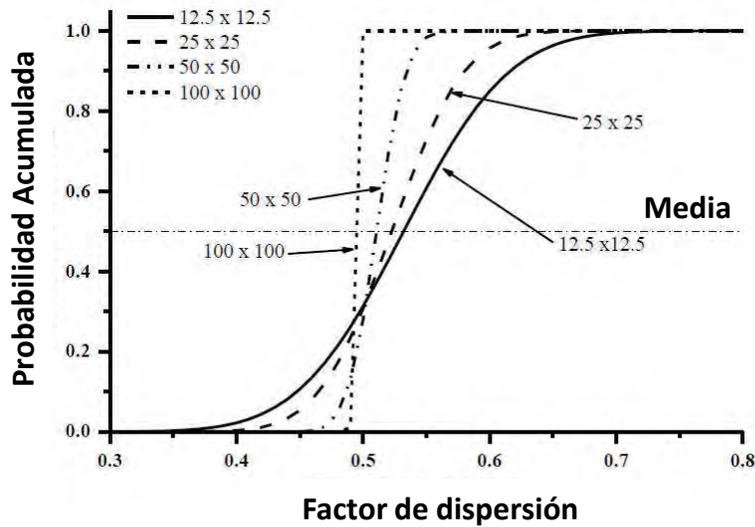
Se ha encontrado que las fibras, dependiendo de las características del concreto en estado fresco, y de las condiciones de mezclado, vaciado y compactación, pueden no distribuirse uniformemente en toda la extensión del elemento estructural (Dösstrand, 2008). En algunos casos esta dispersión en el contenido de fibras puede presentar coeficientes de variación superiores al 50% (Sorelli & Toutlemonde, 2005), e incluso en elementos como vigas la cuantía volumétrica en unas zonas puede llegar a ser hasta cuatro veces mayor que en otras (Robins, et al., 2003).

Debido a que el contenido de fibras está relacionado directamente, tanto con la resistencia a diferentes solicitaciones, como con el comportamiento inelástico del material, la variabilidad de la cuantía volumétrica en la extensión del elemento necesariamente afecta su respuesta estructural. Se ha podido demostrar que la formación de las fisuras y su evolución en elementos de SFRC se ven influenciados por la presencia de zonas con menores cuantías (Akkaya, et al., 2001) (Soe Htut, 2010).

Soe (Soe Htut, 2010) encontró que la distribución de las fibras puede representarse por una función de densidad de probabilidad normal, en la cual la desviación estándar será una función del tamaño de los puntos de muestreo y disminuye a medida que la escala de observación crece. En la figura 2-11 se presentan las distribuciones de probabilidad así como los tamaños de las áreas de conteo usadas por Soe, junto con los valores del coeficiente de variación – CoV para un parámetro denominado factor de dispersión, calculado como la relación entre el área ocupada por las fibras y el área de referencia. En esa investigación se analizaron probetas de 30mm de espesor, con fibras de acero de 25mm de longitud y ganchos en los extremos.

Figura 2-11: Variación del factor de dispersión.

Fuente: (Soe Htut, 2010)



En particular, para un tamaño de área de conteo de fibras cuadrada de 25.0mm de lado se encontró un coeficiente de variación de la cuantía volumétrica de aproximadamente 27% para cuantías del 0.5% al 2%.

## 2.3 Orientación de las fibras

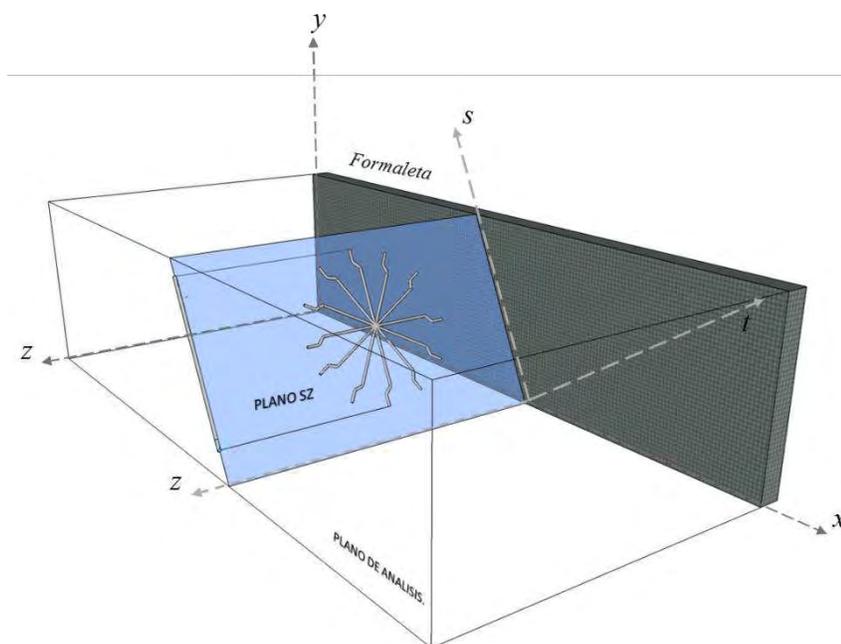
La orientación de la fibra es otro parámetro que influye en la respuesta inelástica del SFRC (Kooiman, 2000), puesto que las fibras que se encuentran paralelas a la fisura no aportan a la resistencia del material, mientras que aquellas perpendiculares a la superficie de la



Teniendo en cuenta que la formulación desarrollada en este trabajo es una simplificación del comportamiento del SCFRC en condición plana de esfuerzos, es necesario proyectar en el plano la rigidez y la resistencia de las fibras que se encuentran orientadas fuera del mismo. Con esta intención, se ha propuesto que cada fibra aporte en proporción a su proyección sobre dicho plano.

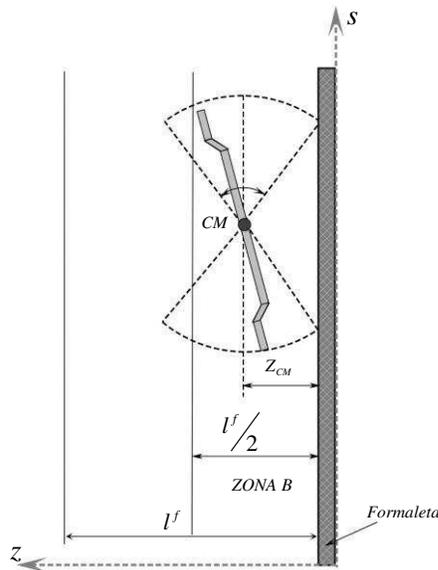
De esta forma el aporte promedio de las fibras sobre el plano depende del espesor del elemento que se esté analizando y se calcula como el promedio de las proyecciones de las posibles orientaciones de la fibra contenida en un plano perpendicular al plano de análisis (figura 2-13).

**Figura 2-13:** Posibles orientaciones de fibra, proyectadas sobre el plano de análisis paralelo a los ejes  $xy$ .

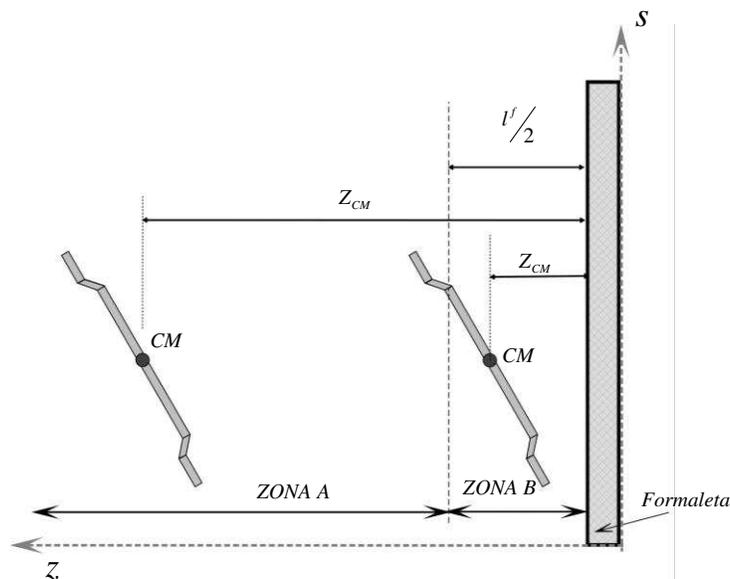


Se ha supuesto, además, que cada fibra que se encuentra lo suficientemente alejada de la formaleta puede orientarse libremente en el espacio, mientras que a medida que se acerca a una pared de la formaleta el rango de orientaciones posibles se ve restringido, como se muestra en la figura 2-14.

**Figura 2-14:** Rango de orientaciones para una fibra cercana a la formaleta



**Figura 2-15:** Localización de la fibra respecto a la formaleta en un plano perpendicular al plano de análisis



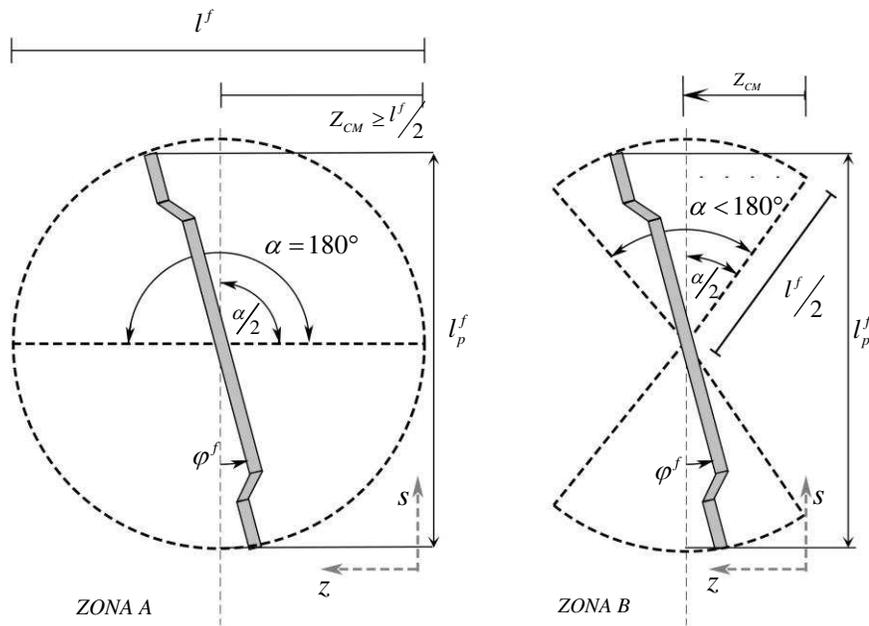
Se han establecido entonces dos posibles condiciones: la primera si el centroide de la fibra se encuentra a una distancia de la formaleta, mayor que la mitad de la longitud de la fibra y la segunda si sucede lo contrario. En la figura 2-15, para que la primer condición se dé, el centroide de la fibra debe estar dentro de lo que se ha denominado ZONA A, mientras que las fibras en la ZONA B presentan la segunda condición.

Para una fibra cuyo centroide se encuentra localizado en la zona A, el rango de orientaciones posibles es de  $\pi$  radianes. Mientras que una fibra localizada en la zona B, tiene limitadas sus posibilidades de orientación a un ángulo  $\alpha$  menor a  $\pi$  radianes, como se muestra en la figura 2-16. El rango de orientaciones  $\alpha$  puede ser calculado con la ecuación 2-2.

$$\frac{\alpha}{2} = \sin^{-1} \left( \frac{Z_{CM}}{0.5 \cdot l^f} \right) \quad 2-2$$

Donde  $Z_{CM}$  es la distancia entre la formaleta y el centroide de la fibra y  $l^f$  es la longitud de la fibra.

**Figura 2-16:** Definición de la orientación  $\varphi^f$  de la fibra fuera del plano de análisis



La orientación de una fibra en cualquiera de las posibles posiciones dentro de un plano perpendicular al plano de análisis, está dada por el ángulo  $\varphi^f$  formado entre el eje de la fibra y su proyección sobre el plano de análisis (figura 2-16). De esta forma la proyección de esa fibra será igual a la obtenida con la ecuación 2-3.

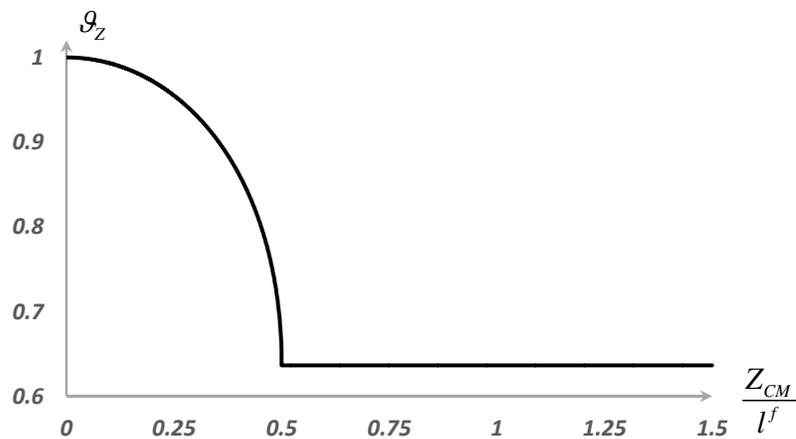
$$l_p^f = l^f \cdot \cos(\varphi^f) \quad 2-3$$

Suponiendo que una fibra cualquiera tiene la misma probabilidad de orientarse en cualquier dirección dentro del rango  $\alpha$ , se puede calcular un coeficiente  $g_z$  que representa el promedio de las posibles proyecciones de esa fibra, por medio de la integral expresada en la ecuación 2-4.

$$g_z = \frac{2 \cdot \int_0^{\alpha/2} \cos(\varphi^f) d\varphi^f}{\alpha} \tag{2-4}$$

De esta forma, para una fibra en la zona A, el coeficiente  $g_z$  tendrá un valor constante de 0.64 mientras que para una fibra en la zona B dependerá del rango de orientación; por ejemplo: para una fibra con  $\alpha$  igual a  $\pi/3$  el valor de  $g_z$  será 0.96. Este coeficiente dependerá entonces directamente de la relación que exista entre la distancia del centroide de la fibra a la formaleta y la longitud de la fibra, (figura 2-17).

**Figura 2-17:** Valores del coeficiente  $g_z$  en función de la posición de la fibra

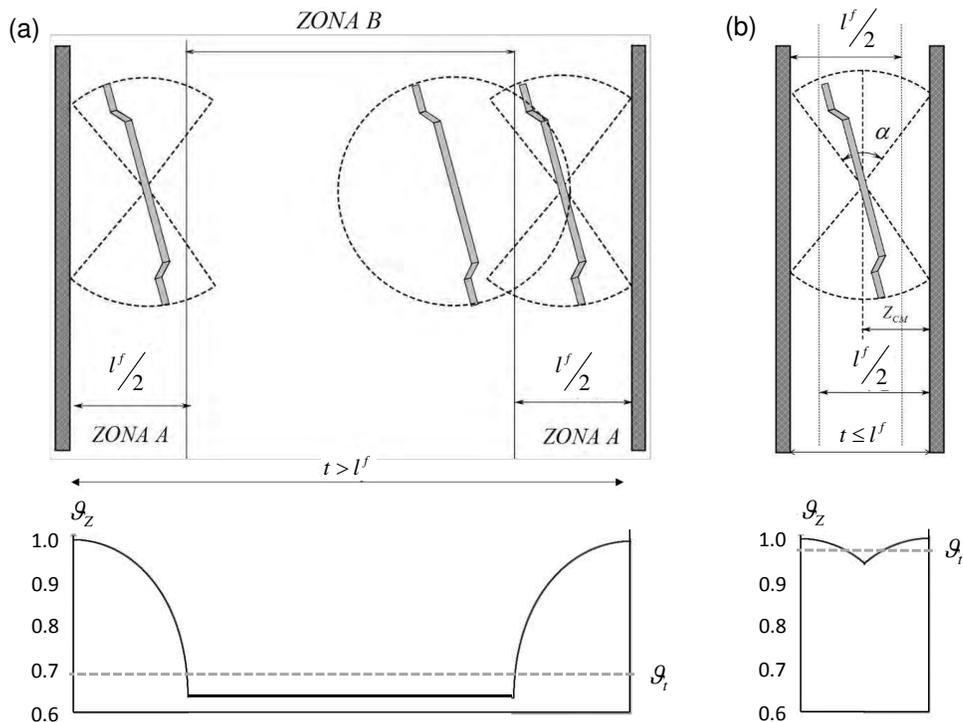


Ahora bien, para encontrar el valor correspondiente al coeficiente de aporte promedio de las fibras en un elemento con un espesor determinado  $t$ , se debe calcular el promedio de los coeficientes  $g_x$  obtenidos para todos los puntos sobre una línea perpendicular al plano de análisis. El coeficiente de aporte promedio  $g_t$  puede obtenerse directamente usando la ecuación 2-5.

$$g_t = \frac{\int_0^t \frac{2 \cdot \int_0^{\alpha/2} \cos(\varphi^f) d\varphi^f}{\alpha} \cdot dz}{t} \quad 2-5$$

Aunque en algunos casos de trabajos de investigación con componentes experimentales, las probetas ensayadas han sido recortadas para retirar la zona correspondiente a la cercanía de las formaletas, lo normal es que el elemento cuente con las zonas de influencia de las dos formaletas.

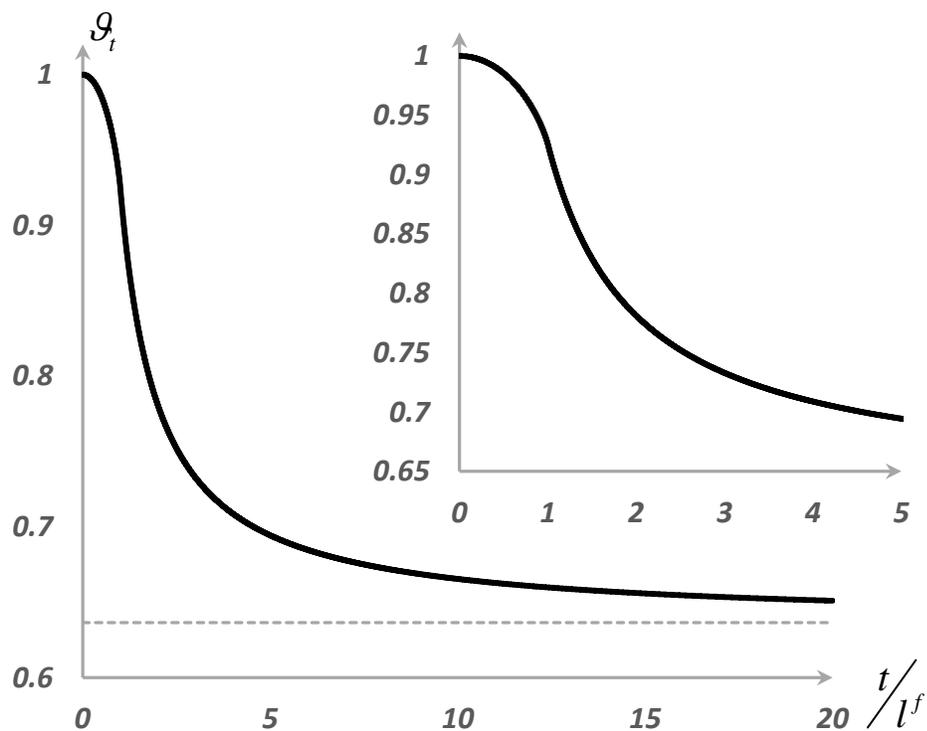
**Figura 2-18:** Valores del coeficiente  $g_z$  en función de la posición de la fibra



A manera de ejemplo en la figura 2-18 se presenta la distribución del coeficiente  $g_x$  en el espesor de un elemento para dos casos, en el primero el elemento tiene un espesor mayor que la longitud de la fibra, y en el segundo caso el espesor del elemento es menor a la longitud de la fibra. En ambos casos se indica el valor del correspondiente coeficiente de aporte promedio  $g_t$ . Adicionalmente, se han ilustrado de forma esquemática las zonas en las que la orientación de las fibras está limitada por las formaletas.

En la figura 2-19 se presentan los valores del coeficiente  $g_t$  calculados como una función del espesor  $t$  y de la longitud de la fibra  $l^f$  considerando la existencia de dos zonas de influencia de la formaleta. Cuando el espesor del elemento crece en relación al tamaño de la fibra, el coeficiente tiende a parecerse al propuesto para una fibra que puede orientarse libremente en el espacio.

**Figura 2-19:** Valores del coeficiente  $g_t$  como función del espesor del elemento



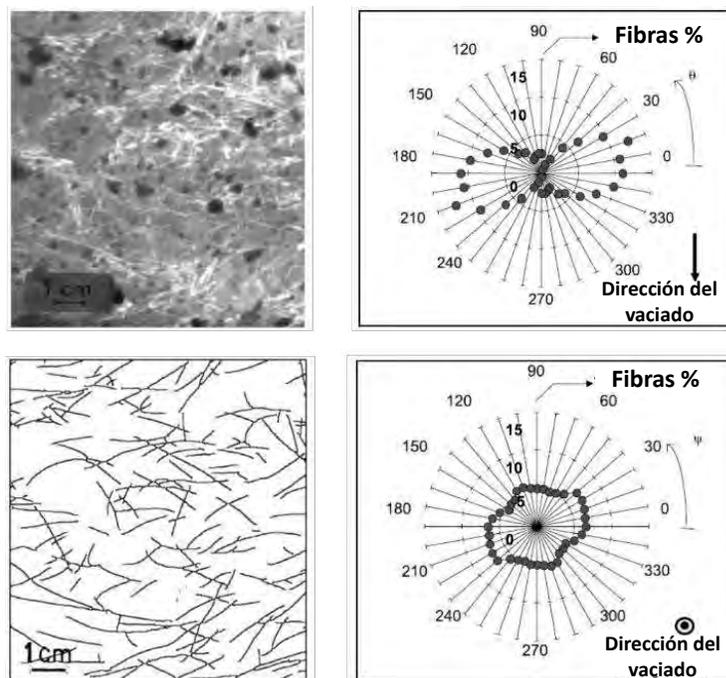
### 2.3.2 Orientaciones preferenciales de las fibras

Por otra parte, varios autores han realizado estudios en los que se demuestra que en una zona del material compuesto las fibras no se reparten homogéneamente en todas las direcciones (Chermant, et al., 2001), sino que presentan generalmente una dirección de preferencia (Figura 2-20), incluso cuando las fibras se distribuyen lo más homogéneamente posible y la orientación tiende a ser aleatoria. Esto se puede relacionar directamente con

una anisotropía del material, puesto que evidentemente la respuesta mecánica no será la misma en todas las direcciones.

**Figura 2-20:** Distribución de frecuencias de direcciones de las fibras evaluada en dos proyecciones ortogonales entre sí.

(Chermant, et al., 2001)



En esta investigación se ha realizado una evaluación del comportamiento de la anisotropía del material, en función de las longitudes de fibras que participan en cada dirección dentro del material, con el fin de establecer un coeficiente de isotropía que permita modelar el material como si fuese ortótropo. Este coeficiente indica la relación existente entre las proyecciones de las longitudes de las fibras sobre dos direcciones perpendiculares entre sí para un punto determinado del material, calculado sobre un sistema coordenado en el que se presente la mayor diferencia posible entre las dos direcciones.

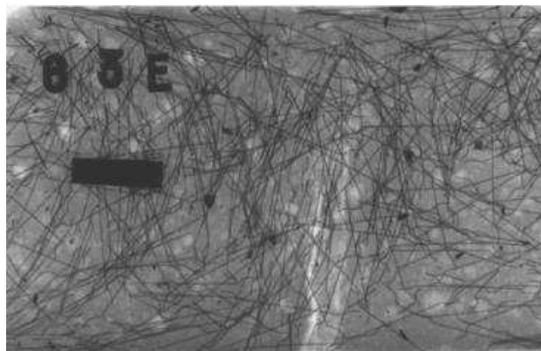
El coeficiente de isotropía que aquí se propone, debe ser calculado conociendo las proyecciones de las fibras de un elemento con un espesor determinado, sobre un plano de análisis perpendicular a dicho espesor. Esto es posible si se realiza un análisis de

imágenes sobre fotografías de radiografías realizadas a especímenes con espesor, cuantía y tamaño conocidos.

Para el cálculo de los coeficientes de isotropía en se usaron tres fotografías de imágenes de rayos X con diferentes condiciones, obtenidas de (Robins, et al., 2003) y (Vandewalle, et al., 2008). En la figura 2-21 se muestra una de las fotografías analizadas.

**Figura 2-21:** Imagen de una de las radiografías analizadas.

Fuente: (Robins, et al., 2003)

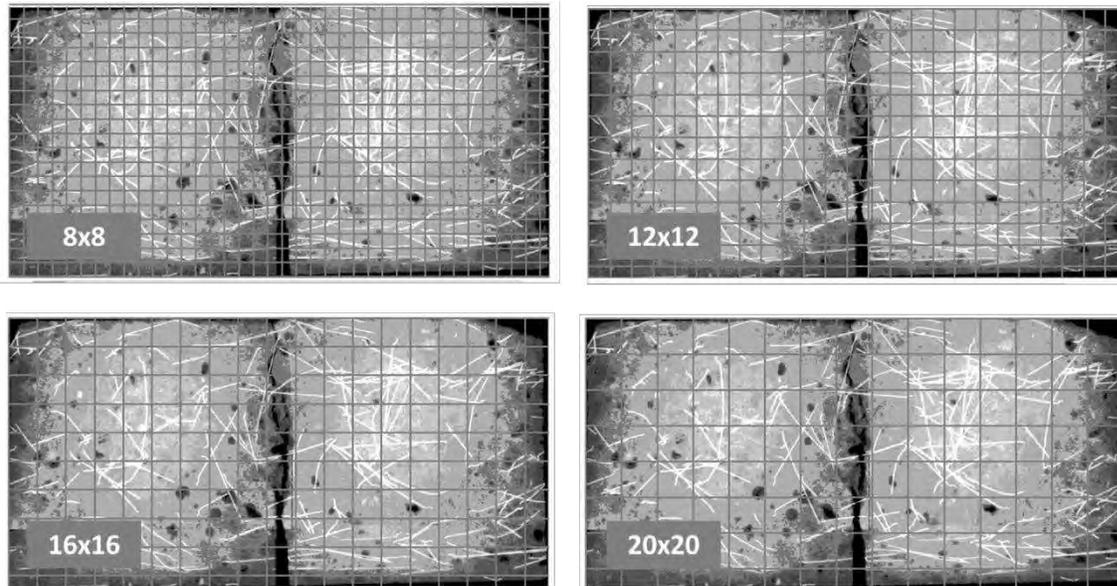


En primer lugar es necesario establecer un área de referencia para realizar el aforo de las fibras. Se estudiaron cuatro tamaños de área de sondeo, los cuales están relacionados con los tamaños máximos de los elementos finitos empleados durante la modelación numérica de los problemas mecánicos. Estas regiones corresponden a cuadrados con lados de 8mm, 12mm, 16mm y 20mm. Se usaron varios tamaños con el fin de comprobar la existencia de una dependencia del coeficiente de isotropía respecto al tamaño del elemento finito.

Cada fotografía se dividió usando una cuadrícula para cada tamaño. En el anexo B se encuentran contenidas las imágenes preparadas con cada uno de los tamaños de cuadrícula. En la figura 2-22 se muestra esquemáticamente la forma en que se trazaron las diferentes cuadrículas sobre las fotografías.

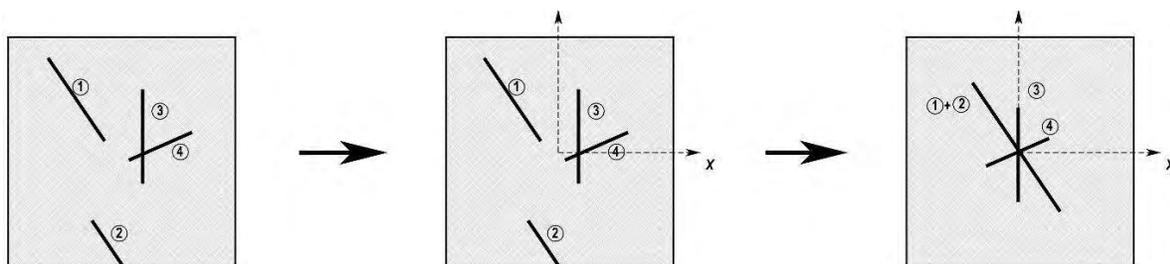
**Figura 2-22:** Esquema de los diferentes tamaños de cuadrícula.

Adaptado de: (Vandewalle, et al., 2008)



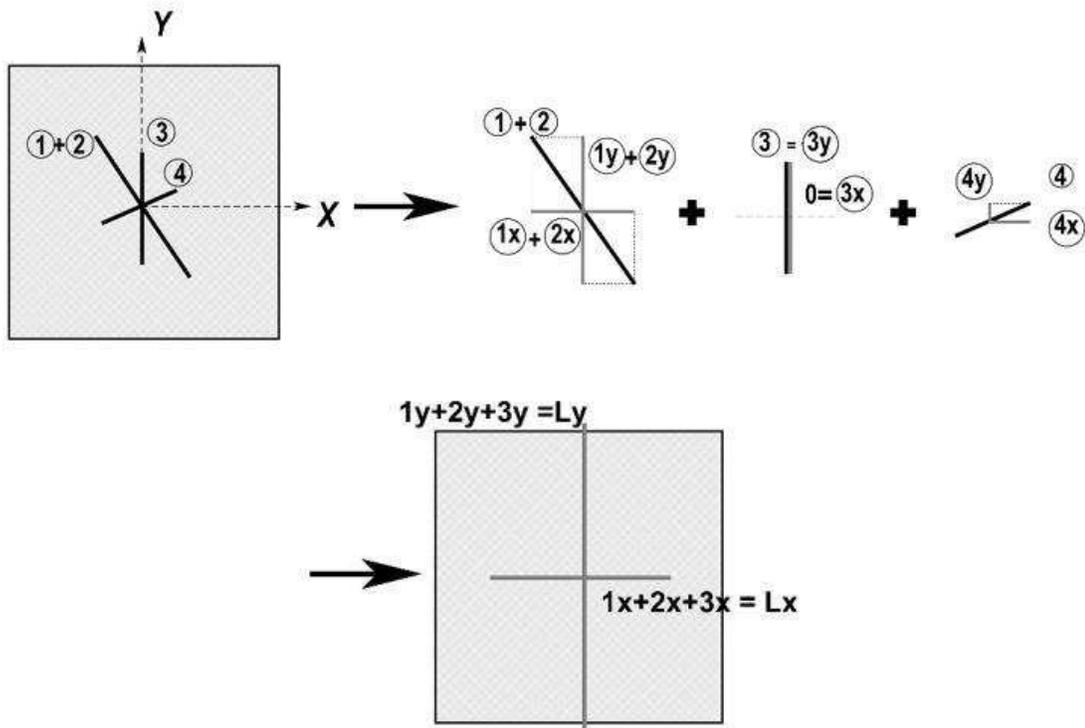
Luego de tener divididas las fotografías, se estableció un sistema coordenado de referencia y se realizó la medición de las longitudes de las fibras en cada dirección dentro de uno de los recuadros (figura 2-23). Las direcciones utilizadas en esta investigación se consideraron entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$  con intervalos de un grado.

**Figura 2-23:** Medición de las longitudes de fibras en cada dirección



Se calcularon las proyecciones de las fibras (figura 2-24) sobre las dos direcciones del sistema de referencia y se realizó la suma de las longitudes proyectadas sobre cada dirección "x" y "y".

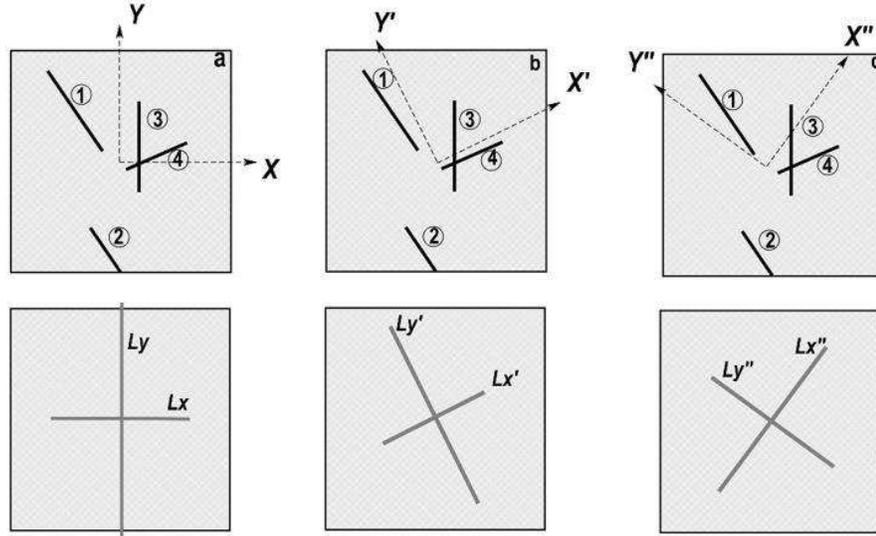
**Figura 2-24:** Cálculo de las proyecciones de las fibras



Se calculó el cociente entre la menor de las dos proyecciones y la mayor de ellas, obteniéndose un valor que puede oscilar entre 0 y 1. Este procedimiento se repitió rotando el sistema coordenado base cada grado (figura 2-25) entre 0 y 180. Se estableció como el coeficiente de isotropía, el menor de los valores obtenidos para las 180 proyecciones. Este coeficiente corresponde a las direcciones perpendiculares entre sí en las cuales se presenta la mayor anisotropía, es decir la mayor diferencia porcentual entre el aporte de las fibras en una dirección y otra ortogonal a ella, por lo que en cierta forma podrían llamarse direcciones principales.

En el caso en que existan fibras orientadas únicamente en una dirección, el coeficiente de isotropía tiene un valor igual a cero (0), y esto significa que el aporte de las fibras en la dirección perpendicular es nulo. En el caso contrario, cuando se presenta isotropía y existe el mismo aporte de las fibras para dos direcciones ortogonales, el coeficiente toma un valor de uno (1).

**Figura 2-25:** Rotación del sistema de referencia para el cálculo de las proyecciones.



Luego de realizar el cálculo de los coeficientes de isotropía para cada una de las fotografías, se encontró que en un mismo elemento se pueden presentar coeficientes de variación que van desde un 10% hasta un 85%. Además los conteos demostraron que si bien no existe una dependencia entre el coeficiente de isotropía y el factor de dispersión del contenido de fibras, si la hay entre el coeficiente de isotropía promedio y la cuantía promedio de fibras contenidas en el elemento. También se pudo comprobar que el tamaño de la región de aforo influencia el valor del coeficiente obtenido. Todos los cálculos de estos coeficientes se encuentran contenidos en el anexo C.

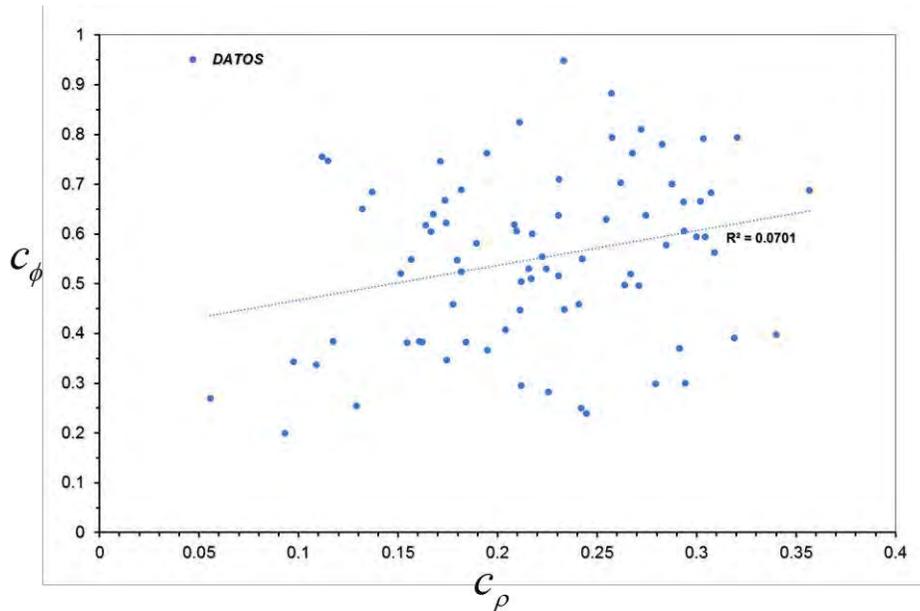
- Coeficiente de isotropía vs cuantía volumétrica

La distribución de las fibras en la matriz de concreto se ve afectada por diferentes factores, ocasionando que la cuantía volumétrica presente variaciones, las cuales se pueden ver reflejadas en la variabilidad del factor de dispersión calculado para las proyecciones de las fibras sobre un mismo plano, como se expuso en el numeral 2.2.3 de este documento.

Luego de calcular los coeficientes de isotropía para las tres radiografías de elementos analizadas en esta investigación, se encontró que no existe una dependencia directa entre el factor de dispersión medido en las mismas, como se observa en la figura 2-26,

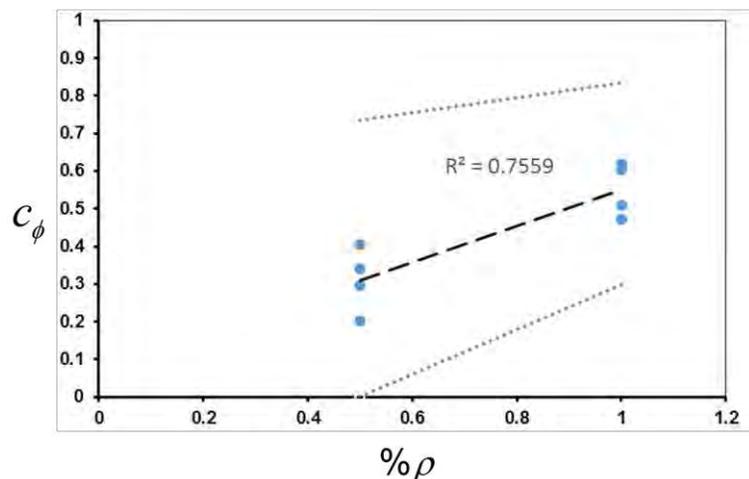
donde se grafican los respectivos valores para una de las fotografías analizadas, la cual contaba con una cuantía del 1.0%.

**Figura 2-26:** Coeficiente de isotropía  $c_\phi$  vs coeficiente de dispersión  $c_\rho$



Por el contrario, los valores de este coeficiente de isotropía oscilan alrededor de un valor medio que sí presenta una dependencia de la cuantía volumétrica promedio en el elemento. De manera tal que para un elemento con un espesor constante, a mayor cuantía, mayor coeficiente de isotropía promedio (figura 2-27).

**Figura 2-27:** Coeficiente de isotropía vs cuantía volumétrica promedio

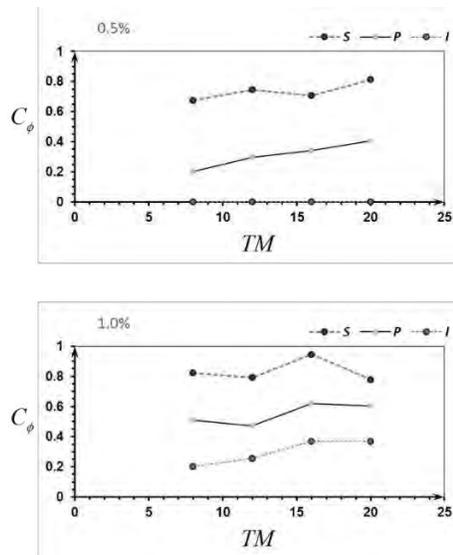


- Coeficiente de isotropía vs tamaño del área de referencia

Al calcular el coeficiente de isotropía de un mismo elemento sobre una fotografía determinada pero usando diferentes tamaños de cuadrícula, se encontró que en definitiva se presenta una variación no solo del coeficiente de isotropía promedio sino del coeficiente de variación del mismo.

En las tres fotografías analizadas se repitió el mismo comportamiento; a mayor tamaño de cuadrícula el coeficiente de isotropía tiende a acercarse a la unidad, lo que significa que la cantidad de fibras en dos direcciones perpendiculares tiende a ser la misma, lo que puede interpretarse como que el material en una escala mayor puede considerarse con una menor anisotropía. En la figura 2-28 se presentan las gráficas del promedio del coeficiente de isotropía como función del tamaño del recuadro de referencia para las tres fotografías analizadas.

**Figura 2-28:** Relación entre el coeficiente de isotropía y el tamaño del área de referencia.



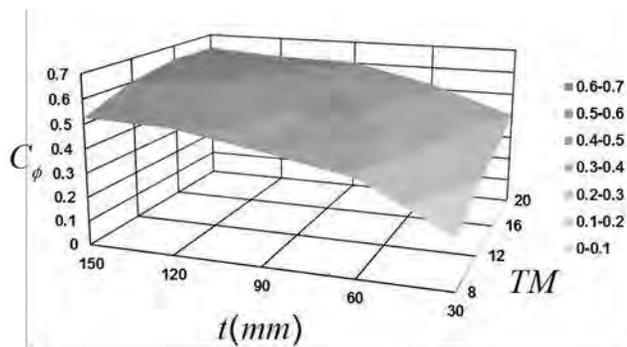
A medida que se incrementa el tamaño de la cuadrícula la dispersión decrece. Este comportamiento puede relacionarse directamente con el principio de homogenización. A medida que aumenta la escala en la que se observa un material compuesto, el mismo puede considerarse como un material más homogéneo (Nguyen, et al., 2012) (Miehe, et al., 2002) (Sun, et al., 2001).

- Coeficiente de isotropía vs espesor del elemento

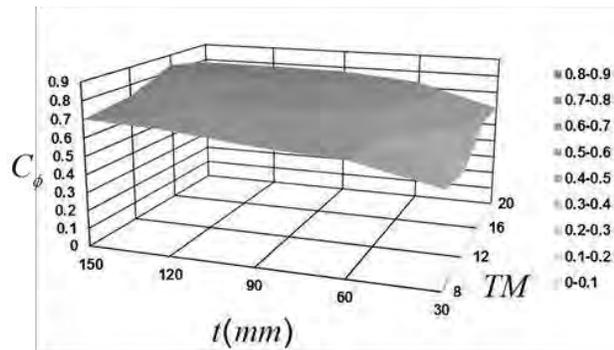
A partir de las fotografías analizadas se realizó una simulación del comportamiento del coeficiente de isotropía si el espesor del elemento se incrementaba. Para esto se superpusieron aleatoriamente áreas de la misma fotografía y se realizó el procedimiento de medición de longitudes descrito anteriormente. La simulación se hizo para elementos de dos, tres, cuatro y cinco veces el espesor del espécimen al cual correspondía la radiografía.

**Figura 2-29:** Coeficiente de isotropía vs espesor del elemento

(a) Cuantía Volumétrica del 0.5% (b) Cuantía Volumétrica del 1%



(a)



(b)

Al incrementar el espesor del elemento, era de esperar que se incrementara la cantidad de fibras proyectadas en la radiografía por lo cual el coeficiente de dispersión incrementó. Sin embargo, este incremento evidentemente no puede ser relacionado con un aumento de la cuantía puesto que al aumentar el espesor del elemento también se incrementa el volumen de referencia. Pero el incremento del número de segmentos de fibras contenidas en el área de referencia sí puede influenciar el valor del coeficiente de isotropía. En la figura 2-29 se

presentan las relaciones entre el coeficiente de isotropía, y el espesor del elemento para las tres fotografías analizadas. A medida que se incrementa el espesor del elemento, se obtiene que el coeficiente de isotropía promedio tiende a ser mayor.

## **2.4 Deslizamiento de las fibras en la matriz**

El comportamiento mecánico del SFRC, en el rango elástico depende principalmente del comportamiento de la matriz de concreto (Banthia, 1990) (Robins, et al., 2002) (Kooiman, 2000), mientras que en el comportamiento posterior al inicio de la fisuración, son las fibras quienes empiezan a jugar un papel importante en la respuesta del material. Después del inicio del daño en la matriz de concreto las fibras aportarán en mayor o en menor medida en función de la interacción que exista entre ellas y la matriz de concreto que las rodea, y a su vez esta interacción dependerá de las características físicas, geométricas y mecánicas de las fibras así como de las propiedades mecánicas del concreto (Abu-lebdeh, et al., 2011).

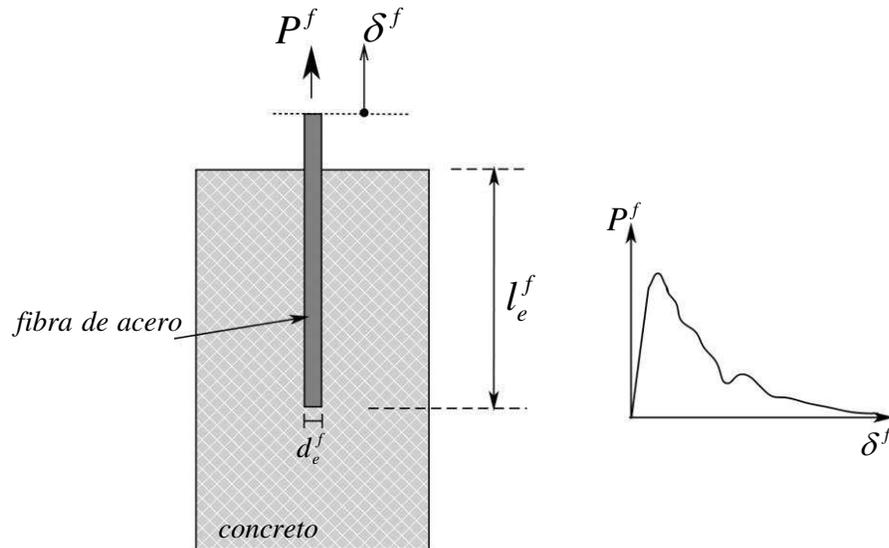
En general, se puede afirmar que a medida que se incrementa la adherencia entre el concreto y la fibra de acero, también se mejoran los valores de resistencia del SFRC ante diferentes solicitaciones. Sin embargo, es preciso aclarar que cuando el desplazamiento relativo entre las fibras y la matriz se ve restringido, el comportamiento del SFRC posterior a la fisuración se ve afectado por la resistencia de la fibra y su ductilidad. Es posible que al mejorar la adherencia se vea afectada la ductilidad del material compuesto, debido a que a pesar de que la fibra desarrolla su resistencia, el mecanismo de falla tiende a ser frágil y la capacidad residual de carga del elemento se ve disminuida.

### **2.4.1 Ensayos de arrancamiento**

El número de variables que controlan el proceso de arrancamiento, como se expuso anteriormente, es considerable, y en definitiva afecta el comportamiento del SFRC ante las diferentes solicitaciones. Por esta razón es necesario conocer cómo se comporta una fibra en particular al ser arrancada de una matriz con características mecánicas definidas. El

ensayo de arrancamiento (*pull-out*) puede usarse para medir la efectividad de la fibra (Zile & Zile, 2013).

**Figura 2-30:** Esquema del ensayo de arrancamiento



El ensayo de arrancamiento consiste en aplicar una fuerza  $P^f$  de tracción a la fibra corta de acero, que previamente se ha embebido una determinada longitud dentro de una probeta de concreto durante el proceso de fundida, como se ilustra en la figura 2-30. La carga es aplicada en extremo libre de la fibra. Ahora bien, para este tipo de ensayo se registra el desplazamiento de la fibra  $\delta^f$  con respecto a la probeta de concreto que tiene restringido el desplazamiento en el eje de aplicación de la carga, lo cual permite que durante el ensayo se describa el comportamiento conjunto del deslizamiento en la interface y las deformaciones desarrolladas en la fibra de acero. El ensayo termina cuando la fibra se arranca completamente de la matriz, se descargue el ensayo, o se presente la carga de ruptura de la fibra.

Para el presente trabajo se realizaron 81 ensayos de arrancamiento considerando 3 tipos de concreto, 3 longitudes embebidas para la fibra y 3 tipos de fibra (tabla 2-4). En todos los casos las fibras se encontraban alineadas con la dirección de la carga. Adicionalmente se realizaron ensayos de compresión para determinar la resistencia de la matriz de concreto. Todos los ensayos de arrancamiento fueron realizados en conjunto con la

estudiante de ingeniería Civil Jenny Magaly Pira Ruiz como parte de su trabajo de grado (Pira, 2014) desarrollado bajo la dirección del autor de esta Tesis.

**Tabla 2-4:** Plan de ensayos de arrancamiento

Número total de ensayos: <b>81</b>		Tipo de fibra <sup>3</sup>								
		A			B			C		
Longitud embebida <sup>1</sup>		x	y	z	x	y	z	x	y	z
Resistencia de la matriz - f'c [Mpa] <sup>2</sup>	20.5	A1-X	A1-Y	A1-Z	B1-X	B1-Y	B1-Z	C1-X	C1-Y	C1-Z
	22.1	A2-X	A2-Y	A2-Z	B2-X	B2-Y	B2-Z	C2-X	C2-Y	C2-Z
	26.8	A3-X	A3-Y	A3-Z	B3-X	B3-Y	B3-Z	C3-X	C3-Y	C3-Z

$$^1 x = l^f / 4, y = l^f / 2, z = 3l^f / 4$$

$$^2 f'c \text{ 1: } A/C=0.6, f'c \text{ 2: } A/C=0.5, f'c \text{ 3: } A/C=0.45$$

<sup>3</sup> Las características de las fibras se describen en el numeral 2.1.2

Para la elaboración de las probetas se usaron concretos de cemento portland tipo I de una de las marcas que se consiguen en el mercado ferretero colombiano y un agregado de origen natural con tamaño máximo de media pulgada (1/2"). Para el diseño de las mezclas se realizó una variación del contenido de cemento y la relación agua cemento con el fin de lograr tres diferentes resistencias. En la tabla 2-5 se presentan las dosificaciones de las mezclas de concreto usadas para los ensayos de arrancamiento, así como las resistencias promedio obtenidas de los ensayos de compresión simple que fueron realizados de acuerdo con la norma técnica NTC 673 (ICONTEC, 2010). Para determinar la resistencia a la compresión de cada mezclas se usaron tres cilindros estándar de 150mm X 300mm.

**Tabla 2-5:** Dosificación de las mezclas de concreto para los ensayos de arrancamiento

		Resistencia de la matriz de concreto <sup>2</sup>		
		f'c I	f'c II	f'c III
<b>Resistencia a la compresión<sup>1</sup></b>		20.5	22.1	26.8
Relación A/C		0.6	0.5	0.45
Cemento	[kg/m <sup>3</sup> ]	400	450	500
Agua	[kg/m <sup>3</sup> ]	240	225	225
Agregado Fino	[kg/m <sup>3</sup> ]	950	925	900
Agregado Grueso	[kg/m <sup>3</sup> ]	950	925	900

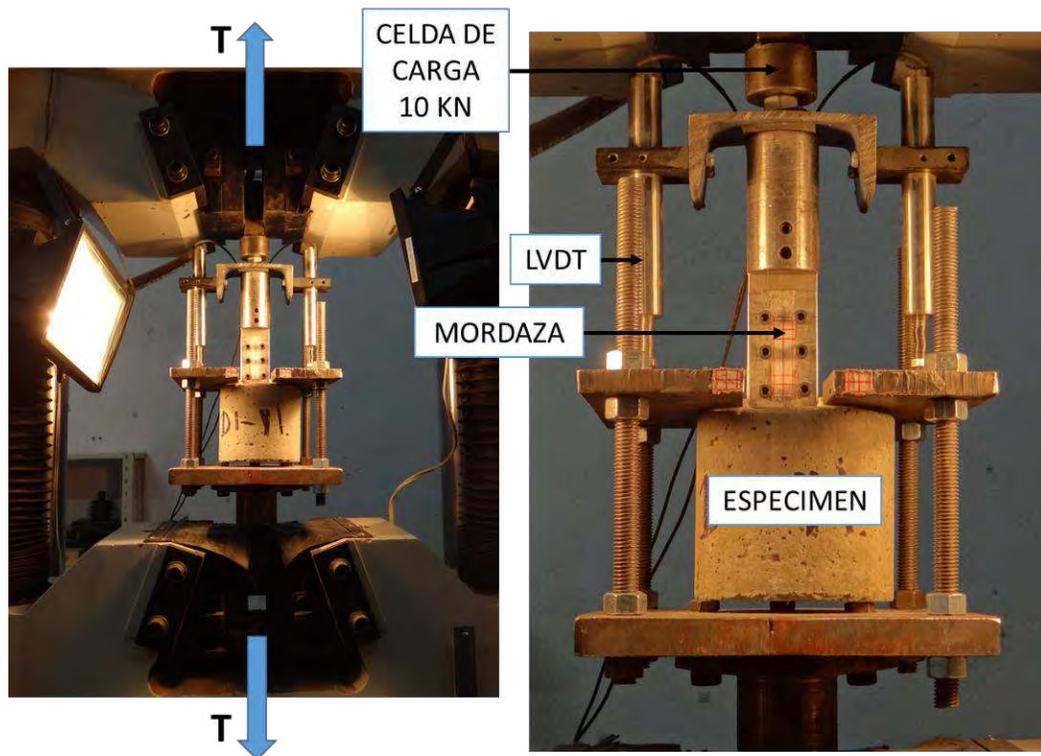
<sup>1</sup> En cilindros estándar, a los 28 días de curado sumergidos en agua.

Los especímenes consistieron en cilindros de 100mm de diámetro y 100mm de altura. En el centro de una de las caras planas del cilindro y perpendicular a la misma, se ubicó una fibra de manera que tuviera embebida la longitud determinada, la cual fue marcada previamente sobre la fibra (figura 2-31).

**Figura 2-31:** Probeta para el ensayo de arrancamiento



**Figura 2-32:** Montaje para el ensayo de arrancamiento



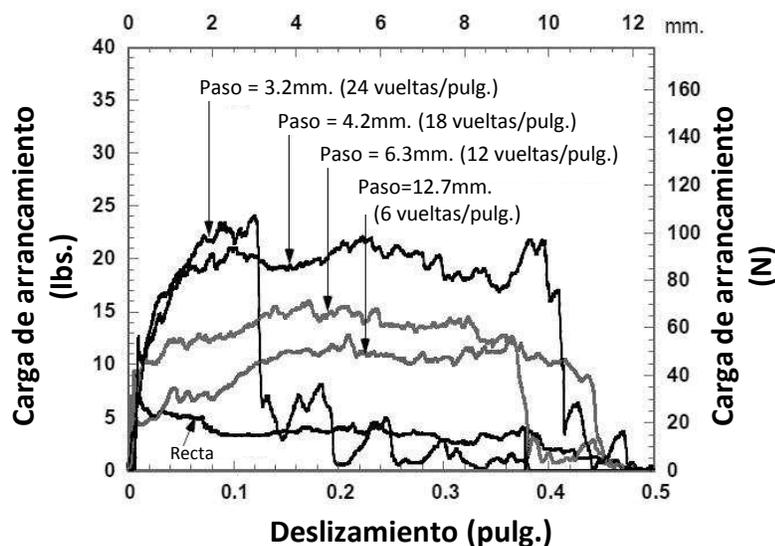
El ensayo se realizó en una máquina universal servocontrolada, y fue desarrollado imponiendo desplazamientos a una tasa de 1mm/min, hasta lograr el completo arrancamiento de la fibra. Se instrumentó el ensayo con dos LVDT (*Linear variable differential transformer*) ubicados sobre un diámetro de la probeta, equidistantes al centro de la misma. También se empleó una celda de carga con una capacidad de 10KN. En la figura 2-32 se presenta un esquema del montaje empleado.

## 2.4.2 Variables que afectan el arrancamiento

La adherencia entre la fibra de acero y la matriz de concreto está controlada principalmente por dos mecanismos: la fricción y el anclaje mecánico. Por otra parte, existen tres parámetros importantes en la interacción de la fibra con la matriz, el primero es el valor de la carga pico, el segundo es la ductilidad y el tercero la eficiencia de la fibra. Es necesario aclarar que un incremento de adherencia no necesariamente representa un incremento de los tres parámetros. Por lo general, a mayor adherencia mayor carga pico, sin embargo cuando la adherencia es muy buena el incremento de carga se ve restringido por la resistencia de la fibra.

**Figura 2-33:** Relación carga-deslizamiento en ensayos de arrancamiento. Influencia de altas adherencias en la reducción de la ductilidad.

Fuente: (Naaman, 2003)



La ductilidad, por otra parte, se ve afectada por los mecanismos de deslizamiento de la fibra y depende, tanto de qué tan rápido se da la pérdida de adherencia, como de qué tan largo es el recorrido de la fibra antes de ser arrancada por completo de la matriz. En la figura 2-33 se presenta un ejemplo de este comportamiento, en el cual Naaman (2003) encontró que las fibras torsionadas (diferentes a la “recta”) incrementaban su resistencia al arrancamiento a medida que la separación entre los pasos del espiral es menor. Sin embargo, con un número excesivo de pasos (24 vueltas/pulgada) la adherencia es tan alta que la fibra se rompe.

- Geometría de las fibras

La geometría de las fibras es quizá una de las variables que más afecta el proceso de arrancamiento. Al parecer la industria se ha esmerado en diseñar fibras de acero que puedan desarrollar una mejor adherencia con el concreto, con el fin de aprovechar al máximo su capacidad de carga.

En el numeral 2.1 de este documento se presentó una descripción de las diferentes geometrías y tamaños de fibras disponibles en el mercado. A continuación se presentará una reseña de cómo la geometría de la sección y el tamaño de la sección, la geometría del eje de la fibra, la longitud de la fibra y un parámetro conocido como relación de forma, influyen en la adherencia entre los dos componentes del SFRC.

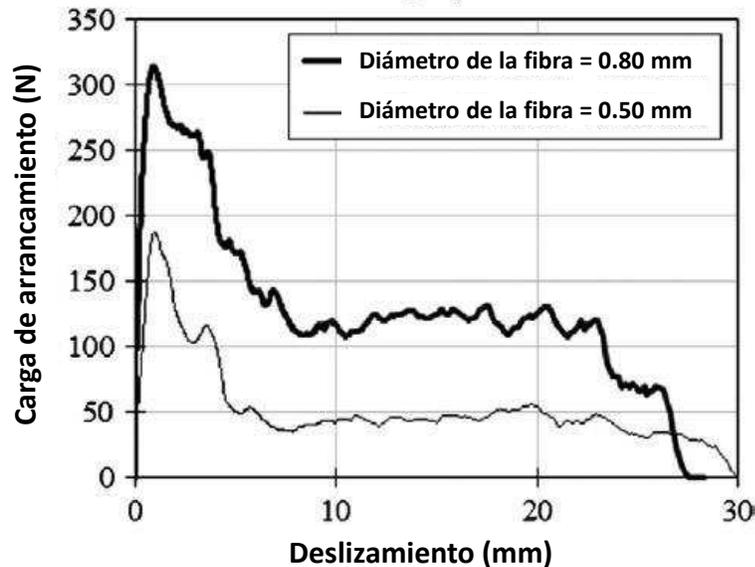
La geometría de la sección es un parámetro que influye, especialmente en el desarrollo de adherencia mediante el mecanismo de fricción y por tanto en la efectividad que pueda presentar la fibra. Al aumentar el área de la sección, es claro que se aumentará la resistencia de la fibra; sin embargo, aunque el perímetro de la misma también aumenta, no lo hace en la misma proporción que el área.

Es conveniente contar con una sección transversal de la fibra que permita tener la menor relación posible entre el área y el perímetro. En la figura 2-2 del numeral 2.1.1 se presentaron diferentes secciones, con su respectivo coeficiente de eficiencia. Cuando una fibra tiene un mayor perímetro que otra con la misma área, dicha fibra podrá transferir mayor cantidad de la fuerza de tracción en forma de esfuerzos

tangenciales en la misma longitud de la fibra (figura 2-34). Así mismo las fibras que presentan una sección de menor tamaño, tienden a requerir menores longitudes para desarrollar toda su resistencia.

**Figura 2-34:** Relación carga-deslizamiento en ensayos de arrancamiento. Influencia del diámetro de la fibra.

Fuente: (Soetens, et al., 2013)

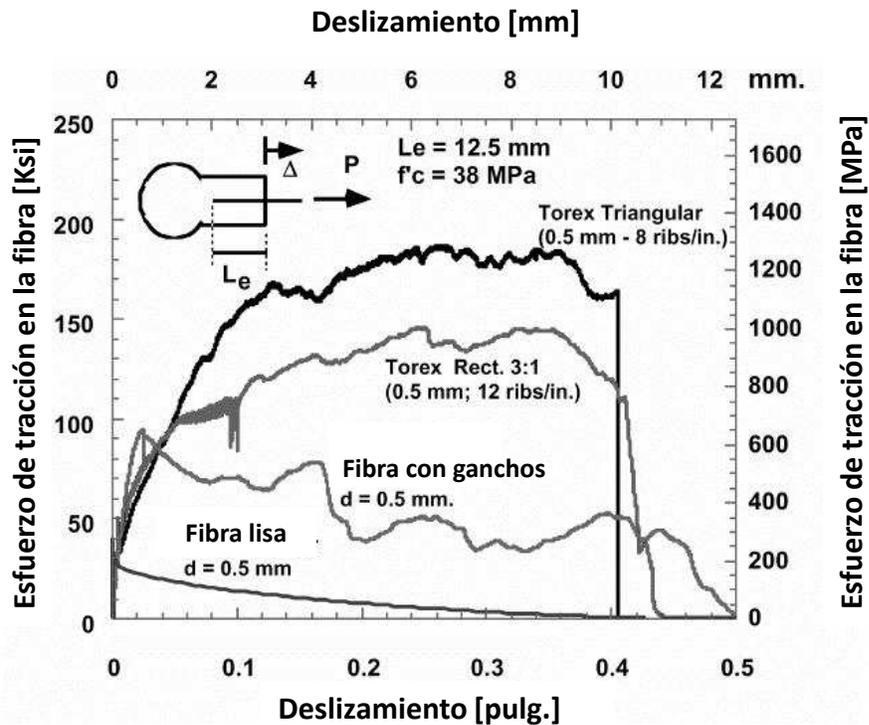


Ahora bien, el mecanismo de fricción está siempre presente en el fenómeno de adherencia, en menor o mayor cantidad. En el caso de las fibras rectas y lisas éste resulta ser el único mecanismo disponible para transmitir esfuerzos entre la fibra y la matriz y por lo general resulta poco eficiente. Por esta razón es común encontrar diferentes formas del eje longitudinal de las fibras, como en las fibras con gancho, las fibras onduladas e incluso las fibras torsionadas, con el fin de incrementar la adherencia mediante un anclaje de tipo mecánico.

En la figura 2-35 se presenta una comparación entre las curvas de arrancamiento para dos fibras de sección circular: una fibra recta y una fibra con gancho, y dos fibras torsionadas: una con sección rectangular y una con sección triangular, todas con la misma longitud embebida y el mismo diámetro equivalente (Soetens, et al., 2013).

**Figura 2-35:** Relación carga-deslizamiento en ensayos de arrancamiento. Influencia del tipo de fibras.

Fuente: (Naaman, 2003)

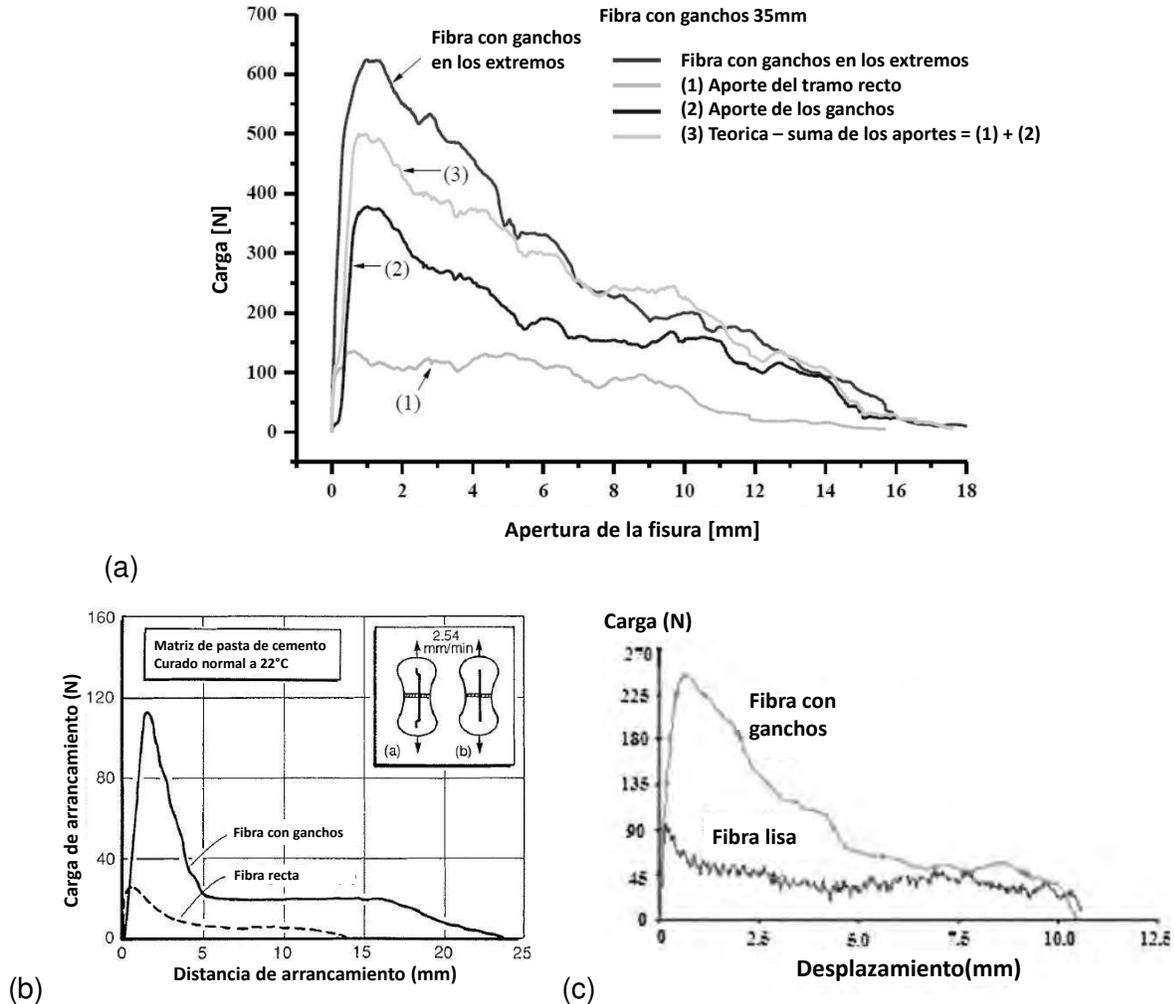


Las fibras terminadas en ganchos son uno de los tipos más comunes en el mercado, esto gracias a que el gancho permite mejorar la adherencia de la fibra y la ductilidad simultáneamente, ya que el mecanismo de pérdida de adherencia incluye un desdoblamiento del gancho que aporta a la ductilidad en el arrancamiento altos valores de disipación de energía al involucrar un mecanismo de plastificación del acero.

En la figura 2-36 se presentan las curvas de arrancamiento para fibras lisas y con gancho en el extremo obtenidas por varios investigadores, en las que se puede apreciar el aporte a la adherencia proporcionado por la fricción y por el gancho en este tipo de fibras.

**Figura 2-36:** Relación carga-deslizamiento en ensayos de arrancamiento. Influencia del gancho y la fricción en la adherencia fibra – matriz.

Fuente: (a) (Soe Htut, 2010), (b) (Banthia, 1990), (c) (Abu-lebdeh, et al., 2011)

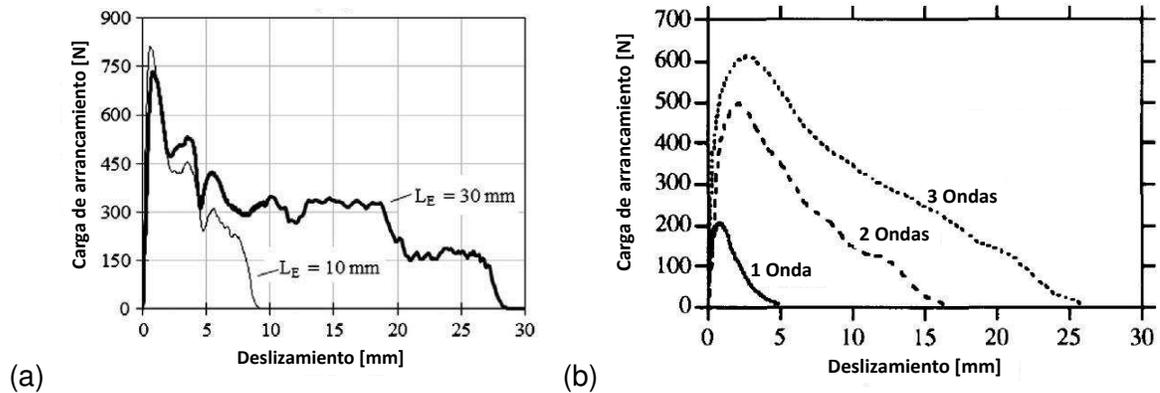


- Longitud embebida

La longitud de la fibra influye considerablemente en la adherencia de las fibras lisas (Cunha, et al., 2010), debido a que al incrementarse también incrementa el área superficial de la fibra disponible para desarrollar esfuerzos tangenciales y transferir las fuerzas de tracción entre la fibra y la matriz (figura 2-37c). De la misma forma en aquellas fibras que presentan deformaciones a lo largo de su eje (figura 2-37b), la adherencia depende directamente de la longitud de las mismas (Chanvillard & Aitcint, 1996).

**Figura 2-37:** Relación carga-deslizamiento en ensayos de arrancamiento. Influencia de la longitud en la adherencia fibra – matriz

Fuente: (a) (Soetens, et al., 2013), (b) (Chanvillard & Aitcint, 1996)



En las fibras con ganchos (figura 2-37a) sucede algo similar (Cunha, et al., 2010) (Soetens, et al., 2013), puesto que, como ya se expuso, un porcentaje de los esfuerzos de adherencia son proporcionados por la fricción en el tramo recto de la fibra.

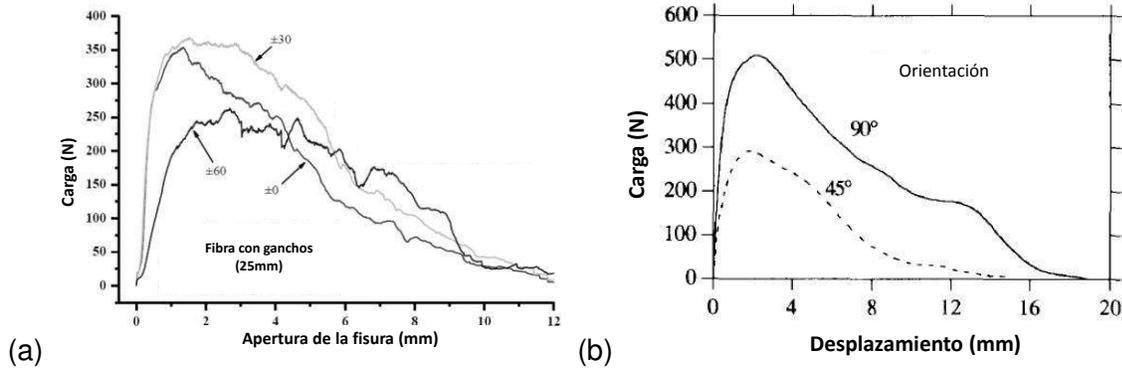
- Inclinación de la fibra

La inclinación de la fibra respecto a la dirección de la carga de arrancamiento influye tanto en la resistencia pico, como en el comportamiento posterior de la curva de arrancamiento (Kooiman, 2000) (Laranjeira, et al., 2010) (Robins, et al., 2002) (Soetens, et al., 2013) (Chanvillard & Aitcint, 1996). En la figura 2-38 se presentan dos ejemplos de las curvas de arrancamiento obtenidas para fibras con gancho al variar únicamente la inclinación de estas últimas respecto a la dirección de la carga.

Soe (2010) realizó ensayos de arrancamiento sobre diferentes tipos de fibras, variando la inclinación. En la figura 2-39 se presentan los resultados promedio de la variación de las cargas pico con inclinaciones entre  $0^\circ$  y  $60^\circ$  en relación con la de las fibras alineadas en la dirección de la carga. La primera gráfica corresponde a las fibras con ganchos en los extremos mientras que la segunda contiene los resultados de las fibras rectas.

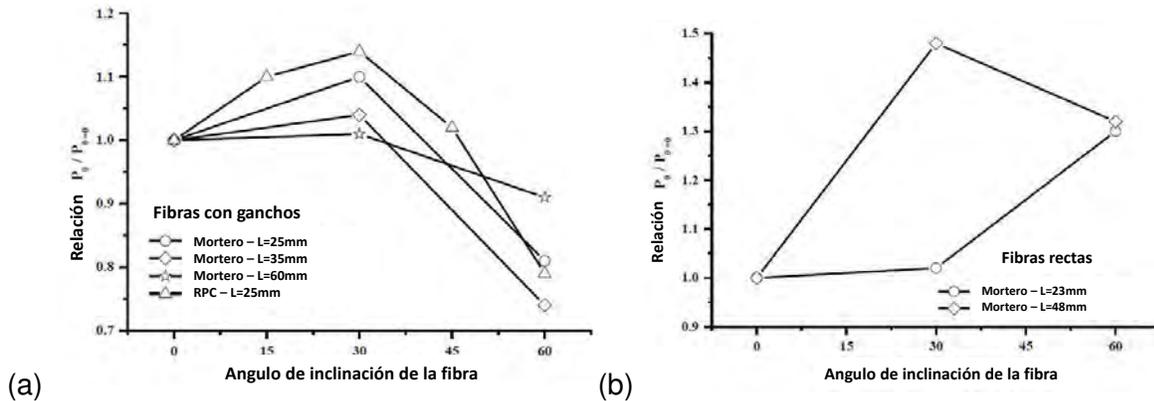
**Figura 2-38:** Relación carga-deslizamiento en ensayos de arrancamiento. Influencia del gancho y la fricción en la adherencia fibra – matriz

Fuente: (a) (Soe Htut, 2010), (b) (Chanvillard & Aitcint, 1996)



**Figura 2-39:** Influencia del ángulo entre el eje de la fibra y la dirección de la carga en la resistencia al arrancamiento de fibras con gancho

(a) Fibras con gancho, (b) fibras rectas. Fuente: (Soe Htut, 2010)



Claramente, la variación debida a la inclinación de las fibras también está relacionada con la longitud y la forma de las mismas. Adicionalmente, de acuerdo con Robins y otros la inclinación afecta de diferente forma la carga pico, la rigidez y la ductilidad (Robins, et al., 2002).

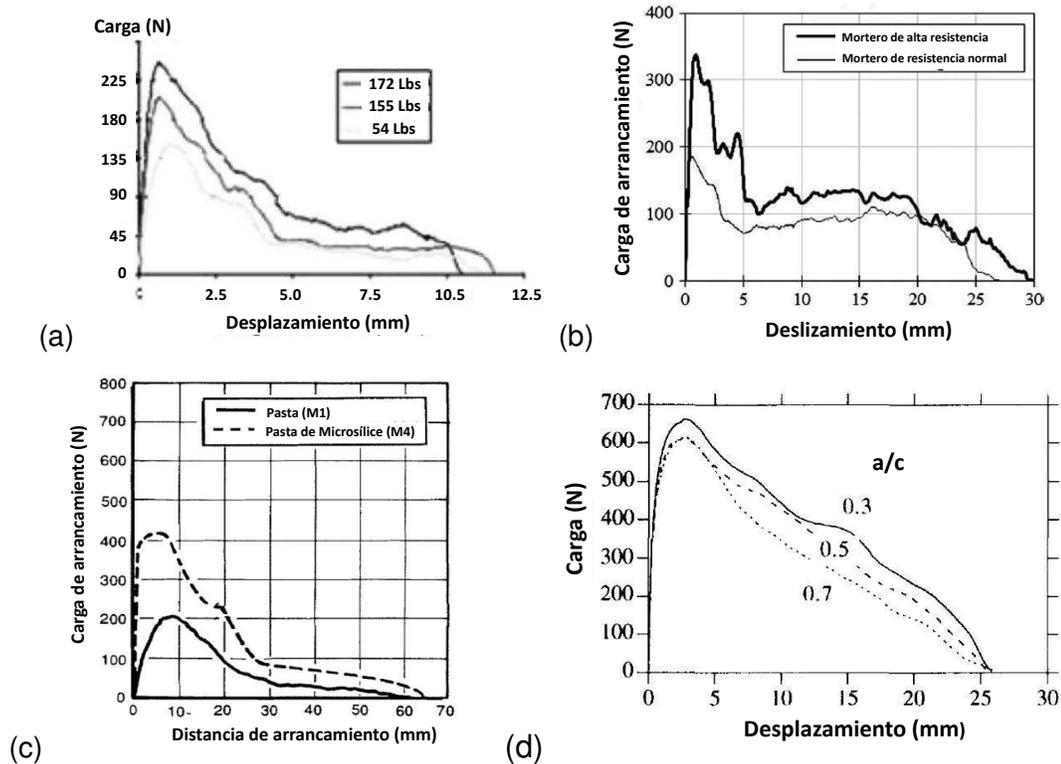
- Resistencia de la matriz de concreto

El comportamiento de la fibra en el ensayo de arrancamiento se ve claramente afectado por la resistencia de la matriz de concreto (Soetens, et al., 2013), incluso cuando las fibras son rectas (Chanvillard & Aitcint, 1996) (Banthia, 1990) (Robins, et al., 2002). Sin embargo esta dependencia es más clara cuando la forma de las fibras permite mejorar

la adherencia, como en el caso de las fibras con ganchos, fibras onduladas o fibras torsionadas. Abu-Lebdeh y otros (Abu-lebdeh, et al., 2011) realizaron ensayos de arrancamiento de cuatro diferentes tipos de fibras embebidas en matrices de concreto con varias resistencias. En la figura 2-40 se presenta una comparación entre las curvas de arrancamiento de una fibra con ganchos en los extremos para diferentes calidades de concreto.

**Figura 2-40:** Relación carga-deslizamiento en ensayos de arrancamiento. Influencia de la calidad de la matriz.

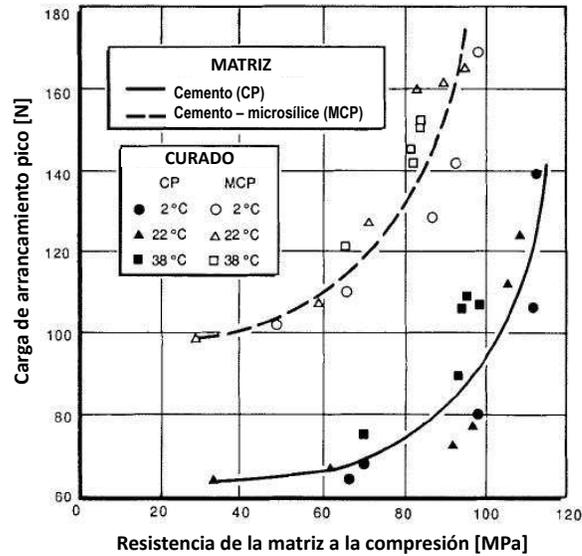
Fuente: (a) (Abu-lebdeh, et al., 2011), (b) (Soetens, et al., 2013), (c) (Banthia, 1990), (d) (Chanvillard & Aitcint, 1996)



Banthia y Armelin (2002) establecieron una relación entre la carga pico de la curva de arrancamiento y la resistencia de la matriz a partir de ensayos con un tipo de fibras terminadas en ganchos, embebidas en dos tipos de pasta, una de cemento y otra adicionada con microsilice, para diferentes temperaturas de curado. En ambos casos la tendencia fue un incremento de la carga pico con el incremento de la resistencia de la matriz (figura 2-41).

**Figura 2-41:** Relación carga-deslizamiento en ensayos de arrancamiento. Influencia de la resistencia de la matriz en la resistencia al arrancamiento

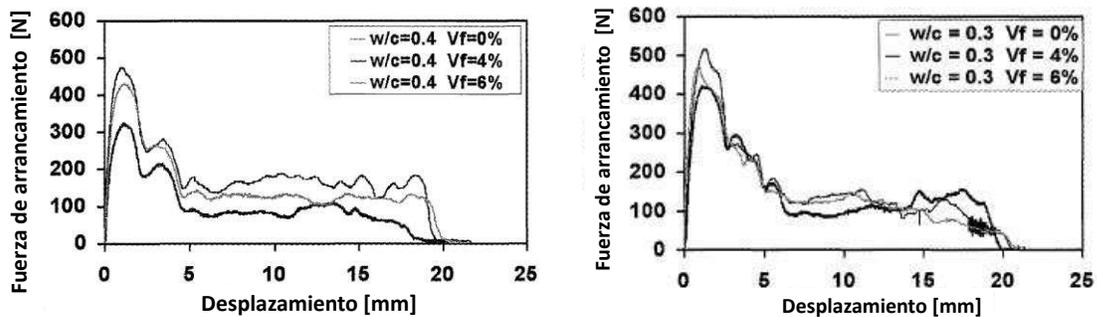
Fuente: (Banthia, 1990)



Markovich y otros encontraron que en concretos con bajas resistencias pero adicionados con fibras, la adherencia se incrementa conforme crece la cuantía volumétrica de fibras (Markovich, et al., 2001). Esto se debe a que las matrices de poca resistencia son muy frágiles y presentan microfisuración en la vecindad de la fibra durante el proceso de arrancamiento de fibras deformadas; lo que se logra controlar al adicionar fibras cortas dispersas en la matriz (figura 2-42).

**Figura 2-42:** Influencia de la cuantía de fibras en la resistencia al arrancamiento

Fuente: (Markovich, et al., 2001)

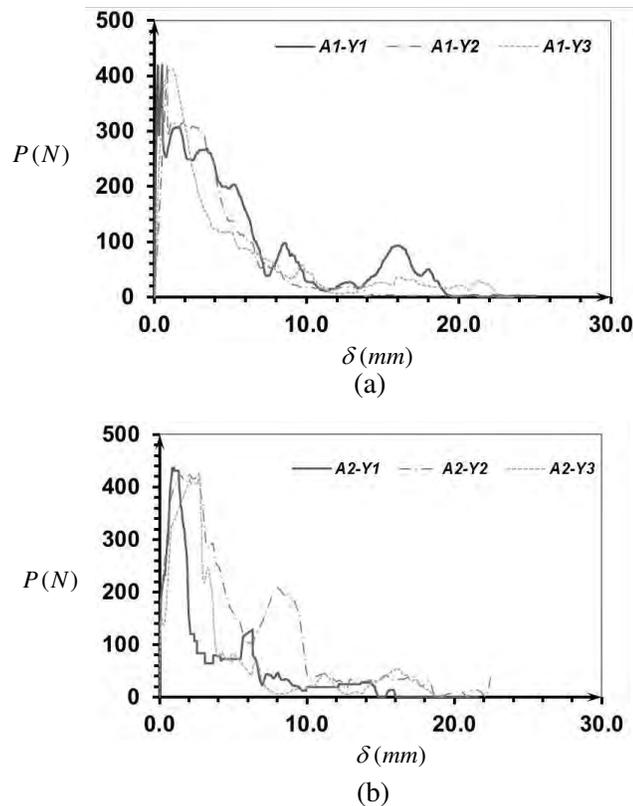


### 2.4.3 Parámetros de arrancamiento para varias fibras

Como resultado de los ensayos de arrancamiento se obtuvieron tres curvas de carga contra desplazamiento para cada combinación de tipo de fibra, resistencia de la matriz y longitud embebida. Los resultados individuales para el ensayo de cada espécimen se encuentran contenidos en el anexo D. En la figura 2-43 se presentan a manera de ejemplo las gráficas de carga contra desplazamiento para los tres especímenes de la fibra con ganchos en los extremos, tipo A, embebida una longitud igual a  $l'/2$ , en una matriz con una resistencia de 20.5MPa y de 22.1 MPa, respectivamente.

**Figura 2-43:** Relación carga-deslizamiento en ensayos de arrancamiento para dos grupos de especímenes

(a) A1-Y (b) A2-Y



Las tres líneas presentan comportamientos diferentes a pesar de tratarse de especímenes con exactamente las mismas condiciones. Se presume que las diferencias en las curvas sean ocasionadas por la variación en la distribución de los agregados alrededor de la fibra,

además de la variabilidad relacionada con las condiciones de realización del ensayo. Generalmente los resultados encontrados en la literatura presentan menores variaciones (Abu-lebdeh, et al., 2011) (Soetens, et al., 2013) (Banthia, 1990) (Chanvillard & Aitcint, 1996) (Soe Htut, 2010) (Banthia, 1990); sin embargo en la mayoría de los casos corresponden a matrices elaboradas únicamente con pasta de cemento, o con mortero y con menor frecuencia a concretos con tamaños máximos de agregado que no superan los 5mm.

Las relaciones de carga  $P^f$  contra desplazamiento  $\delta^f$  de cada uno de los especímenes se transformaron en relaciones de esfuerzo normal  $\sigma^f$  contra deformación longitudinal  $\varepsilon^f$  usando las ecuaciones 2-6 y 2-7 respectivamente.

$$\sigma^f = \frac{P^f}{A^f} \quad 2-6$$

$$\varepsilon^f = \frac{\delta^f}{l_e^f} \quad 2-7$$

Donde  $A^f$  es el área de la sección transversal de la fibra y  $l_e^f$  es la longitud embebida de la misma.

Para todos los especímenes se determinaron tres parámetros a partir de sus gráficas de arrancamiento: el primero fue el esfuerzo pico en la fibra  $\sigma_{máx}^f$ , el segundo la deformación equivalente que corresponde a la carga pico  $\varepsilon_{máx}^f$  y el tercero fue el área bajo la curva, equivalente a la densidad de energía disipada durante el arrancamiento  $U_T^f$ .

Posteriormente se obtuvieron los valores promedio de los tres especímenes para cada combinación. En la tabla 2-6 se presentan los resultados promedio obtenidos del esfuerzo pico y la densidad de energía de deformación para los tres tipos de fibras ensayadas.

En general se encontró una tendencia al incremento tanto del esfuerzo pico, como de la densidad de energía disipada con el incremento de la profundidad. Un comportamiento similar sucede al aumentar la profundidad embebida de la fibra. En la figura 2-44 se presentan los resultados promedio obtenidos para el esfuerzo pico y la densidad de energía de deformación, obtenidas para el tipo de fibras A.

**Tabla 2-6:** Resultados promedio de los ensayos de arrancamiento

Tipo de fibra	Resistencia de la matriz [MPa]	Longitud embebida					
		1/3	1/2	2/3	1/3	1/2	2/3
		Esfuerzo pico [Mpa]			Densidad de energía [J/mm <sup>3</sup> ]		
A <sup>1</sup>	20.5	465.44	483.77	510.69	65.18	127.29	137.55
	22.1	480.38	494.96	551.43	77.34	88.95	110.59
	26.8	490.06	533.21	557.85	37.68	46.52	98.73
B <sup>2</sup>	20.5	555.27	614.25	705.42	79.55	138.57	188.90
	22.1	576.55	667.59	740.93	170.87	148.05	104.32
	26.8	607.04	686.05	912.36	90.48	113.76	13.10
C <sup>3</sup>	20.5	678.45	792.00	853.82	75.49	173.37	266.73
	22.1	749.38	854.26	889.84	67.22	120.77	177.65
	26.8	842.03	870.15	931.22	92.62	149.32	228.44

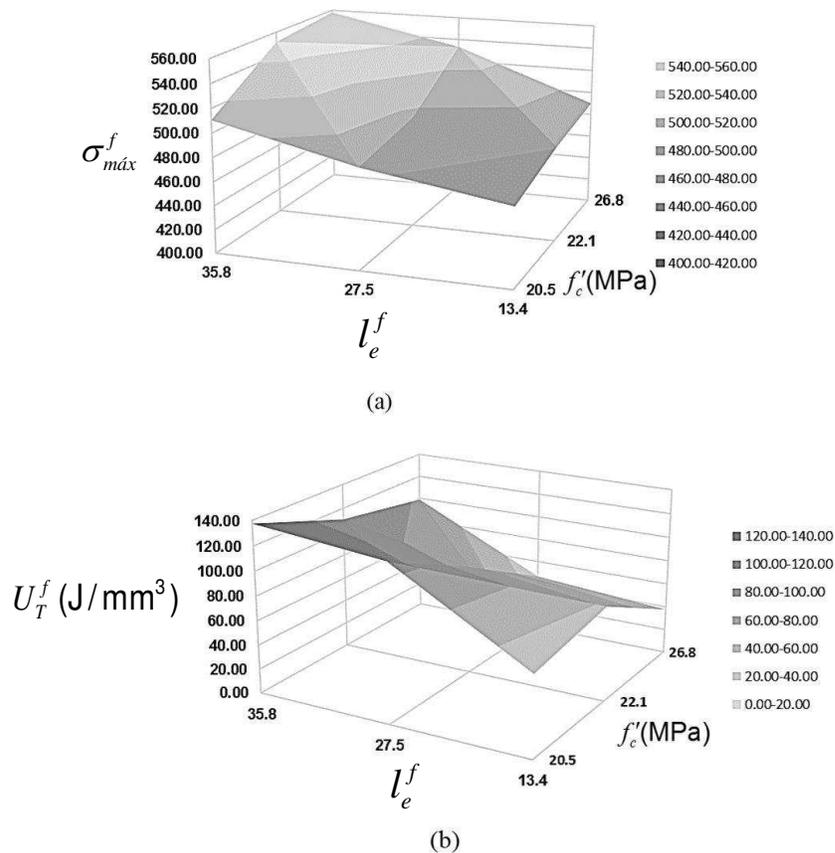
<sup>1</sup> Fibras con ganchos en los extremos d= , l=

<sup>2</sup> Fibras onduladas, d= , l=

<sup>3</sup> Fibras con ganchos en los extremos d=

**Figura 2-44:** Parámetros de arrancamiento para las fibras A

(a) Esfuerzo pico, (b) Densidad de energía de deformación

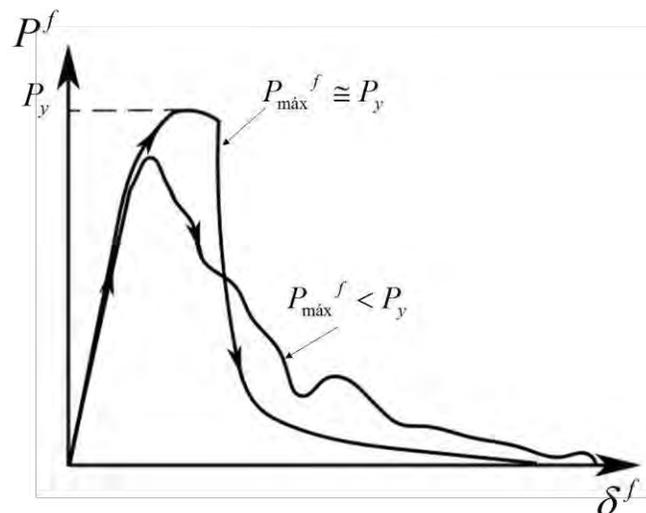


### 2.4.4 Degradación de los mecanismos de adherencia

Durante el ensayo de arrancamiento se pueden identificar varias etapas asociadas al mecanismo de pérdida parcial o total de adherencia en la interfaz, como se mencionó en el numeral 2.4.2. En una primera etapa se presentó un comportamiento elástico de la fibra conservando total adherencia con el concreto. Sin embargo, para niveles bajos de esfuerzo comienza una segunda etapa, en la cual la interfaz exhibe pérdida parcial de adherencia, ocasionando una rigidez de las fibras embebidas en la matriz, menor que la rigidez de las fibras aisladas. En la última etapa se pueden presentar los siguientes dos modos de falla. El primero ocurre si la fuerza máxima de adherencia es mayor que la fuerza de fluencia de la fibra de acero, y en consecuencia se producirá fluencia y posterior rotura de la fibra. El segundo modo de falla se presenta cuando la fuerza máxima de adherencia es menor que la fuerza de fluencia de la fibra, y en consecuencia la fibra se extrae completamente de la matriz.

En la figura 2-45 se presenta una comparación entre los resultados del arrancamiento de dos fibras con igual resistencia. La primera se presenta una alta adherencia con la matriz, dada por la geometría de la fibra y alcanzando el esfuerzo de fluencia del acero ( $P_{máx}^f \cong P_y$ ). En cambio, la segunda fibra tiene una fuerza máxima de adherencia menor que la fuerza de fluencia de la fibra ( $P_{máx}^f < P_y$ ).

**Figura 2-45:** Modos de falla del ensayo de arrancamiento

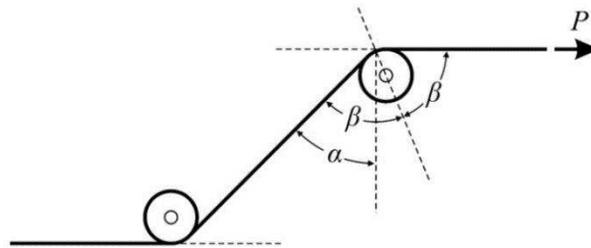


En el caso de las fibras con gancho en los extremos y las fibras onduladas, es posible explicar el proceso de arrancamiento mediante un modelo que combina los efectos de la fricción a lo largo de la fibra y la fuerza necesaria para desdoblar los tramos curvos de la misma.

Alwan, Naaman, y Guerrero (1999) desarrollaron un modelo de poleas con fricción que pretende explicar el desarrollo de la fuerza de arrancamiento debida al anclaje mecánico cuando la fibra se desliza a través de dos curvas (figura 2-46). En el modelo ambas poleas presentan componentes tangenciales y rotacionales de fricción. La componente tangencial corresponde a la fricción entre la superficie de la fibra y la matriz de concreto en la zona curva, mientras que la componente rotacional es equivalente al trabajo desarrollado para desdoblar la fibra de acero.

**Figura 2-46:** Esquema del modelo de poleas con fricción

Fuente: (Zile & Zile, 2013)

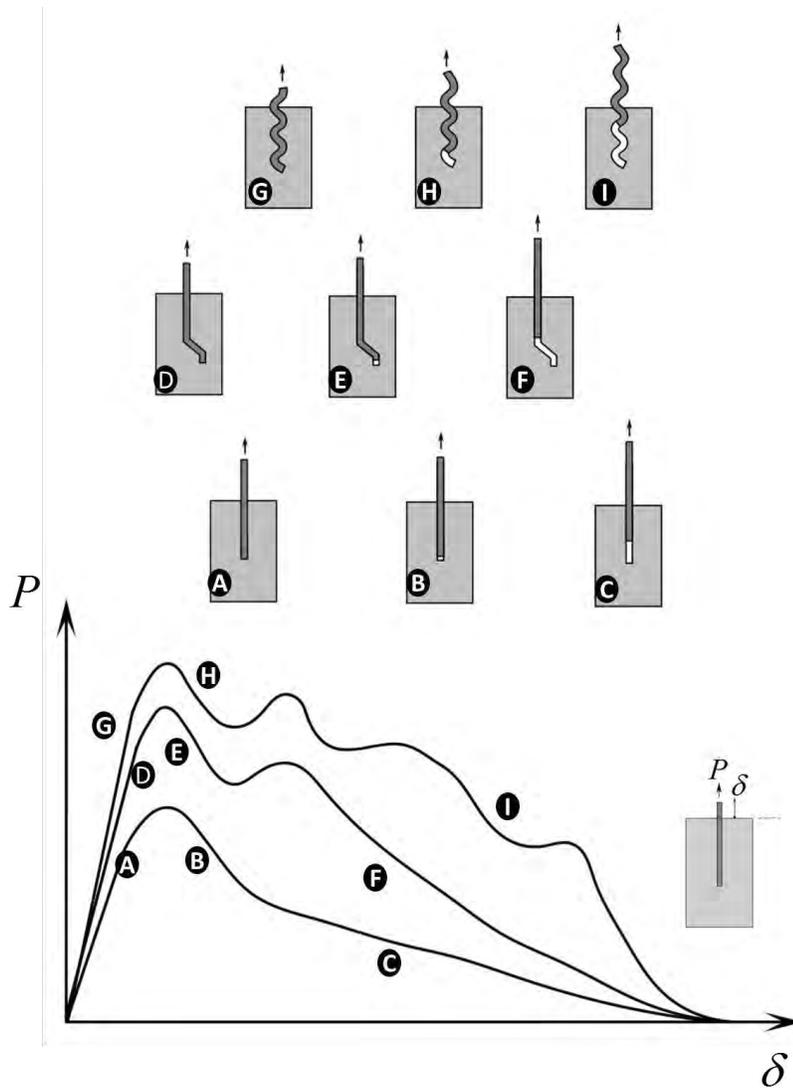


Adicionalmente, para el cálculo de la fuerza de arrancamiento se debe considerar que existe una componente de fricción en los tramos rectos de la fibra. En el caso de las fibras rectas ésta es la única componente efectiva de la adherencia. En general, la componente de fricción decrece cuando comienza el deslizamiento debido a que la zona de contacto entre la fibra y la matriz también disminuye (Guerrero & Naaman, 2000).

Por el contrario, las fibras onduladas son sometidas a una serie de ciclos de doblamiento y desdoblamiento en régimen elástico y plástico a medida que son arrancadas de la matriz de concreto (Zile & Zile, 2013). Al igual que las fibras rectas, la superficie de contacto de las fibras onduladas decrece y las ondulaciones embebidas donde se produce trabajo plástico son menores mientras la fibra es arrancada. Adicionalmente se presenta el efecto Bauschinger (Park & Paulay, 1975) y de una pérdida de ductilidad del acero de la fibra con cada ciclo de doblado.

En la figura 2-47 se presentan esquemáticamente la relaciones carga-desplazamiento de ensayos de arrancamiento con tres tipos de fibras que difieren únicamente en la forma del eje longitudinal, la primera es recta, la segunda presenta un gancho en el extremo y la tercera es ondulada. En todos los casos representados las fibras presentan una resistencia a la tracción superior a la resistencia al arrancamiento.

**Figura 2-47:** Fases en el proceso de arrancamiento.



## 3. Formulación e implementación del modelo numérico desarrollado para el SFRC

El concreto reforzado con fibras cortas de acero (SFRC) es un material compuesto conformado por una matriz homogénea de concreto simple, reforzada por fibras cortas de acero dispersas dentro de la matriz, las cuales pueden orientarse de manera aleatoria.

En este capítulo se presentan las consideraciones básicas de la aproximación empleada para modelar el material compuesto, junto con la descripción de los modelos constitutivos de los componentes y del compuesto, la cinemática del material compuesto mediante la metodología de las discontinuidades fuertes del continuo, así como su implementación mediante el método de los elementos finitos.

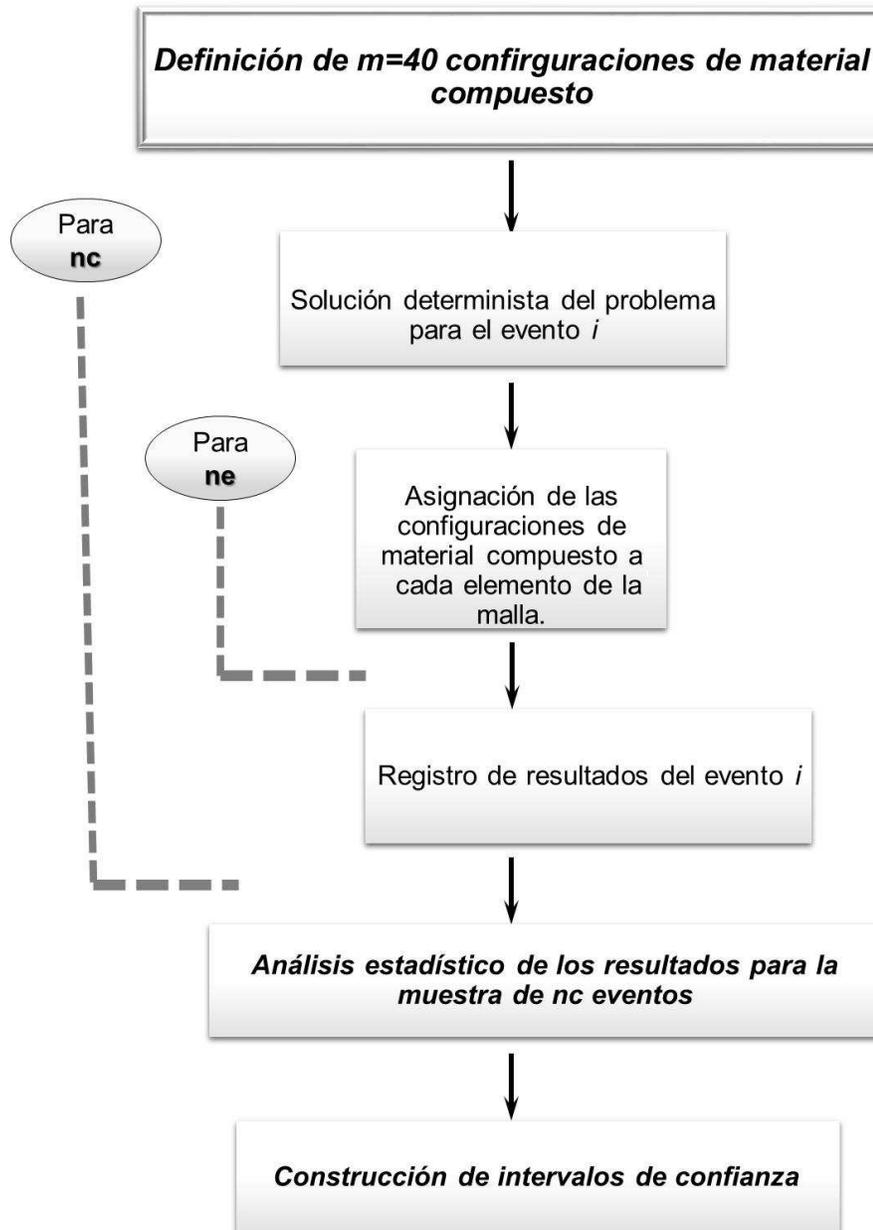
### 3.1 Consideraciones básicas

El modelo desarrollado describe el comportamiento elástico, inelástico y el proceso de fractura en estructuras de concreto reforzado con fibras cortas de acero con orientación aleatoria, bajo condición plana de esfuerzos o de deformaciones.

El modelo está dividido en dos procedimientos generales anidados, esquematizados en la figura 3-1. El interno, denominado *determinista*, se obtiene la respuesta mecánica y las trayectorias de fisuración del elemento estructural, a partir de un conjunto de parámetros establecidos para un evento. En cambio, en el procedimiento externo, denominado *estocástico*, se calculan los parámetros considerados aleatorios en cada evento del modelo determinista y se realiza un análisis funcional con los resultados de la colección de repeticiones. Un evento es la simulación de orientación y distribución aleatorias de las

fibras por elemento finito en el interior de un espécimen. Un espécimen o probeta es el cuerpo sólido al cual se le realiza un ensayo específico.

**Figura 3-1:** Esquema general del procedimiento



Los parámetros del *procedimiento determinista* son las características mecánicas del concreto simple como el módulo de elasticidad, la relación de Poisson, la energía de fractura y la resistencia a tracción y compresión. Así mismo se incluye el módulo de elasticidad, el esfuerzo de fluencia y los factores de endurecimiento o ablandamiento, del

comportamiento axial de las fibras de acero, combinado con su deslizamiento con respecto a la matriz de concreto. También se requieren los coeficientes de participación volumétrica de los paquetes de fibras y las características del modelo constitutivo que representa la capacidad transversal de las fibras. El modelo desarrollado considera que estos parámetros son valores únicos promedio que no están sujetos a un análisis probabilístico. Por el contrario, la orientación de los paquetes de fibras se considera una variable aleatoria que cambia en cada repetición de la simulación numérica. En la formulación del procedimiento determinista del modelo se han considerado los siguientes aspectos:

- Cada punto material de SFRC representa un material compuesto conformado por una matriz de concreto simple y dos grupos o paquetes de fibras cortas de acero. Las fibras de cada paquete conservan la misma orientación. Así mismo, las fibras del primer paquete son perpendiculares a las fibras del segundo paquete.
- El tensor del esfuerzo y el tensor constitutivo tangente del material compuesto se obtienen de la suma ponderada del tensor del esfuerzo y del tensor constitutivo tangente de la matriz, de las fibras y de la interacción entre ambos, como lo establece la teoría clásica de mezclas (Truesdell & Toupin, 1960).
- El comportamiento bidimensional del concreto simple se representa mediante un modelo constitutivo de daño continuo escalar isotrópico con umbrales de resistencia diferenciados en tracción y compresión (Oliver, et al., 1990).
- EL comportamiento axial de cada paquete de fibras de acero y el efecto de pérdida de adherencia entre tales fibras y la matriz de concreto se describe con un modelo constitutivo de plasticidad unidimensional (Simó & Hughes, 1998). Este modelo calcula el esfuerzo normal en función de la deformación longitudinal asociada al alargamiento o acortamiento de la fibra y una deformación longitudinal equivalente producida por el deslizamiento entre la fibra y la matriz.
- El comportamiento trasversal de cada paquete de fibras que atraviesan una fisura, denominado acción pasador, se representa con un modelo constitutivo de plasticidad unidimensional. Tal modelo relaciona el esfuerzo cortante en la sección

transversal de las fibras y la deformación angular equivalente producida por el salto del desplazamiento paralelo a las caras de una fisura.

- En la trayectoria de una fisura ocurre un salto en el campo del desplazamiento y un valor distribucionalmente no acotado de la deformación, mientras se conserva el equilibrio asociado a las tracciones, como lo define la metodología de discontinuidades fuertes del continuo (Oliver, 1996a) (Oliver, 1996a) (Oliver & Huespe, 2004) (Oliver, et al., 2003).
- El inicio de la inestabilidad material y la dirección de propagación de las fisuras se obtiene mediante un análisis de bifurcación del material compuesto (Rice, 1976) (Runesson, et al., 1991) (Hill, 1962).
- La simulación numérica del problema se realiza a través de un análisis no lineal bidimensional considerando deformaciones infinitesimales y acciones externas estáticas que son aplicadas progresivamente.

Por otra parte, los parámetros del procedimiento estocástico se presentan mas adelante en el numeral 3.8.

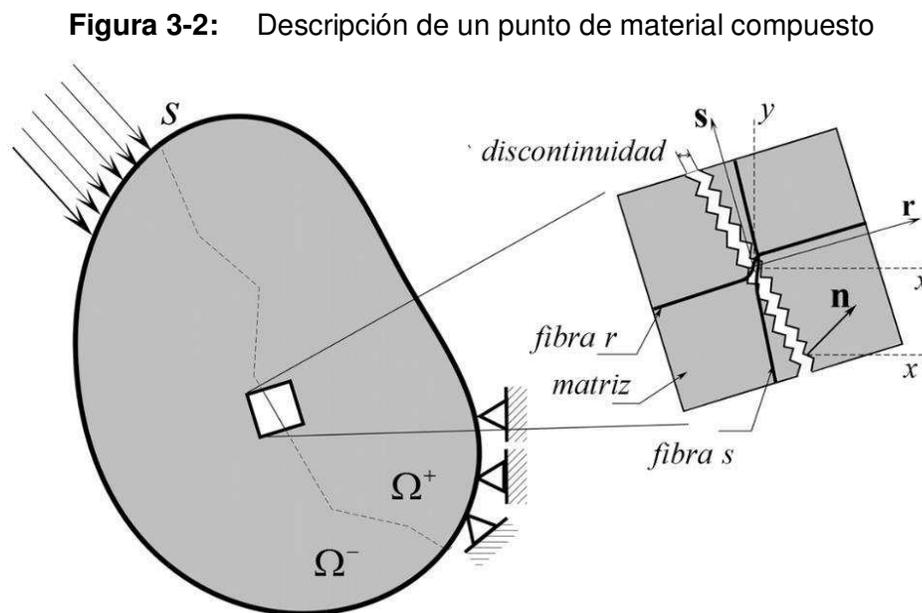
### **3.2 Relación constitutiva de un punto de material compuesto a través de la teoría de mezclas**

Se considera que un material es compuesto, en general, cuando está constituido por dos o más componentes con propiedades mecánicas diferenciables entre sí, sin embargo este concepto depende de la escala de estudio.

En este trabajo se considera que el SFRC es un material, que de acuerdo con Vasiliev y Morozov (2001) puede ser clasificado como compuesto reforzado, puesto que se constituye por pequeños segmentos de fibras de acero embebidas totalmente en una matriz de concreto simple. Tales fibras en general ofrecen niveles de rigidez y resistencia superiores a los presentados por la matriz.

En el modelo presentado, el concreto simple se ha considerado como un material homogéneo, aunque en una escala un poco menor, esté conformado por pasta de cemento y partículas de agregado con diámetros que pueden variar desde decimas de milímetro hasta varios centímetros.

De acuerdo con lo anterior, en un punto material del modelo figura 3-2, puede existir una matriz de concreto simple y dos paquetes de fibras de acero en las direcciones perpendiculares entre sí, correspondientes a los ejes principales de anisotropía.



Por otra parte, el comportamiento de un punto material compuesto, con volumen  $d\bar{V}$ , se puede representar a partir de los modelos constitutivos de sus materiales componentes mediante la teoría o regla de mezclas (Truesdell & Toupin, 1960) basada en las siguientes suposiciones:

- En un punto diferencial de material compuesto participan todos los  $n$  materiales constituyentes del mismo.

- El volumen de un punto de material compuesto  $d\bar{V}$  es igual a la suma de los volúmenes de los  $n$  materiales constituyentes  $dV^c$ . En consecuencia, el volumen de cada material constituyente  $dV^c$  es menor a la unidad de volumen de referencia del material compuesto  $d\bar{V}$ .
- El aporte de cada material constituyente al comportamiento del compuesto es proporcional a su coeficiente de participación volumétrica  $k^c$  calculado como:

$$k^c = \frac{dV^c}{d\bar{V}} \quad 3-1$$

- El tensor de deformación de cada uno de los materiales componentes  $\boldsymbol{\varepsilon}^c$  es igual al tensor de deformación del material compuesto  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Por tanto la ecuación de compatibilidad de deformaciones tiene la forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \dots = \boldsymbol{\varepsilon}^c = \dots = \boldsymbol{\varepsilon}^n \quad 3-2$$

- La energía libre por unidad de volumen  $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha})$  de un material compuesto es función del tensor de deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}$  y del vector de variables internas  $\boldsymbol{\alpha}^c$ , y puede calcularse como la suma de las energías libres de cada uno de los materiales constituyentes, ponderadas de acuerdo a su coeficiente de participación volumétrica:

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{c=1}^n k^c \Psi^c(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}^c) \quad 3-3$$

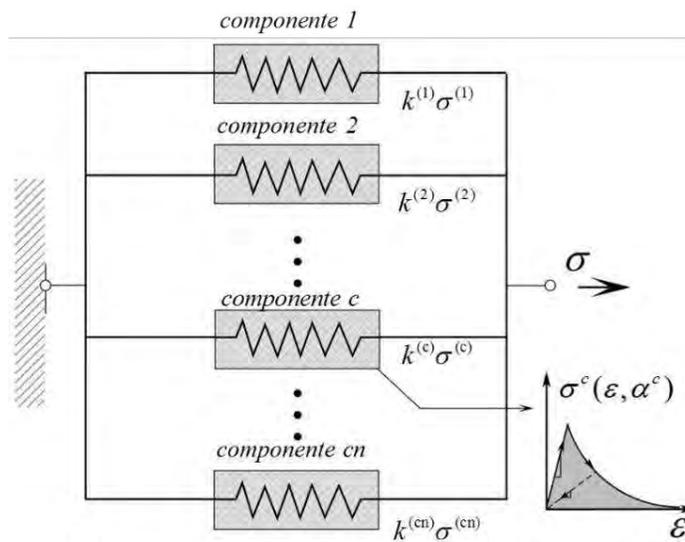
Derivando la expresión anterior, el tensor de esfuerzos del material compuesto puede expresarse así (Oller, et al., 1996) (Car, 2000) (Luccioni & López, 2002) (Oller, 2003):

$$\boldsymbol{\sigma} = (\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Psi) = \sum_{c=1}^n k^c \boldsymbol{\sigma}^c \quad 3-4$$

El comportamiento de cada material constituyente puede representarse mediante una ley particular, expresada en función de sus variables internas y del tensor de deformaciones del compuesto. Por ejemplo: en el SFRC, la matriz de concreto se representa mediante un modelo de daño isótropo mientras que para las fibras se usa un modelo de plasticidad unidimensional. En la **Error! Not a valid bookmark self-reference.** se representa la teoría de mezclas como un modelo reológico en paralelo, para el caso particular de un campo de esfuerzos y deformaciones unidimensionales.

**Figura 3-3:** Modelo reológico de un material compuesto de acuerdo con la teoría de mezclas

Fuente: (Linero, et al., 2008)



### 3.3 Modelo constitutivo para la matriz de concreto simple

El concreto simple es un material que se comporta de manera cuasi-frágil durante la falla (Jenq & Shah, 1991), por lo que resulta conveniente usar un modelo de daño para representar su comportamiento (de Borst, 2002). Adicionalmente, este material presenta una resistencia a la tracción del orden del 7% al 15% de la resistencia a la compresión; por esta razón se ha adoptado el modelo de daño isótropo propuesto por Oliver, Cervera, Oller,

& Lubliner (1990), desarrollado a partir del trabajo de Simó y Ju (1987), el cual permite diferenciar los umbrales de resistencia en problemas bidimensionales.

A continuación se describe el modelo constitutivo bidimensional usado para la matriz de concreto simple (Linero, et al., 2008). El superíndice  $m$  identifica las variables propias de la matriz.

Se define la variable escalar de daño  $d_n^m$  como el área relativa de fisuras observadas en un plano de corte en el interior del sólido (Lemaitre & Chaboche, 2000). El daño isótropo establece que las fisuras estarán orientadas y distribuidas de forma uniforme en todas las direcciones. Por lo tanto el valor del daño será común en cualquier dirección. La variable  $d_n^m$  se puede expresar entre 0 y 1 de la forma:

$$d_n^m = 1 - \frac{q^m}{r^m} \quad 3-5$$

donde  $r^m$  y  $q^m$  son las variables internas tipo deformación y tipo esfuerzo respectivamente, las cuales identifican la historia del comportamiento no lineal del material.

La variable interna tipo deformación cambia de acuerdo a una ley de evolución de la forma:

$$\dot{r}^m = \lambda^m, \quad r^m \geq r_{t=0}^m = \sigma_u^m / \sqrt{E^m} \quad 3-6$$

donde  $\lambda^m$  es el multiplicador de daño,  $\dot{r}^m$  es la derivada de la variable interna tipo deformación respecto al tiempo,  $\sigma_u^m$  es la resistencia a la tracción de la matriz y  $E^m$  es el módulo de elasticidad de la matriz. Así mismo, la variable interna tipo esfuerzo depende de la variable  $r^m$  y de su derivada en el tiempo, según la ley de ablandamiento de la forma:

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}^m &= H^m(r) \dot{r}^m, & H^m &= \frac{dq^m}{dr^m} \leq 0 \\ 0 &\leq q^m \leq r_{t=0}^m, & q_{t=0}^m &= r_{t=0}^m \end{aligned} \right\} \quad 3-7$$

donde  $\dot{q}^m$  es la derivada de la variable interna tipo esfuerzo respecto al tiempo y  $H^m$  es el parámetro de ablandamiento.

Por otro lado, se establece que la densidad de energía libre o energía de Helmholtz por unidad de volumen  $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}^m, r^m)$ , es de la forma

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}^m, r^m) = \frac{q^m}{r^m} \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^m : \mathbf{C}^m : \boldsymbol{\varepsilon}^m \right) \quad 3-8$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon}^m$  y  $\mathbf{C}^m$  son el tensor de deformaciones y el tensor constitutivo elástico respectivamente.

Utilizando la formulación matemática en formato integral para obtener la relación constitutiva se concluye que:

$$\boldsymbol{\sigma}^m = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^m} = \frac{q^m}{r^m} \mathbf{C}^m : \boldsymbol{\varepsilon}^m = \frac{q^m}{r^m} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^m \quad 3-9$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}^m$  y  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^m$  son los tensores de esfuerzo total y de esfuerzo efectivo, respectivamente.

El criterio de daño en el espacio de las deformaciones de este modelo establece que la función del daño es:

$$f^m(\boldsymbol{\varepsilon}^m, r^m) = \tau_{\varepsilon(tc)} - r^m \quad 3-10$$

donde  $\tau_{\varepsilon(tc)}$  es la norma de deformaciones, la cual puede expresarse como:

$$\tau_{\varepsilon(tc)} = \phi \sqrt{\bar{\boldsymbol{\sigma}}^m : (\mathbf{C}^m)^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}^m} \quad 3-11$$

Siendo,

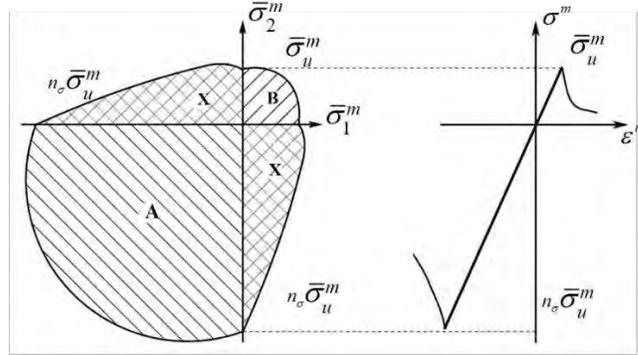
$$\phi = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \bar{\sigma}_i^m \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\bar{\sigma}_i^m|} \left( 1 - \frac{1}{n_\sigma} \right) + \frac{1}{n_\sigma} \quad 3-12$$

donde,  $\bar{\sigma}_i^m$  es cada uno de los esfuerzos efectivos en las direcciones principales,  $n_\sigma$  es el cociente entre la resistencia a compresión  $\sigma_{u(c)}^m$  y a tracción de la matriz  $\sigma_{u(t)}^m$ . El paréntesis de Mac-Auley para el esfuerzo efectivo  $\langle \bar{\sigma}_i^m \rangle$  corresponde a  $0.5(\bar{\sigma}_i^m + |\bar{\sigma}_i^m|)$ .

En un estado de esfuerzos bidimensional cuando los dos esfuerzos principales son positivos el dominio elástico es  $n_\sigma$  veces menor que cuando dichos esfuerzos son negativos. Cuando los dos esfuerzos principales presentan signos contrarios se produce una transición definida por el factor  $\phi$ .

**Figura 3-4:** Modelo de daño con degradación diferenciada a compresión y tracción para el concreto simple.

(a) Superficie de daño, (b) relación esfuerzo-deformación uniaxial.



A - Dominio elástico para Compresión  
 B - Dominio elástico para Tracción  
 X - Dominio elástico para esfuerzos principales con signo contrario

Condiciones de carga y descarga en términos de la función de daño y del multiplicador de daño son:

$$\left. \begin{aligned} f^m \leq 0, \quad \lambda^m \geq 0, \quad \lambda^m f^m = 0 \\ \lambda^m f^m = 0 \quad (f^m = 0) \end{aligned} \right\} \quad 3-13$$

Ahora bien, la ecuación constitutiva tangente se puede expresar en términos de la tasa de deformación  $\dot{\epsilon}^m$  y la tasa de esfuerzo  $\dot{\sigma}^m$  en la matriz de la forma:

$$\dot{\sigma}^m = C_{tg}^m : \dot{\epsilon}^m \quad 3-14$$

donde el tensor constitutivo tangente  $C_{tg}^m$  en condición de carga elástica o descarga es:

$$C_{tg}^m = \frac{q^m}{r^m} C^m \quad 3-15$$

y para carga inelástica es:

$$C_{tg}^m = \frac{q^m}{r^m} C^m - \left( \frac{q^m - H^m r^m}{(r^m)^3} \right) \cdot \left[ \frac{(r^m)^2}{\phi} (\bar{\sigma}^m \otimes \mathbf{A}) + \phi^2 (\bar{\sigma}^m \otimes \bar{\sigma}^m) \right] \quad 3-16$$

El tensor A corresponde a:

$$\mathbf{A} = C^m : \partial_{\bar{\sigma}} \phi \quad 3-17$$

Siendo

$$\partial_{\bar{\sigma}} \phi = \frac{\left(1 - \frac{1}{n_{\sigma}}\right)}{\left(\sum_{i=1}^3 |\bar{\sigma}_i|\right)^2} \cdot \left[ \sum_{i=1}^3 |\bar{\sigma}_i| \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \langle \bar{\sigma}_i \rangle}{\partial \bar{\sigma}} - \sum_{i=1}^3 \langle \bar{\sigma}_i \rangle \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{\partial |\bar{\sigma}_i|}{\partial \bar{\sigma}} \right] \quad 3-18$$

### 3.4 Modelo constitutivo de las fibras y su deslizamiento con respecto a la matriz

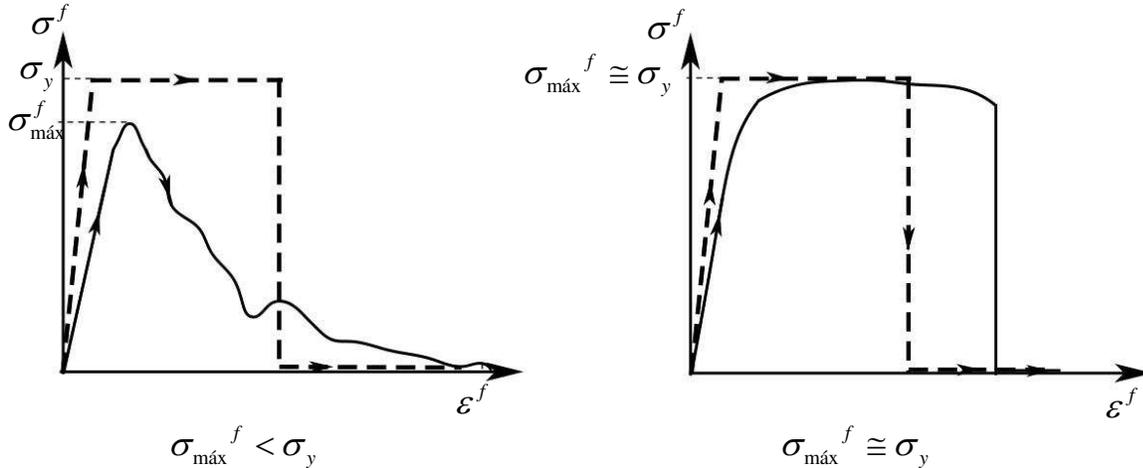
Las fibras de acero en la matriz de concreto exhiben los siguientes tres comportamientos diferentes. Primero, la elongación de la fibra ante la acción de la fuerza axial; segundo el deslizamiento de la misma con respecto a la matriz; y tercero, la capacidad a cortante de la sección transversal de las fibras que atraviesan una fisura en modo II, correspondiente al deslizamiento de las caras de la misma debida a esfuerzos tangenciales.

#### 3.4.1 Comportamiento axial de las fibras y su deslizamiento con respecto a la matriz

La relación típica entre el esfuerzo normal y deformación longitudinal de una fibra de acero aislada, es aproximadamente bilineal y está definida por el módulo de elasticidad  $E^f$ , por el esfuerzo de fluencia  $\sigma_y^f$  y por una deformación de rotura del acero  $\varepsilon_u^f$ , como se indica en la línea a trazos de la figura 3-5. Sin embargo, cuando la fibra de acero está embebida en la matriz de concreto, el esfuerzo normal que transmite depende sustancialmente del mecanismo de adherencia entre la matriz y las fibras. El ensayo de arrancamiento describe simultáneamente el comportamiento mecánico de la fibra aislada y del deslizamiento de la fibra con respecto a la matriz, como se presentó en el numeral 2.4.1. La combinación de estos dos fenómenos se denomina comportamiento de fibra deformable - deslizante (Linero, et al., 2008).

**Figura 3-5:** Curvas de arrancamiento típicas.

- (a) si la fuerza máxima de adherencia es menor que la carga de fluencia de las fibras,  
 (b) si la fuerza máxima de adherencia es igual a la carga de fluencia de las fibras



En el primer comportamiento, la fuerza máxima de adherencia es menor que la carga de fluencia de las fibras y en consecuencia las fibras son arrancadas completamente de la matriz (figura 3-5(a)); mientras que en el segundo comportamiento, la fuerza máxima de adherencia es igual a la carga de fluencia de las fibras y por lo tanto, éstas fluyen y se rompen antes de ser arrancadas por completo (figura 3-5(b)). En ambos comportamientos se observa que la pendiente de la rama ascendente de la curva (línea continua) es menor que la rigidez del conjunto de fibras aisladas (línea a trazos). Lo anterior indica que la adherencia de la fibra se gana progresivamente, desde el primer incremento del desplazamiento.

El superíndice  $f_r$  está asociado a las variables del paquete de fibras orientadas en la dirección  $\mathbf{r}$ , considerando el comportamiento de fibra deformable - deslizante.

A partir de la relación entre la carga  $P^f$  y el desplazamiento  $\delta^f$  indicada anteriormente, se puede obtener una relación entre el esfuerzo normal fibra deformable – deslizante  $\sigma^f$  y una deformación longitudinal equivalente  $\epsilon^f$  en la fibra incluyendo su deslizamiento con respecto a la matriz. El esfuerzo normal fibra deformable - deslizante puede ser calculado como:

$$\sigma^f = \frac{P^f}{A^f} \quad 3-19$$

donde  $A^f$  es el área de la sección transversal de la fibra. Así mismo, la deformación equivalente es igual a:

$$\varepsilon^f = \frac{\delta^f}{l_e^f} \quad 3-20$$

siendo  $l_e^f$  la longitud embebida de la fibra en el concreto.

El comportamiento mecánico de la fibra deformable - deslizante se puede representar mediante un modelo constitutivo de plasticidad unidimensional, en el cual la relación  $\sigma^f$  versus  $\varepsilon^f$  se simplifica a una curva bilineal (figura 3-6.b; figura 3-7.b). La rama ascendente inicial de la curva experimental se representa con una recta secante entre el origen y el punto de esfuerzo máximo, donde  $\sigma^f = \sigma_{máx}^f$  y  $\varepsilon^f = \varepsilon_{máx}^f$ . En cambio, la pendiente de la segunda rama se obtiene al fijar la densidad de energía total de deformación  $U_T^f$  del modelo constitutivo igual a la obtenida de la relación experimental (figura 3-6).

La densidad de energía total de deformación es igual al área bajo la curva de la relación  $\sigma^f$  versus  $\varepsilon^f$  hasta un valor de deformación de rotura o de deslizamiento total, denominada deformación final  $\varepsilon_{final}^f$ . En el modelo constitutivo, cuando la fibra es completamente arrancada el área bajo la curva tiene forma de triángulo (figura 3-6) y en consecuencia la deformación final  $\varepsilon_{final}^f$  es igual a:

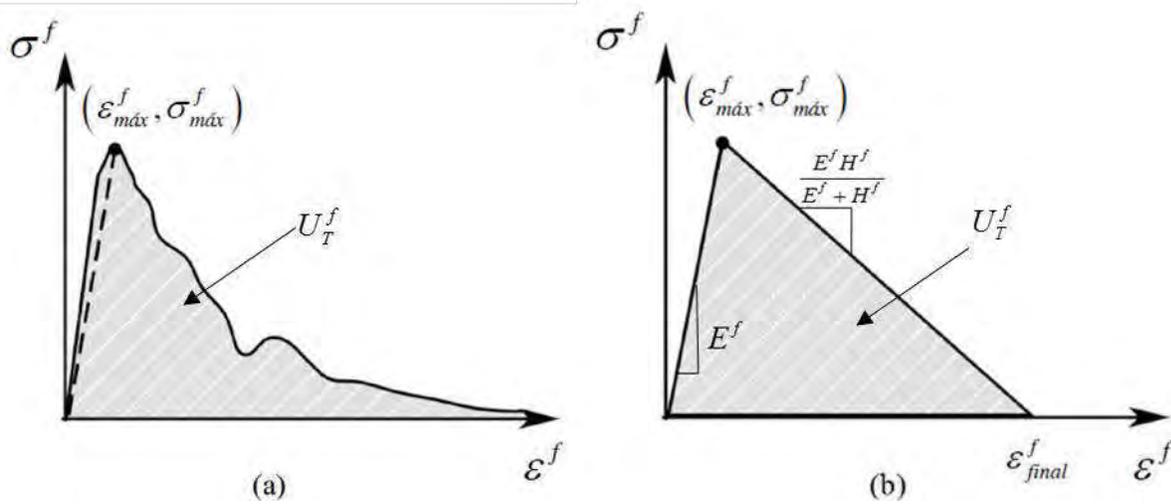
$$\varepsilon_{final}^f = \frac{U_T^f}{2 \cdot \sigma_{máx}^f} \quad 3-21$$

La pendiente de la segunda rama  $E_{tg}^f$  se puede calcular como:

$$E_{tg}^f = \frac{-\sigma_{máx}^f}{\varepsilon_{final}^f - \varepsilon_{máx}^f} \quad 3-22$$

**Figura 3-6:** Relación esfuerzo normal *versus* deformación longitudinal y densidad de energía total de deformación, si la fuerza máxima de adherencia es menor que la carga de fluencia de las fibras:

(a) respuesta experimental, (b) modelo constitutivo fibra deformable - deslizante



Cuando la fibra se rompe, pues agota su resistencia, el área bajo la curva del modelo constitutivo adopta la forma del trapecio, mostrado en la figura 3-7, en el cual la deformación final corresponde a la deformación de ruptura  $\varepsilon_{final}^f$ . El esfuerzo normal asociado a la deformación final  $\sigma_{final}^f$  es igual a:

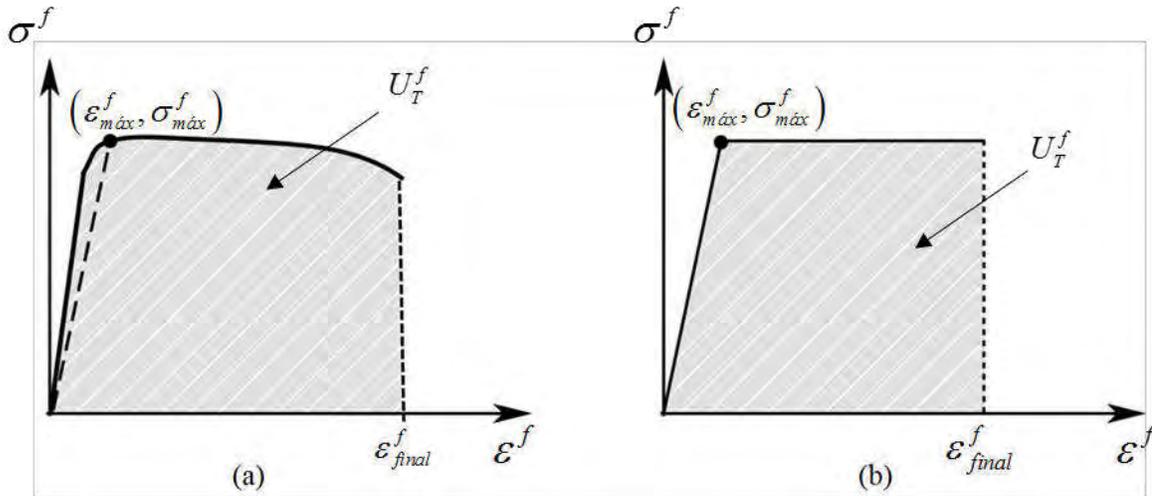
$$\sigma_{final}^f = \frac{2(U_T^f - \sigma_{máx}^f \cdot \varepsilon_{máx}^f)}{\varepsilon_{final}^f - \varepsilon_{máx}^f} - \sigma_{máx}^f \quad 3-23$$

La pendiente de la segunda rama  $E_{tg}^f$  se puede calcular como:

$$E_{tg}^f = \frac{\sigma_{final}^f - \sigma_{máx}^f}{\varepsilon_{final}^f - \varepsilon_{máx}^f} \quad 3-24$$

**Figura 3-7:** Fibra deformable – deslizante Relación esfuerzo normal *versus* deformación longitudinal y densidad de energía total de deformación, si la fuerza máxima de adherencia es igual que la carga de fluencia de las fibras.

(a) respuesta experimental, (b) modelo constitutivo.



En la formulación desarrollada, el comportamiento mecánico de la fibra aislada y el deslizamiento de la fibra con respecto a la matriz, denominado comportamiento de fibra deformable - deslizante, se representa mediante un modelo unidimensional de plasticidad con ablandamiento o endurecimiento isótropo lineal (Simó & Hughes, 1998), cuyas características se describen a continuación.

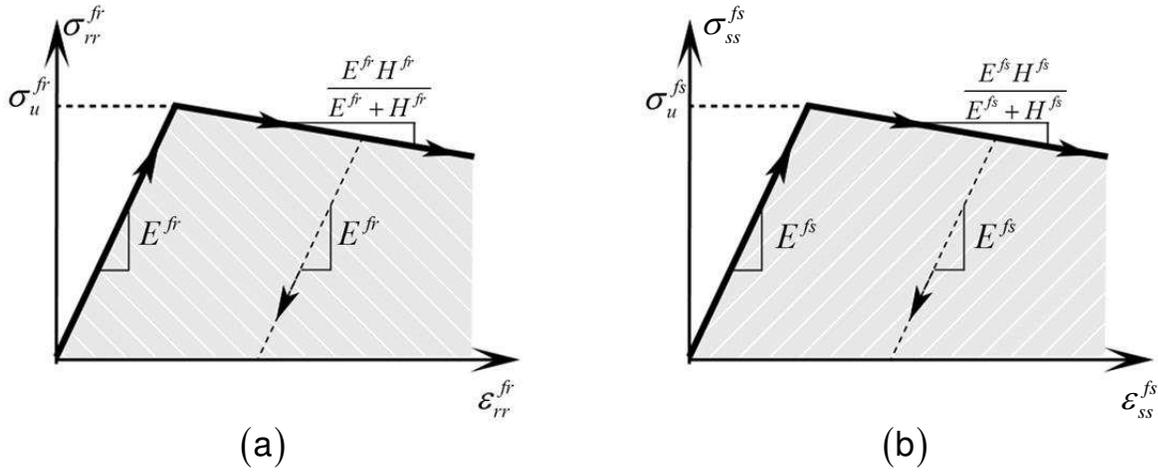
Ecuación constitutiva tangente del paquete de fibras orientadas en la dirección  $\mathbf{r}$ , en términos de las tasas del esfuerzo normal  $\dot{\sigma}_{rr}^{fr}$  y de la deformación longitudinal  $\dot{\epsilon}_{rr}^{fr}$  es de la forma:

$$\dot{\sigma}_{rr}^{fr} = E_{tg}^{fr} \dot{\epsilon}_{rr}^{fr} \tag{3-25}$$

donde  $E_{tg}^{fr}$  es el operador constitutivo tangente y se calcula como:

$$E_{tg}^{fr} = \begin{cases} E^{fr} & \text{si } \lambda^{fr} = 0 \\ \frac{E^{fr} H^{fr}}{E^{fr} + H^{fr}} & \text{si } \lambda^{fr} > 0 \end{cases} \tag{3-26}$$

siendo  $E^{fr}$ ,  $H^{fr}$  y  $\lambda^{fr}$  el módulo de elasticidad, el parámetro de ablandamiento y el multiplicador plástico modelo constitutivo de la fibra deformable – deslizante.

**Figura 3-8:** Modelo unidimensional de plasticidad para el acero de las fibras.(a) fibra en la dirección  $r$ , (b) fibra en la dirección  $S$ .

La ecuación constitutiva secante, la regla de flujo, el criterio de plasticidad, la ley de evolución y de ablandamiento, y las condiciones de carga - descarga y complementariedad de este modelo constitutivo, se resumen en las ecuaciones 3-27 a 3-32.

$$\sigma_{rr}^{fr} = E^{fr} (\varepsilon_{rr}^{fr} - \varepsilon_p^{fr}) \quad 3-27$$

$$\dot{\varepsilon}_p^{fr} = \lambda^{fr} \text{sign}(\sigma_{rr}^{fr}) \quad 3-28$$

$$\dot{q}^{fr} = H^{fr} \dot{\alpha}^{fr} \quad 3-29$$

$$\alpha^{fr} = \lambda^{fr} \quad 3-30$$

$$f^{fr}(\sigma_{rr}^{fr}, \alpha^{fr}) = |\sigma_{rr}^{fr}| - (q^{fr} + \sigma_u^{fr}) \quad 3-31$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{fr} \leq 0; \lambda^{fr} \geq 0; \lambda^{fr} f^{fr} = 0 \\ \lambda^{fr} \dot{f}^{fr} = 0 (f^{fr} = 0) \end{array} \right\} \quad 3-32$$

En las expresiones anteriores,  $\sigma_{rr}^{fr}$  es el esfuerzo normal,  $\varepsilon_{rr}^{fr}$  es la deformación longitudinal total,  $\varepsilon_p^{fr}$  y  $\dot{\varepsilon}_p^{fr}$  es la deformación plástica longitudinal y su derivada con respecto al tiempo en la dirección de la fibra. Así mismo,  $f^{fr}$  es la función que limita el dominio elástico,  $\alpha^{fr}$  y  $q^{fr}$  son las variables internas tipo deformación y tipo esfuerzo, respectivamente, y el esfuerzo del límite elástico del modelo constitutivo  $\sigma_u^{fr}$  es el menor valor entre el esfuerzo de fluencia de una fibra aislada de acero y el esfuerzo máximo de adherencia en la interfaz, dado por el ensayo de arrancamiento.

El comportamiento del paquete de fibras orientadas en la dirección  $\mathbf{s}$  se representa con un modelo unidimensional de plasticidad con las mismas características del modelo utilizado para el paquete de fibras en dirección  $\mathbf{r}$ . El siguiente grupo de ecuaciones describe el modelo de fibra deformable - deslizante en la dirección  $\mathbf{S}$ .

$$\dot{\sigma}_{ss}^{fs} = E_{tg}^{fs} \dot{\epsilon}_{ss}^{fs} \quad 3-33$$

$$E_{tg}^{fs} = \begin{cases} E^{fs} & si \quad \lambda^{fs} = 0 \\ \frac{E^{fs} H^{fs}}{E^{fs} + H^{fs}} & si \quad \lambda^{fs} > 0 \end{cases} \quad 3-34$$

$$\sigma_{ss}^{fs} = E^{fs} (\epsilon_{ss}^{fs} - \epsilon_p^{fs}) \quad 3-35$$

$$\dot{\epsilon}_p^{fs} = \lambda^{fs} \text{sign}(\sigma_{rr}^{fs}) \quad 3-36$$

$$\dot{q}^{fs} = H^{fs} \dot{\alpha}^{fs} \quad 3-37$$

$$\alpha^{fs} = \lambda^{fs} \quad 3-38$$

$$f^{fs}(\sigma_{ss}^{fs}, \alpha^{fs}) = |\sigma_{ss}^{fs}| - (q^{fs} + \sigma_u^{fs}) \quad 3-39$$

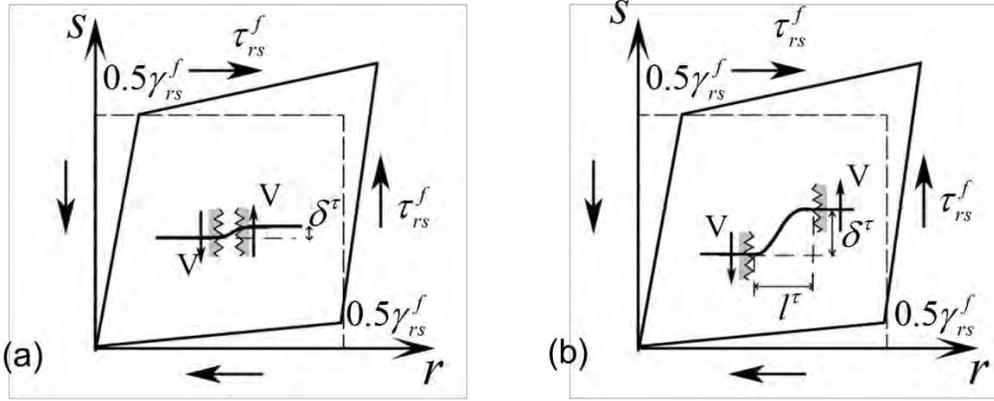
$$\left\{ \begin{array}{l} f^{fs} \leq 0; \lambda^{fs} \geq 0; \lambda^{fs} f^{fs} = 0 \\ \lambda^{fs} \dot{f}^{fs} = 0 (f^{fs} = 0) \end{array} \right\} \quad 3-40$$

### 3.4.2 Acción pasador de las fibras

Las fibras de acero contribuyen a la transferencia de esfuerzos de cortante entre las caras de la fisura. Así mismo su presencia también contribuye a controlar los desplazamientos relativos producidos por el deslizamiento tangencial  $\delta^r$  entre las caras de la fisura cuando se presenta un modo II de falla. A este efecto se le denomina acción pasador y se presenta debido a dos mecanismos (Park & Paulay, 1975).

**Figura 3-9:** Mecanismos de la acción pasador.

(a) apertura de la fisura menor que el diámetro de la fibra, (b) apertura de la fisura mayor que el diámetro de la fibra.



El primer mecanismo ocurre cuando la separación entre las caras de la fisura  $l^\tau$  es pequeña en comparación con el deslizamiento tangencial entre las mismas, y en consecuencia se produce una fuerza cortante en la fibra durante el comportamiento elástico de la forma:

$$V = \frac{G^{f\tau} \cdot A^f}{l^\tau} \delta^\tau \quad 3-41$$

O lo que es igual:

$$\frac{V}{A^f} = G^{f\tau} \cdot \frac{\delta^\tau}{l^\tau} \quad 3-42$$

Donde  $A^f$  es el área de la sección transversal de la fibra y  $G^{f\tau}$  es el módulo elástico a cortante del acero de la fibra que para un material isótropo se puede calcular como:

$$G^{f\tau} = \frac{E^f}{2(1+\nu^f)} \quad 3-43$$

Siendo  $E^f$  el módulo de elasticidad y  $\nu^f$  el coeficiente de Poisson.

El esfuerzo cortante medio  $\tau^{f\tau}$  y la deformación angular  $\gamma^f$  pueden calcularse con las ecuaciones 3-44 y 3-45 respectivamente.

$$\tau^{f\tau} = \frac{V}{A^f} \quad 3-44$$

$$\varepsilon^{f\tau} = \frac{\delta^\tau}{l^\tau} \tag{3-45}$$

Por lo tanto la ecuación 3-42 también puede escribirse como:

$$\tau^f = G^{f\tau} \cdot \gamma^f \tag{3-46}$$

De acuerdo con el criterio de fluencia de von Mises para un estado de cortante puro el esfuerzo cortante de fluencia es:

$$\tau_y^f = \frac{\sigma_y^f}{\sqrt{3}} \tag{3-47}$$

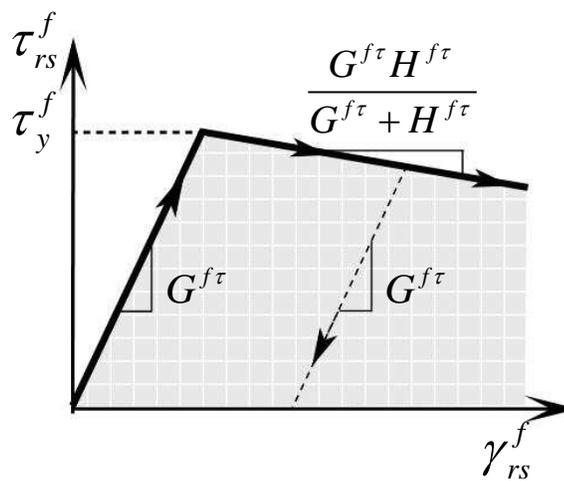
Siendo  $\sigma_y^f$  el esfuerzo normal de fluencia del acero.

Por lo que la fuerza cortante de fluencia  $V_y$  será:

$$V_y = \tau^{f\tau} \cdot A^f = \frac{\sigma_y^f}{\sqrt{3}} \cdot A^f \tag{3-48}$$

El segundo mecanismo ocurre cuando la separación de las caras de la fisura es grande en comparación con el diámetro equivalente de la fibra. En este caso se considera que las fibras se encuentran doblemente empotradas entre las caras de la fisura y que el deslizamiento tangencial  $\delta^\tau$  induce acciones internas combinadas de flexión y cortante sobre las fibras. Tales acciones pueden ser calculadas en el rango elástico de acuerdo con la teoría de vigas de Timoshenko (1965).

**Figura 3-10:** Modelo unidimensional de plasticidad para el efecto pasador.



La formulación presentada en este trabajo considera que la separación entre las caras de la fisura no es lo suficientemente grande para que se produzca el segundo mecanismo.

Con base en las consideraciones anteriores el efecto pasador para un grupo de fibras orientado en la dirección paralela al vector  $\mathbf{r}$  puede ser representado mediante un modelo constitutivo de plasticidad unidimensional equivalente, descrito en las siguientes ecuaciones (Linero, et al., 2008):

$$\tau_{rs}^f = G^{f\tau} (\gamma_{rs}^f - \gamma_p^f) \quad 3-49$$

$$\dot{\gamma}_p^f = \lambda^{f\tau} \text{sign}(\tau_{rs}^f) \quad 3-50$$

$$\dot{\alpha}^{f\tau} = \lambda^{f\tau} \quad 3-51$$

$$\dot{q}^{f\tau} = H^{f\tau} \dot{\alpha}^{f\tau} \quad 3-52$$

$$f^{f\tau}(\tau_{rs}^f, \alpha^{f\tau}) = |\tau_y^f| - (\tau_y^f + q^{f\tau}) \quad 3-53$$

$$f^{f\tau} \leq 0, \quad \lambda^{f\tau} \geq 0, \quad \lambda^{f\tau} f^{f\tau} = 0 \quad 3-54$$

$$\lambda^{f\tau} \dot{f}^{f\tau} = 0 \quad (f^{f\tau} = 0)$$

$$\dot{\tau}_{rs}^f = G_{ig}^{f\tau} \dot{\gamma}_{rs}^f \quad 3-55$$

$$G_{ig}^{f\tau} = \begin{cases} G^{f\tau} & \lambda^{f\tau} = 0 \\ \frac{G^{f\tau} H^{f\tau}}{G^{f\tau} + H^{f\tau}} & \lambda^{f\tau} > 0 \end{cases} \quad 3-56$$

La ecuación constitutiva secante relaciona al esfuerzo cortante  $\tau_{rs}^f$ , con la deformación angular total  $\gamma_{rs}^f$  y la deformación angular plástica  $\gamma_p^f$ , como lo indica la ecuación 3-53, siendo  $G^{f\tau}$  el módulo elástico de cortante equivalente que se calcula de acuerdo con la ecuación 3-43.

En la regla de flujo y las leyes de evolución y ablandamiento del modelo,  $\dot{\gamma}_{rs}^f$  es la derivada de la deformación angular respecto al tiempo,  $\lambda^{f\tau}$  es el multiplicador plástico,  $H^{f\tau}$  es el módulo de ablandamiento, y  $\dot{\alpha}^{f\tau}$  y  $\dot{q}^{f\tau}$  son las tasas de la variable interna de tipo deformación y tipo esfuerzo, respectivamente.

El criterio de fluencia depende de la función límite del dominio elástico  $f^{f\tau}$  y del esfuerzo cortante de fluencia equivalente  $\tau_y^f$  calculado con la ecuación 3-47.

En la ecuación constitutiva tangente,  $\dot{\tau}$  y  $\dot{\gamma}$  son las tasas de esfuerzo cortante y deformación angular, mientras que  $G_g$  es el módulo de cortante tangente.

### 3.5 Modelo constitutivo del material compuesto

Como se estableció en el numeral 3.2, de acuerdo con la teoría de mezclas (Truesdell & Toupin, 1960) la deformación del material compuesto se relaciona con la de cada uno de los materiales constituyentes. En el modelo desarrollado en esta investigación, dichas relaciones se encuentran definidas bajo las siguientes hipótesis que definen las condiciones de compatibilidad de deformaciones (Linero, et al., 2008):

- El tensor de la tasa de deformación de la matriz  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^m$  es igual al tensor de la tasa de deformación del material compuesto  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^m = \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \tag{3-57}$$

- El comportamiento axial del paquete de *fibras deformables y deslizantes* dispuestas en la dirección  $\mathbf{r}$  es función de la componente  $\dot{\epsilon}_r$  del tensor de la tasa de deformación del compuesto:

$$\dot{\epsilon}_{rr}^{dr} = \dot{\epsilon}_{rr} = \mathbf{r} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathbf{r} \tag{3-58}$$

- El comportamiento axial del paquete de *fibras deformables y deslizantes* dispuestas en la dirección  $\mathbf{s}$  es función de la componente  $\dot{\epsilon}_{ss}$  del tensor de la tasa de deformación del compuesto:

$$\dot{\epsilon}_{ss}^{ds} = \dot{\epsilon}_{ss} = \mathbf{s} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathbf{s} \quad 3-59$$

- El comportamiento a cortante de las fibras está asociado con la componente angular  $\dot{\gamma}_{rs}^f$  de la tasa de deformación en el plano  $\mathbf{rs}$  :

$$\dot{\gamma}_{rs}^f = \dot{\gamma}_{rs} = 2 \mathbf{r} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathbf{s} \quad 3-60$$

De la misma forma el esfuerzo en el material compuesto se encuentra vinculado con los esfuerzos de la matriz y las fibras que lo componen. De acuerdo con la teoría de mezclas, el tensor de la tasa de esfuerzo del material compuesto  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  corresponde a la suma de las tasas de esfuerzos de matriz y fibras multiplicadas por sus respectivos coeficientes de participación volumétrica:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = k^m \dot{\boldsymbol{\sigma}}^m + k^{fr} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{rr}^{fr} + k^{fs} (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ss}^{fs} + 2(k^{fr} + k^{fs}) (\mathbf{r} \otimes \mathbf{s})^s \dot{\boldsymbol{\tau}}_{rs}^f \quad 3-61$$

Donde  $k^m, k^{fr}, k^{fs}$  son las fracciones de volumen de la matriz, las fibras en la dirección  $\mathbf{r}$  y las fibras en la dirección  $\mathbf{s}$ , respectivamente y pueden ser calculadas como:

$$k^m = \frac{V^m}{\bar{V}}, \quad k^{fr} = \frac{V^{fr}}{\bar{V}}, \quad k^{fs} = \frac{V^{fs}}{\bar{V}} \quad 3-62$$

donde  $\bar{V}$  es el volumen total del material compuesto,  $V^m$  el volumen de matriz,  $V^{fr}$  y  $V^{fs}$  los volúmenes de las fibras orientadas en las direcciones  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{s}$  respectivamente, de manera que:

$$k^m + k^{fr} + k^{fs} = 1 \quad 3-63$$

Adicionalmente, la tasa de las componentes de esfuerzo normal de las fibras en la dirección perpendicular al eje longitudinal de las mismas se considera nulo, es decir:

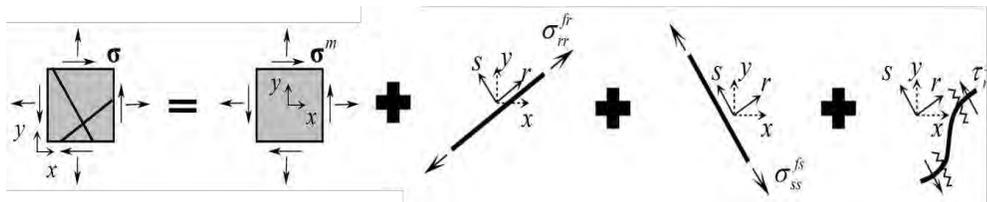
$$\sigma_{ss}^{fr} = 0 \tag{3-64}$$

$$\sigma_{rr}^{fs} = 0 \tag{3-65}$$

En la figura 3-11 se indica el esfuerzo en cada una de las componentes en su sistema coordenado local.

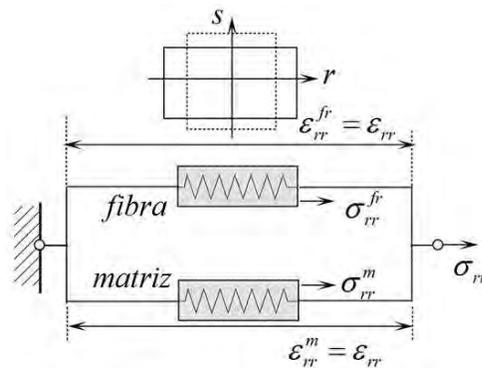
**Figura 3-11:** Esfuerzos en los materiales componentes.

Fuente (Linero, et al., 2008)



Ahora bien, la aplicación de la teoría de mezclas puede representarse mediante tres modelos reológicos en paralelo para cada una de las componentes de esfuerzos y deformaciones en un sistema coordenado  $rs$ . El primero (figura 3-12) está constituido por la componente normal  $rr$  de la matriz y la fibra deslizante en dirección  $r$ .

**Figura 3-12:** Modelo reológico considerado en la componente normal en  $r$



En la figura 3-12 se pueden identificar las siguientes relaciones:

$$\dot{\sigma}_{rr} = k^m \dot{\sigma}_{rr}^m + k^{fr} \dot{\sigma}_{rr}^{fr} \quad 3-66$$

$$\dot{\varepsilon}_{rr}^m = \dot{\varepsilon}_{rr}^{dr} = \dot{\varepsilon}_{rr} \quad 3-67$$

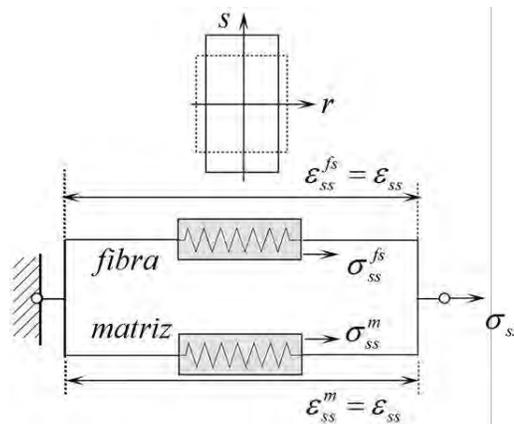
El segundo (figura 3-13) está conformado por la componente normal  $SS$  de la matriz y la fibra deslizante en  $S$ .

De manera que según la figura 3-13:

$$\dot{\sigma}_{ss} = k^m \dot{\sigma}_{ss}^m + k^{fs} \dot{\sigma}_{ss}^{fs} \quad 3-68$$

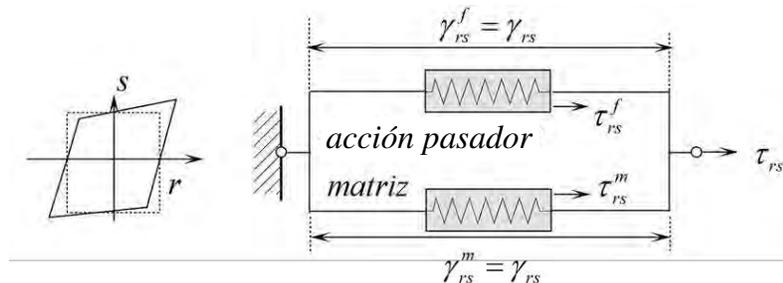
$$\dot{\varepsilon}_{ss}^m = \dot{\varepsilon}_{ss}^{ds} = \dot{\varepsilon}_{ss} \quad 3-69$$

**Figura 3-13:** Modelo reológico considerado en la componente normal en  $s$



El tercero (figura 3-14) lo define la capacidad a cortante de la matriz y de las fibras (acción pasador) en el plano  $rs$ .

**Figura 3-14:** Modelo reológico considerado en la componente cortante en el plano  $rs$ .



Las siguientes relaciones corresponden al modelo presentado en la figura 3-14.

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}_{rs} = k^m \dot{\boldsymbol{\tau}}_{rs}^m + (k^{fr} + k^{fs}) \dot{\boldsymbol{\tau}}_{rs}^f \quad 3-70$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{rs}^m = \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{rs}^f = \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{rs} \quad 3-71$$

De esta forma los componentes del tensor de la tasa de esfuerzos para el compuesto en la base  $rs$ , se puede reescribir según las ecuaciones 3-66, 3-68 y 3-70, mientras que los componentes del tensor de la tasa de deformaciones para el compuesto en la misma base corresponden a las ecuaciones 3-67, 3-69 y 3-71.

La ecuación constitutiva tangente para el material compuesto puede escribirse en notación tensorial como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_{tg} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad 3-72$$

Donde  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  es la tasa del tensor de esfuerzo y  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  es la tasa del tenso de deformaciones del material compuesto. El tensor constitutivo tangente  $\mathbf{C}_{tg}$  se puede obtener al sustituir las tasas de esfuerzo para cada componente en la ecuación 3-61 e igualar este resultado con la ecuación 3-72:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{tg} = & k^m \mathbf{C}_{tg}^m + k^{fr} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \otimes (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) E_{tg}^{dr} + \\ & + k^{fs} (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \otimes (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) E_{tg}^{ds} + \\ & + (k^{fr} + k^{fs}) (4(\mathbf{r} \otimes \mathbf{s})^s \otimes (\mathbf{r} \otimes \mathbf{s})^s) G_{tg}^{f\tau} \end{aligned} \quad 3-73$$

La expresión anterior depende del módulo y del tensor constitutivo tangente de cada componente, expresados en las siguientes ecuaciones constitutivas:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^m = \mathbf{C}_{tg}^m : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{tasa de esfuerzo en la matriz}) \quad 3-74$$

$$\dot{\sigma}_{rr}^{fr} = E_{tg}^{dr} \dot{\varepsilon}_{rr} \quad (\text{tasa de esfuerzo normal en el fibra } \mathbf{r}) \quad 3-75$$

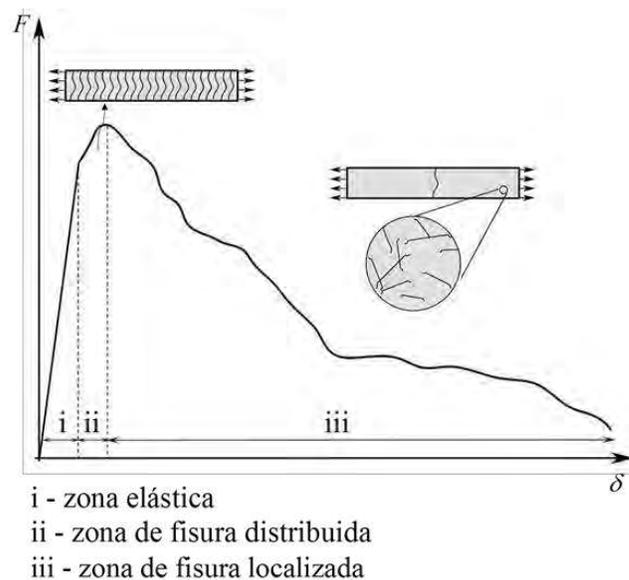
$$\dot{\sigma}_{ss}^{fs} = E_{tg}^{ds} \dot{\epsilon}_{ss} \quad (\text{tasa de esfuerzo normal en el fibra } \mathbf{S}) \quad 3-76$$

$$\dot{\tau}_{rs}^f = G_{tg}^{f\tau} \dot{\gamma}_{rs} \quad (\text{tasa de esfuerzo cortante en las fibras}) \quad 3-77$$

### 3.6 Metodología de discontinuidades fuertes en SFRC

Cuando un elemento de SFRC se encuentra solicitado a esfuerzos de tracción, en una primera etapa el material se comporta de manera elástica, posteriormente con el incremento de los esfuerzos la linealidad de la respuesta comienza a perderse debido a que se presenta microfisuración en la matriz de concreto, a esta segunda etapa se le conoce como de fisuración distribuida o de fallo difuso. Dependiendo de la cuantía de fibras esta etapa puede llegar a ser más o menos prolongada. En una tercera etapa se presenta fallo discontinuo o localizado, es decir que la apertura de unas pocas fisuras se impone sobre las demás generadas en la etapa previa (figura 3-15) (Abrishambaf, et al., 2013) (Barragán, et al., 2003) (Lee & Jacobsen, 2011).

**Figura 3-15:** Esquema de respuesta estructural de una probeta de material compuesto tipo SFRC solicitado a tracción



Considerando que el campo de las deformaciones para el material SFRC es el mismo para las fibras y para la matriz, la cinemática enriquecida definida en la metodología de

discontinuidades fuertes de continuo (CSDA) (Oliver, 1996a) (Oliver, 1996b) (Oliver, et al., 2003) (Oliver, et al., 2004a) (Oliver, et al., 2004b) se puede aplicar al SFRC de la misma forma que se utiliza en un material homogéneo.

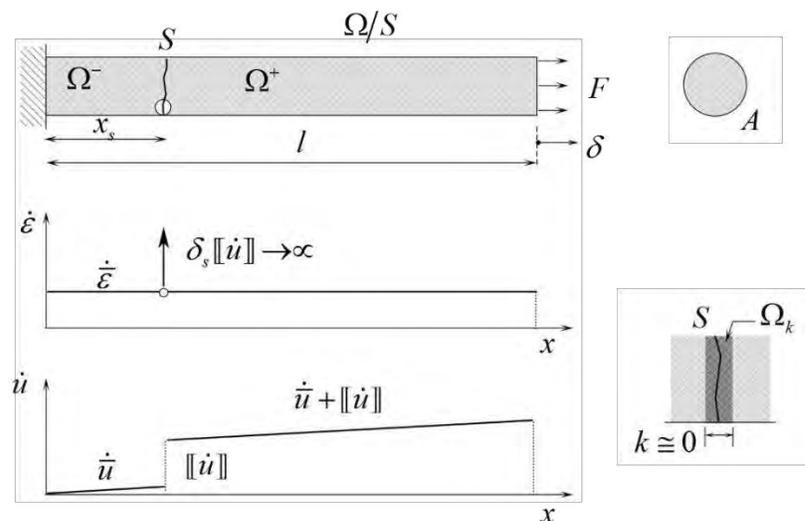
### 3.6.1 Descripción cinemática del material compuesto

Para definir una discontinuidad fuerte en la CSDA, a manera de ejemplo, en la figura 3-16 se presenta el caso de una barra de longitud  $L$  y sección transversal con área  $A$ , solicitada a carga axial  $F$  de tracción. Durante el alargamiento de la barra se presenta una fisura correspondiente a la sección transversal  $S$ . La discontinuidad fuerte se puede describir como un salto en el campo del desplazamiento entre las caras de la fisura  $S$ , el cual genera valores no acotados en el campo de la deformación.

**Figura 3-16:** Cinemática de la discontinuidad fuerte en una dimensión.

- (a) Tasa de desplazamiento, (b) tasa de deformación, (c) discontinuidad en la barra,
- (d) detalle de la zona de discontinuidad

Fuente: (Linero, et al., 2008)



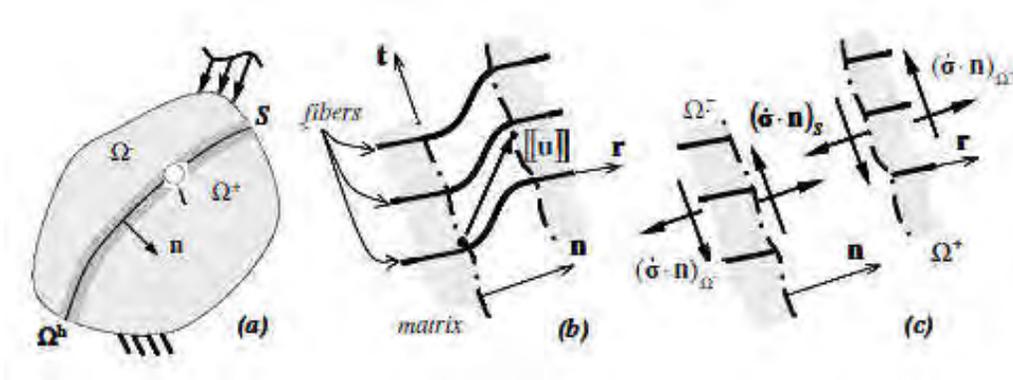
La superficie de discontinuidad  $S$  divide el dominio  $\Omega$  de la barra en los subdominios  $\Omega^+$  y  $\Omega^-$ . La unión de los dos subdominios anteriores corresponde a los puntos materiales que no hacen parte de la superficie de la discontinuidad  $S$ , de manera que son los subdominios de  $\Omega/S$  adelante y atrás de  $S$ , respectivamente.

Las anteriores definiciones se pueden extender en un espacio tridimensional y para un sólido de material compuesto tipo SFRC en el que ocurre una discontinuidad fuerte sobre una superficie  $S$  con normal  $\mathbf{n}$ , como se presenta en la figura 3-17(a).

**Figura 3-17:** Aplicación de la CSDA a materiales compuestos:

- (a) sólido con discontinuidad, (b) salto de desplazamiento en un punto material y (c) continuidad de tracciones en un punto material.

Fuente: (Linero, et al., 2008)



El campo discontinuo de la tasa de desplazamiento en un punto material  $\mathbf{x}$ , para un instante  $t$ , se define como (Linero, et al., 2008):

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{M}_S(\mathbf{x}) \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket(t) \quad 3-78$$

Donde  $\dot{\bar{\mathbf{u}}}$  es la parte continua de la tasa de desplazamiento y  $\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket$  corresponde al salto de tasa de desplazamiento sobre la discontinuidad  $S$  (figura 3-17(b)):

$$\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket = \dot{\mathbf{u}}|_{\Omega^+/S} - \dot{\mathbf{u}}|_S \quad 3-79$$

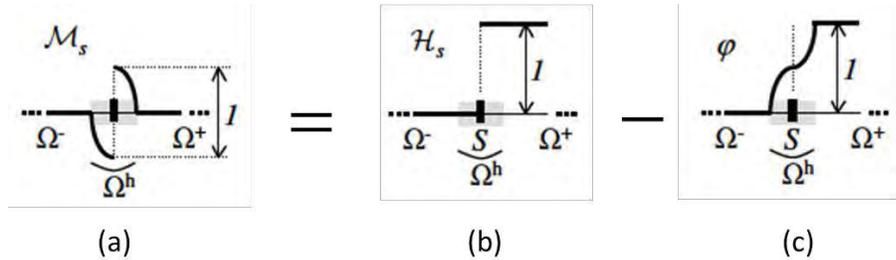
Por su parte la función elemental de salto unitario en el continuo figura 3-18(a) está definida como:

$$\mathcal{M}_S(\mathbf{x}) = \mathcal{H}_S(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) \quad 3-80$$

donde  $\mathcal{H}_S(\mathbf{x})$  es la función de Heaviside figura 3-18(b) y  $\varphi(\mathbf{x})$  es una función continua arbitraria, limitada en una pequeña banda  $\Omega^h$  contenida en  $S$  (figura 3-18(c)).

**Figura 3-18:** Aplicación de la CSDA a materiales compuestos:  
 (a) función salto unitario, (b) función de Heaviside y (c) función  $\phi$ .

Fuente: (Linero, et al., 2008)



Los valores de la función de Heaviside (3-81) y de la función continua  $\phi(\mathbf{x})$  (ecuación 3-82) coinciden fuera da la banda  $\Omega^h$  en la que el valor de esta última es arbitrario.

$$\mathcal{H}_s(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \\ 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ \end{cases} \quad 3-81$$

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^- / \Omega^h \\ 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ / \Omega^h \end{cases} \quad 3-82$$

Ahora bien, si se aplica el operador gradiente simétrico sobre el campo de velocidad se obtiene el campo de la tasa de deformaciones

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla^s \dot{\mathbf{u}} \quad 3-83$$

de esta forma la tasa de deformación puede dividirse en dos partes, una compatible en función de la velocidad en el continuo y, otra mejorada en términos del salto de la tasa de desplazamiento.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \overbrace{\nabla^s \dot{\mathbf{u}} }^{\text{compatible}} - \overbrace{\left( \nabla \phi \otimes \dot{\mathbf{u}} \right)^s + \left( \delta_s \mathbf{n} \otimes \dot{\mathbf{u}} \right)^s }^{\text{mejorada}} \quad 3-84$$

Debido a que el gradiente de la función de Heaviside corresponde a una función singular, la parte mejorada puede expresarse como la suma de una parte acotada y una no acotada. De manera que la expresión para el campo de las deformaciones puede interpretarse como la suma de una parte regular (acotada) y un parte singular (no acotada) se escribe de la forma:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + [[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] = \underbrace{\nabla^s \dot{\mathbf{u}}}_{\text{regular } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \overbrace{(\nabla \varphi \otimes [[\dot{\mathbf{u}}]])^s}^{\text{mejorada acotada}} + \overbrace{(\delta_s \mathbf{n} \otimes [[\dot{\mathbf{u}}]])^s}^{\text{mejorada no acotada}} \quad 3-85$$

donde  $\delta_s$  es la función delta de Dirac actuando sobre el dominio  $\Omega$ .

La parte singular de tasa de deformación corresponde a la diferencia entre la tasa de deformación dentro y fuera de la superficie de discontinuidad  $\mathcal{S}$  y es igual a:

$$[[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\Omega^+/\mathcal{S}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathcal{S}} = \delta_s (\mathbf{n} \otimes [[\dot{\mathbf{u}}]])^s \quad 3-86$$

En el material compuesto, las componentes de la tasa de deformación utilizada por cada material constituyente, expresadas en términos de sus partes regular y singular pueden escribirse como:

Deformación en la matriz:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^m = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + (\delta_s \mathbf{n} \otimes \dot{\mathbf{u}})^s \quad 3-87$$

Deformación en las fibras en la dirección  $\mathbf{r}$ :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{rr}^{dr} = \mathbf{r} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{r} + \delta_s (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{u}}) \quad 3-88$$

Deformación en las fibras en la dirección  $\mathbf{s}$ :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ss}^{ds} = \mathbf{s} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{s} + \delta_s (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{u}}) \quad 3-89$$

Deformación angular en las fibras:

$$\dot{\gamma}_{rs}^f = 2\mathbf{r} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{s} + \delta_s [(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{u}}) + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{u}})] \quad 3-90$$

Donde los escalares  $(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{u}})$  y  $(\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{u}})$  correspondientes a los componentes de la tasa del salto del desplazamiento en la dirección  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{s}$ , respectivamente.

Las ecuaciones 3-88 y 3-89 indican que cuando se presenta una discontinuidad paralela a la dirección de uno de los paquetes de fibras, la apertura de la fisura no genera ninguna deformación sobre ese paquete de fibras en particular, mientras que en las fibras en la dirección perpendicular la parte singular de la tasa de deformaciones adquiere un valor máximo.

### 3.6.2 Condiciones de equilibrio en el material compuesto

A continuación se presentan las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de continuidad de tracciones en el medio continuo del material compuesto:

Equilibrio interno en el cuerpo  $\Omega \setminus S$  fuera de la superficie de fisura:

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\mathbf{b}} = 0 \quad 3-91$$

Equilibrio en el contorno  $\Gamma_\sigma$ :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_t = \dot{\mathbf{t}}^* \quad 3-92$$

Continuidad de tracciones en  $\Omega \setminus S$ :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S} \cdot \mathbf{n} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^- \setminus S} \cdot \mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^+ \setminus S} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad 3-93$$

Continuidad de tracciones en  $S$ :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S \cdot \mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^+ \setminus S} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad 3-94$$

donde  $\mathbf{b}$  es el vector de fuerzas de cuerpo,  $\mathbf{t}^*$  es el vector de fuerzas de superficie actuando sobre el contorno  $\Gamma_\sigma$  de normal  $\mathbf{v}_t$ .

La CSDA permite evaluar un campo de esfuerzos acotados tanto en la superficie de discontinuidad  $S$ , como fuera de ella, independientemente de que las deformaciones en  $S$  presenten valores no acotados. De esta forma es posible cumplir con la condición de continuidad interna de tracciones en la superficie  $S$ , expresada en la ecuación 3-94.

### 3.6.3 Análisis de discontinuidad fuerte en el material compuesto

Para que los esfuerzos del material compuesto y de sus componentes tengan sentido físico es necesario que sus valores sean acotados aún cuando las deformaciones en la superficie  $S$  presenten valores no acotados cuando el salto de desplazamiento es diferente de cero

( $\|\dot{\mathbf{u}}\| \neq 0$ ); adicionalmente se requiere que exista una consistencia entre los unos y los otros.

Dado que un valor acotado se puede expresar como la suma de varios valores acotados, la tasa de esfuerzos del material compuesto tendrá un valor acotado siempre que cada uno de los componentes también presente un valor acotado. En la CDSA es posible satisfacer estas condiciones mediante la regularización de algunos parámetros y variables internas del modelo constitutivo.

- Regularización del modelo constitutivo de la matriz.

De acuerdo con el análisis de discontinuidad fuerte presentado en (Oliver, 2000) (Samaniego, 2002) (Oliver & Huespe, 2004), el modelo constitutivo de daño para la matriz puede regularizarse redefiniendo la ley de ablandamiento en función de un parámetro de ablandamiento discreto  $\bar{H}^m$  y una variable interna discreta  $\bar{\alpha}^m$  de la siguiente forma:

$$\frac{1}{H^m} = \delta_s \frac{1}{\bar{H}^m} \quad 3-95$$

$$\dot{q}_s^m = \delta_s \dot{\bar{\alpha}}^m \quad 3-96$$

donde  $\delta_s$  es la función delta de Dirac en la superficie de discontinuidad. De esta manera al sustituir las ecuaciones anteriores en la ecuación 3-7, se obtiene la ley de ablandamiento discreto, expresada como:

$$\dot{q}^m = \bar{H}^m \dot{\bar{\alpha}}^m \quad ; \quad q_s^m = q_{s(SD)}^m + \bar{H}^m \Delta \bar{\alpha}^m \quad 3-97$$

Donde  $\Delta \bar{\alpha}^m = \bar{\alpha}^m(t_{SD}) - \bar{\alpha}^m(t)$ , siendo  $t_{SD}$  el instante en el cual comienza la discontinuidad fuerte.

- Regularización de los modelos constitutivos de las fibras.

La regularización de los modelos para los componentes correspondientes al comportamiento axial de las fibras de acero en  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{s}$ , así como al modelo de acción pasador de las mismas, se puede obtener mediante el análisis de discontinuidad fuerte

aplicado a un modelo de plasticidad unidimensional presentado en (Simó, et al., 1993) considerando que estos tres efectos están definidos por modelos de este tipo. Esto implica redefinir el parámetro de ablandamiento y la variable interna como discretas modificando la ley de ablandamiento de la siguiente forma:

Comportamiento axial de la fibra en la dirección  $\mathbf{r}$  :

$$q_s^{fr} = q_{s(SD)}^{fr} + \bar{H}^{fr} \Delta \bar{\alpha}^{fr} \quad 3-98$$

donde:

$$\lambda^{fr} = \dot{\alpha}_s^{fr} = \delta_s \dot{\bar{\alpha}}^{fr} \quad 3-99$$

$$\frac{1}{H^{fr}} = \delta_s \frac{1}{\bar{H}^{fr}} \quad 3-100$$

Comportamiento axial de la fibra en la dirección  $\mathbf{s}$  :

$$q_s^{fs} = q_{s(SD)}^{fs} + \bar{H}^{fs} \Delta \bar{\alpha}^{fs} \quad 3-101$$

donde:

$$\lambda^{fs} = \dot{\alpha}_s^{fs} = \delta_s \dot{\bar{\alpha}}^{fs} \quad 3-102$$

$$\frac{1}{H^{fs}} = \delta_s \frac{1}{\bar{H}^{fs}} \quad 3-103$$

Acción pasador de las fibras:

$$q_s^{f\tau} = q_{s(SD)}^{f\tau} + \bar{H}^{f\tau} \Delta \bar{\alpha}^{f\tau} \quad 3-104$$

donde:

$$\lambda^{f\tau} = \dot{\alpha}_s^{f\tau} = \delta_s \dot{\bar{\alpha}}^{f\tau} \quad 3-105$$

$$\frac{1}{H^{f\tau}} = \delta_s \frac{1}{\bar{H}^{f\tau}} \quad 3-106$$

### 3.6.4 Análisis de bifurcación en el SFRC

En el contexto de la mecánica del continuo, el análisis de bifurcación material permite determinar el comienzo y la dirección de las fisuras marcando el inicio de una etapa en la que se presenta fallo discontinuo o localizado. Rice (1976) y Runesson, Ottosen, & Peric (1991) presentaron el análisis de bifurcación discontinua para materiales homogéneos, que puede ser aplicable al modelo de SFRC propuesto si se tiene que para un punto material, el campo de velocidades, la tasa de deformaciones y la tasa de esfuerzos, están definidos en la escala del compuesto. Ahora bien, considerando que en un punto de material compuesto SFRC las fibras embebidas en la matriz se distribuyen uniformemente, es de esperar que la dirección y el instante de bifurcación estén determinados por las propiedades mecánicas de todos los constituyentes.

El análisis de bifurcación consiste en determinar la condición de existencia de una superficie de discontinuidad de la tasa de deformación  $S$ , definida por la normal  $\mathbf{n}$ , partiendo del hecho de que en un punto del sólido con dominio  $\Omega$  actúa una tasa de tensión uniforme  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t)$  induciendo una tasa de deformación  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t)$  bajo una ley constitutiva representada en la ecuación constitutiva tangente:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_{tg} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad 3-107$$

En el contexto de la mecánica del continuo el vector de tracciones debe ser continuo a través de la superficie de discontinuidad  $S$ , lo que implica que la diferencia entre el vector de tracciones calculado a ambos lados de la discontinuidad sea nulo, por lo que debe cumplirse la siguiente ecuación (condición de continuidad de tracciones):

$$[[\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}]] = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^-/S} \cdot \mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^+/S} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad 3-108$$

Partiendo del hecho de que el tensor constitutivo tangente del material compuesto es el mismo a ambos lados de la superficie de fisura, al reemplazar la ecuación 3-108 en la ecuación 3-107 se obtiene que:

$$[[\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}]] = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{tg} : [[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] = 0 \quad 3-109$$

Pero de acuerdo con la ecuación 3-86 el salto de la tasa de deformación  $[[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]]$  es:

$$[[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] = \delta_s (\mathbf{n} \otimes [[\dot{\mathbf{u}}]])^s \quad 3-110$$

Y al reemplazar la expresión 3-110 en la ecuación 3-109 3-86 ésta última queda de la forma:

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{ig} \cdot \mathbf{n}) \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] = 0 \quad 3-111$$

Si se define al *tensor de localización tangente del material compuesto*  $\mathbf{Q}_{ig}(t, \mathbf{n})$  como el tensor de segundo orden obtenido a través de la expresión:

$$\mathbf{Q}_{ig}(t, \mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{ig} \cdot \mathbf{n} \quad 3-112$$

La ecuación 3-111 puede escribirse como:

$$\mathbf{Q}_{ig}(t, \mathbf{n}) \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] = 0 \quad \forall t \quad 3-113$$

La presencia de un salto en el campo de las velocidades diferente de cero,  $[[\dot{\mathbf{u}}]] \neq \mathbf{0}$ , es una condición suficiente para la existencia de un modo de discontinuidad fuerte. Por lo tanto, la ecuación 3-113 se cumple cuando se presenta la singularidad del tensor de localización tangente, es decir, que su determinante debe ser nulo. Tal condición ocurre en un instante  $t_b$  y en la dirección  $\mathbf{n}$ , de tal forma que:

$$\mathbf{Q}_{ig}(t_b, \mathbf{n}) = 0 \rightarrow \det[\mathbf{Q}_{ig}(t_b, \mathbf{n})] = 0 \quad 3-114$$

Como estrategia de cálculo se realiza una búsqueda de los valores mínimos del determinante del tensor de localización  $\mathbf{Q}_{ig}$  en cada instante de pseudo-tiempo con respecto a  $\mathbf{n}$ . En el caso de problemas bidimensionales el vector  $\mathbf{n}$  puede definirse fácilmente a partir del ángulo  $\theta_n$ , formado entre la dirección principal  $l$  y el vector  $\mathbf{n}$ . De este forma, cuando el valor del determinante es nulo, los valores de  $t$  y  $\theta_n$  corresponden al instante de bifurcación  $t_b$  y al ángulo de localización  $\theta_{loc}$ .

Es preciso aclarar que debido a la naturaleza ortotrópica del material compuesto, las direcciones principales de deformación son diferentes a las direcciones principales de esfuerzos.

### 3.7 Implementación de la formulación en el Método de los Elementos Finitos.

La formulación descrita en este capítulo fue implementada en el método de los elementos finitos para problemas no lineales. Se ha planteado el análisis bidimensional de miembros estructurales considerando deformaciones infinitesimales, cargas estáticas y condición plana de esfuerzos (Cervera, et al., 2001). Se ha incluido la no linealidad del material compuesto conformado por una matriz de concreto, dos paquetes de fibras de acero y sus efectos de interacción, equipado con la metodología de discontinuidades fuertes del continuo (Oliver, et al., 2004b) (Oliver, et al., 2005) (Blanco, 2006).

El problema no lineal cuyo material se representa con un modelo constitutivo con ablandamiento por deformación se resuelve utilizando el esquema de integración implícito - explícito IMPLEX propuesto por Oliver y colaboradores (Oliver, et al., 2004a) (Oliver, et al., 2005). Tal esquema proporciona robustez y estabilidad, facilitando la convergencia, mientras que permite obtener una aproximación satisfactoria de la solución.

El instante de aparición y la dirección de discontinuidad en un elemento finito se obtienen mediante el análisis de bifurcación material descrita en el numeral 3.6.4, sin embargo para establecer su posición dentro del mismo es necesario aplicar un algoritmo que asegure la continuidad de los segmentos que conforman la trayectoria de la discontinuidad entre elementos finitos contiguos. Con este fin se ha usado la estrategia global del trazado de las líneas de discontinuidad presentada por Samaniego, Oliver y Huespe (Samaniego, 2002) (Oliver & Huespe, 2004).

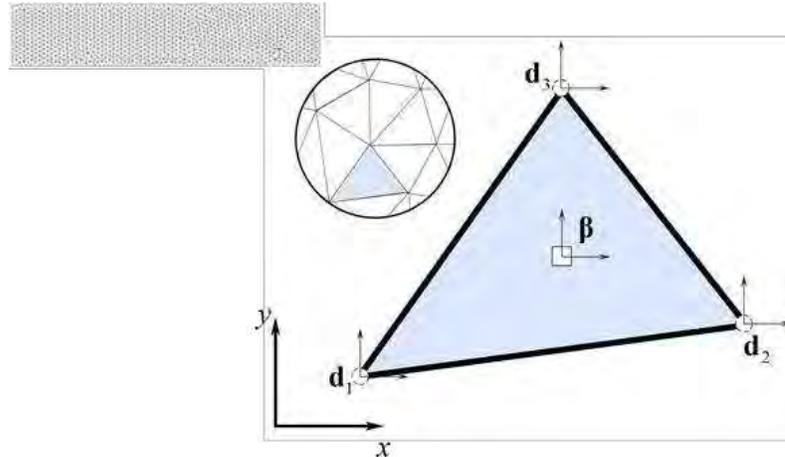
#### 3.7.1 Elementos finitos con discontinuidades embebidas

En el modelo numérico desarrollado en esta tesis se usaron elementos finitos triangulares lineales *con discontinuidades embebidas* (Simó, et al., 1993), los cuales son capaces de capturar los saltos en el desplazamiento en su interior mediante modos enriquecidos de deformación, que son controlados por dos grados de libertad  $\beta$  ubicados en el centroide del elemento. Tales grados de libertad son adicionales a los seis grados de libertad compatibles convencionales (figura 3-19). Los grados de libertad relacionados con el salto

son condensados a nivel del elemento, gracias al soporte elemental de la función de enriquecimiento que se describe en la figura 3-19

**Figura 3-19:** Grados de libertad (desplazamientos compatibles y saltos).

Fuente: (Linero, et al., 2008)



Los elementos son además *simétricos cinemáticamente consistentes* (Jirasek, 2000). Lo anterior significa que se mantiene la simetría de la matriz de rigidez, incluso después de la localización de la discontinuidad, garantizando la continuidad de las tracciones a través de la discontinuidad. Al mismo tiempo la cinemática del elemento es capaz de capturar el salto en el desplazamiento entre las partes del elemento separadas por la línea de discontinuidad.

En el elemento triangular lineal (figura 3-19), el vector de la tasa de desplazamientos compatibles para el elemento tiene la forma:

$$\dot{\mathbf{d}}^{(e)} = [\dot{\mathbf{d}}_1, \dot{\mathbf{d}}_2, \dot{\mathbf{d}}_3]^T \tag{3-115}$$

donde cada componente corresponde al vector de la tasa de desplazamiento compatible  $\dot{\mathbf{d}}_i$  en cada uno de los nudos  $i$  del elemento en un espacio bidimensional:

$$\dot{\mathbf{d}}_i = [\dot{u}_i \ \dot{v}_i]^T \tag{3-116}$$

Por su parte el vector de saltos de la tasa de desplazamiento  $\dot{\mathbf{\beta}}^{(e)}$  para el elemento puede ser expresado como:

$$\dot{\mathbf{p}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \dot{\beta}_x & \dot{\beta}_y \end{bmatrix}^T \tag{3-117}$$

De manera que la tasa de desplazamientos en un punto  $\mathbf{x}$  en el interior del elemento triangular lineal puede obtenerse a partir de:

$$\dot{\mathbf{u}}^{(e)}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^3 N_i^{(e)}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{d}}_i(t) + \mathcal{M}_s^{(e)}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{p}}^{(e)}(t) \tag{3-118}$$

Donde  $N_i^{(e)}(\mathbf{x})$  es la función de forma para cada uno de los nudos  $i$  y la función elemental discreta de salto unitario  $\mathcal{M}_s^{(e)}(\mathbf{x})$ , en aquellos elementos que hayan sido cruzados por una superficie de discontinuidad  $\mathcal{S}$ , puede calcularse de acuerdo con la ecuación 3-119 mientras que una en los demás elementos será nula.

$$\mathcal{M}_s^{(e)}(\mathbf{x}) = \mathcal{H}_s^{(e)}(\mathbf{x}) - \varphi^{(e)}(\mathbf{x}) \tag{3-119}$$

‘donde la función de Heaviside se define como:

$$\mathcal{H}_s^{(e)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \\ 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ \end{cases} \tag{3-120}$$

Mientras que la función  $\varphi$  toma el valor de la función de forma  $N_{i+}^{(e)}(\mathbf{x})$  del nudo  $i+$  perteneciente a la parte  $\Omega^+$  del elemento finito:

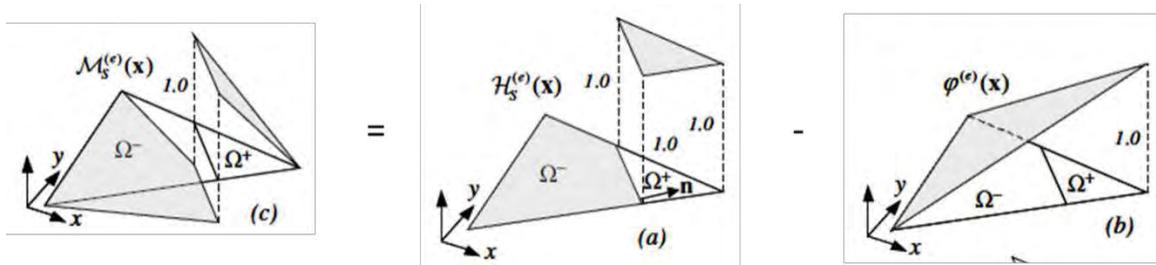
$$\varphi^{(e)}(\mathbf{x}) = N_{i+}^{(e)}(\mathbf{x}) \tag{3-121}$$

En la figura 3-20 se representa gráficamente el comportamiento de las funciones involucradas en la ecuación 3-119, dentro del elemento finito triangular.

**Figura 3-20:** Elemento con discontinuidad embebida

(a) función elemental de salto unitario (b) función de Heaviside. (c) función  $\varphi$

Fuente (Lineró, et al., 2008)

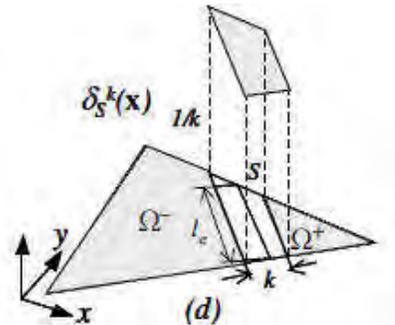


La tasa del campo de deformaciones en un punto  $\mathbf{x}$  en el interior de un elemento finito y en un instante  $t$  se obtiene al derivar la expresión 3-118, para la tasa de desplazamientos en el mismo punto, así:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(e)}(\mathbf{x}, t) = \nabla^s \dot{\mathbf{u}}^{(e)} = \sum_{i=1}^3 \left( \nabla N_i^{(e)} \otimes \dot{\mathbf{d}}_i \right)^s - \left( \nabla \varphi \otimes \dot{\boldsymbol{\beta}}^{(e)} \right)^s + \delta_S^k \left( \mathbf{n} \otimes \dot{\boldsymbol{\beta}}^{(e)} \right)^s \quad 3-122$$

Donde la función delta de Dirac  $\delta_S^k$  ha sido regularizada en términos del parámetro  $k$  que representa el espesor de una banda  $S^k$  que envuelve la superficie de discontinuidad  $S$  de acuerdo con la figura figura 3-21.

**Figura 3-21:** Función Delta de Dirac regularizada  
Fuente (Linero, et al., 2008)



De manera que  $\delta_S^k$  puede expresarse como:

$$\delta_S^k(\mathbf{x}) = \lim_{k \rightarrow 0} \left( \mu_S(\mathbf{x}) \frac{1}{k} \right) ; \quad \mu_S(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in S^k \\ 0 & \mathbf{x} \notin S^k \end{cases} \quad 3-123$$

La ecuación 3-122 puede escribirse en forma matricial y en el contexto del método de los elementos finitos (Hughes, 2000), como:

$$\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = [\mathbf{B}^{(e)}] \{\dot{\mathbf{d}}^{(e)}\} + [\mathbf{G}^{(e)}] \{\dot{\boldsymbol{\beta}}^{(e)}\} = [\mathbf{B}^{(e)}, \mathbf{G}^{(e)}] \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{d}}^{(e)} \\ \dot{\boldsymbol{\beta}}^{(e)} \end{bmatrix} \quad 3-124$$

Donde  $\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = [\dot{\varepsilon}_{xx}, \dot{\varepsilon}_{yy}, \dot{\gamma}_{xy}]^T$  y  $\mathbf{B}^{(e)}$  y  $\mathbf{G}^{(e)}$  son las matrices características del elemento finito, expresadas a continuación:

$$[\mathbf{B}^{(e)}] = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3] ; [\mathbf{B}_i] = \begin{bmatrix} \partial_x N_i^{(e)} & 0 \\ 0 & \partial_y N_i^{(e)} \\ \partial_y N_i^{(e)} & \partial_x N_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad 3-125$$

$$[\mathbf{G}^{(e)}] = \begin{bmatrix} (\delta_S^k n_x - \partial_x \varphi^{(e)}) & 0 \\ 0 & (\delta_S^k n_y - \partial_x \varphi^{(e)}) \\ (\delta_S^k n_y - \partial_y \varphi^{(e)}) & (\delta_S^k n_x - \partial_x \varphi^{(e)}) \end{bmatrix} \quad 3-126$$

- Condiciones de equilibrio

En (Samaniego, 2002) (Oliver, et al., 2003) se presenta una formulación variacional que permite expresar las ecuaciones de equilibrio en su forma débil asegurando la simetría de la matriz de rigidez.

En un cuerpo donde los desplazamientos regulares  $\bar{\eta}$  admisibles están definidos en un espacio funcional  $\bar{\mathcal{V}}_u$ , mientras que los desplazamientos discontinuos  $\eta'$  se encuentran definidos en un espacio funcional  $\tilde{\mathcal{V}}_u$ , el campo de variaciones admisibles de la deformación será del tipo:

$$\boldsymbol{\gamma} = \underbrace{\nabla^s \bar{\eta}}_{\text{parte compatible}} + \underbrace{\nabla^s \eta'}_{\text{parte mejorada}} \quad 3-127$$

De manera que el equilibrio del cuerpo se garantiza si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\int_{\Omega/S} \boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \bar{\eta} d\Omega - G_{ext}(\bar{\eta}) = 0 \quad \forall \bar{\eta} \in \bar{\mathcal{V}}_u \quad 3-128$$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \eta' d\Omega - G_{ext}(\eta') = 0 \quad \forall \eta' \in \tilde{\mathcal{V}}_u \quad 3-129$$

donde las energías externas pueden ser calculadas como:

$$G_{ext}(\bar{\eta}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \bar{\eta} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{t}^* \cdot \bar{\eta} d\Gamma \quad 3-130$$

$$G_{ext}(\eta') \approx 0 \quad 3-131$$

Dado que el gradiente de la tasa de desplazamiento admisible es igual a:

$$\{\nabla^s \boldsymbol{\eta}\} = [\mathbf{B}^{(e)}] \{\bar{\boldsymbol{\eta}}\} + [\mathbf{G}^{(e)}] \{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}\} \quad 3-132$$

la expresión incremental de fuerzas residuales en un elemento finito es de la forma:

$$\int_{\Omega^e} [\mathbf{B}^{(e)}]^T \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\} d\Omega - \{\dot{\mathbf{F}}_{ext}^{(e)}\} = \{\dot{\mathbf{R}}^{(e)}\} \quad 3-133$$

$$\int_{\Omega} [\mathbf{G}^{(e)}]^T \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\} d\Omega = \{\dot{\mathbf{r}}^{(e)}\} \quad 3-134$$

donde  $\{\dot{\mathbf{F}}_{ext}^{(e)}\}$  es el vector incremental de fuerzas externas en el elemento, y  $\{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\}$  es el vector de la tasa de esfuerzo del material compuesto en dos dimensiones:

$$\{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\} = [\dot{\sigma}_{xx}, \dot{\sigma}_{yy}, \dot{\sigma}_{xy}]^T \quad 3-135$$

La expresión 3-72 correspondiente a la ecuación constitutiva tangente del material compuesto en notación tensorial, al escribirse en notación matricial queda de la forma:

$$\{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\} = [\mathbf{C}_{tg}] \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} \quad 3-136$$

donde  $\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\}$  es el vector de la tasa de deformación del material compuesto en dos dimensiones:

$$\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = [\dot{\varepsilon}_{xx}, \dot{\varepsilon}_{yy}, \dot{\gamma}_{xy}]^T = [\mathbf{B}^{(e)}] \{\dot{\mathbf{d}}^{(e)}\} + [\mathbf{G}^{(e)}] \{\dot{\boldsymbol{\beta}}^{(e)}\} \quad 3-137$$

y  $[\mathbf{C}_{tg}]$  es el operador constitutivo tangente del material compuesto en notación de Voigt en condición plana de esfuerzos o de deformaciones.

Al reemplazar la ecuación 3-136 en las expresiones 3-133 y 3-134 se pueden obtener las siguientes expresiones:

$$\int_{\Omega^e} [\mathbf{B}^{(e)}]^T [\mathbf{C}_{tg}] [\mathbf{B}^{(e)}] d\Omega \{\dot{\mathbf{d}}^{(e)}\} + \int_{\Omega^e} [\mathbf{B}^{(e)}]^T [\mathbf{C}_{tg}] [\mathbf{G}^{(e)}] \{\dot{\boldsymbol{\beta}}^{(e)}\} d\Omega - \{\dot{\mathbf{F}}_{ext}^{(e)}\} = \{\dot{\mathbf{R}}^{(e)}\} \quad 3-138$$

$$\int_{\Omega^e} [\mathbf{G}^{(e)}]^T [\mathbf{C}_{tg}] [\mathbf{B}^{(e)}] d\Omega \{\dot{\mathbf{d}}^{(e)}\} + \int_{\Omega^e} [\mathbf{G}^{(e)}]^T [\mathbf{C}_{tg}] [\mathbf{G}^{(e)}] d\Omega = \{\dot{\mathbf{r}}^{(e)}\} \quad 3-139$$

que organizadas en forma matricial quedan de la forma:

$$\begin{bmatrix} K_{dd}^{(e)} & K_{d\beta}^{(e)} \\ K_{\beta d}^{(e)} & K_{\beta\beta}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}}^{(e)} \\ \dot{\boldsymbol{\beta}}^{(e)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}_{ext}^{(e)} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{R}}^{(e)} \\ \dot{\mathbf{i}}^{(e)} \end{Bmatrix} \quad 3-140$$

Donde,

$$\begin{aligned} K_{dd}^{(e)} &= \int_{\Omega^e} [\mathbf{B}^{(e)}]^T [\mathbf{C}_{tg}] [\mathbf{B}^{(e)}] d\Omega \\ K_{d\beta}^{(e)} &= \int_{\Omega^e} [\mathbf{B}^{(e)}]^T [\mathbf{C}_{tg}] [\mathbf{G}^{(e)}] d\Omega \\ K_{\beta d}^{(e)} &= \int_{\Omega^e} [\mathbf{G}^{(e)}]^T [\mathbf{C}_{tg}] [\mathbf{B}^{(e)}] d\Omega \\ K_{\beta\beta}^{(e)} &= \int_{\Omega^e} [\mathbf{G}^{(e)}]^T [\mathbf{C}_{tg}] [\mathbf{G}^{(e)}] d\Omega \end{aligned} \quad 3-141$$

son las componentes de la matriz de rigidez del elemento finito. La matriz de rigidez del elemento finalmente queda expresada en términos de los 6 grados de libertad convencionales luego de realizar la condensación de los grados de libertad adicionales.

### 3.7.2 Vector de la tasa del esfuerzo del material compuesto

La tasa de esfuerzo del material compuesto en notación tensorial se presentó en la ecuación 3-61 como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = k^m \dot{\boldsymbol{\sigma}}^m + k^{fr} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{rr}^{fr} + k^{fs} (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ss}^{fs} + 2(k^{fr} + k^{fs}) (\mathbf{r} \otimes \mathbf{s})^s \dot{\boldsymbol{\tau}}_{rs}^{fr} \quad 3-142$$

Y puede ser escrita en notación de Voigt como:

$$\{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\} = k^m \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}^m\} + k^{fr} \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{fr}\} + k^{fs} \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{fs}\} + (k^{fr} + k^{fs}) \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{fr\tau}\} \quad 3-143$$

donde los vectores de la tasa de esfuerzo de cada componente corresponden a las expresiones que se presentan a continuación:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^m = \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}^m\} = \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{xx}^m & \dot{\sigma}_{yy}^m & \dot{\sigma}_{xy}^m \end{bmatrix}^T \quad 3-144$$

$$(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{rr}^{fr} = \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{fr}\} = \begin{bmatrix} r_x^2 & r_y^2 & r_x r_y \end{bmatrix}^T \dot{\sigma}_{rr}^{fr} \quad 3-145$$

$$(\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ss}^{fs} = \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{fs}\} = \begin{bmatrix} s_x^2 & s_y^2 & s_x s_y \end{bmatrix}^T \dot{\sigma}_{ss}^{fs} \quad 3-146$$

$$2(\mathbf{r} \otimes \mathbf{s})^s \dot{\boldsymbol{\tau}}_{rs}^{fr} = \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{fr\tau}\} = \begin{bmatrix} r_x s_x & r_y s_y & 0.5(r_x s_y + r_y s_x) \end{bmatrix}^T \dot{\boldsymbol{\tau}}_{rs}^{fr} \quad 3-147$$

### 3.7.3 Matriz del operador constitutivo tangente del material compuesto

El operador constitutivo tangente del material compuesto indicado en la sección **Error! Reference source not found.** es un tensor de cuarto orden:

$$\begin{aligned} C_{tg} = & k^m C_{tg}^m + k^{fr} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \otimes (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) E_{tg}^{dr} + \\ & + k^{fs} (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \otimes (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) E_{tg}^{ds} + \\ & + (k^{fr} + k^{fs}) (4(\mathbf{r} \otimes \mathbf{s})^s \otimes (\mathbf{r} \otimes \mathbf{s})^s) G_{tg}^{f\tau} \end{aligned} \quad 3-148$$

que puede ser representado en notación de Voigt mediante una matriz, de la forma:

$$[C_{tg}] = k^m [C_{tg}^m] + k^{fr} [C_{tg}^{dr}] + k^{fs} [C_{tg}^{ds}] + (k^{fr} + k^{fs}) [C_{tg}^{f\tau}] \quad 3-149$$

Donde el operador constitutivo tangente de la matriz de concreto está dado directamente por el modelo de daño presentado en el apartado 3.3 y la ecuación 3-15, mientras que los demás componentes corresponden a:

$$(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \otimes (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) E_{tg}^{dr} = [C_{tg}^{dr}] = E_{tg}^{dr} \begin{bmatrix} r_x^2 r_x^2 & r_x^2 r_y^2 & r_x^3 r_y \\ & r_y^2 r_y^2 & r_x r_y^3 \\ sim & & r_x^2 r_y^2 \end{bmatrix} \quad 3-150$$

$$(\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \otimes (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) E_{tg}^{ds} = [C_{tg}^{ds}] = E_{tg}^{ds} \begin{bmatrix} s_x^2 s_x^2 & s_x^2 s_y^2 & s_x^3 s_y \\ & s_y^2 s_y^2 & s_x s_y^3 \\ sim & & s_x^2 s_y^2 \end{bmatrix} \quad 3-151$$

$$(4(\mathbf{r} \otimes \mathbf{s})^s \otimes (\mathbf{r} \otimes \mathbf{s})^s) G_{tg}^{f\tau} = [C_{tg}^{f\tau}] = 4G_{tg}^{f\tau} \begin{bmatrix} r_x^2 s_x^2 & r_x s_x r_y s_y & r_x s_x \phi_{rs} \\ & r_y^2 s_y^2 & r_y s_y \phi_{rs} \\ sim & & \phi_{rs}^2 \end{bmatrix} \quad 3-152$$

### 3.7.4 Matriz de localización del material compuesto

En la sección 3.6.4 se presentó el tensor de localización del material compuesto como:

$$\mathbf{Q}_{ig}(t, \mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{ig} \cdot \mathbf{n} \quad 3-153$$

Que puede ser representado mediante una matriz cuadrada de orden dos en un espacio bidimensional, como lo indica la siguiente ecuación:

$$\mathbf{Q}_{ig} = [\mathbf{Q}_{ig}] = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} \end{bmatrix} \quad 3-154$$

y es igual a la suma ponderada de las contribuciones de los componentes, así:

$$[\mathbf{Q}_{ig}] = k^m [\mathbf{Q}_{ig}^m] + k^{fr} [\mathbf{Q}_{ig}^{dr}] + k^{fs} [\mathbf{Q}_{ig}^{ds}] + (k^{fr} + k^{fs}) [\mathbf{Q}_{ig}^{f\tau}] \quad 3-155$$

Donde,

$$[\mathbf{Q}_{ig}^{dr}] = E_{ig}^{dr} \phi_m^2 \begin{bmatrix} r_x^2 & r_x r_y \\ r_x r_y & r_y^2 \end{bmatrix} \quad 3-156$$

$$[\mathbf{Q}_{ig}^{ds}] = E_{ig}^{ds} \phi_{sn}^2 \begin{bmatrix} s_x^2 & s_x s_y \\ s_x s_y & s_y^2 \end{bmatrix} \quad 3-157$$

$$[\mathbf{Q}_{ig}^{f\tau}] = G_{ig}^{f\tau} \begin{bmatrix} (\phi_{sn} r_x + \phi_m s_x)^2 & (\phi_{sn} r_x + \phi_m s_x)(\phi_{sn} r_y + \phi_m s_y) \\ (\phi_{sn} r_x + \phi_m s_x)(\phi_{sn} r_y + \phi_m s_y) & (\phi_{sn} r_y + \phi_m s_y)^2 \end{bmatrix} \quad 3-158$$

Siendo

$$\phi_m = (r_x n_x + r_y n_y) \quad , \quad \phi_{sn} = (s_x n_x + s_y n_y) \quad 3-159$$

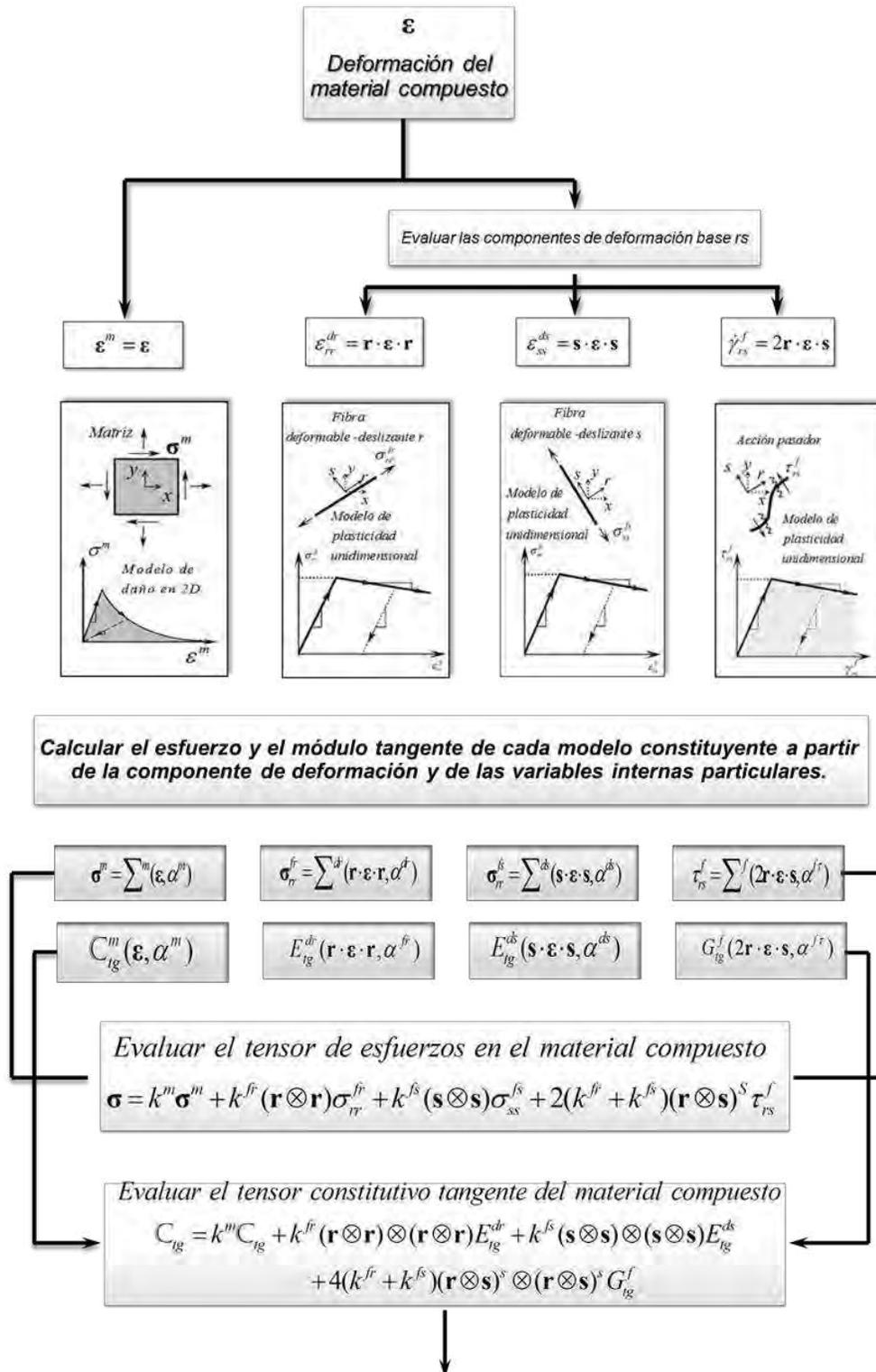
La matriz de localización de la matriz de concreto se expresó anteriormente en la Ecuación 3-112.

### 3.7.5 Algoritmo de cálculo

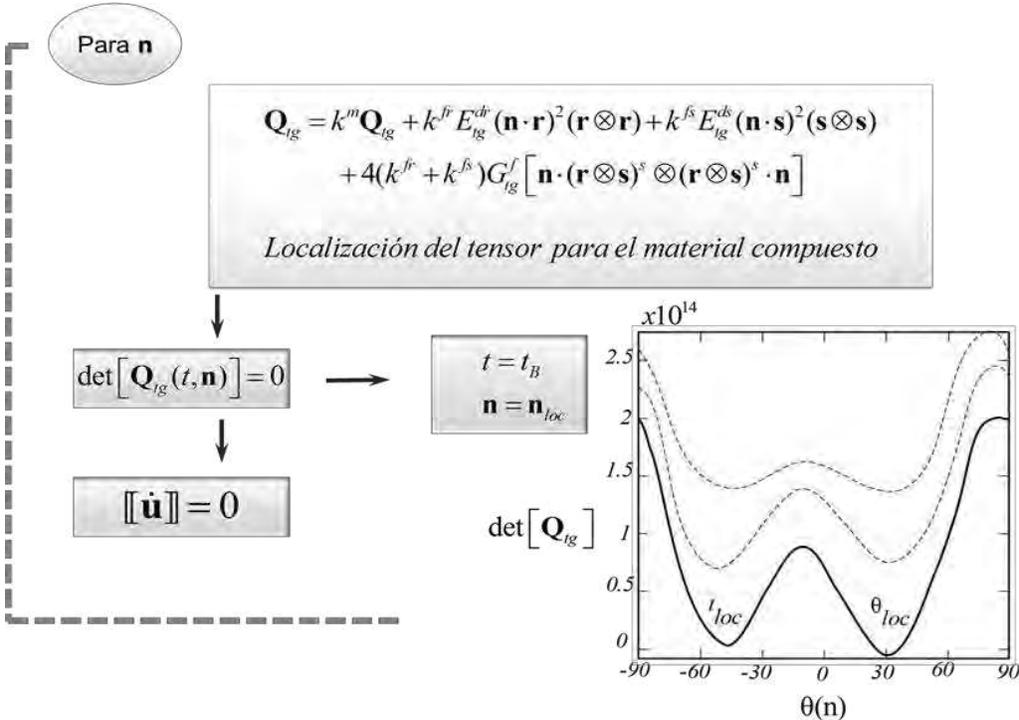
En el diagrama de flujo presentado en la figura 3-22 se presenta el procedimiento de cálculo en el modelo constitutivo del material compuesto.

**Figura 3-22:** Modelo constitutivo del material compuesto. Diagrama de flujo de cálculo del tensor de esfuerzos, el tensor constitutivo tangente y el análisis de localización.

Adaptado de: (Linero, et al., 2008)



*Realizar un análisis de bifurcación del material compuesto, en el cual se busca el primer paso de carga y la dirección de la superficie de discontinuidad, cuando el determinante del tensor de localización es igual a cero.*



### 3.8 Modelo estocástico del SFRC

En el capítulo 2 se presentó cómo el coeficiente de dispersión y el coeficiente de isotropía permiten describir la distribución, tanto del contenido como de la orientación de las fibras de acero en la matriz de concreto, considerando que estos dos parámetros están directamente relacionados con la variabilidad de los resultados experimentales en miembros de SFRC. Por esta razón, en esta investigación se ha considerado relevante incluir la influencia de estos dos coeficientes en un punto material del compuesto.

Por otra parte, debido a que el análisis se realizará considerando un comportamiento bidimensional de la estructura, es necesario determinar cuál será el aporte de las fibras en este comportamiento, mediante el coeficiente de participación de las fibras en el plano de análisis, considerando que aquellas que se encuentran perpendiculares a dicho plano no aportarán a transmisión de esfuerzos entre las caras de las fisuras.

### 3.8.1 Definición del coeficiente de participación volumétrico total en un elemento finito bidimensional

En el proceso de elaboración del SFRC se conoce la dosificación en peso de las fibras por cada unidad de volumen  $\rho_{nv}^f$  y a partir de él se puede calcular la cuantía volumétrica nominal de las fibras  $\rho_{nv}^f$  de la forma:

$$\rho_{nv}^f = \rho_{nv}^f \cdot \gamma_s \quad 3-160$$

donde  $\gamma_s$  es el peso específico del acero de las fibras.

Como se indicó en el apartado 2.3.1, la orientación de las fibras fuera del plano de análisis genera una reducción de su capacidad en función de su longitud proyectada. Esta reducción asociada a la longitud de la fibra actuando paralela al plano de análisis ha sido incorporada en el modelo al afectar la cuantía volumétrica de fibras de tal forma que el coeficiente de participación volumétrica nominal total de las fibras en el plano de análisis  $k_n^f$  se puede calcular como:

$$k_n^f = \rho_{nv}^f \cdot \mathcal{G}_i \quad 3-161$$

donde  $\mathcal{G}_i$  es el coeficiente de proyección de la fibra en el plano descrito en el numeral 2.3.1 que depende de la relación entre el espesor del elemento  $t$  y la longitud nominal de la fibra  $l_f$ . Por otra parte, de acuerdo con Soe (2010), la cuantía volumétrica puede variar de un punto material a otro, siguiendo una función de probabilidad normal, caracterizada por tener una media  $\mu_p$  equivalente a la cuantía volumétrica nominal  $\rho_{nv}^f$ , y un coeficiente de variación CoV de aproximadamente el 27%, por lo que la desviación estándar para la cuantía será:

$$s_\rho = 0.27 \rho_{nv}^f \quad 3-162$$

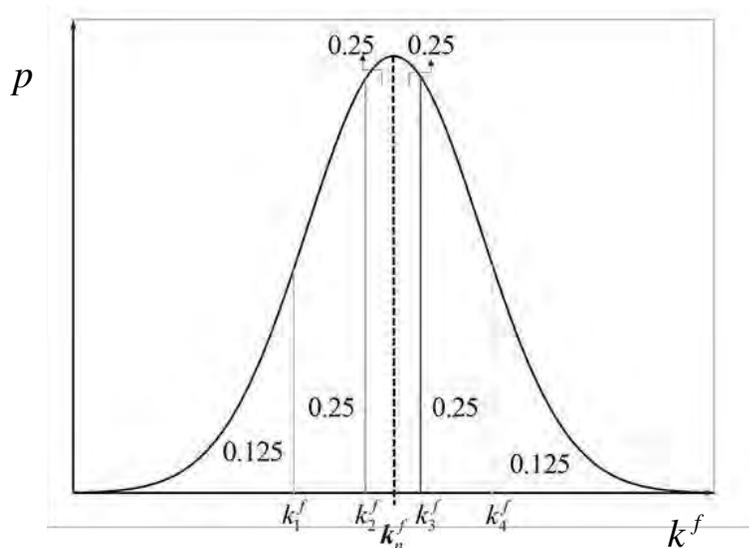
Consecuentemente, el coeficiente de participación volumétrica también obedece a una distribución normal de densidad de probabilidad con media  $\mu_k$  y desviación estándar  $s_k$  definidas por las ecuaciones 3-163 y 3-164 respectivamente.

$$\mu_k = k_n^f = \rho_{nv}^f \cdot \mathcal{G}_i \quad 3-163$$

$$s_k = 0.27 \mu_k = 0.27 k_n^f \quad 3-164$$

En el modelo estocástico desarrollado se considera que el material en el miembro estructural presenta una variación en la cuantía volumétrica y por tanto en el coeficiente de participación volumétrica en el plano de análisis. Para tener en cuenta los efectos ocasionados por dicha variación, se han simulado cuatro coeficientes de participación volumétrica de las fibras que son representativos de cada uno de los cuartiles, de manera que se pueden distribuir en el sólido con la misma probabilidad. Para esto se determinaron los coeficientes de participación volumétrica totales  $k_1^f$ ,  $k_2^f$ ,  $k_3^f$ ,  $k_4^f$  correspondientes a las probabilidades acumuladas de 12.5%, 37.5%, 62.5% y 87.5% (figura 3-23). En consecuencia, para este modelo se considera que el coeficiente de participación volumétrica en dirección  $r$  en cada elemento finito, varía de forma aleatoria entre los valores de  $0.688K_n^f$ ,  $0.912K_n^f$ ,  $1.084K_n^f$ ,  $1.308K_n^f$ .

**Figura 3-23:** Modelación estadística del coeficiente de participación volumétrica total en el plano de análisis



### 3.8.2 Distribución del coeficiente de participación volumétrico total en las direcciones $r$ y $s$ dentro de un elemento finito

Ahora bien, teniendo en cuenta que dentro de un elemento finito pueden existir simultáneamente dos grupos de fibras perpendiculares entre sí, en las direcciones  $r$  y  $s$ , el coeficiente de participación volumétrica total de las fibras en un elemento finito será igual a:

$$k^f = k^{fr} + k^{fs} \quad 3-165$$

Siendo  $k^{fr}$  y  $k^{fs}$  los coeficientes de participación volumétrica en las direcciones  $r$  y  $s$  respectivamente.

De acuerdo con lo que se discutió en el numeral 2.2, en un punto de material compuesto tiende a existir una diferencia entre los coeficientes de participación volumétrica equivalentes a las direcciones  $r$  y  $s$ , lo que se ve reflejado en el coeficiente de isotropía  $c_\phi$  que corresponde a:

$$c_\phi = \frac{k^{fs}}{k^{fr}} \quad 3-166$$

Tal coeficiente adopta valores entre 0 y 1, donde 0 indica que todas las fibras tienen la dirección  $r$  dentro del punto de material compuesto, mientras que un coeficiente de 1 está relacionado con un material que tiene el mismo coeficiente de participación en las direcciones  $r$  y  $s$ .

Los coeficientes de participación volumétrica  $k^{fr}$  y  $k^{fs}$  pueden calcularse a partir de solucionar el sistema compuesto por las ecuaciones 3-165 y 3-166 como:

$$k^{fr} = \frac{k^f}{(c_\phi + 1)} \quad 3-167$$

$$k^{fs} = \frac{c_\phi \cdot k^f}{(c_\phi + 1)} \quad 3-168$$

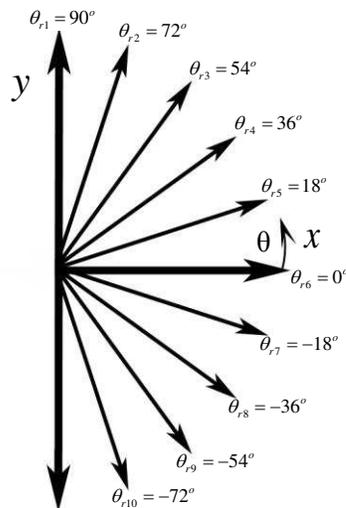
De acuerdo con lo anterior en el caso en que en una dirección participe una mayor cantidad de fibras que en la otra, la dirección  $r$  siempre será la de mayor coeficiente de participación.

En este modelo se considera que el coeficiente de isotropía es el mismo para todos los elementos finitos de la malla. A partir del análisis de las radiografías presentadas en el apartado 2.3.2 se concluyó que  $C_\phi$  es dependiente de la cuantía nominal.

### 3.8.3 Dirección aleatoria de las fibras

Bajo la hipótesis de que la orientación y distribución de las fibras en el plano de análisis puede considerarse aleatoria, en el modelo propuesto se ha considerado que las fibras contenidas en un punto material pueden representarse por dos paquetes de fibras ortogonales entre sí, con coeficientes de participación volumétrica  $k^{fr}$  y  $k^{fs}$ , siendo el mayor de los dos el orientado en la dirección  $r$ , y que la probabilidad de que dicha dirección  $r$  sea cualquiera de las posibles en el plano es constante.

**Figura 3-24:** Orientaciones discretas de las fibras de dirección  $r$



La orientación de las fibras paralelas al vector unitario  $\mathbf{r}$  está definida por el ángulo  $\theta_r$  formado entre el eje global  $x$  y el vector  $\mathbf{r}$ . Con el fin de facilitar el procedimiento numérico, el dominio continuo de  $\theta_r$  entre  $-90^\circ$  y  $+90^\circ$  se ha dividido en 10 valores discretos, separados cada  $18^\circ$ , es decir  $\theta_{r1} = 90^\circ$ ,  $\theta_{r2} = 72^\circ$ ,  $\theta_{r3} = 54^\circ$ ,  $\theta_{r4} = 36^\circ$ ,  $\theta_{r5} = 18^\circ$ ,  $\theta_{r6} = 0^\circ$ ,  $\theta_{r7} = -18^\circ$ ,  $\theta_{r8} = -36^\circ$ ,  $\theta_{r9} = -54^\circ$ ,  $\theta_{r10} = -72^\circ$ , como se muestra en la figura 3-24.

### 3.8.4 Asignación del material al elemento finito

De acuerdo con lo expuesto en numerales anteriores, se han considerado diez (10) orientaciones para los paquetes de fibras  $\theta_r$  y cuatro (4) coeficientes de participación

volumétrica total de las fibras  $k_i^f$ , dentro de cada elemento finito, como se ilustra en la tabla 3-1.

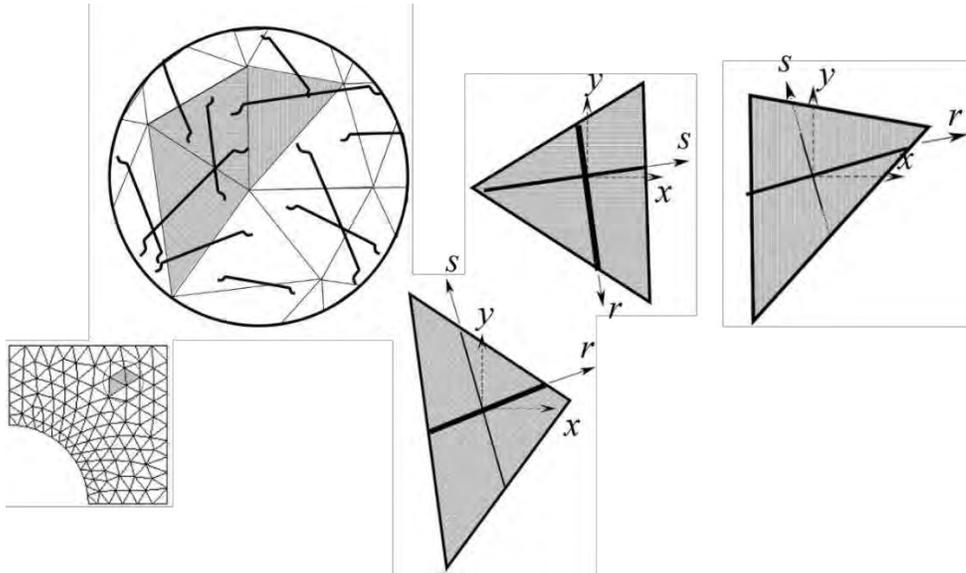
**Tabla 3-1:** Configuraciones de material compuesto

<b>Configuración material</b>										
$\theta_r$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k^f/k_n^f$	90	72	54	36	18	0	-18	-36	-54	-72
	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688
<b>Configuración material</b>										
$\theta_r$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$k^f/k_n^f$	90	72	54	36	18	0	-18	-36	-54	-72
	0.912	0.912	0.912	0.912	0.912	0.912	0.912	0.912	0.912	0.912
<b>Configuración material</b>										
$\theta_r$	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$k^f/k_n^f$	90	72	54	36	18	0	-18	-36	-54	-72
	1.084	1.084	1.084	1.084	1.084	1.084	1.084	1.084	1.084	1.084
<b>Configuración material</b>										
$\theta_r$	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$k^f/k_n^f$	90	72	54	36	18	0	-18	-36	-54	-72
	1.308	1.308	1.308	1.308	1.308	1.308	1.308	1.308	1.308	1.308

De esta forma, en total se cuenta con 40 configuraciones de material compuesto, que representan el universo de posibles distribuciones y orientaciones de la fibra en un punto material. Se conserva una relación constante entre los coeficientes de participación volumétrica en las direcciones  $r$  y  $s$ .

En la simulación de un miembro estructural a cada uno de los elementos finitos de la malla que representa el material compuesto SFRC se le asigna de manera aleatoria una de las 40 configuraciones de material. De esta forma, se pretende emular la discontinuidad del refuerzo, debido al carácter de fibras cortas, que se presenta entre el material compuesto contenido en un elemento finito y el de sus vecinos (figura 3-25).

**Figura 3-25:** Asignación del material compuesto en la malla de elementos finitos

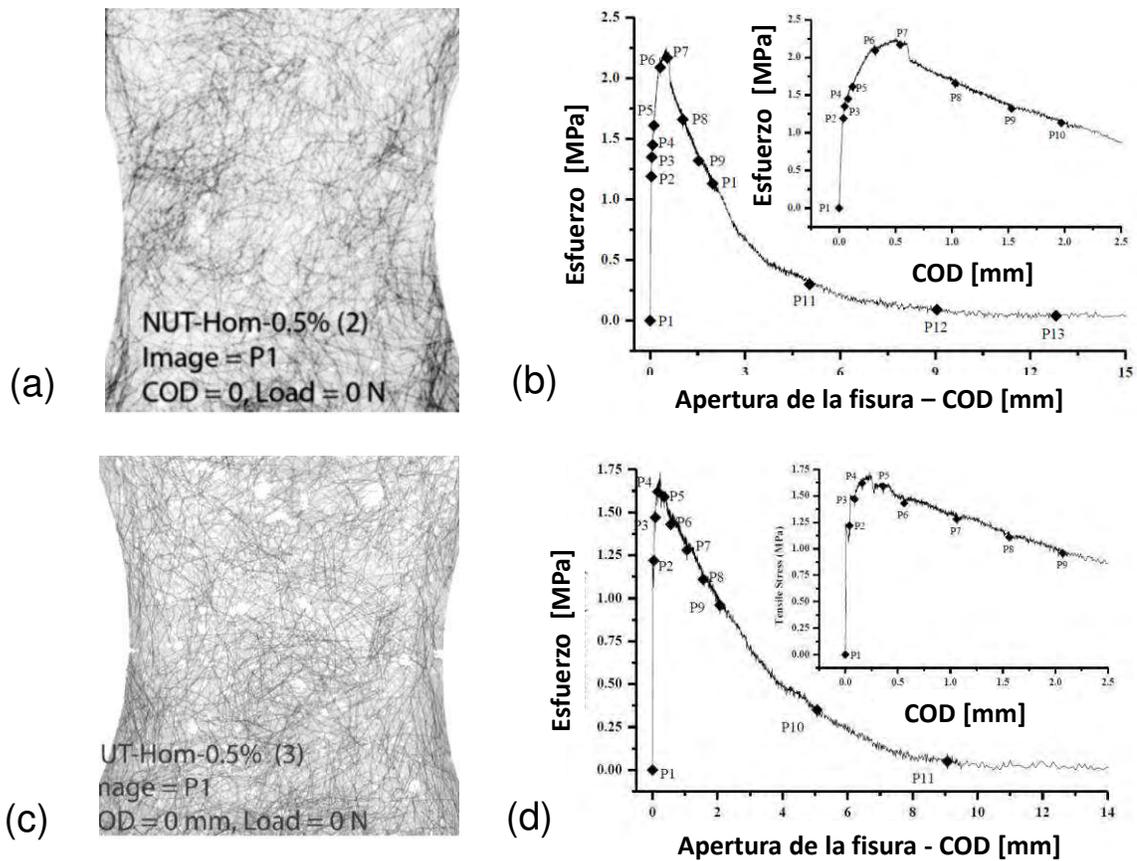


Es necesario tener en cuenta que la distribución de materiales asignada a un espécimen de SFRC, producirá una respuesta estructural determinista, la cual difícilmente será representativa de su comportamiento. Se debe considerar que la dispersión en la respuesta estructural tiene una alta dependencia de la distribución de las fibras dentro del miembro estructural.

En la figura 3-26 se muestra la diferencia de la distribución de fibras y de la respuesta estructural entre dos probetas elaboradas bajo las mismas condiciones y sometidas a tracción, obtenidas por Soe (Soe , 2010). Las líneas oscuras en las radiografías de la figura 3-26(a) y (b), son las fibras de acero embebidas en la matriz de concreto en las dos probetas. Así mismo, la figura 3-26(c) y (d) ilustra la relación entre el esfuerzo a tracción y la apertura de la fisura en la zona entallada, en los dos especímenes. Se observa que el esfuerzo normal máximo, al igual que la distribución y orientación de las fibras, es sustancialmente diferente entre los dos resultados.

**Figura 3-26:** Influencia de la distribución de las fibras en la respuesta estructural

Fuente: (Soe Htut, 2010)

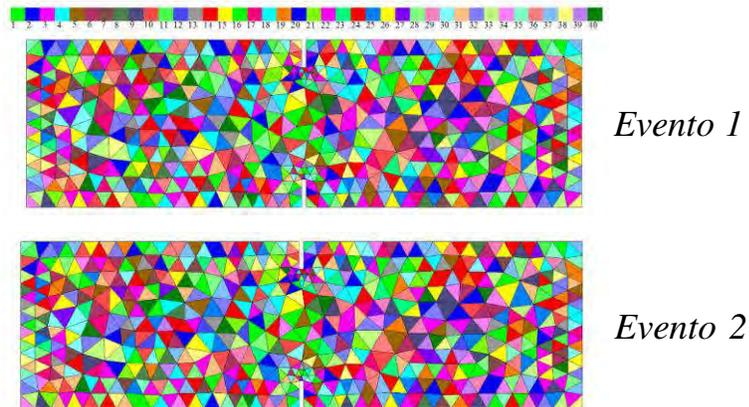


Por tanto, una serie pequeña de resultados experimentales o una simulación numérica, única y determinista, proporciona resultados con una baja aproximación. En contraposición, se propone la realización de un conjunto de simulaciones con orientaciones y distribuciones aleatorias de las fibras en cada elemento finito dentro del espécimen, y a partir de ellas determinar un rango dentro del cual puede esperarse la respuesta estructural de dicha probeta.

Cada simulación que utiliza un grupo de parámetros aleatorios específicos se denomina evento. Para esto, se han generado  $n = 40$  configuraciones de orientación y distribución aleatoria de la fibra en cada elemento, que combinan 10 orientaciones de las fibras y 4 coeficientes de participación volumétrica como se ilustra en la tabla 3-1. El conjunto de estas configuraciones es una variable aleatoria discreta que establece el tipo de material compuesto del EF.

En primer lugar se genera una malla de  $j$  elementos finitos, la cual se mantiene fija durante los diferentes eventos. Para cada evento se asigna de manera pseudoaleatoria una de las 40 configuraciones o tipos de material a cada elemento. En la figura 3-27 se presentan los tres primeros eventos generados para la simulación de un miembro prismático con una entalla en la mitad. Cada color representa uno de los 40 tipos de material.

**Figura 3-27:** Dos eventos que generan diferentes asignaciones de material sobre la malla de elementos finitos



Para verificar que la asignación de configuraciones de material en una malla presentan aproximadamente la misma frecuencia en cada configuración de material en un evento mismo, se ha calculado la frecuencia de asignación, de acuerdo con la ecuación 3-169.

$$p_m = \frac{A_m}{A_T} \quad 3-169$$

donde  $A_m$  es la sumatoria de las áreas de cada uno de los elementos a los cuales les fue asignado el material  $m$  y  $A_T$  es la suma de las áreas de todos los elementos finitos en la malla.

Para verificar que la cuantía promedio en la probeta es constante entre evento y evento, se puede emplear la siguiente ecuación, que permite calcular la cuantía promedio en una malla:

$$\rho = \frac{\sum_{m=1}^{40} p_m \cdot k_m^f}{g_t} \quad 3-170$$

## 4. Aplicación de la estadística funcional

El modelo descrito en el capítulo anterior presenta un carácter estocástico, en la medida en que permite generar diferentes distribuciones de las fibras dentro de un miembro estructural de SFRC y a partir de ellas predecir las posibles variaciones en la respuesta mecánica del mismo. Lo anterior hace necesario implementar el uso de herramientas estadísticas que permitan presentar la respuesta en un formato que facilite el acceso a la mayor cantidad de información posible.

En ingeniería de materiales frecuentemente se usa la estadística univariada para describir la distribución de una población de cantidades escalares características del material, tales como resistencias máximas, límites elásticos, módulos de elasticidad e incluso índices de ductilidad. Los códigos de diseño por su parte, en general, plantean metodologías basadas en parámetros como la media y la desviación estándar de dichas características, obtenidos a partir de muestras conformadas por las medidas en ensayos experimentales, con el fin de establecer factores de seguridad o resistencias confiables para el diseño.

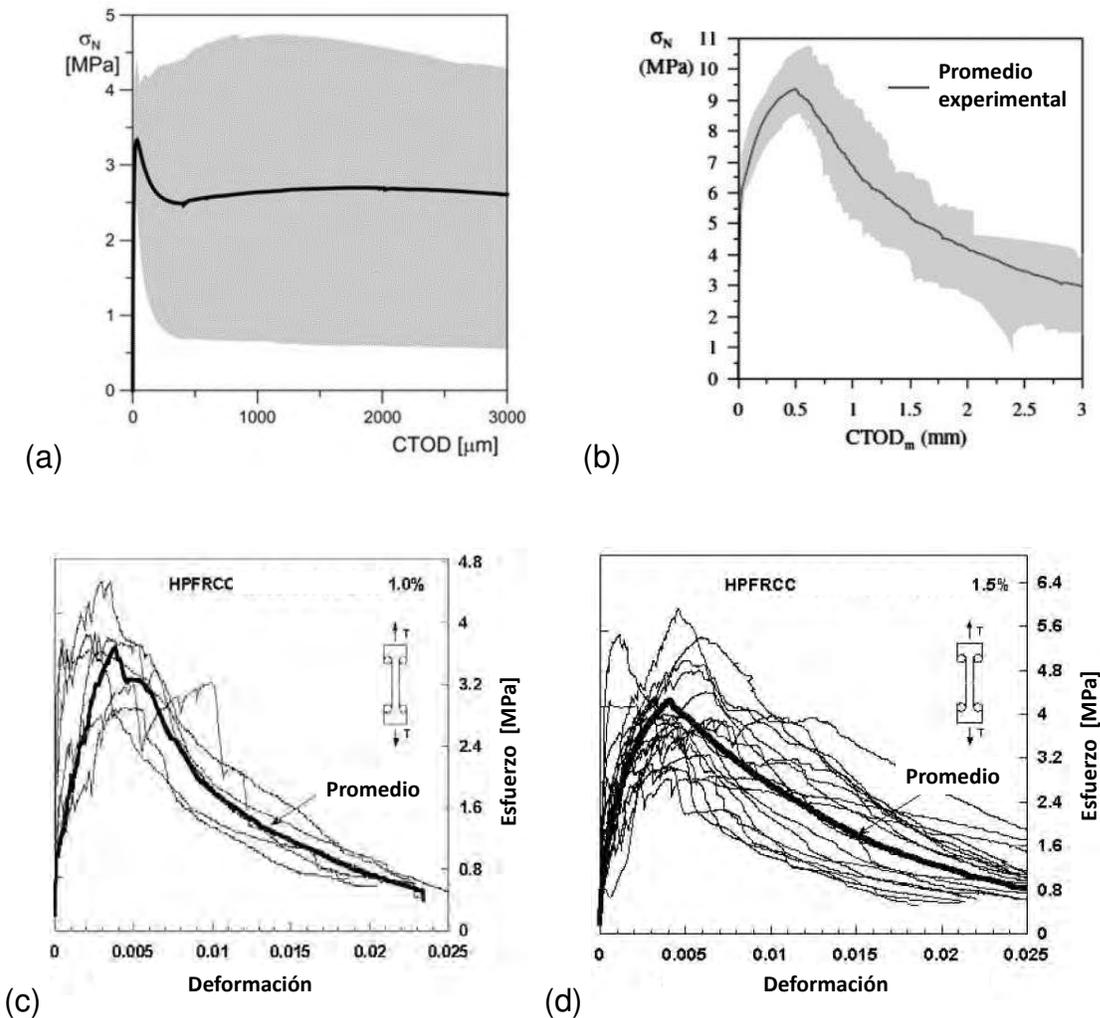
Sin embargo, el uso de la estadística univariada no permite describir totalmente la evolución del estado de esfuerzos en el material, más aun cuando se pretende caracterizar el comportamiento inelástico de un material que presenta anisotropías y heterogeneidades incluso en la macro escala, como es el caso de los materiales compuestos con fibras cortas como el concreto reforzado con fibras de acero.

La respuesta estructural del SFRC después de la fisuración puede mostrar dispersiones importantes entre las probetas de un mismo ensayo (Kooiman, 2000), debidas posiblemente a la variación de la orientación y distribución de las fibras, y a la orientación y cantidad de fisuras en el concreto.

**Figura 4-1:** Alta dispersión en los resultados experimentales.

(a) y (b) Fuente: (di Prisco, et al., 2009)

(c) y (d) Fuente: (Suwannakarn, 2009)



Por ejemplo, di Prisco, Plizzari, y Vandewalle (2009) muestran la dispersión de la relación entre el esfuerzo nominal máximo por flexión y la apertura de la punta de la fisura - CTOD (Crack Tip Opening Displacement), en dos ensayos de flexión en vigas de cuatro puntos con entalla. En la figura 4-1, la línea continua indica la respuesta promedio y la zona gris ilustra la envolvente de las respuestas estructurales de los especímenes. En el primer ensayo fueron elaborados 58 especímenes de SFRC autocompactado, con una cuantía volumétrica de 0.34% de fibras, con ganchos en los extremos, longitud de 60mm y diámetro de 0.9mm (figura 4-1(a)). Los 16 especímenes del segundo ensayo tienen una cuantía volumétrica del 0.64% de fibras de acero con ganchos en los extremos de longitud 60mm

y diámetro 0.8mm (figura 4-1(b)). Se observa que la dispersión del comportamiento post-pico en el primer ensayo es mayor que en el segundo en relación al valor promedio del esfuerzo, sin embargo, el ancho de la banda de resultados presenta un orden de magnitud similar en ambos casos.

En muchos casos de control estadístico de un proceso (*statistical process control* - SPC) (Howard, 2003), basta con evaluar la distribución de una característica univariada o multivariada, como por ejemplo la resistencia a la compresión del concreto simple. Para otras situaciones, el proceso se describe con mayor precisión mediante la relación entre una variable dependiente y una o más variables independientes, como por ejemplo la respuesta estructural de una viga. En general, estas relaciones no son lineales, lo cual también le ocurre a la respuesta mecánica de una estructura.

De acuerdo con lo anterior, se puede mejorar la aproximación al problema si las relaciones obtenidas entre dos variables, como esfuerzo y deformación o carga y desplazamiento, se consideran datos funcionales en los cuales su valor en un instante determinado depende de los comportamientos que ha tenido la función antes de dicho instante (Ramsay & Silverman, 2005). Lo anterior conlleva a que sea necesario hacer uso de la *estadística funcional*.

El desarrollo de herramientas probabilísticas para estudiar las variables de dimensión infinita tuvo sus comienzos a los primeros años del siglo XX; sin embargo, ha sido en las últimas tres décadas cuando el Análisis de Datos Funcionales (Functional Data Analysis – FDA) ha empezado a recibir mucha atención por parte de la comunidad científica, debido a su aplicabilidad para procesar la información de diferentes ramas de la ciencia como la econometría, (del Barrio, et al., 2007), la medicina (Fletcher, et al., 2004), la meteorología (López- Pintado & Romo, 2007), la geofísica Nerini y Ghattas (2007), la bioestadística (Antoniadis & Sapatinas, 2007) entre otras, donde los datos presentan las características necesarias para ser tratados como funciones (Tarrío, 2012).

Por esta razón diversos autores se han esforzado por realizar una adaptación de los métodos estadísticos estándar para datos escalares de manera que puedan ser aplicados en el contexto funcional (Locantore, et al., 1999) (Cardot, et al., 1999) (Cuevas, et al., 2002) (Ferraty & Vieu, 2002) (Cardot, et al., 2007) (Dabo-Niang & Rhomari, 2009).

Como parte de la caracterización de la respuesta obtenida mediante el modelo propuesto se propone el uso de la media, de los box-plot funcionales, así como de los intervalos de confianza de la función inelástica. A continuación se presenta una introducción a los datos funcionales y se describen las técnicas aplicadas al modelo desarrollado en esta investigación.

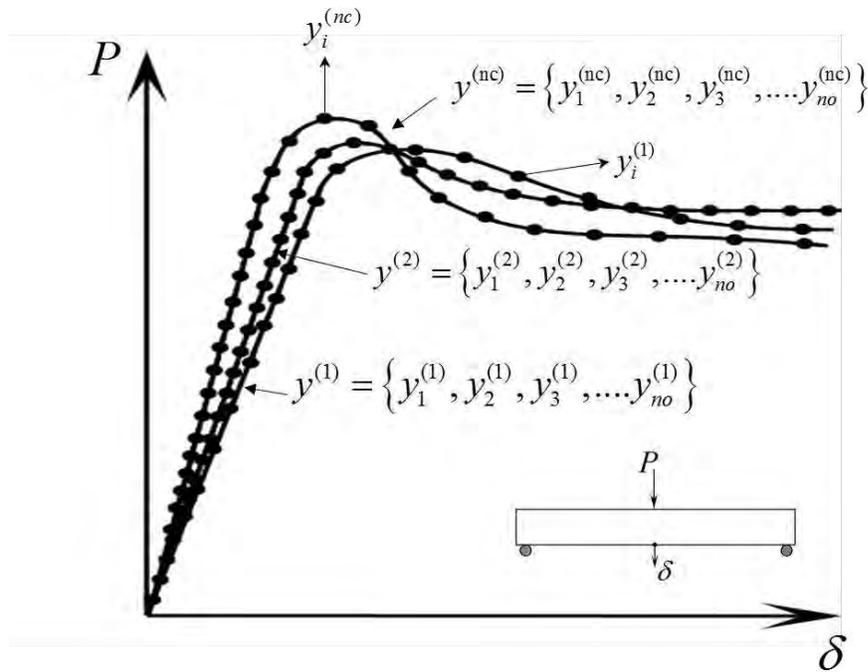
## 4.1 Datos funcionales

En diferentes ensayos experimentales, las observaciones son funciones y no exclusivamente valores escalares (Sun & Genton, 2011). Por ejemplo, cuando se toman datos de un evento en función del tiempo o de la posición, o en el caso particular del comportamiento estructural, se registran las fuerzas o los esfuerzos en función de los desplazamientos o las deformaciones.

Además de indicar el valor de una función, los datos funcionales también describen la evolución de la misma, mediante su primera y segunda derivada con respecto al tiempo o a otra variable independiente. En la estadística univariada o multivariada es necesario controlar todas las variables a excepción de una que corresponde a la variable en estudio. En cambio, en el análisis funcional se puede incluir el efecto de diferentes variables mediante la aplicación de un operador diferencial que representa su tasa de cambio. Lo anterior permite representar con mayor aproximación los fenómenos que en ciencias naturales e ingeniería muestran una suavidad intrínseca (Ramsay & Silverman, 2005).

En la práctica, la forma como se registran los datos funcionales generalmente obedece a un conjunto de parejas ordenadas que forman una curva (Ferraty & Vieu, 2006.). La naturaleza funcional de los datos consiste en considerar a los mismos como una sola entidad intrínseca, que establece una relación entre los diferentes puntos que la conforman y no simplemente como una secuencia de observaciones discretas (Ramsay & Silverman, 2005).

**Figura 4-2:** Ejemplo de dato funcional



En la figura 4-2 se presenta el esquema de un ensayo de flexión realizado sobre un espécimen de SFRC. Debido a las limitaciones de los dispositivos de medición para registrar la información de forma continua en el tiempo, se han registrado  $no$  observaciones de los valores de carga aplicada  $P$  y la deflexión en el punto central  $\delta$ , medidos simultáneamente para diferentes instantes  $t$  durante el ensayo.

$$y^{(j)} = \{(\delta_1, P_1), (\delta_2, P_2), \dots, (\delta_i, P_i), \dots, (\delta_{no}, P_{no})\} \tag{4-1}$$

$$y^{(j)} = \{y_1^j, y_2^j, \dots, y_i^j, \dots, y_{no}^j\} \tag{4-2}$$

Si se establece una relación entre  $P$  y  $\delta$  (figura 4-2b), y se considera que  $\delta$  es una variable independiente, la curva conformada por la sucesión de  $m$  puntos  $(\delta_i, P_i)$  se puede analizar como una colección de puntos pertenecientes a una función continua  $y(\delta)$  de manera que:

$$y(\delta_i) = y_i^j = P_i \tag{4-3}$$

De esta forma, si se repite el ensayo sobre  $n$  especímenes con las mismas condiciones, se puede conformar una muestra  $X$  donde la curva obtenida para cada espécimen corresponde al dato funcional  $y^j$ . Debido a que las curvas correspondientes a los experimentos realizados presentan patrones en su forma es posible obtener estimaciones estables de algunas características interesantes del comportamiento global (figura 4-2).

En el modelo propuesto, la curva de respuesta para cada simulación realizada con una distribución material es considerada un evento o elemento  $y^{(j)}$  dentro de la muestra  $X$  que contiene los resultados de  $nc$  simulaciones, la cual será de la forma:

$$X = \{y^{(1)}(\delta), y^{(2)}(\delta), \dots, y^{(j)}(\delta), \dots, y^{(nc)}(\delta)\} \quad 4-4$$

Los datos funcionales están asociados a procesos estudiados de forma continua en el tiempo, es decir que la variable de interés sigue una relación funcional continua, por lo menos en un intervalo. No obstante, como ya se mencionó, debido a la capacidad de la tecnología disponible, la información de las observaciones es recogida realmente como una sucesión de datos discretos y finitos. Por esta razón es posible que los puntos de las observaciones no se encuentren regularmente espaciados, e incluso que los espaciamientos puedan diferir entre dos curvas observadas, lo cual hace necesario realizar un pre-procesamiento de los datos para prepararlos antes de aplicar un procedimiento estadístico. Un proceso habitual para esto consiste en transformar las curvas de las observaciones en funciones continuas por tramos mediante una técnica de interpolación, denominada *B-Splines* (Schoenberg, 1946) (Schoenberg, 1969).

## 4.2 Profundidad de banda

Una tarea fundamental en el análisis funcional consiste en ordenar las curvas de las observaciones dentro de una muestra, lo cual permite calcular características estadísticas como la mediana, los cuantiles funcionales y las pruebas de correlación (López & Romo (2009)). Tales características pueden ser obtenidas a partir del concepto de profundidad de banda - BD (*band depth*) de la muestra. La profundidad de banda permite establecer

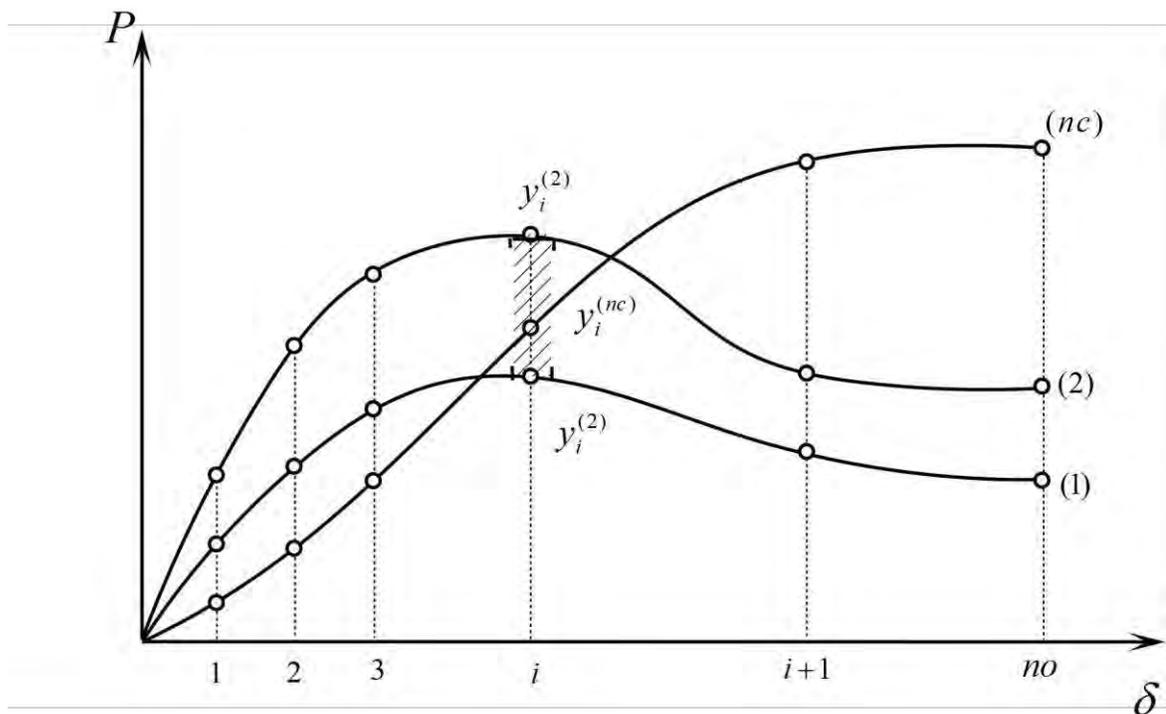
qué tan central es una observación funcional respecto a un conjunto de observaciones que componen una muestra o una población (Sun & Genton, 2011).

Se define como banda a la envolvente limitada por un conjunto de  $k$  curvas que hacen parte de la muestra, siempre que dicho conjunto sea menor que el numero total de elementos en la muestra ( $k < nc$ ). Si  $C(I)$  es el juego de funciones continuas definidas en un intervalo compacto  $I$  en  $\mathbb{R}$  y  $y^{(j)}$  es una colección de observaciones  $y_i^{(j)}(t)$  pertenecientes a  $C(I)$ , la gráfica de la función  $y^{(j)}$  es el subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  dado por  $G(y^{(j)}) = \{(t, y^{(j)}(t)) : t \in I\}$  (López- Pintado & Romo, 2007).

En una muestra de  $nc$  datos funcionales en  $\mathbb{R}^2$  la región en el plano limitada por  $k$  curvas  $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(k)}$  de la muestra  $x$  es la banda figura 4-5 determinada como:

$$B(y^{(r)}) = \left\{ (t_i, y_i) : t_i \in I, \min_{r=1, nb} [y_i^{(r)}] \leq y \leq \max_{r=1, nb} [y_i^{(r)}] \right\} \quad 4-5$$

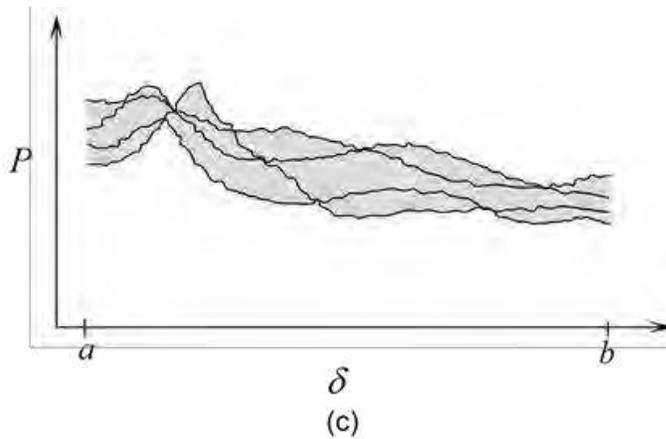
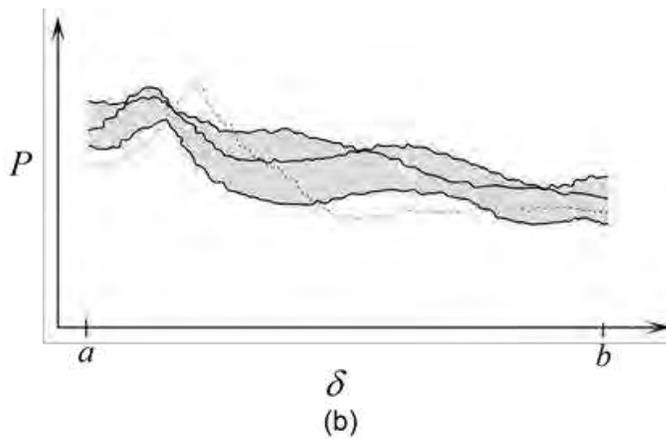
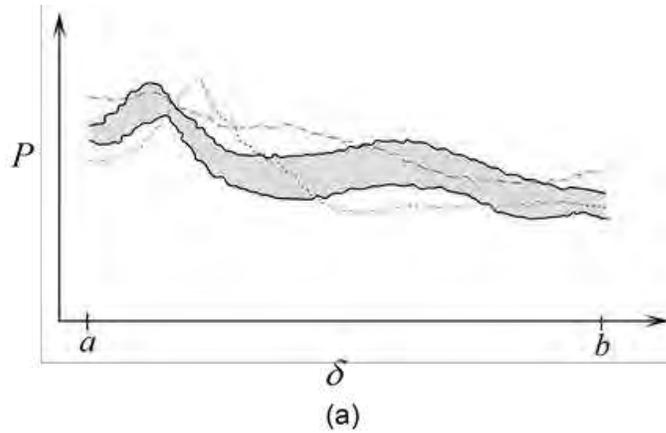
**Figura 4-3:** Ejemplos de bandas para establecer la profundidad



En la figura 4-4 se muestran algunos ejemplos de bandas limitadas por 2, 3 y 4 elementos. Se debe resaltar que todos los datos funcionales se encuentran acotados dentro de un intervalo compacto.

**Figura 4-4:** Ejemplos de bandas en una muestra de cuatro curvas.

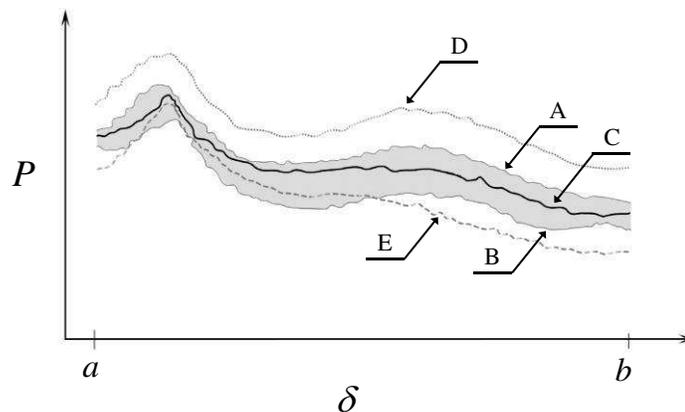
(a) un de las banda de dos curvas, (b) una de las bandas de tres curvas, (c) la banda de cuatro curvas



El número de bandas de cada tipo que se pueden formar en una muestra será igual a la combinatoria entre el tamaño de la muestra y el número de elementos que limitan la banda. Generalmente para el cálculo de la profundidad de banda se construyen bandas de 2 y 3 elementos debido al costo computacional que implica evaluar bandas con un mayor número de elementos y por otra parte a que en algunos casos las bandas generadas usando solo dos elementos pueden presentar zonas que se degeneran en un punto cuando los elementos se cruzan, por lo que se requiere complementarlas con bandas de tres o mas elementos.

Para determinar la profundidad de un elemento dentro de una muestra, es necesario evaluar si el elemento se encuentra o no contenido dentro de cada una de las bandas. En la figura 4-5 se presenta un ejemplo de una banda formada por los elementos A y B. Se puede concluir que la banda AB contiene completamente a la curva C, la curva D se encuentra totalmente fuera de la banda AB y solo algunos segmentos de la curva E se encuentran dentro de la banda.

**Figura 4-5:** Evaluación de la inclusión de una curva dentro de una banda



En el concepto original del valor de la profundidad de banda – BD propuesto por (López-Pintado & Romo (2007), a cada elemento se le asigna un valor de 1 cuando está totalmente incluido en una banda y un valor de 0 cuando solo una parte del elemento está dentro de la banda o el elemento esta fuera de la banda. Si la muestra  $x$  está conformada por las funciones  $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(j)}, \dots, y^{(nc)}$ , el valor de profundidad de banda calculado a partir de

bandas conformadas por 2 y 3 elementos  $BD_{nc}(y)$  para cada elemento funcional  $y_j$  dentro de la muestra es igual a:

$$BD_{nc2,3}^{(j)}(y) = BD_{nc2}(y) + BD_{nc3}(y) \quad 4-6$$

donde  $nc$  es el número de elementos en la muestra,  $BD_{nc2}(y)$  y  $BD_{nc3}(y)$  son la sumatorias de los valores asignados al evaluar si el elemento funcional  $y^{(j)}$  se encuentra completamente contenido en cada una de las posibles bandas formadas por 2 y 3 elementos, y están expresadas en las ecuaciones 4-7 y 4-8 respectivamente.

$$BD_{nc2}(y) = \binom{nc}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq nc} I\{G(y) \subseteq B(y^{(i_1)}, y^{(i_2)})\} \quad 4-7$$

$$BD_{nc3}(y) = \binom{nc}{3}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq nc} I\{G(y) \subseteq B(y^{(i_1)}, y^{(i_2)}, y^{(i_3)})\} \quad 4-8$$

donde  $I\{\cdot\}$  representa la función indicador.

Cuando el número de elementos dentro de la muestra no es lo suficientemente grande y las curvas presentan variaciones en la forma, puede ser un problema que al ordenar la muestra varios elementos presenten el mismo valor de profundidad de banda BD. Por lo anterior puede resultar más efectivo usar la profundidad de banda modificada – MBD (*modified band depth*) (López-Pintado & Romo, 2009):

$$MBD_{nc2,3}(y) = MBD_{nc2}(y) + MBD_{nc3}(y) \quad 4-9$$

La diferencia con la profundidad de banda original consiste en que a cada uno de aquellos elementos que están contenidos solo parcialmente dentro de una banda se le asigna un valor equivalente a la fracción entre el tamaño de Lebesgue del segmento contenido en la banda y el tamaño de Lebesgue del intervalo completo.

$$MBD_{nc2}(y) = \binom{nc}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq nc} \lambda_r(A(y^{(i_1)}, y^{(i_2)})) \quad 4-10$$

$$MBD_{nc3}(y) = \binom{nc}{3}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq nc} \lambda_r(A(y^{(i_1)}, y^{(i_2)}, y^{(i_3)})) \quad 4-11$$

donde  $A(y)$  es el intervalo en el cual la función  $y$  está contenida en cada una de las bandas, mientras que  $\lambda_r$  es la relación entre la longitud del intervalo  $A(y)$  y la longitud del intervalo  $I$ :

$$\lambda_r = \frac{\lambda(A(y))}{\lambda(I)} \quad 4-12$$

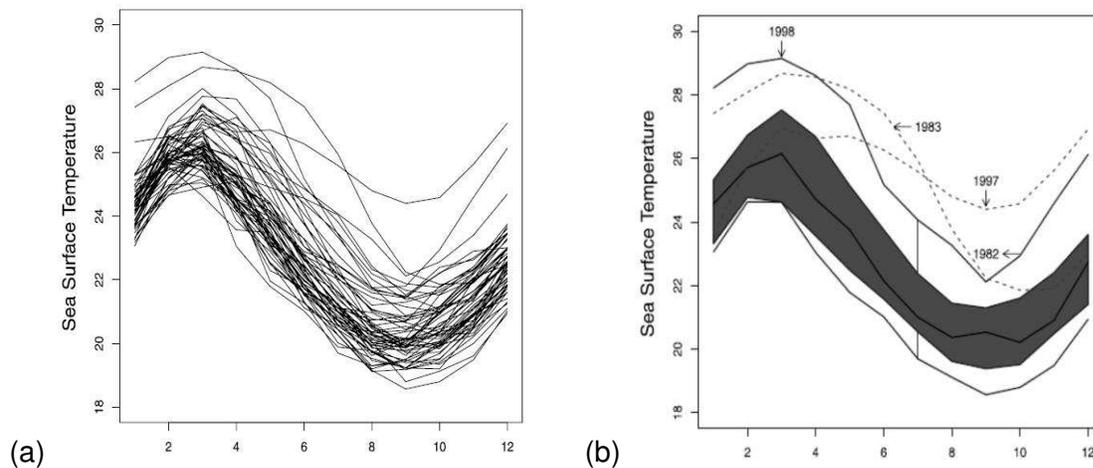
siendo  $\lambda$  la medida de Lebesgue.

### 4.3 Diagrama de caja Funcional (*Functional Box Plot*)

En cuanto a la estadística descriptiva, Sun y Genton (2011) proponen el diagrama mejorado de caja funcional (*enhanced functional box plot*), como herramienta para la visualización de datos funcionales, la cual se basa en el ordenamiento de las curvas a partir del concepto de profundidad de banda. Esta herramienta permite presentar la envolvente de los datos correspondientes a la región central del 50%, la curva mediana y los valores de máximo y mínimo equivalentes a 1.5 veces la región central del 50%, fuera de los cuales los datos pueden ser considerados como valores atípicos.

La mediana de la muestras será aquella curva que tenga un mayor porcentaje de inclusión dentro de las posibles bandas formadas en la muestra, es decir que será el elemento con mayor profundidad y por lo tanto el más central de la muestra. La región central del box-plot corresponde a la región intercuartiles.

**Figura 4-6:** Representación de una muestra funcional mediante box-plot  
(a) Muestra con 200 datos, (b) box-plot funcional



En la figura 4-6 se presenta un ejemplo de box-plot para una muestra con 70 datos funcionales, correspondientes a la relación entre carga y elongación para un elemento prismático solicitado a fuerza axial. En la figura 4-6b La zona sombreada corresponde a la región central intercuartiles. Las líneas grises continuas corresponden a la envolvente, y las líneas a trazos son los datos atípicos, identificados luego de inflar en 1.5 veces el rango de la región central.

## 4.4 Bootstrap

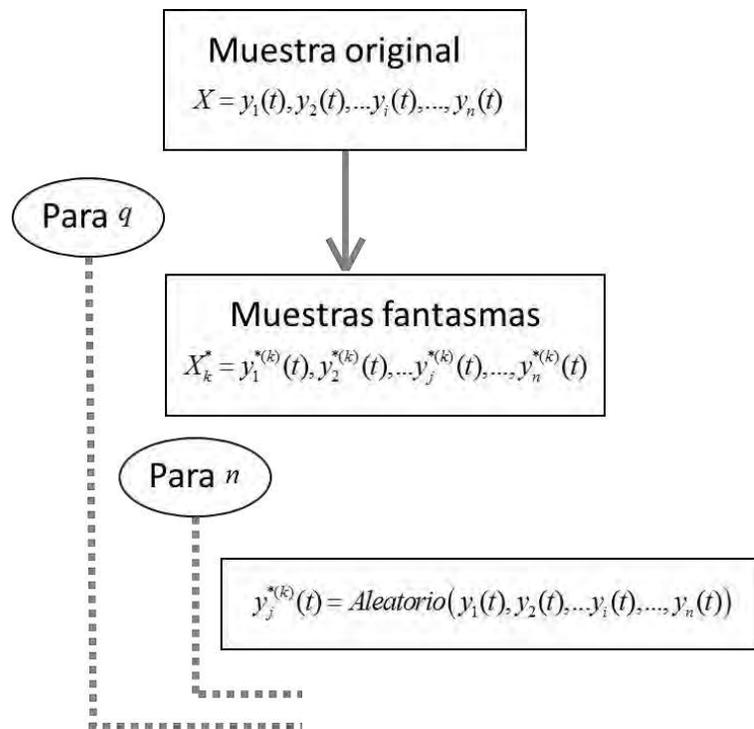
Para obtener una estimación del comportamiento estadístico a nivel poblacional, se requiere del uso de una muestra de tamaño lo suficientemente grande para que la desviación estándar de los valores muestrales presente un error considerablemente pequeño respecto a la desviación estándar poblacional. Así mismo si se contara con la posibilidad de extraer un número grande de muestras del mismo tamaño de la población de interés, sería posible hacer una buena estimación de la distribución de muestreo de algún parámetro estadístico calculado para cada una de las muestras. Sin embargo en muchos procesos la obtención de dichas muestras demanda un alto costo.

El método *bootstrap* (Hesterberg, 2011) consiste en una herramienta que básicamente permite la construcción de un número muy grande de “muestras fantasma” a partir de la extracción de datos de una muestra existente tomada directamente de la población estudiada y la cual a su vez es usada como una población sustituto. En otras palabras, se simula el procedimiento de muestreo de la vida real y se calcula el estadístico para cada muestra fantasma, con el fin de construir una distribución del parámetro, conocida como distribución bootstrap (Singh & Xie, 2013).

Se construyen  $q$  muestras fantasmas  $X_k^*$  de  $n$  elementos extraídos de la muestra original  $X$ . El remuestreo se hace de forma aleatoria, de manera que cada uno de los elementos de la muestra original tiene la posibilidad de existir entre cero (0) y  $n$  veces en una muestra fantasma.

$$X_k^* = y^{*(1)(k)}(t), y^{*(2)(k)}(t), \dots, y^{*(j)(k)}(t), \dots, y^{*(n)(k)}(t) \quad 4-13$$

**Figura 4-7:** Proceso de remuestreo – Bootstrap



## 4.5 Intervalos de Confianza

Finalmente, una estimación de gran interés en ingeniería de materiales son los intervalos de confianza; sin embargo, para obtener un error menor en el cálculo de estos intervalos se requiere de una muestra lo suficientemente grande para representar adecuadamente a la población. Resulta útil emplear la técnica de bootstrap (Hesterberg, 2011), con la cual se puede hacer un número considerable de re-muestreos a partir de una muestra determinada, permitiendo una estimación más aproximada de los intervalos de confianza. Este procedimiento puede aplicarse a muestras de datos univariados, multivariados o funcionales (Guevara & Vargas, 2013).

Investigaciones recientes proponen dos métodos para realizar el control estadístico de procesos con relaciones no lineales entre sus características, basados en el concepto de profundidad de banda modificada (MBD) – Modified Band Depth (López-Pintado & Romo, 2009) y sin realizar suposiciones distribucionales (Guevara y Vargas (2013)). Estos métodos son dependientes del tamaño de la muestra y requieren más de 90 observaciones para obtener resultados confiables.

Para determinar el intervalo en el cual se espera que se encuentren los datos de la población con una confianza del  $100(1 - \alpha)\%$  (donde  $\alpha = 0.05$ ) el procedimiento empleado consiste aplicar en primer lugar el método bootstrap generando mil muestras fantasma  $q = 1.000$  a partir de una muestra de  $nc$  simulaciones.

En cada una de las muestras fantasma  $X_k^*$  se calculan las profundidades de banda modificadas MBD para los elementos  $y_j^{*(k)}$ . Con base en los valores de MBD se ordenan los elementos dentro de la muestra desde el más central hasta el menos central. Se seleccionan el 95% de los elementos que conformarán el intervalo central de manera que los excluidos correspondan a aquellos elementos con menores valores de MBD.

Se construye la envolvente del intervalo central correspondiente al 95% para la muestra  $X_k^*$ , conformada por los segmentos de aquellos elementos donde los valores de la función

son máximos o mínimos para la muestra, lo cual genera dos funciones una para el límite inferior del intervalo  $c_I(t)$  y otra para el límite superior del intervalo  $c_S(t)$ .

$$c_I(t) = \left\{ (t, y(t)) : \min_{r=1, \dots, [95\%n]} y_{[r]}(t) \right\}, t \in I \quad 4-14$$

$$c_S(t) = \left\{ (t, y(t)) : \max_{r=1, \dots, [95\%n]} y_{[r]}(t) \right\}, t \in I \quad 4-15$$

El intervalo contenido entre las funciones  $c_I(t)$  y  $c_S(t)$  será:

$$C_{0.95} = \left\{ (t, y(t)) : \min_{r=1, \dots, [95\%n]} y_{[r]}(t) \leq y(t) \leq \max_{r=1, \dots, [95\%n]} y_{[r]}(t) \right\}, t \in I \quad 4-16$$

A partir de las curvas envolventes de todas las muestras  $X_k^i$  se forman dos colecciones de curvas, una correspondiente a los límites superiores del intervalo  $X_S$  y otra que contiene los límites inferiores  $X_I$ , cada una con  $q$  elementos funcionales.

Siguiendo un procedimiento similar al expuesto anteriormente se calculan los valores de MBD para los datos dentro de  $X_S$  para ordenarlos. Se determina la envolvente del intervalo central correspondiente al 95%. El límite superior de la envolvente de este intervalo será el límite superior del intervalo de confianza que se está calculando.

Para determinar el límite inferior del intervalo de confianza, se procede de la misma forma con los datos de  $X_I$ , solo que en esta ocasión se selecciona el límite inferior del intervalo central.

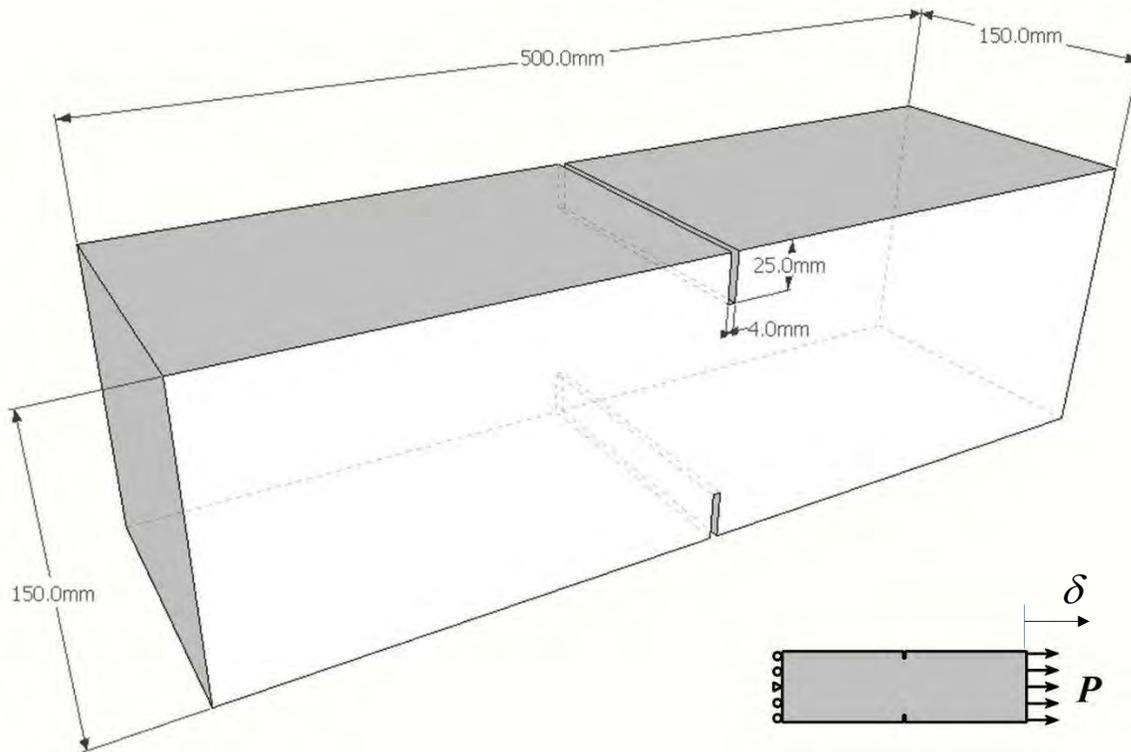
\*Página dejada intencionalmente en blanco.

## **5. Análisis de sensibilidad**

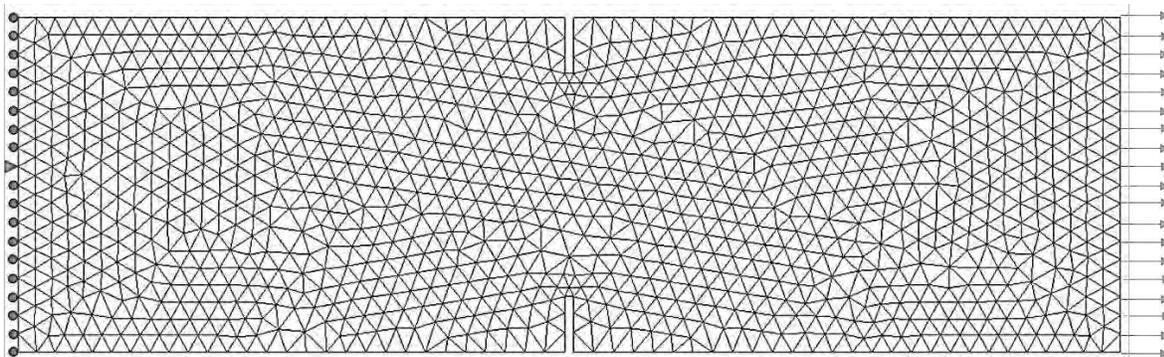
El comportamiento mecánico del concreto reforzado con fibras cortas de acero, como un material compuesto, depende de las características de sus componentes y de la interacción entre los mismos, como se describió en el capítulo 2. La formulación usada en el modelo para representar la contribución de los diferentes componentes se describe en el capítulo 3, así como las generalidades de la implementación del modelo en el método de los elementos finitos. En este capítulo se realiza un análisis de la sensibilidad del modelo a las principales variables involucradas en el cálculo de la respuesta estructural del material mediante el presente modelo, tales como el tamaño del paso en la solución numérica, el tamaño de los elementos finitos, el número de eventos simulados, el coeficiente de isotropía, la cuantía volumétrica de fibras y la curva de arrancamiento.

### **5.1 Descripción del ensayo de sensibilidad**

El análisis de sensibilidad se realizó sobre los resultados obtenidos para la respuesta de carga contra desplazamiento en la simulación de un ensayo a tracción de un elemento de concreto reforzado con fibras cortas de acero. Se seleccionó este tipo de ensayo debido a que es ante esfuerzos de tracción donde las fibras presentan su mayor aporte al concreto. Para el ensayo se utilizó una probeta prismática con una longitud de 500mm y una sección transversal cuadrada de 150mm de lado. En la mitad de la probeta se realizaron dos entallas con una profundidad de 25mm y un espesor de 4mm (figura 5-1).

**Figura 5-1:** Probeta usada en las pruebas de sensibilidad

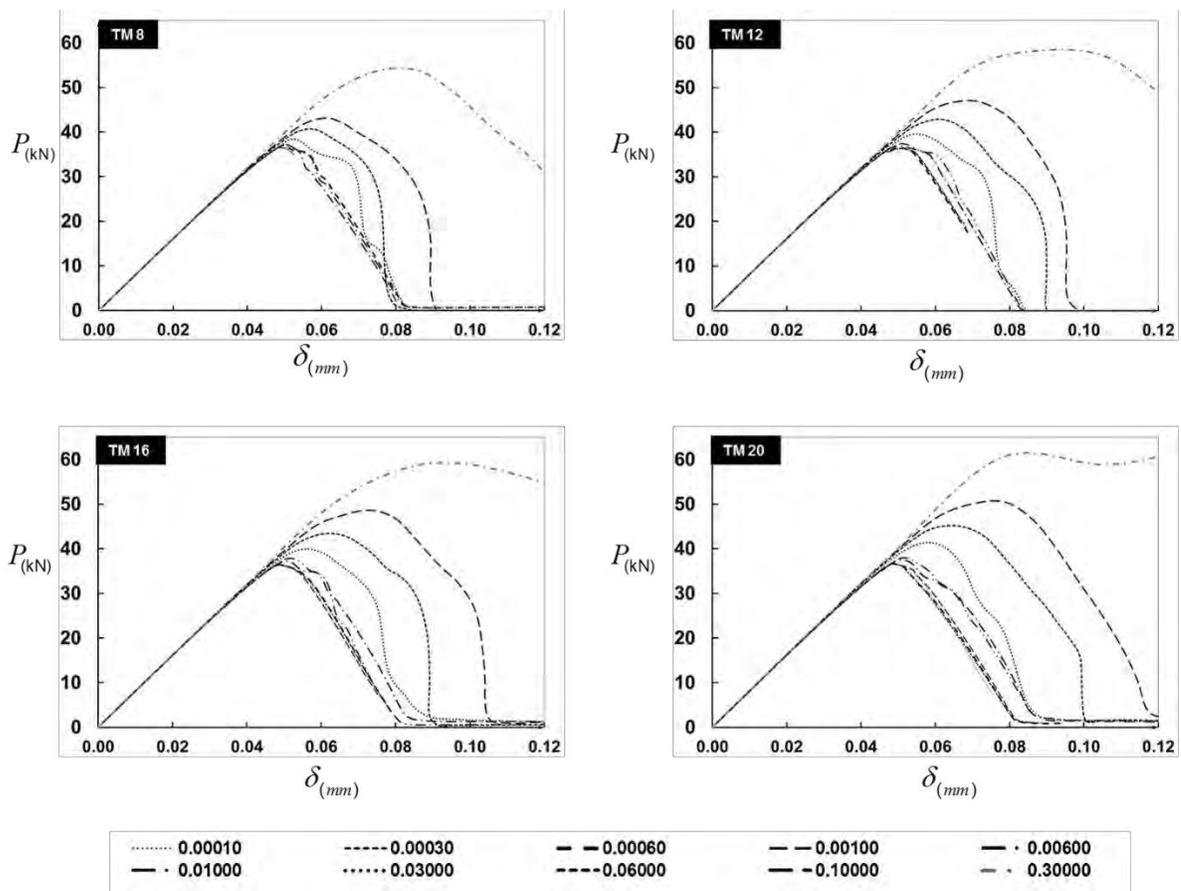
En la modelación mediante el método de los elementos finitos se emplearon mallas bidimensionales de elementos triangulares descritos en la sección 3.7. Se impusieron las condiciones de frontera en los dos extremos de la probeta de manera que en uno de ellos el desplazamiento fuera nulo, mientras que la carga se aplicó en el sentido longitudinal de la probeta en los nudos correspondientes al extremo contrario (figura 5-2).

**Figura 5-2:** Ejemplo de malla usada en el análisis de sensibilidad

## 5.2 Sensibilidad al tamaño del paso

En la simulación, las condiciones de frontera fueron impuestas en forma de desplazamientos en la dirección de la carga. Para determinar el incremento de los desplazamientos impuestos o pasos, se utilizó el método Longitud de Arco (ArcLength) (Memon & SU, 2004) (de Souza, et al., 2008).

**Figura 5-3:** Variación de la respuesta con el tamaño del paso para diferentes tamaños máximos de elementos finitos en la malla  
(a) TM8, (b) TM12, (c) TM16 y (d) TM20



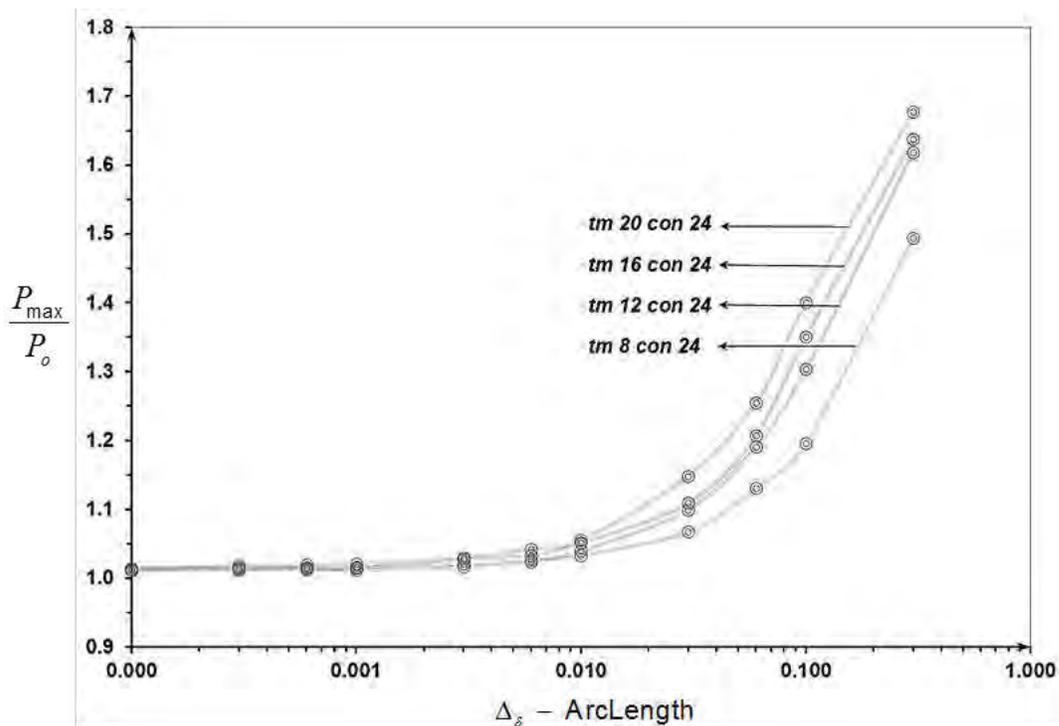
Se realizaron 11 simulaciones del ensayo de tracción sobre una probeta de concreto simple con el fin de determinar la influencia del tamaño del paso ( $\Delta_\delta = 0.0001, 0.0003, 0.0006, 0.0010, 0.0030, 0.0060, 0.0100, 0.0300, 0.0600, 0.1000, 0.3000$ ) en la respuesta obtenida, para cuatro mallas de diferentes tamaños de elementos finitos (TM = 8mm, 12mm, 16mm

y 20mm). Se consideró un concreto con una resistencia a la compresión  $f'_c$  de 24 MPa, una resistencia a la tracción  $f_t$  de 2.4 Mpa y una energía de fractura  $G_f^m$  de 100N/m. En la figura 5-3 se muestran las curvas de carga contra desplazamiento obtenidas con diferentes tamaños del paso, para las cuatro mallas.

El tamaño del paso puede afectar considerablemente la respuesta inelástica obtenida en la simulación. A medida que el paso se reduce la forma de la curva de carga contra desplazamiento tiende a coincidir. Este mismo comportamiento se presenta con las mallas de todos los tamaños evaluados.

Cada vez que el tamaño del paso sea menor, se obtendrá una mejor aproximación al comportamiento esperado en el elemento; sin embargo, esto representa un mayor costo computacional, al requerirse un mayor número de pasos para alcanzar estados avanzados de deformación en el material. Se hace necesario seleccionar un tamaño del paso que permita equilibrar el costo y la exactitud de la respuesta.

**Figura 5-4:** Carga máxima en función del tamaño del paso para diferentes tamaños máximos de elementos finitos en la malla

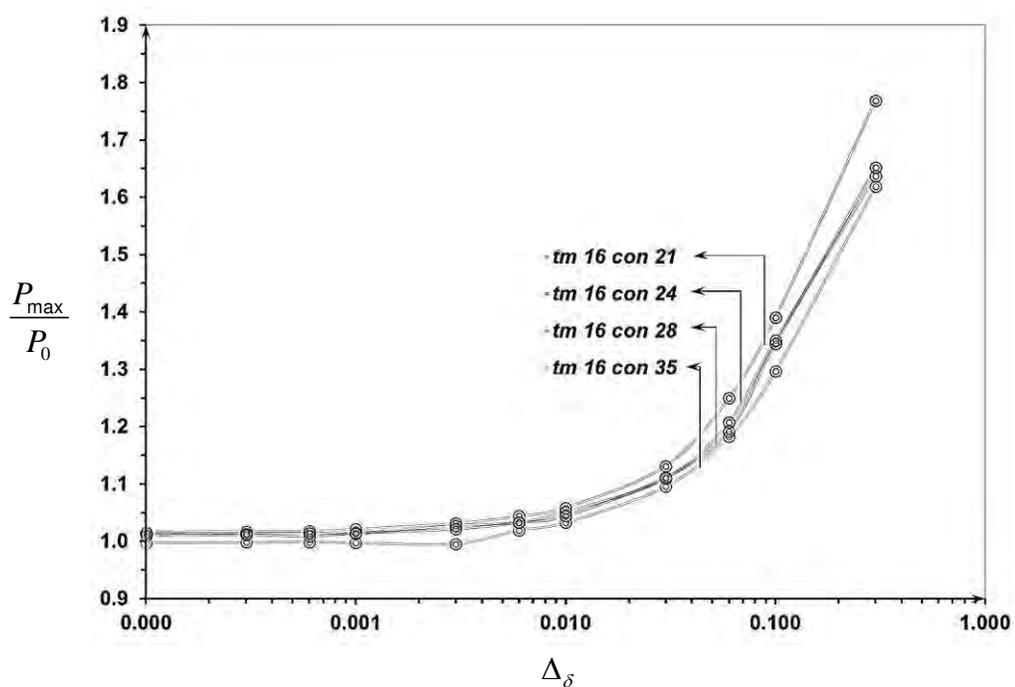


En la figura 5-4 se presentan las curvas semilogarítmicas de la relación entre la carga máxima obtenida en cada simulación y la carga máxima esperada contra el tamaño del paso, para los cuatro tamaños máximos de elementos finitos. Para valores de tamaño del paso menores a 0.01 la variación en la carga máxima es menor al 5% de la resistencia esperada independientemente del tamaño de malla usado. La carga máxima esperada  $P_0$  se calculó como:

$$P_0 = A_0 \cdot f_t \tag{5-1}$$

donde  $A_0$  es el área de la sección transversal del elemento en la zona de la entalla y  $f_t$  es la resistencia del concreto a la tracción.

**Figura 5-5:** Carga máxima en función del tamaño del paso para concretos de diferentes resistencias



Se repitió el mismo procedimiento, realizando la simulación del ensayo usando cuatro diferentes calidades de concreto ( $f'_c = 21$  MPa, 24 MPa, 28 MPa, 35 MPa) y variando el tamaño del paso, usando una de las mallas. La resistencia a la tracción se definió como el 10% de la resistencia a la compresión y la energía de fractura se conservó constante con

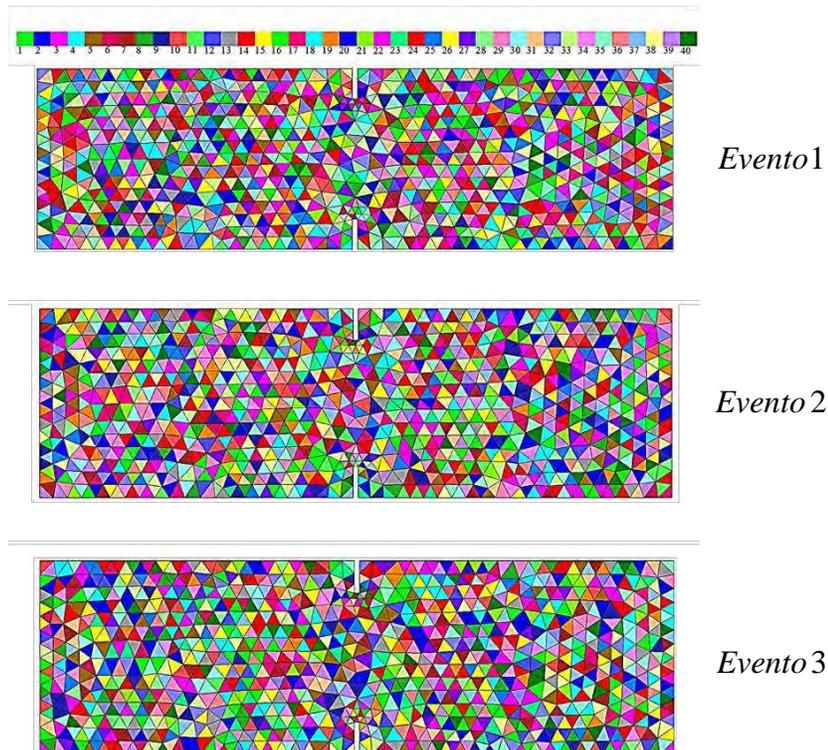
un valor de 0.01 N/mm. En la figura 5-5 se presentan las curvas de la relación entre la carga máxima obtenida en cada simulación y la carga máxima esperada contra el tamaño del paso, para cuatro concretos de diferentes resistencias.

Se determinó que la convergencia de la respuesta para diferentes resistencias del material se obtiene con un tamaño de paso. El valor del máximo Arclength seleccionado para las simulaciones realizadas en esta tesis es de 0.005.

### 5.3 Sensibilidad al número de eventos

El carácter estocástico del modelo presentado brinda la posibilidad de generar en cada simulación una respuesta estructural que es función de la distribución y orientación aleatoria de las fibras dentro del miembro estructural que se está analizando, y no es necesariamente representativo del comportamiento de cualquier miembro estructural de SFRC construido en condiciones similares.

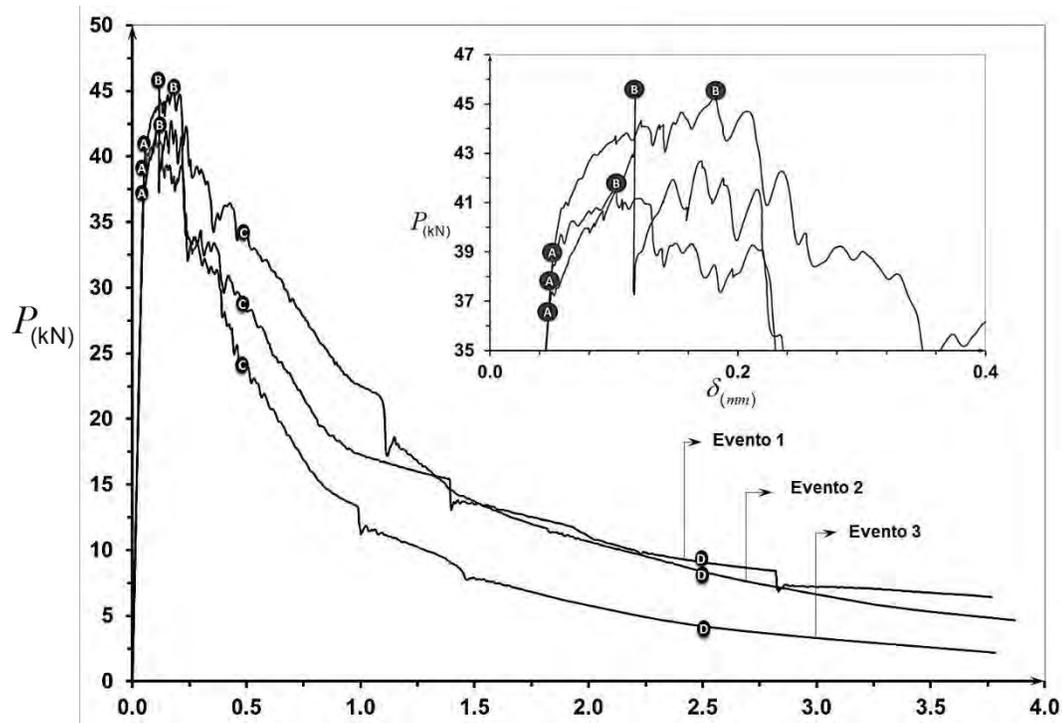
**Figura 5-6:** Ejemplo de asignación de materiales



En la figura 5-6 se presenta el ejemplo de tres eventos de asignación aleatoria de las 40 configuraciones de material (definidas en el numeral 3.8.4) a la malla de elementos finitos. La distribución y orientación de las fibras resultantes en los tres eventos es diferente, por lo cual el comportamiento estructural esperado para el mismo ensayo también difiere, especialmente en el rango inelástico (figura 5-6).

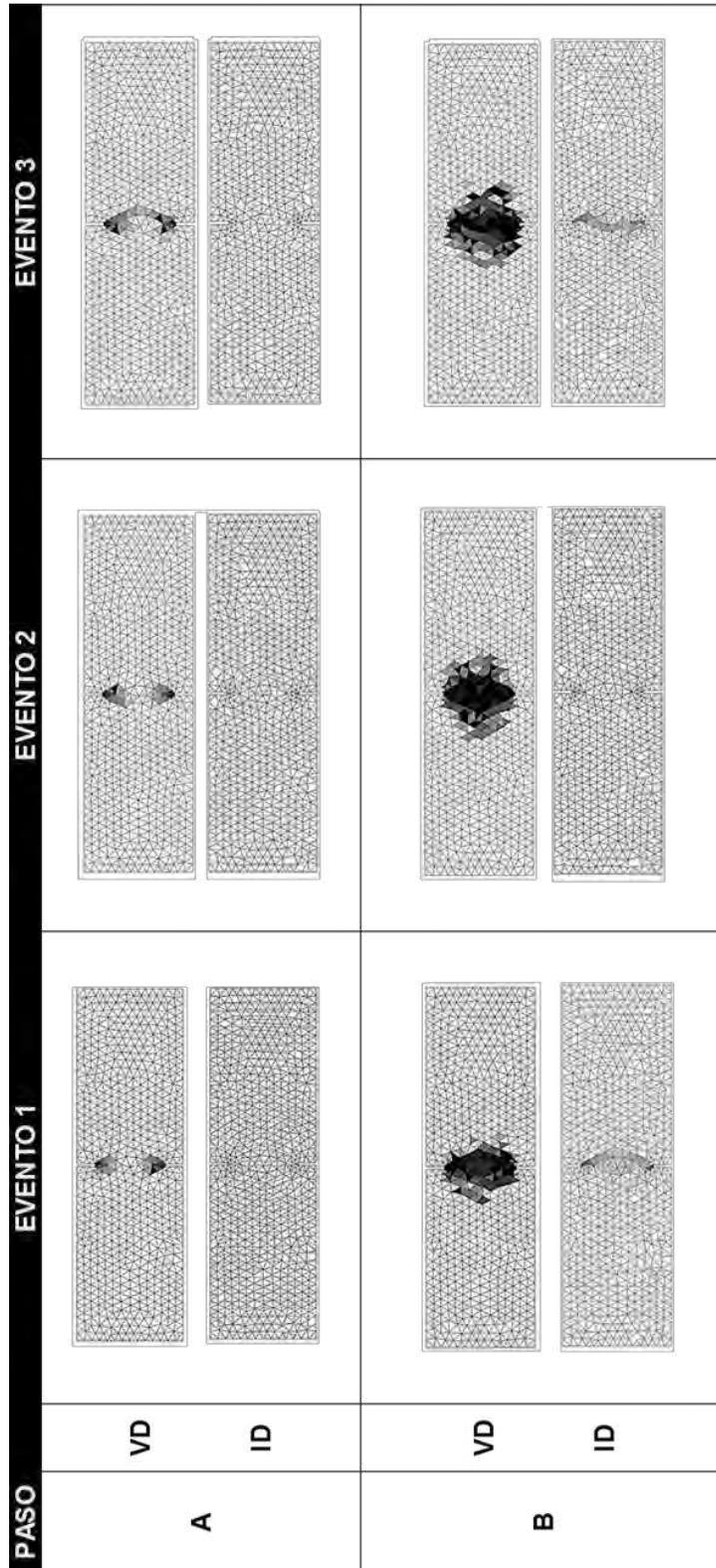
En la figura 5-7 se presenta el ejemplo de tres curvas de carga contra desplazamiento para la simulación del ensayo de tracción en los tres eventos de la figura 5-6, considerando que hacen parte de una misma muestra. Se han identificado cinco puntos característicos en cada curva, el punto *A* corresponde al inicio del daño en el material, el punto *B* corresponde al límite de proporcionalidad, en el punto *C* se presenta la carga máxima, y los puntos *D* y *E* corresponden a desplazamientos de 0.5 y 2.5 mm respectivamente.

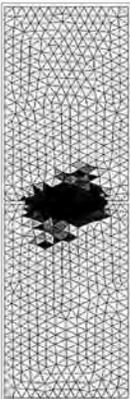
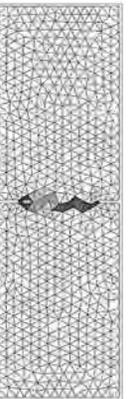
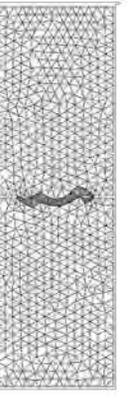
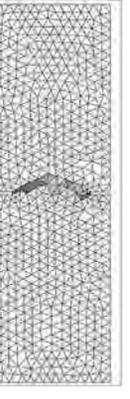
**Figura 5-7:** Ejemplo de malla usada en el análisis de sensibilidad



El contenido y la orientación de las fibras influye en la forma en que se inicia el daño en el miembro estructural sobre el punto *A* de la figura 5-7. En la figura 5-8 se presenta la evolución de la variable de daño y del desplazamiento en los puntos *A*, *B*, *C* y *D* para las respuestas de los tres especímenes presentadas en la figura 5-7.

Figura 5-8: Evolución de la variable de daño y del desplazamiento para tres eventos



<b>PASO</b>	<b>EVENTO 1</b>			<b>VD</b>	<b>ID</b>
		<b>C</b>			
	<b>EVENTO 2</b>			<b>VD</b>	<b>ID</b>
		<b>D</b>			
	<b>EVENTO 3</b>			<b>VD</b>	<b>ID</b>
		<b>D</b>			

Para la representación del daño del concreto (VD), el tono más oscuro representa un valor del daño más cercano a la unidad. Por otro lado, las isolíneas de desplazamiento (ID) están más cerca entre sí, la deformación se concentra representando una fisura.

En la estadística aplicada, el tamaño de la muestra es una variable que limita la posibilidad de obtener un mayor conocimiento de una población; lo que implica que con muestras de tamaños pequeños se dificulta hacer un estimativo del comportamiento de la misma. Se hace entonces necesario realizar una repetición de las simulaciones con diferentes configuraciones del material, emulando el proceso de muestreo en el caso de los ensayos experimentales, que permita inferir las tendencias en el comportamiento de los resultados.

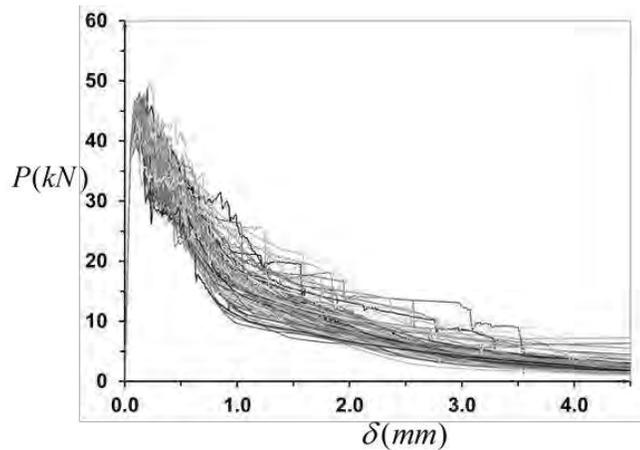
Se realizó la simulación del ensayo de tracción sobre la probeta descrita al inicio de este capítulo, aplicando el modelo constitutivo de material propuesto. El concreto usado en las simulaciones tiene una resistencia a la compresión  $f'_c$  de 24 MPa, una resistencia a la tracción  $f_t$  de 2.4 Mpa y una energía de fractura  $G_f$  de 100N/m. Se usaron fibras con ganchos en los extremos con una longitud de 40mm y 0.6mm de diámetro, cuya curva de arrancamiento presenta una resistencia pico de 600MPa, una pendiente inicial de 36000MPa y un parámetro de ablandamiento de -800MPa . La cuantía volumétrica nominal de fibras se fijó en 1%. Se usó una malla con un tamaño máximo de 12mm para el lado de los elementos finitos.

Para esto se prepararon configuraciones del material variando aleatoriamente la distribución y orientación de las fibras en los elementos finitos de acuerdo con lo descrito en el capítulo 4. En la figura 5-9 se presentan las curvas de carga contra desplazamiento entre los extremos de la probeta para las  $n=211$  simulaciones. Mientras que en el rango elástico las curvas mantienen el mismo comportamiento, luego del límite de proporcionalidad las curvas presentan variaciones considerables. Sin embargo se evidencia que mantienen en general la misma tendencia.

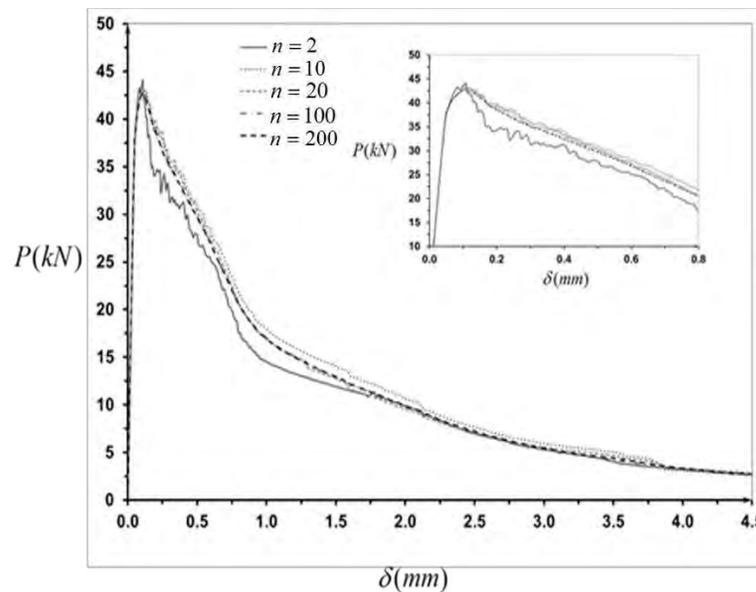
A partir de las curvas obtenidas para las simulaciones se puede estimar una curva promedio de las  $n$  observaciones. En figura 5-10 se presentan las curvas promedio obtenidas para cinco tamaños de muestra: 2, 10, 20, 100 y 200. Para conformar las muestras se seleccionaron observaciones consecutivas de acuerdo con el orden de

ejecución de las mismas, presumiendo que la aleatoriedad de la selección se encuentra implícita en la asignación de los materiales. Se puede concluir que a medida que se incrementa el número de observaciones en la muestra, la curva promedio converge.

**Figura 5-9:** Muestra de  $n=211$  simulaciones



**Figura 5-10:** Variación de la curva promedio en función del tamaño de la muestra

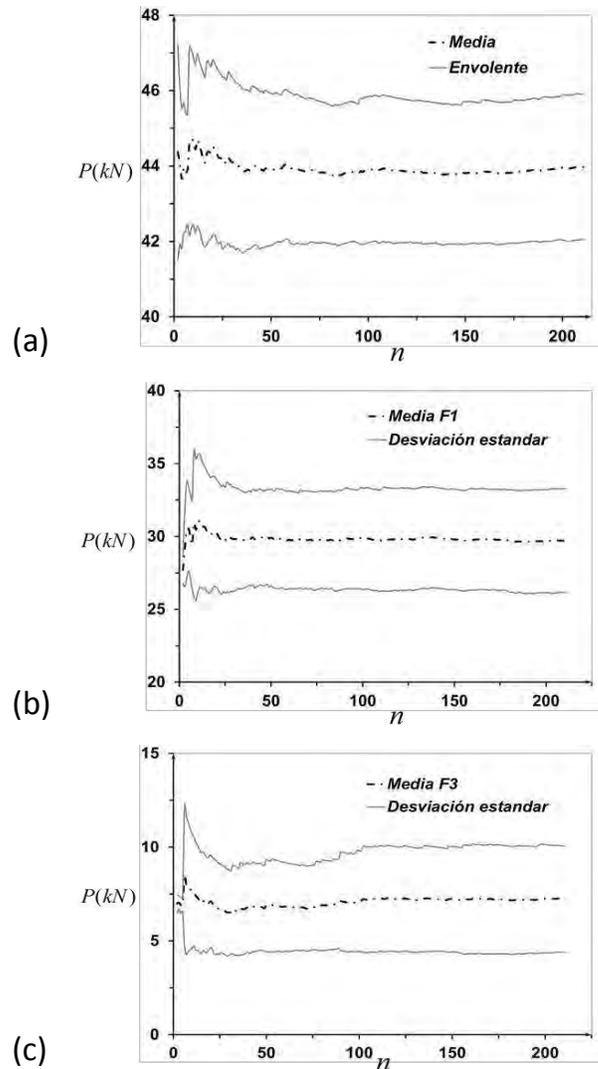


Para tener una mejor perspectiva de la convergencia de la respuesta en función del tamaño de la muestra se seleccionaron tres parámetros comúnmente usados en el diseño del SFRC, la carga máxima  $P_{max}$  y las cargas residuales  $F_1$  y  $F_3$  correspondientes a los valores de apertura de fisura de 0.5mm y 2.5mm respectivamente. Para cada uno de los

parámetros se calcularon los promedios y las desviaciones estándar variando el tamaño de la muestra desde  $n = 2$  hasta  $n = 211$  (figura 5-11).

**Figura 5-11:** Variación del promedio de los parámetros de diseño en función del tamaño de la muestra

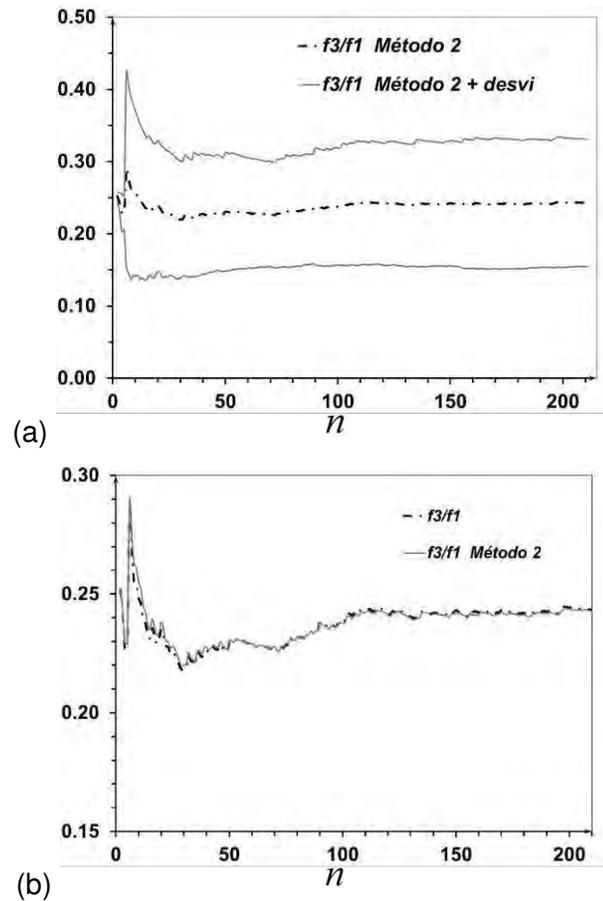
(a) Carga máxima, (b) carga residual  $F_1$  y (c) carga residual  $F_3$



El promedio estimado para los tres parámetros  $P_{\max}$ ,  $F_1$  y  $F_3$ , así como la desviación estándar de los mismos tiende a estabilizarse con tamaños de muestra mayores a cien observaciones.

**Figura 5-12:** Variación de la relación  $F_3/F_1$  en función del tamaño de la muestra

(a) Carga máxima, (b) Comparación de los dos métodos de cálculo.

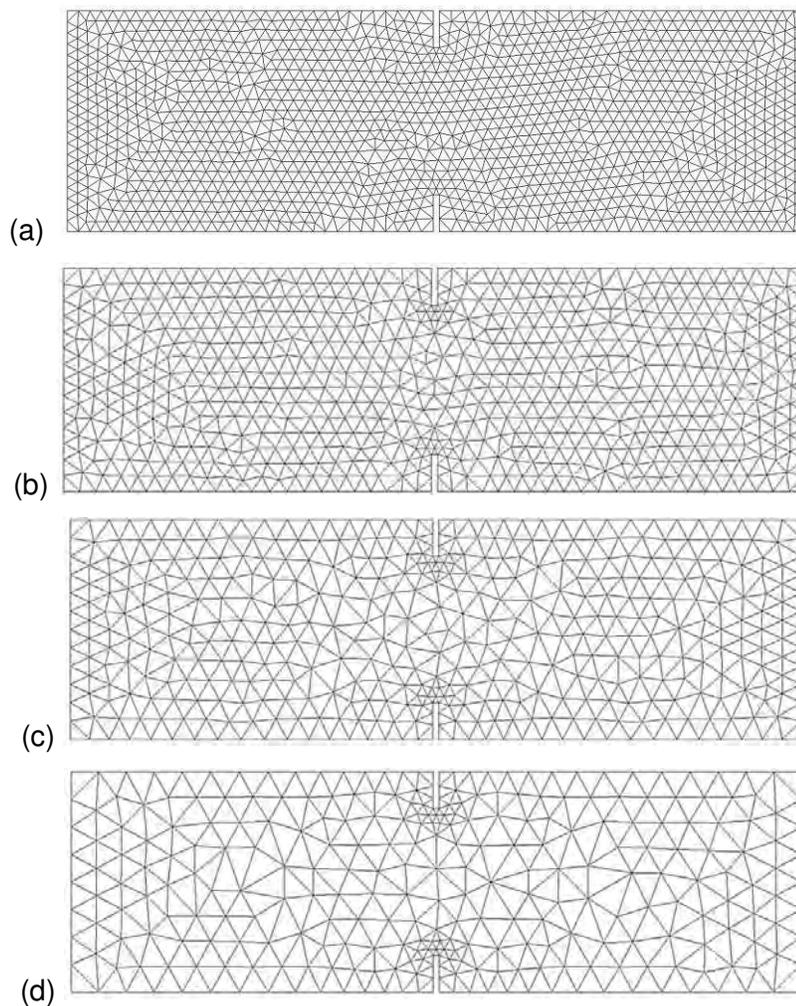


Adicionalmente, la relación entre las cargas residuales  $F_3$  y  $F_1$ , también es un parámetro de interés para el diseño puesto que permite estimar la pendiente de ablandamiento de la rama inelástica. En la práctica, este valor es calculado individualmente para cada resultado experimental y luego promediado. En la figura 5-12 (a) se presenta el cálculo de los promedios de las relaciones  $F_3/F_1$  para diferentes tamaños de muestra, junto a las desviaciones estándar correspondientes. En la figura 5-12 (b) se comparan los resultados de los promedios de las relaciones  $F_3/F_1$  con las relaciones entre los promedios de los parámetros  $F_3$  y  $F_1$ , para diferentes tamaños de muestra. Con un tamaño de muestra mayor a cien observaciones se encuentra que la relación entre los promedios de  $F_3$  y  $F_1$  resulta un buen estimador del promedio de la relación  $F_3/F_1$  para el ensayo.

## 5.4 Sensibilidad al tamaño de la malla

Se modeló el ensayo de tracción descrito al principio de este capítulo, usando cuatro mallas con diferentes tamaños máximos de elementos finitos. Los tamaños seleccionados fueron  $Le = 8\text{mm}$ ,  $12\text{mm}$ ,  $16\text{mm}$  y  $20\text{mm}$ , los cuales han sido denominados como TM8, TM12, TM16 y TM20 respectivamente (figura 5-13).

**Figura 5-13:** Mallas de diferentes tamaños usada en el ensayo de tracción directa  
(a) TM8, (b) TM12, (c) TM16 y (d) TM20

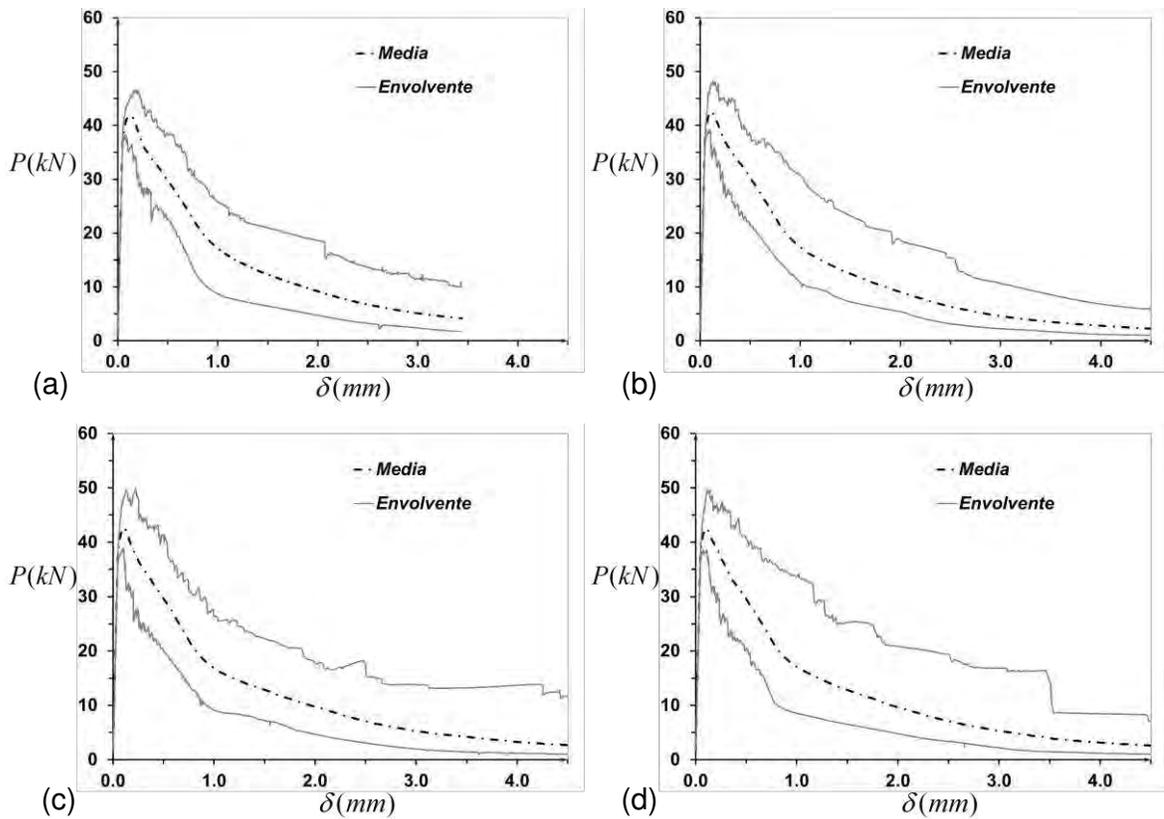


Con cada una de las mallas se realizaron simulaciones para 100 eventos con asignación de las distribuciones y orientaciones de las fibras dentro del material en forma aleatoria.

En la modelación se usó un concreto con resistencia a la compresión  $f'_c$  de 24 MPa, resistencia a la tracción  $f_t$  de 2.4 MPa, una cuantía volumétrica nominal del 1% de fibras y un coeficiente de anisotropía de 0.5. En la figura 5-14 se presentan las envolventes y las curvas promedio obtenidas con las cuatro diferentes mallas, para las curvas de carga contra desplazamiento.

**Figura 5-14:** Envolventes para las curvas de carga vs, desplazamiento obtenidas en el ensayo de tracción usando diferentes tamaños de malla

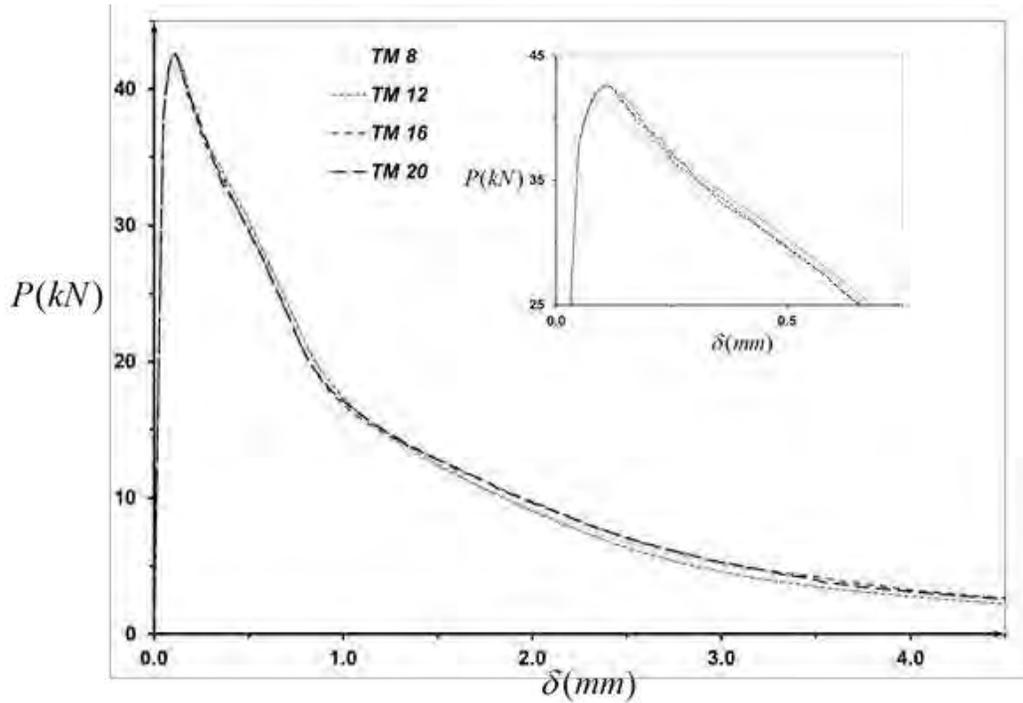
(a) TM8, (b) TM12, (c) TM16 y (d) TM20



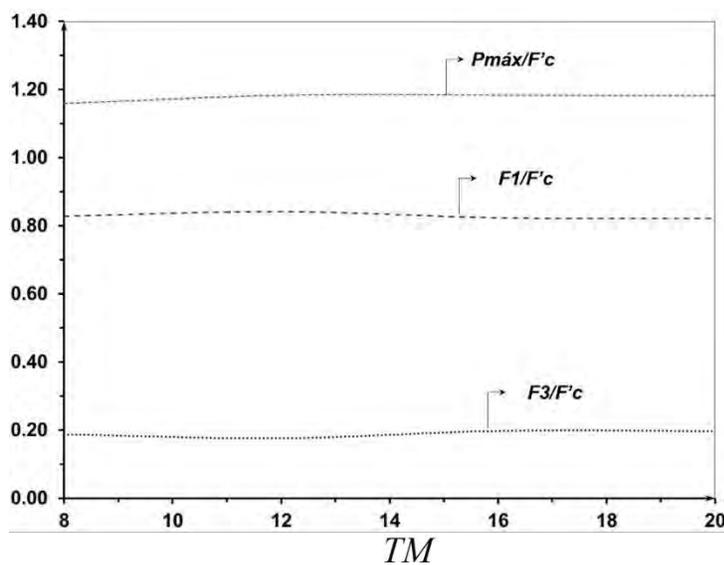
Al comparar las curvas promedio de las muestras obtenidas para cada uno de los tamaños de malla (figura 5-15) se encuentra que la tendencia del comportamiento es muy similar, de manera que las diferencias entre los valores de las cargas promedio obtenidas con los diferentes tamaños para un mismo valor de desplazamiento no superan el 5%. En la figura 5-16 se comparan los promedios de las cargas pico, los promedios de las cargas residuales

$F_1$  y los promedios de las cargas residuales  $F_3$  obtenidos para los diferentes tamaños de malla.

**Figura 5-15:** Curvas promedio de la relación carga contra desplazamiento para diferentes tamaños de malla



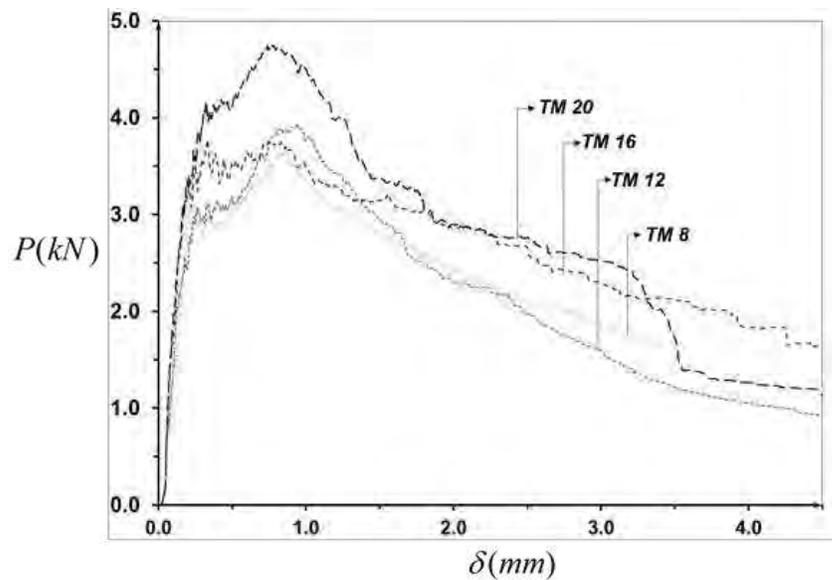
**Figura 5-16:** Variación de la resistencia promedio en función del tamaño de la malla



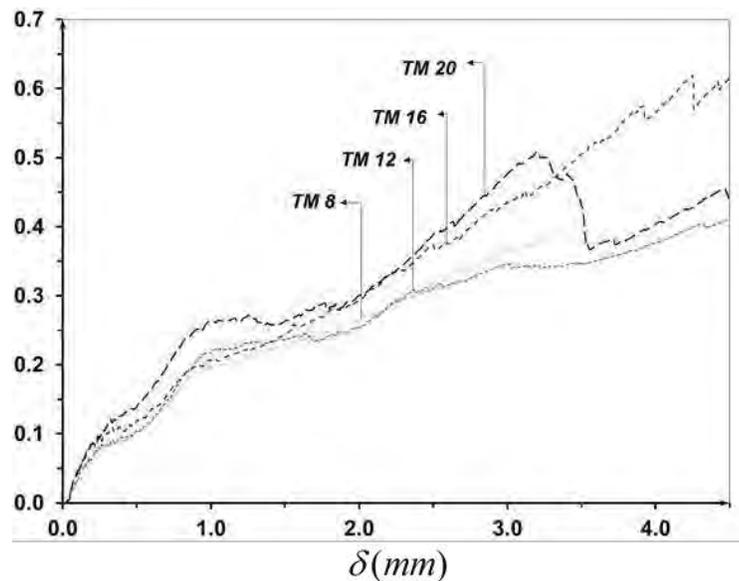
Por otra parte las dispersiones de las muestras se ven un poco más afectadas por el tamaño de la malla, de manera que con elementos finitos más grandes la desviación estándar tiende a ser mayor. Este comportamiento está relacionado con la distribución del material dentro del miembro estructural, puesto que cuando los elementos son pequeños, el material en la macro escala tiende a parecer homogéneo e isotrópico, mientras que con elementos más grandes las heterogeneidades y anisotropías son más significativas en la macroescala.

**Figura 5-17:** Dispersión de la respuesta para diferentes tamaños de malla.

(a) Desviación estándar y (b) Coeficiente de variación



(a)



(b)

En la figura 5-17a se presentan los valores de las desviaciones estándar para las cuatro muestras de curvas carga contra desplazamiento obtenidas con diferentes tamaños de malla. Los valores de las desviaciones han sido normalizados en función de la resistencia a la tracción de un espécimen de concreto simple. En la figura 5-17b se presentan los valores del coeficiente de variación obtenido para cada uno de los tamaños de malla.

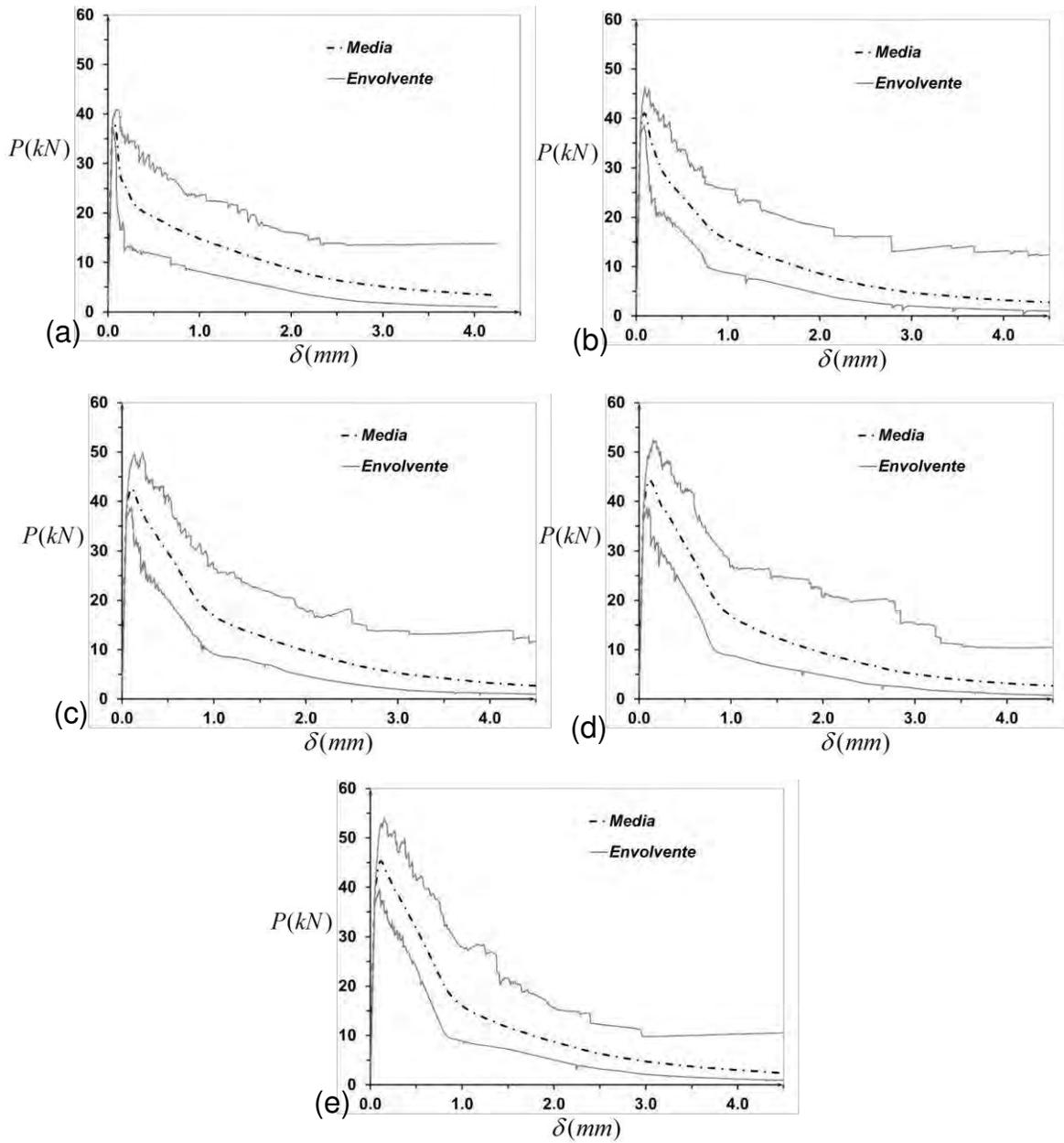
## 5.5 Sensibilidad al coeficiente de anisotropía

En el numeral 2.3 se describió la forma como se implementó el uso del coeficiente de anisotropía al modelo constitutivo del material compuesto, mientras que en el numeral 2.3 se indicó que el rango de valores experimentales que puede asumir está comprendido en el intervalo entre 0 y 1, incluidos los límites del mismo. Se simuló el ensayo de tracción sobre cinco muestras, con 100 eventos cada una, y variando entre ellas el coeficiente isotropía, al cual se le asignó un valor constante para todos los elementos de la malla.

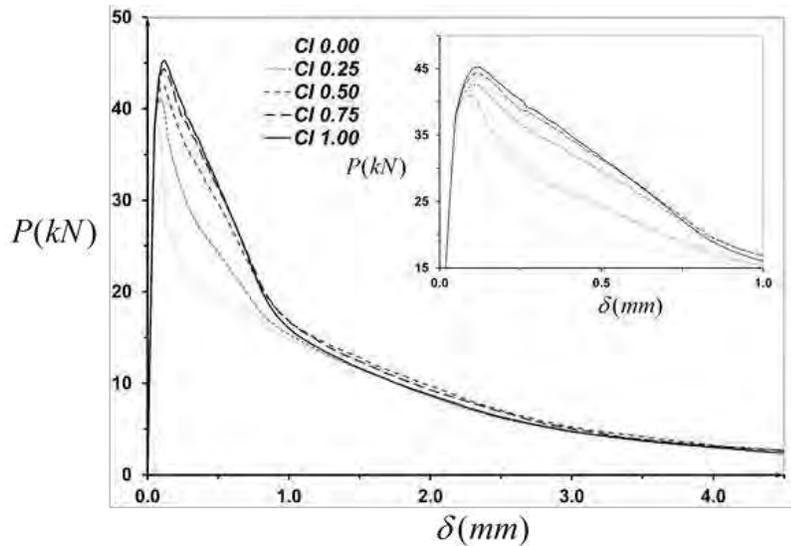
En la modelación se usó un concreto con resistencia a la compresión  $f'_c$  de 24 MPa, resistencia a la tracción  $f_t$  de 2.4 MPa, una cuantía volumétrica nominal del 1% de fibras y se usó una malla con tamaño máximo de elemento finito de 12mm. Los cinco coeficientes de isotropía usados fueron: 0.00, 0.25, 0.50, 0.75 y 1.00. En la figura 5-18 se presentan las envolventes y las curvas promedio obtenidas con los cinco diferentes coeficientes de anisotropía, para las curvas de carga contra desplazamiento.

Se calcularon las curvas promedio para las cinco muestras y se compararon, encontrando que el coeficiente de isotropía influencia considerablemente el comportamiento de la relación carga contra desplazamiento. Con un menor valor de coeficiente de isotropía se presenta una caída inicial, más rápida, en la resistencia post-pico, hasta alcanzar el valor de resistencia residual proporcionado por las fibras (figura 5-19).

**Figura 5-18:** Envolventes para las curvas de carga vs, desplazamiento obtenidas en el ensayo de tracción usando diferentes coeficientes de isotropía  
 (a)  $CI=0.00$ , (b)  $CI=0.25$ , (c)  $CI=0.50$ , (d)  $CI=0.75$  y (e)  $CI=1.00$

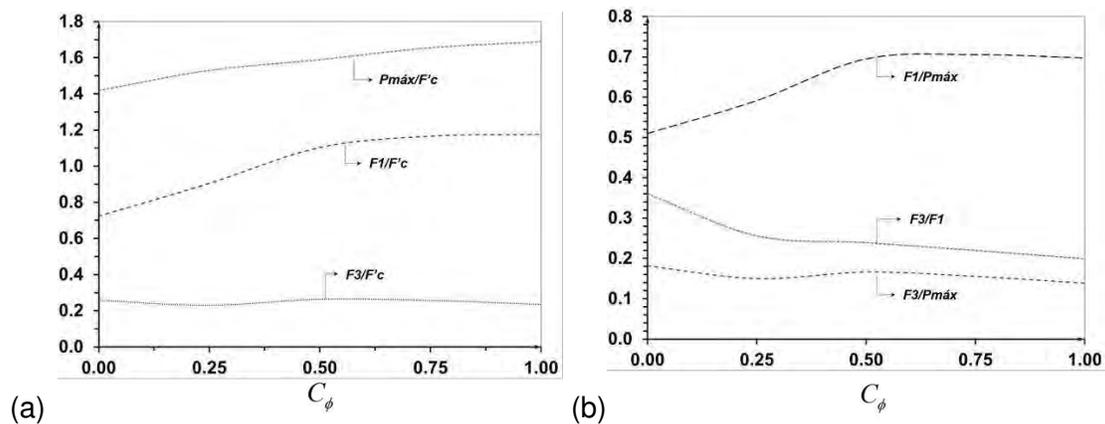


**Figura 5-19:** Curvas promedio de la relación carga contra desplazamiento para diferentes coeficientes de isotropía



Adicionalmente cuando el coeficiente de isotropía es menor se obtiene un menor valor de la carga pico  $P_{\max}$  en la curva promedio, al igual que en la resistencia residual  $F_1$  para una apertura de fisura de 0.5mm. Mientras que para la resistencia residual  $F_3$  presenta poca variación (figura 5-20a). Estos comportamientos se ven reflejados en una incremento de la magnitud de la pendiente de ablandamiento calculada a través de relación entre las dos cargas residuales, para valores de coeficiente de isotropía más bajos (figura 5-20b).

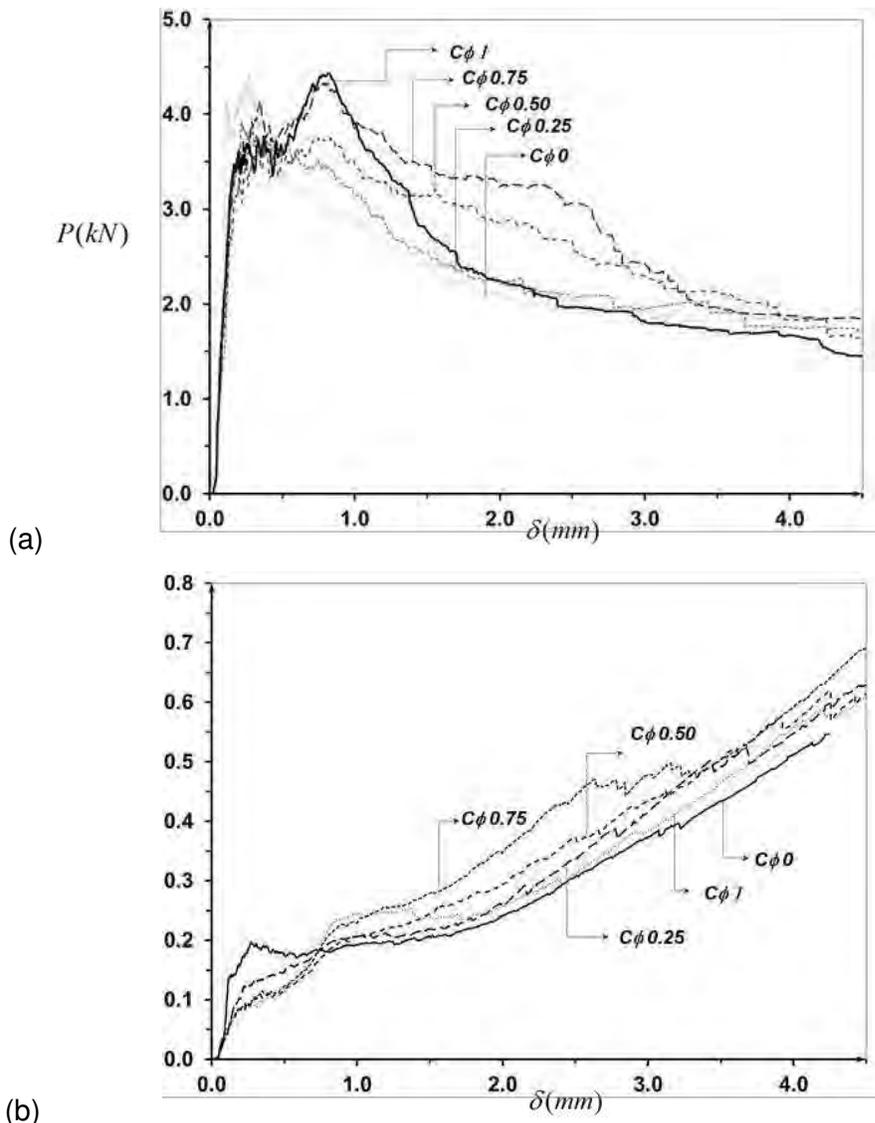
**Figura 5-20:** Variación de la resistencia promedio en función del tamaño del coeficiente de isotropía



Por otra parte, se encuentra que los coeficientes de isotropía bajos tienden a generar mayores dispersiones durante el inicio de la fisura mientras que los coeficientes de isotropía altos, incrementan la dispersión en etapas posteriores de la fisuración (figura 5-21a). En general se encuentra que la desviación estándar tiende a decrecer a medida que se acerca a la resistencia residual, sin embargo el coeficiente de variación presenta un comportamiento inverso, debido a que la carga promedio también decrece. Esta tendencia se presenta de manera similar con todos los valores de coeficiente de isotropía (figura 5-21b).

**Figura 5-21:** Dispersión de la respuesta para diferentes coeficientes de isotropía

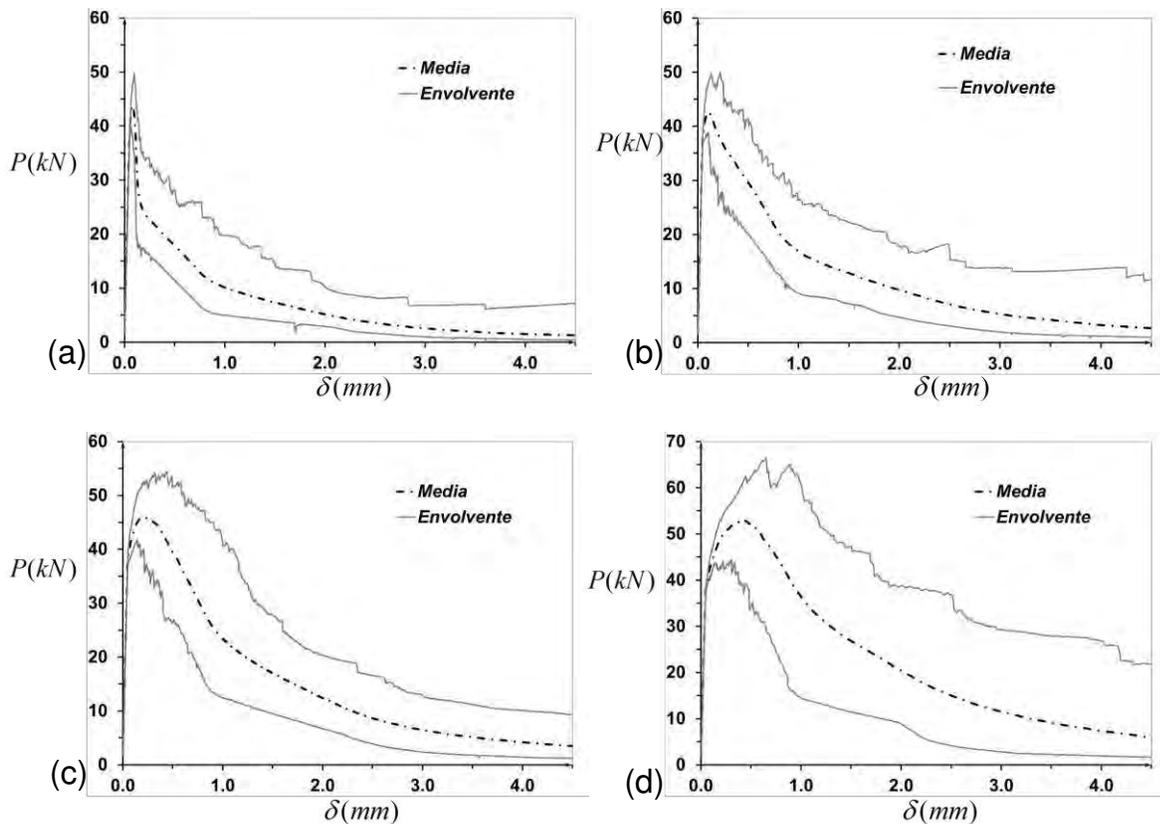
(a) Desviación estándar y (b) coeficiente de variación



## 5.6 Influencia de la cuantía de fibras en la respuesta a la tracción del SFRC

En el capítulo 2 se estableció que la cantidad de fibras adicionadas al concreto influye considerablemente en la respuesta del SFRC, especialmente en el rango inelástico. El modelo constitutivo de material compuesto desarrollado es capaz de describir la variación de la respuesta estructural relacionada con el uso de diferentes cuantías volumétricas de fibras.

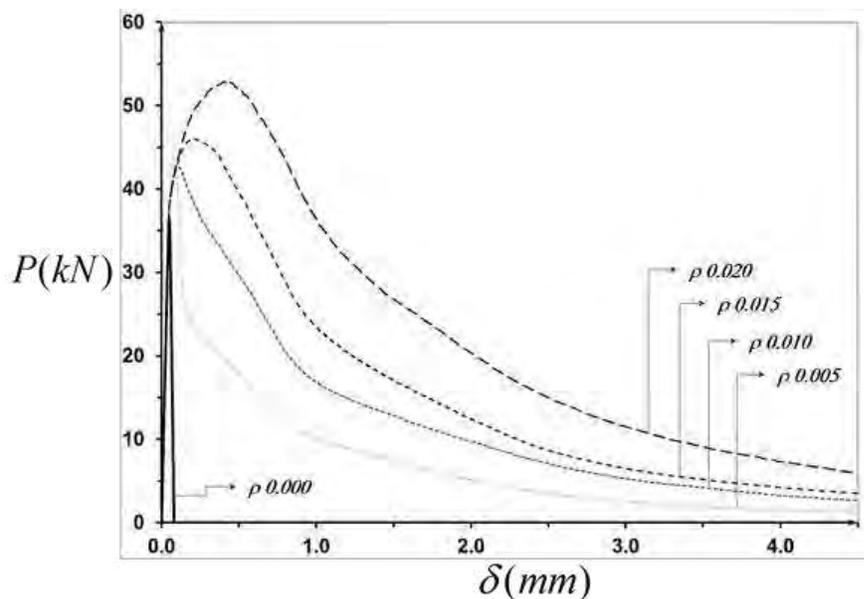
**Figura 5-22:** Envoltorios para las curvas de carga vs, desplazamiento obtenidas en el ensayo de tracción usando diferentes cuantías volumétricas de fibras  
(a)  $\rho = 0.005$ , (b)  $\rho = 0.010$ , (c)  $\rho = 0.015$  y (d)  $\rho = 0.020$



Se realizó la simulación del ensayo de tracción directa sobre especímenes con diferentes cuantías volumétricas. Para esto se dispuso de cuatro muestras de cien especímenes cada una. Se seleccionaron cuatro cuantías dentro del rango de valores comúnmente

empleados en la práctica: 0.5%, 1.0%, 1.5% y 2.0%. En la modelación de las cuatro muestras se usó un concreto con resistencia a la compresión  $f'_c$  de 24 MPa, resistencia a la tracción  $f_t$  de 2.4 MPa, un coeficiente de isotropía de 0.5 y se usó una malla con tamaño máximo de elemento finito de 12mm. En la figura 5-22 se presentan las envolventes y las curvas promedio obtenidas con las cuatro diferentes cuantías, para las curvas de carga contra desplazamiento. En la figura 5-23 se comparan entre sí las curvas promedio de las diferentes cuantías, junto con la curva obtenida para una probeta de concreto simple.

**Figura 5-23:** Curvas promedio de la relación carga contra desplazamiento para diferentes cuantías volumétricas de fibras



A medida que la cuantía volumétrica de fibras es mayor, aumenta la resistencia pico promedio así como la resistencia residual, incluso cuando la apertura de la fisura supera los 2.5mm. De la misma forma las curvas promedio para las cuantías más altas presentan mayores áreas bajo la curva, las cuales están relacionadas con una mayor ductilidad en el material.

## 5.7 Influencia de la resistencia del concreto en la respuesta a la tracción en el SFRC

En el capítulo 2 se describió la forma como la fibra de acero, así como la interacción entre la fibra y la matriz, pueden afectar el comportamiento estructural de un miembro de SFRC. De la misma forma en el numeral 3.4 se planteó un modelo constitutivo para la fibra deformable y deslizante que pretende incluir el aporte tanto de la fibra como de la interface a la relación entre el esfuerzo que asume la fibra y deformación en el material compuesto. Este modelo puede ser obtenido directamente con la respuesta medida en un ensayo de arrancamiento.

Por otra parte se conoce que la respuesta al arrancamiento es función de una serie de parámetros relacionados con el tipo de fibra, la geometría de la misma y con la calidad de la matriz de concreto.

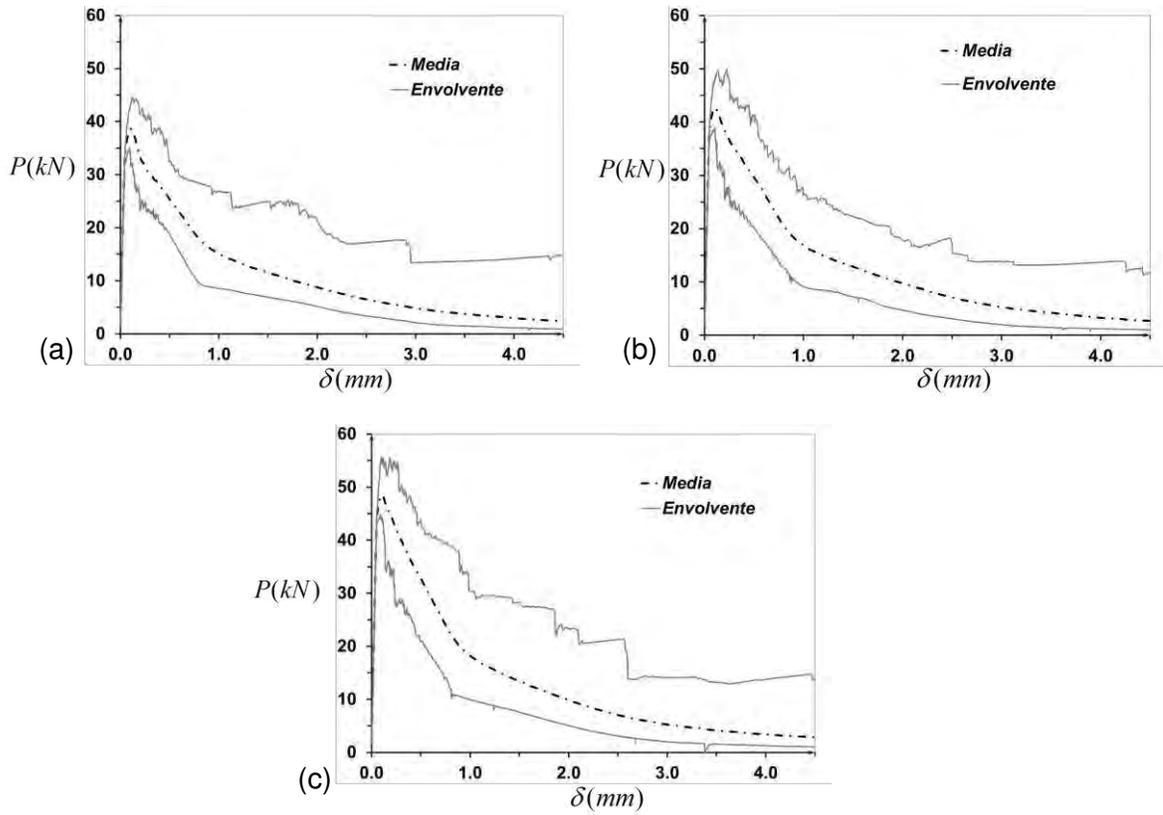
Se han realizado 100 simulaciones o eventos del ensayo de tracción en tres muestras de SFRC, con diferentes curvas de arrancamiento, dependientes de la resistencia a la compresión de la matriz. Inicialmente se planteó como variable de análisis la resistencia de la matriz. Sin embargo, a pesar de que se usó el mismo tipo de fibra en los tres materiales compuestos, el modelo de fibra deslizante-deformable también se ve afectado y ha sido obtenido a partir de los ensayos experimentales de arrancamiento para la misma fibra con diferentes calidades de concreto.

En la modelación de las tres muestras se usaron concretos con resistencias a la compresión  $f'_c$  de 21 MPa, 24 MPa y 28 MPa con resistencias a la tracción  $f_t$  de 2.1 MPa, 2.4 MPa y 2.8 MPa respectivamente. Se usó un coeficiente de isotropía de 0.5 y una malla con tamaño máximo de elemento finito de 12mm.

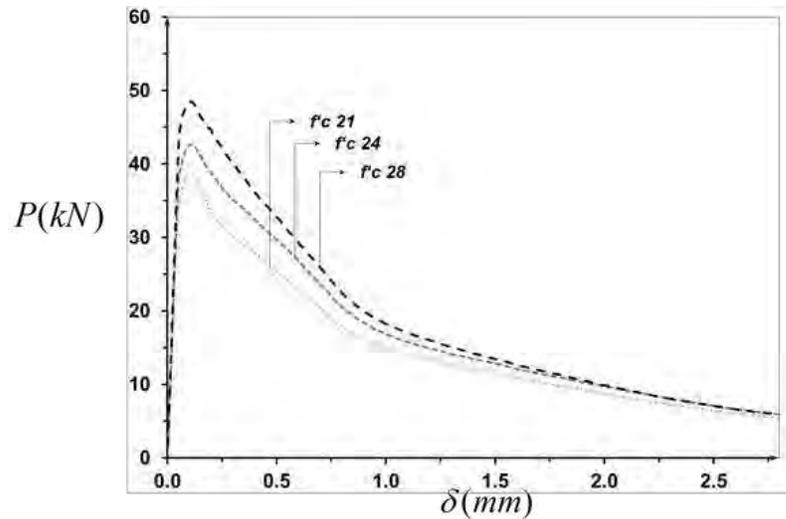
En la figura 5-24 se presentan las envolventes y las curvas promedio obtenidas con las tres diferentes matrices, para las curvas de carga contra desplazamiento. En la figura 5-25 se comparan entre sí las curvas promedio de las diferentes matrices.

**Figura 5-24:** Envoltentes para las curvas de carga vs, desplazamiento obtenidas en el ensayo de tracción usando diferentes matrices de concreto

(a)  $f'_c = 21$  MPa, (b)  $f'_c = 24$  MPa y (c)  $f'_c = 28$  MPa



**Figura 5-25:** Curvas promedio de la relación carga contra desplazamiento para diferentes matrices de concreto



\*Página dejada intencionalmente en blanco

## **6. Ejemplos de validación y aplicación**

Este capítulo se divide en tres partes, en la dos primeras se presentan ejemplos de validación del modelo con resultados de ensayos experimentales en especímenes de laboratorio, mientras que en la tercera se aplica el modelo en la simulación de miembros estructurales de SFRC reforzados simultáneamente con barras continuas de acero, tanto longitudinalmente como transversalmente.

### **6.1 Ensayo de tracción directa**

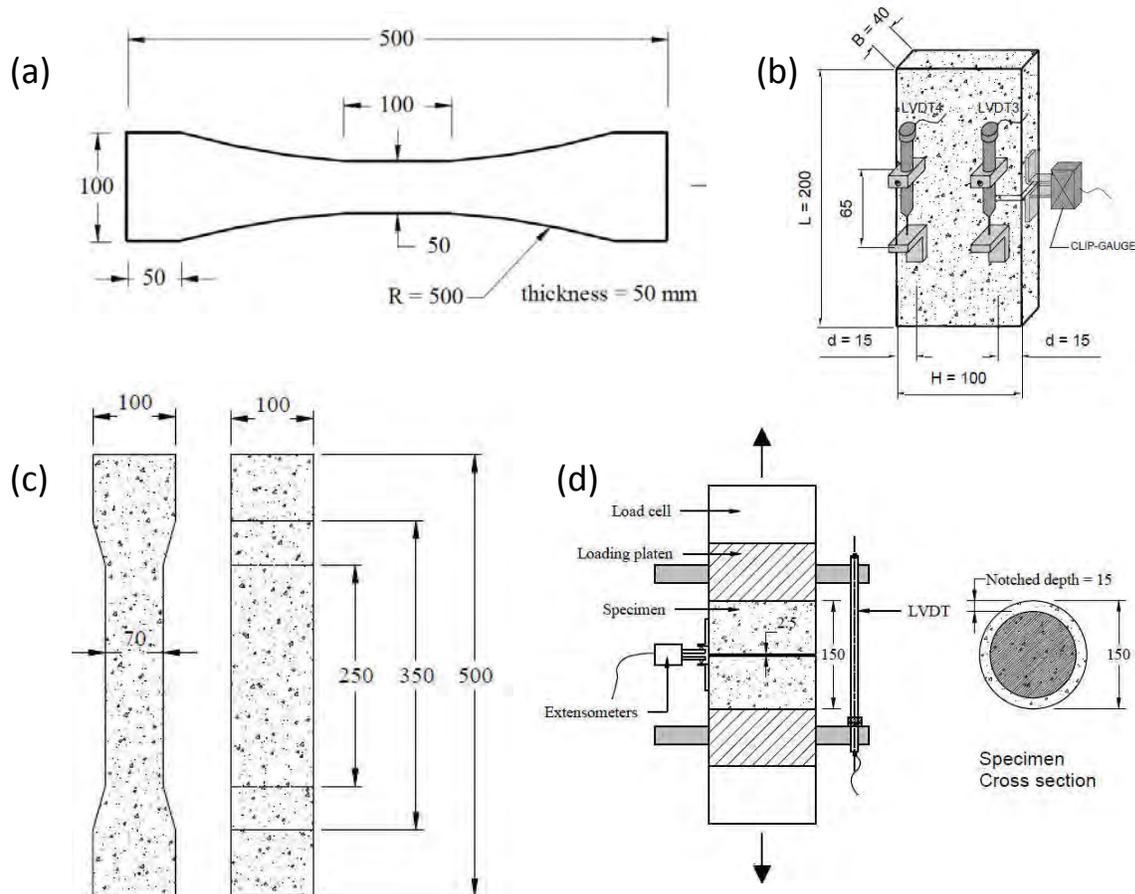
Existen diferentes investigaciones en las que se han realizado ensayos usando diversas formas de probetas para la determinación experimental del comportamiento a la tracción, tanto para el concreto simple como para el SFRC (Behloul, 1995) (Lim, et al., 1987) (Soe , 2010); sin embargo en la mayoría de los casos la información reportada no contiene algunos de los parámetros necesarios para la aplicación del modelo desarrollado en esta tesis, como lo son la resistencia a la tracción de concreto simple, la curva de arrancamiento de las fibras correspondientes a la calidad de la matriz usada en las pruebas de tracción, entre otros. Por esta razón se decidió realizar ensayos experimentales a tracción en especímenes prismáticos usando concretos y fibras con las mismas características de los empleados en los ensayos de arrancamiento.

Para la selección de la forma y tamaño del espécimen se consideraron diferentes alternativas propuestas por diferentes autores (figura 6-1); sin embargo, debido a que estas presentan restricciones de tamaño, forma e incluso de los mecanismos de fijación, se diseñó una configuración geométrica diferente pero basada en las existentes.

**Figura 6-1:** Ejemplo de probetas para ensayos de tracción de SFRC.

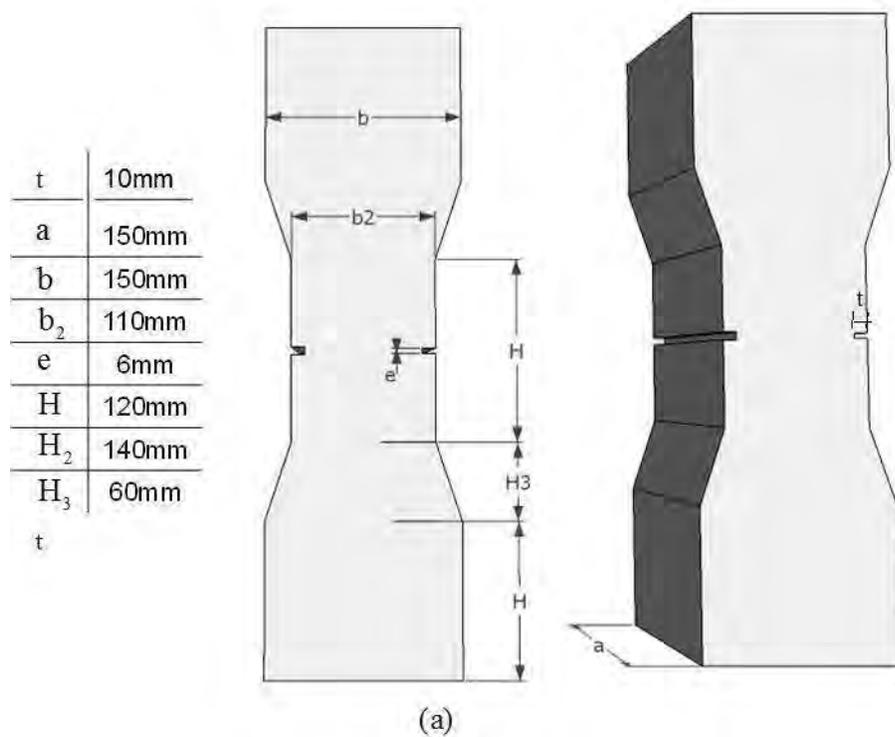
(Dimensiones en mm)

Fuente: (a) (Behloul, 1995) (b) (Sorelli, et al., 2005), (c) (Lim, et al., 1987), (d) (Barragán, et al., 2003)



Las dimensiones de las probetas fueron definidas teniendo en cuenta el tamaño de las fibras cortas de acero, permitiendo que estas tuvieran la posibilidad de acomodarse libremente en la probeta para una mejor distribución en la matriz de concreto. Adicionalmente, con el fin de inducir la fisura en la altura media de la probeta, se realizó una entalla a ambos lados de cada espécimen, con una profundidad de 10 mm, como se puede apreciar en la figura 6-2.

**Figura 6-2:** Probetas prismáticas  
(a) Esquema (b) Fotografía



### 6.1.1 Materiales

En esta sección se presentan los resultados de la caracterización de los materiales empleados en los ensayos experimentales de las probetas de concreto reforzado con fibras cortas de acero.

Se trabajó con un concreto con una relación a/mc igual a 0.4 y la mezcla se realizó para una densidad aproximada de 2400kg/m<sup>3</sup>. La dosificación de la mezcla se presenta en la tabla 6-1.

**Tabla 6-1:** Dosificación de la mezcla de concreto – Ensayos Experimentales

Dosificación	
Cemento <sup>1</sup>	600kg/m <sup>3</sup>
Agregado	1800kg/m <sup>3</sup>
Agua	240kg/m <sup>3</sup>
Fluidificante <sup>2</sup>	3kg/m <sup>3</sup>

<sup>1</sup>Cemento Portland Tipo I

<sup>2</sup>Sikafluid

Se tomaron probetas cilíndricas de la mezcla de concreto de acuerdo a lo establecido en la norma técnica colombiana NTC 454, las cuales se curaron sumergidas en agua y fueron falladas a los 28 días obteniendo una resistencia promedio a la compresión de 22MPa. Adicionalmente, se realizaron ensayos de tracción indirecta, acorde a lo estipulado en la norma NTC 722 y ensayos de tracción directa según el procedimiento descrito en la siguiente sección, con lo que se obtuvo una resistencia promedio a la tracción de 1.72MPa

**Figura 6-3:** Fibras cortas de acero Dramix ® RL 45/50 BN



A la matriz de concreto se le adicionaron fibras cortas de acero Dramix ® RL 45/50 BN (figura 6-3), que cuentan con una resistencia última a la tracción de 1115MPa y una relación de aspecto de 45, según la ficha técnica suministrada por el proveedor de la fibra. Ver tabla 6-2.

**Tabla 6-2:** Resistencia y dimensiones de las fibras cortas de acero Dramix ® RL 45/50 BN, suministradas por el proveedor



<b>Dramix ® RL 45/50 BN</b>	
Longitud (mm)	50.0
Diámetro (mm)	1.05
Resistencia a la tracción (MPa)	1115

Se llevaron a cabo ensayos de tracción directa en las fibras de acero con el fin de encontrar el modulo de elasticidad del material, el esfuerzo de fluencia, el esfuerzo último y el esfuerzo de falla. Las propiedades mecánicas obtenidas en los ensayos se presentan en la tabla 6-3.

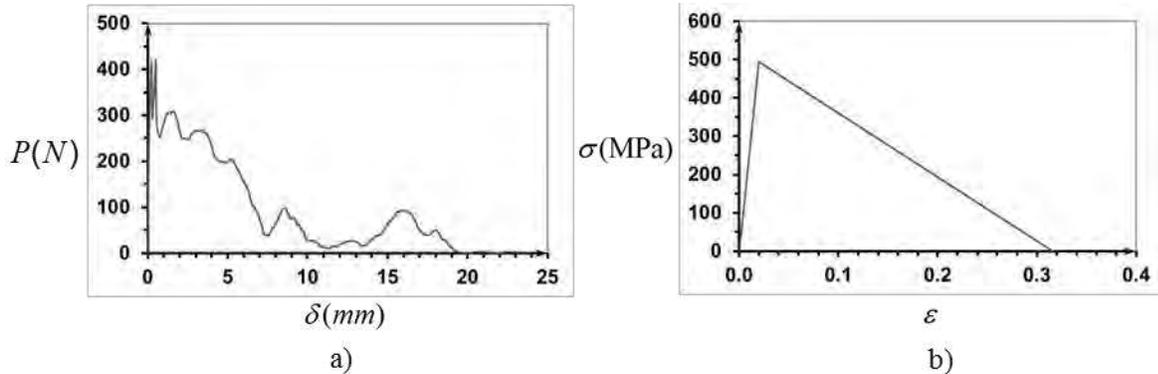
**Tabla 6-3:** Propiedades mecánicas medidas a tracción directa de las fibras cortas de acero Dramix ® RL 45/50 BN

<b>Propiedades Mecánicas a tracción directa</b>	
Módulo de Elasticidad	200,000 MPa
Esfuerzo de fluencia	520 Mpa
Esfuerzo último	1070 MPa
Esfuerzo de falla	785 MPa

Se realizaron ensayos de arrancamiento de las fibras cortas de acero, de acuerdo a lo expuesto en la sección 2.4.1, obteniendo una resistencia promedio de arrancamiento de 494MPa.

A partir de los resultados de los ensayos de arrancamiento se obtuvo el modelo constitutivo de la fibra deformable - deslizante, como se presentó en la sección 3.4. En la figura 6-4a, se puede apreciar el resultado experimental de uno de los ensayos de arrancamiento y en la figura 6-4b se muestra el modelo resultante para la misma.

**Figura 6-4:** Ejemplo de un modelo constitutivo de la fibra deformable – deslizante, para la fibra Dramix ® RL 45/50 BN



Con base en el modelo constitutivo de la fibra deformable - deslizante se determinó la pendiente elástica igual a 24,560 MPa y la pendiente de ablandamiento de 1564 MPa.

### 6.1.2 Descripción del ensayo de tracción

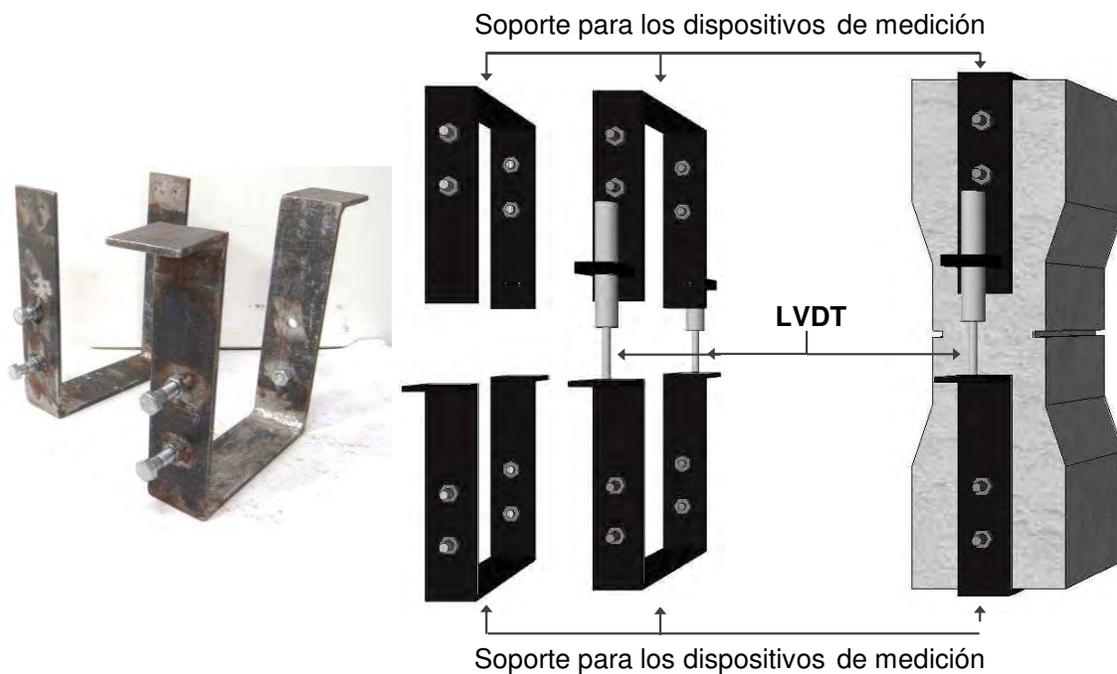
El plan de ensayos consistió en la elaboración de tres (3) mezclas de SFRC para las probetas prismáticas, en las que se mantuvo constante la resistencia del concreto y se varió la dosificación de fibra al trabajar con 0.5%, 1% y 1,5% de cuantía volumétrica. Se llevaron a cabo cinco (5) especímenes por cada mezcla, obteniendo un total de 15 probetas ensayadas a tracción directa. En la figura 6-5 se muestra la formaleta utilizada y el proceso de fundida de las probetas de SFRC.

El montaje para realizar el ensayo consistió en la implementación de piezas metálicas que servían de soporte para los dispositivos de medición, usados para tomar la lectura del desplazamiento relativo de los extremos de las piezas, con lo que se pudo obtener una aproximación de la abertura de la fisura (figura 6-6). Los dispositivos de medición empleados fueron dos LVDT (Linear Variable Differential Transformer) ubicados en la cara frontal y posterior de la probeta

**Figura 6-5:** Formaleta empleada y proceso de fundición de las probetas



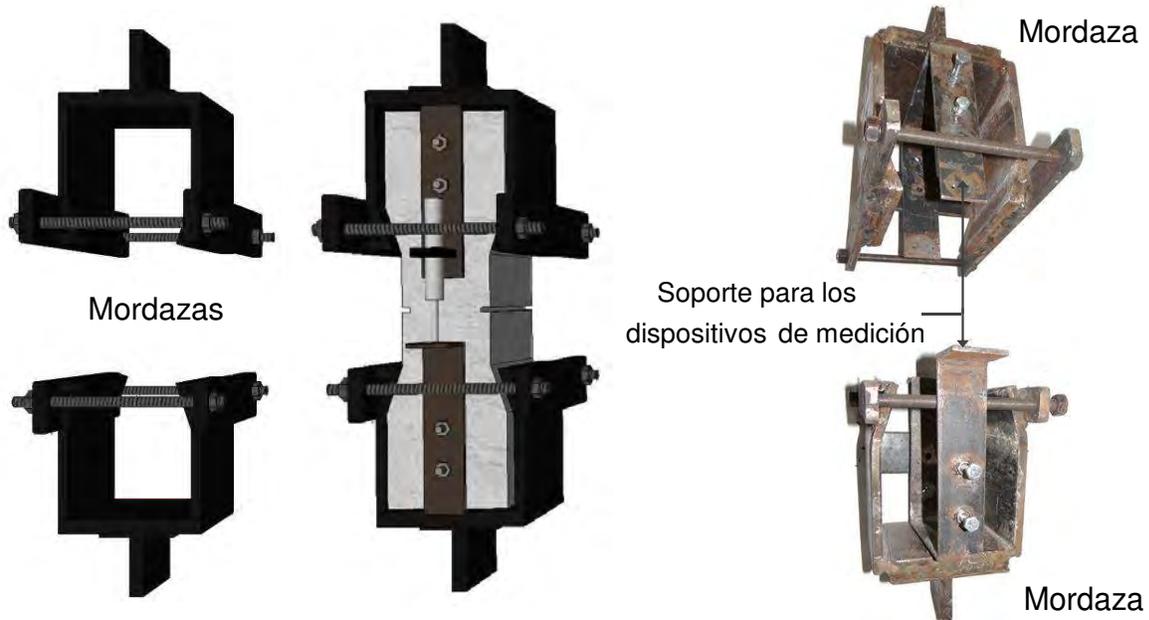
**Figura 6-6:** Esquema de los soportes para los dos LVDT.



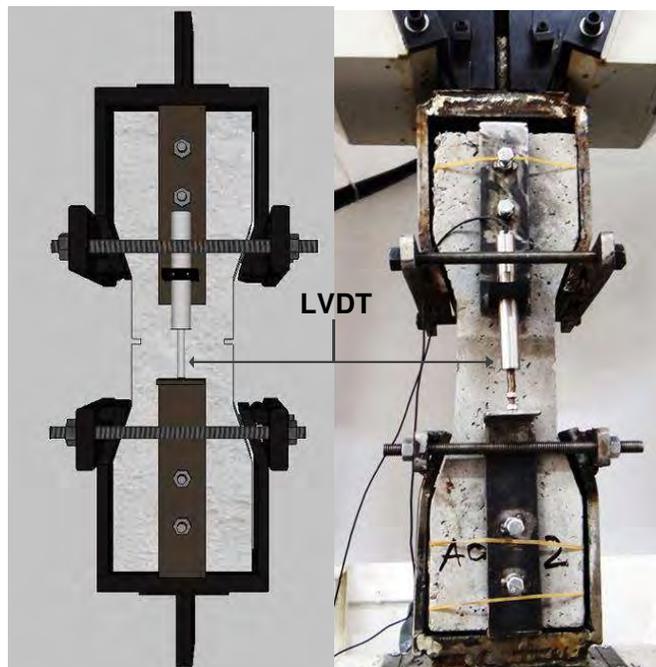
Para la aplicación de la fuerza de tracción a las probetas de SFRC se diseñaron y construyeron unas mordazas que van ubicadas en la parte inferior y superior de los

especímenes y se conectan directamente a la máquina de ensayo. Ver figura 6-7. El esquema de la configuración de ensayo, junto con los soportes para los dispositivos de medición y la instrumentación completa se pueden apreciar en la figura 6-8.

**Figura 6-7:** Esquema de las mordazas del montaje.



**Figura 6-8:** Esquema de configuración del ensayo e instrumentación

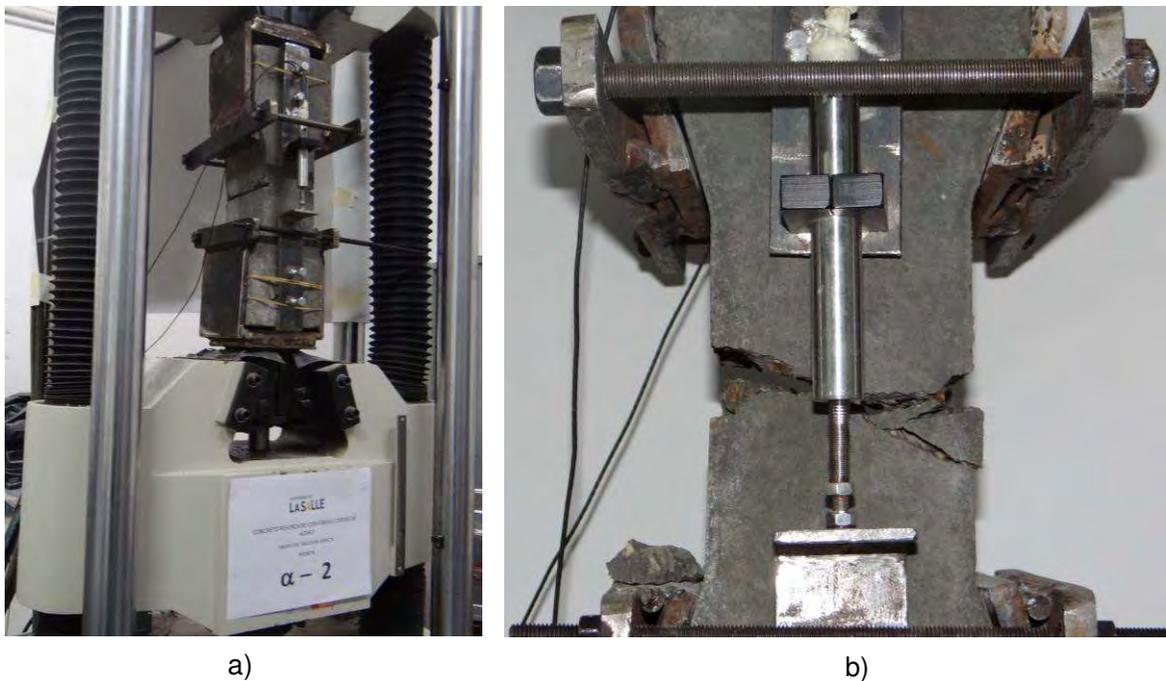


Los ensayos de tracción directa fueron realizados en una máquina universal que posee un sistema hidráulico servocontrolado y una celda de carga con una capacidad de 1000kN. En los ensayos se aplicó una velocidad de carga constante de 2.5mm/min.

Adicionalmente, se realizaron cinco (5) probetas testigo de concreto simple para encontrar la resistencia de la matriz a tracción directa y poder determinar el aporte generado a la resistencia a tracción por la adición de la fibras cortas de acero (figura 6-9).

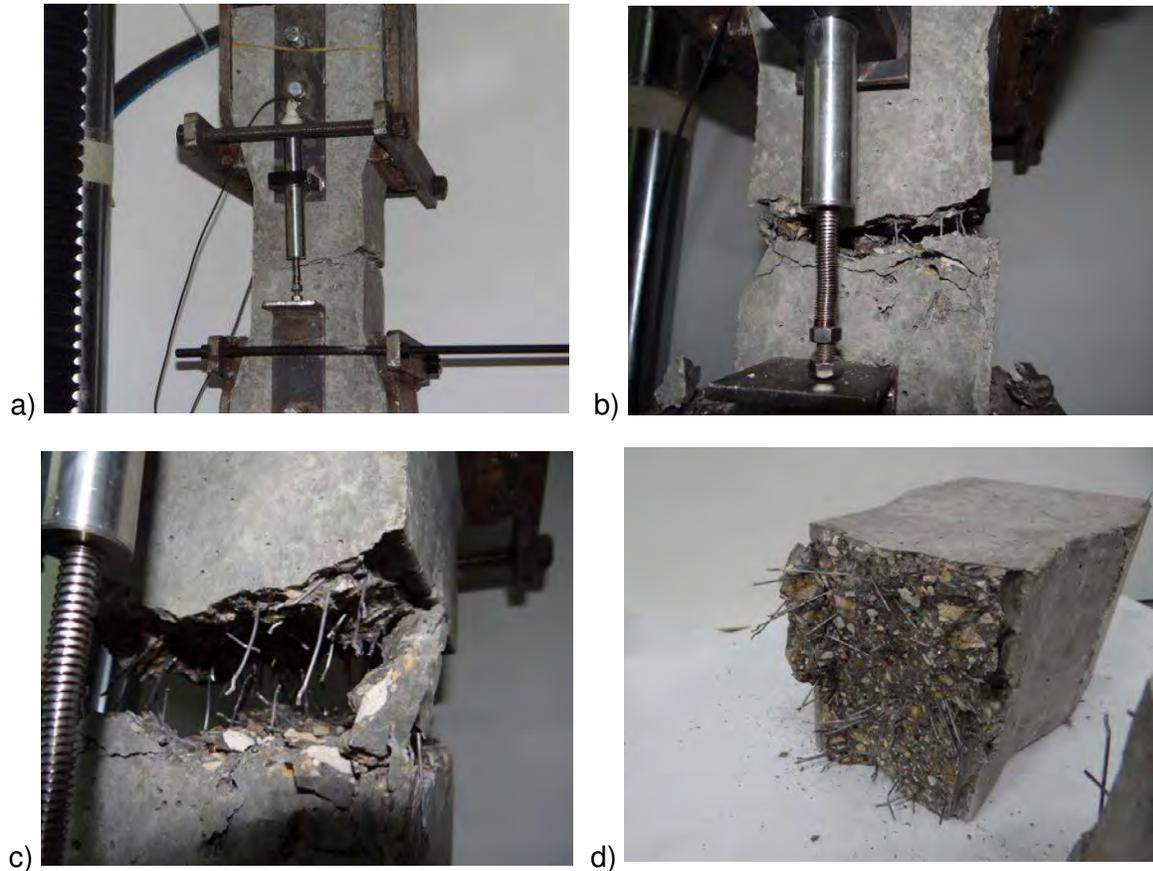
**Figura 6-9:** Ensayo de tracción directa en probeta de concreto simple.

a) Fotografía de la probeta a ensayar. b) Total pérdida de integridad del elemento.



A continuación se presenta una serie de fotografías correspondientes a la ejecución del ensayo de una probeta con una cuantía volumétrica de 1.5%, en las que se puede apreciar la evolución de la fisura hasta el arrancamiento total de las fibras y la total pérdida de la integridad del elemento. Ver Figura 6-10.

**Figura 6-10:** Proceso de fisuración en los ensayos de tracción. (a) Inicio de la fisuración, (b) las fibras transmiten los esfuerzos durante la separación de las caras de la fisura, (c) las fibras son completamente arrancadas por el incremento en la apertura de la fisura y (d) estado final de uno de las caras de la fisura.



### 6.1.3 Descripción del modelo numérico

Los parámetros de entrada para el desarrollo del modelo numérico se definieron con base en las características mecánicas de los materiales ensayados experimentalmente para establecer el proceso determinista a ejecutar. En resumen, se tienen en la tabla 6-4 los valores utilizados en la modelación, así como las variables elásticas empleadas.

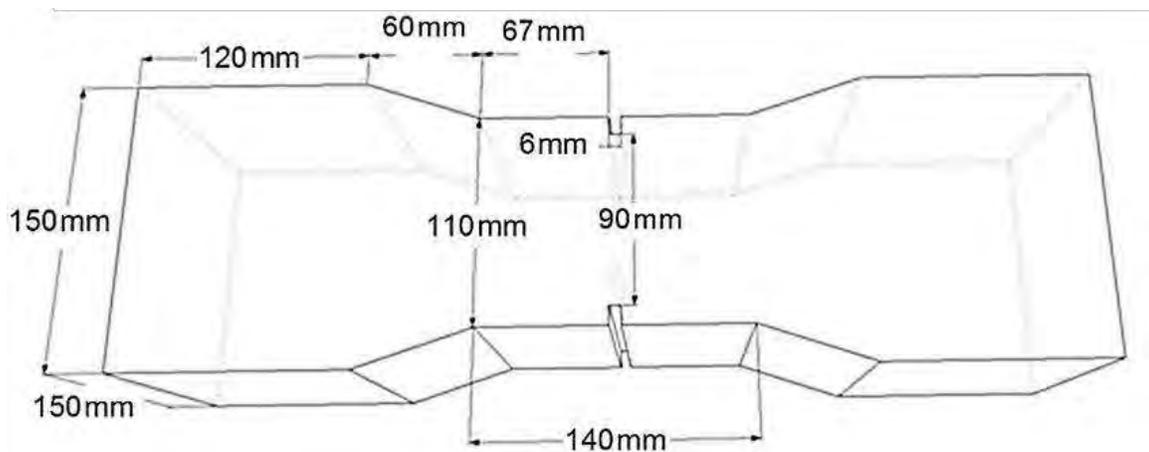
**Tabla 6-4:** Valores de las variables empleadas en el modelo numerico

<b>CONCRETO</b>	
Resistencia a la compresión	22 MPa
Resistencia a la tracción	1.72 MPa
Módulo de Elasticidad	18,000 MPa
Módulo de Poisson	0.2
Energía de Fractura	100 N/m

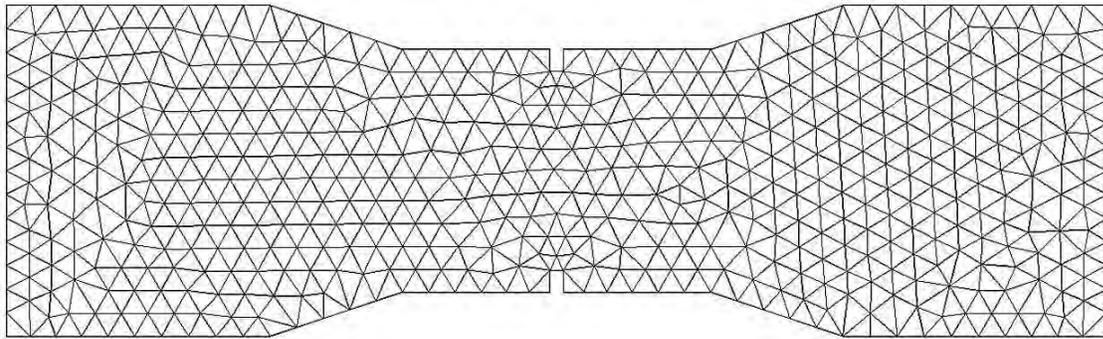
<b>FIBRAS CORTAS DE ACERO Dramix® RL 45/50 BN</b>	
Pendiente elástica del modelo constitutivo de la fibra deformable – deslizante	24,560 MPa
Pendiente de ablandamiento del modelo constitutivo de la fibra deformable – deslizante	1564 MPa.

Las dimensiones de la probeta que se adoptó en el modelo fueron fijadas con base en los ensayos experimentales, como se muestra en la figura 6-11.

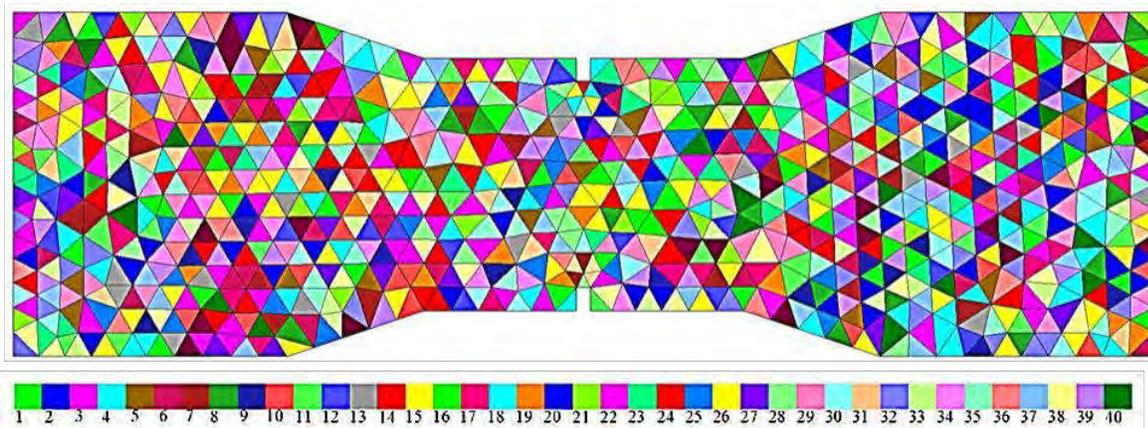
**Figura 6-11:** Dimensiones de la probeta usada en la modelación. Ensayo de tracción directa



La modelación fue llevada a cabo en un estado plano de esfuerzos, considerando un espesor de 150mm. Se definió una malla con el tamaño del elemento de 12mm, obteniendo un total de 1016 elementos y 568 nodos (figura 6-12).

**Figura 6-12:** Malla usada en la modelación del ensayo de tracción

En la figura 6-13 se puede apreciar la distribución de materiales realizada por el programa, al cual se le asignó un coeficiente de isotropía de 0.3.

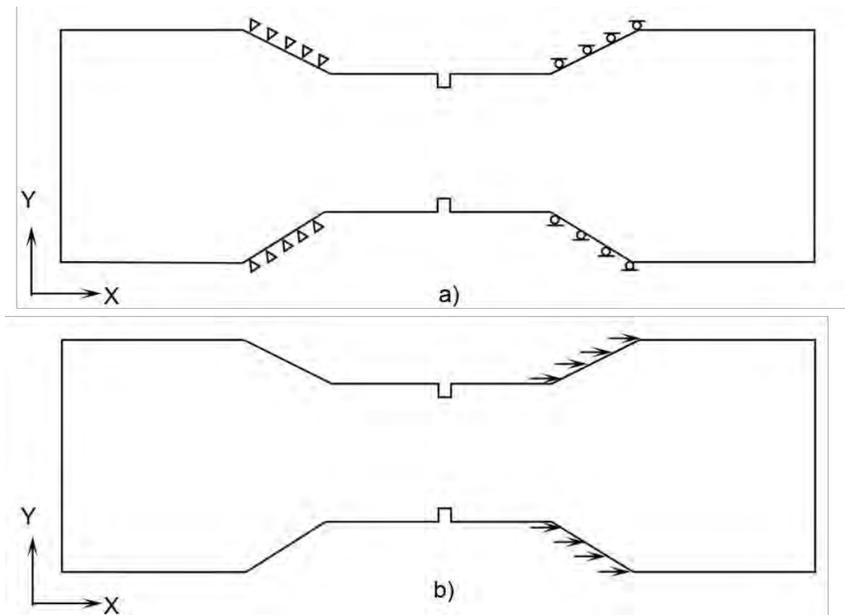
**Figura 6-13:** Ejemplo de asignación de materiales en un evento para el ensayo de tracción

Adicionalmente, se modelaron cien (100) eventos para cada una de las cuantías volumétricas empleadas en la mezcla de SFRC de los ensayos experimentales, es decir 0.5%, 1%, 1.5%.

Para simular la aplicación de carga a lo largo del ensayo de tracción directa en las probetas de SFRC, en el proceso de modelación se establecieron condiciones de frontera al restringir el desplazamiento a lo largo del eje X y del eje Y en la zona de transición de la parte inferior del espécimen y a su vez, restringir el desplazamiento a lo largo del eje Y en la zona de transición en la parte superior de la probeta, tal como se aprecia en la figura 6-14a. Ahora bien, en la parte superior de la probeta se le impuso un desplazamiento

unitario paralelo a la dirección de aplicación de la carga del ensayo experimental (figura 6-14b).

**Figura 6-14:** Condiciones de frontera y aplicación del desplazamiento unitario



### 6.1.4 Resultados

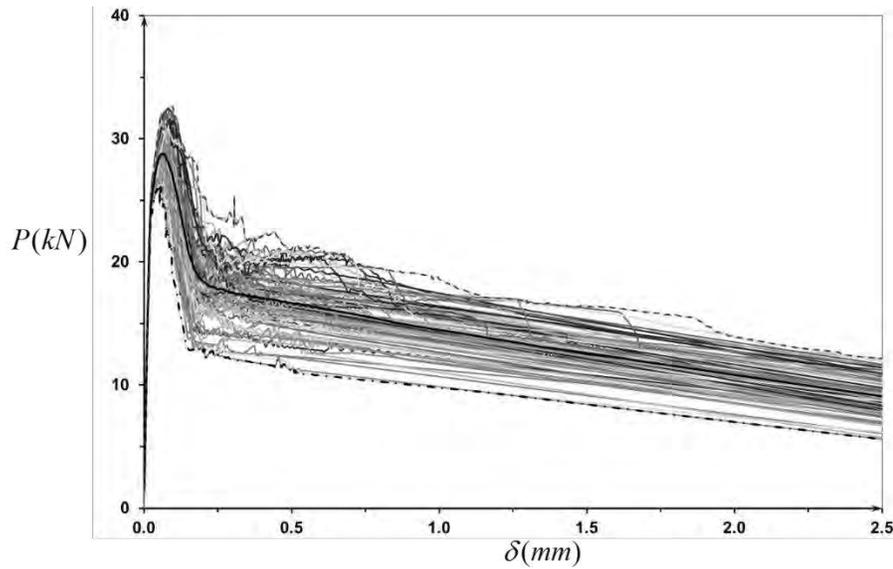
Los resultados obtenidos de carga contra desplazamiento se graficaron y con base en esto se calculó la curva promedio junto con su envolvente.

Posteriormente se compararon los resultados numéricos con los experimentales y se hizo un análisis de la evolución del daño. Luego de aplicar los procedimientos descritos en el capítulo 4 se obtuvo la profundidad de banda modificada, la mediana y los intervalos de confianza para cada una de las tres cuantías promedio de fibras.

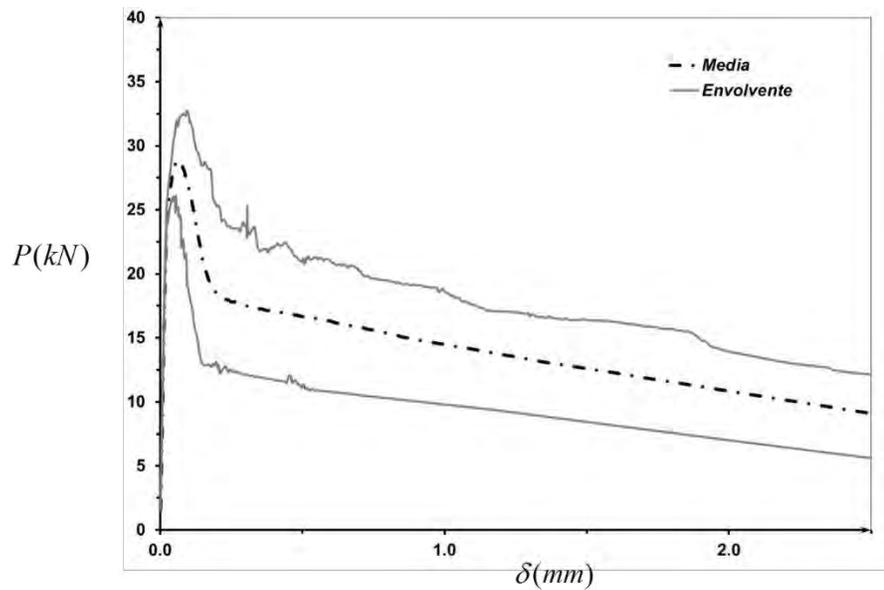
- **Cuantía volumétrica de 0.5%**

A continuación se presentan los resultados para la cuantía volumétrica de 0.5%. Ver figura 6-15, figura 6-16, figura 6-17, figura 6-18.

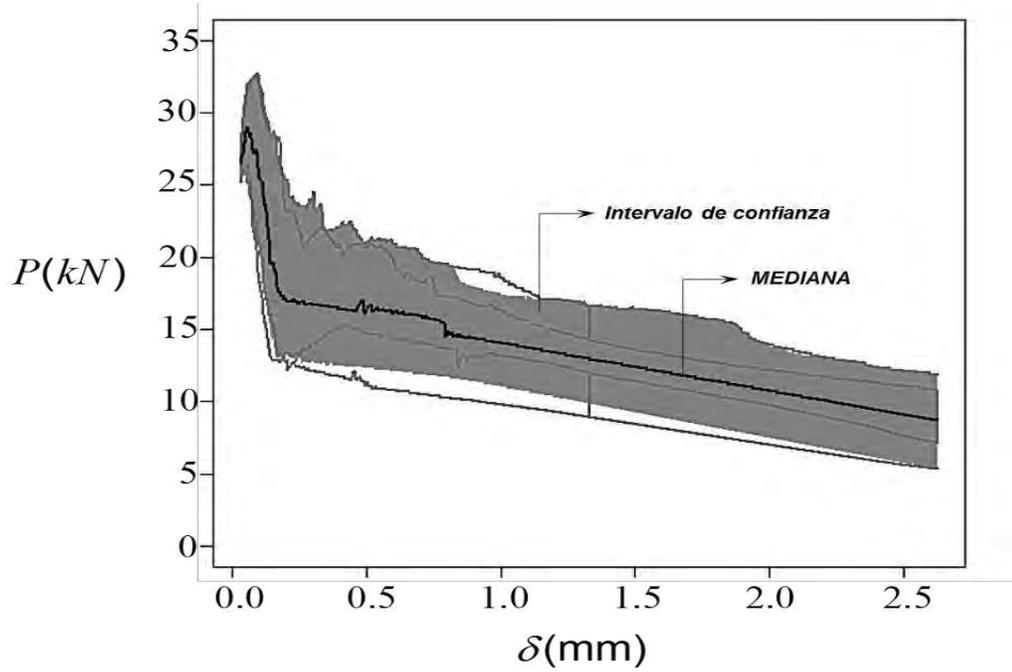
**Figura 6-15:** Ensayo de tracción directa, muestra de cien (100) simulaciones numéricas  
Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 0.5%



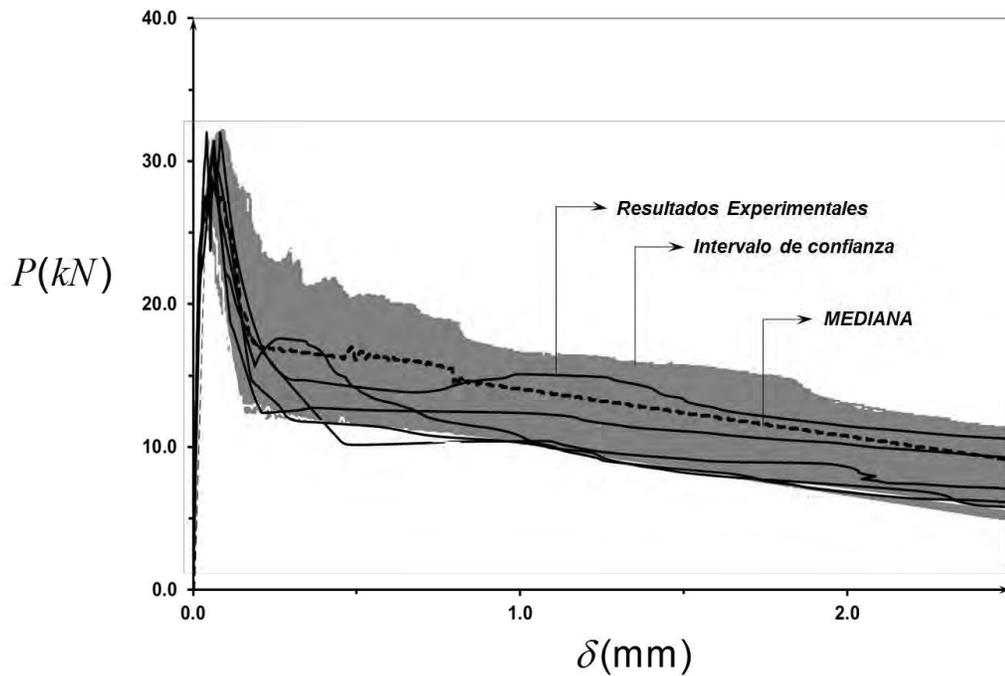
**Figura 6-16:** Ensayo de tracción directa, Media y envolvente.  
Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 0.5%



**Figura 6-17:** Ensayo de tracción directa, Mediana, profundidad de banda e intervalos de confianza. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 0.5%



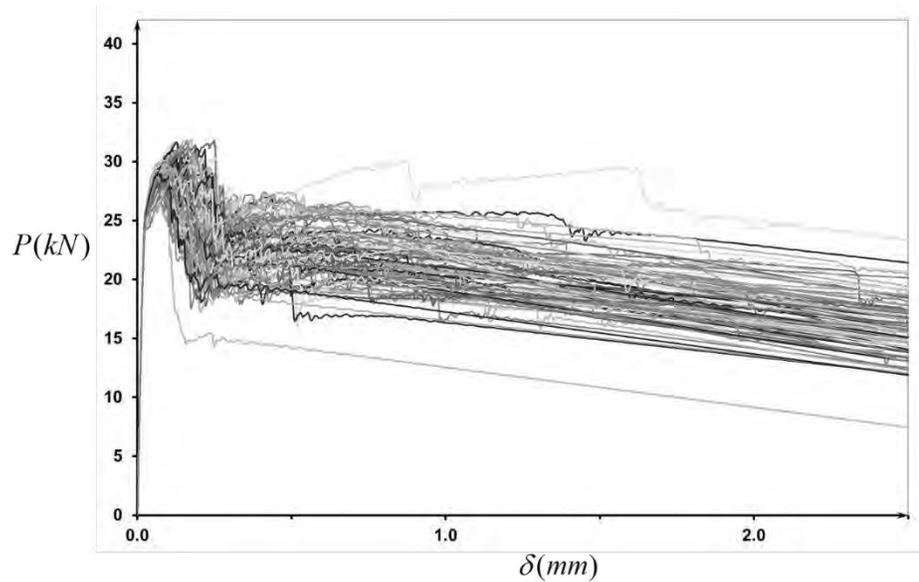
**Figura 6-18:** Ensayo de tracción directa, comparación de resultados experimentales y numéricos. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 0.5%



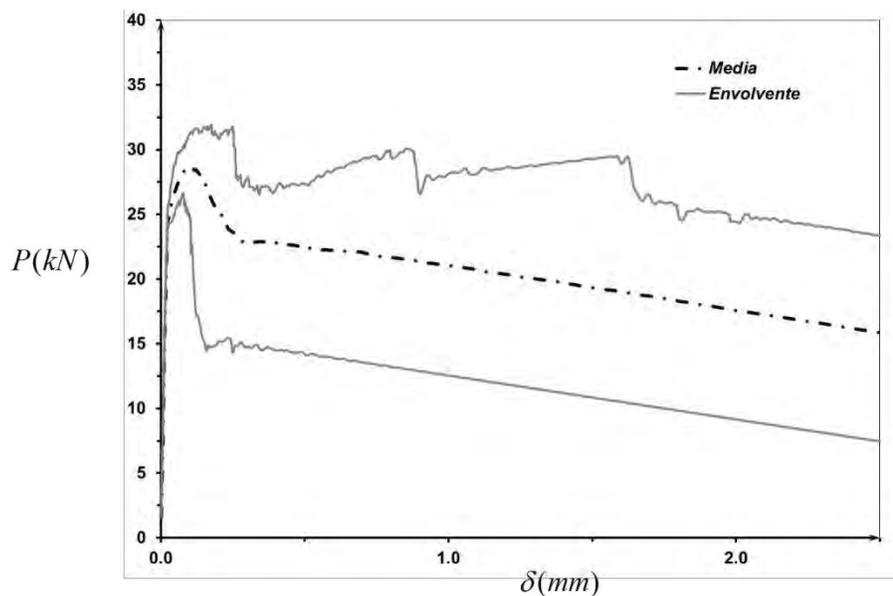
- **Cuantía volumétrica de 1%**

A continuación se presentan los resultados para la cuantía volumétrica de 1%. Ver figura 6-19, figura 6-21 y figura 6-22.

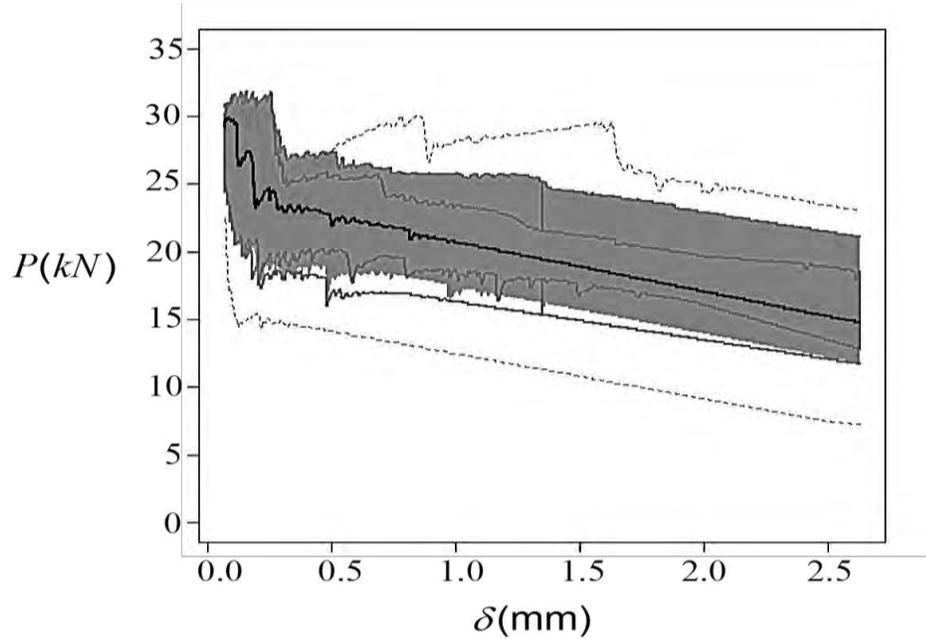
**Figura 6-19:** Ensayo de tracción directa, muestra de cien (100) simulaciones numéricas  
Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 1%



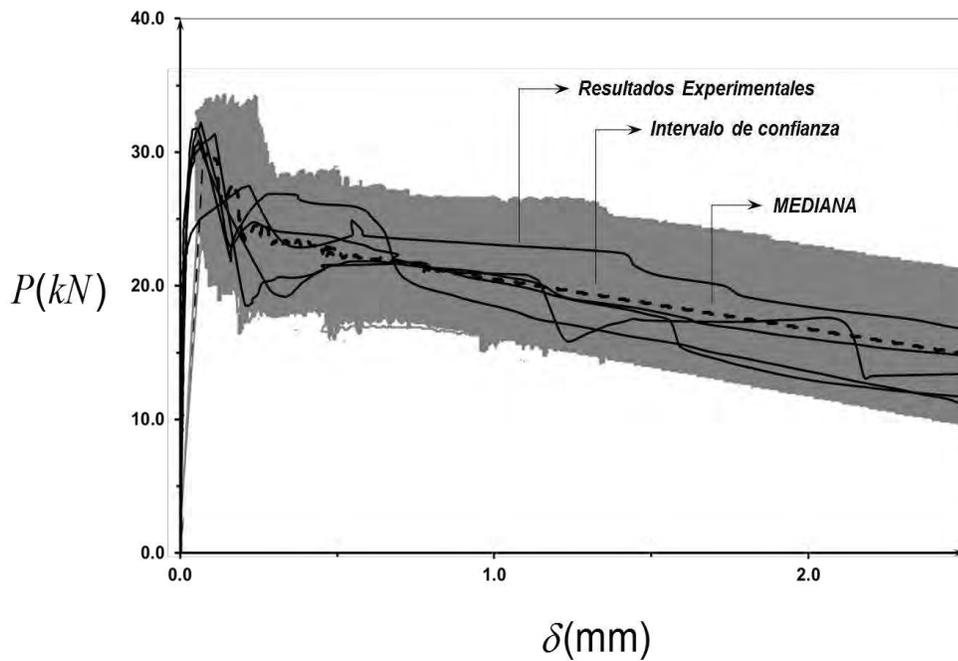
**Figura 6-20:** Ensayo de tracción directa, Media y envolvente.  
Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 1%



**Figura 6-21:** Ensayo de tracción directa, Mediana, profundidad de banda e intervalos de confianza. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 1%



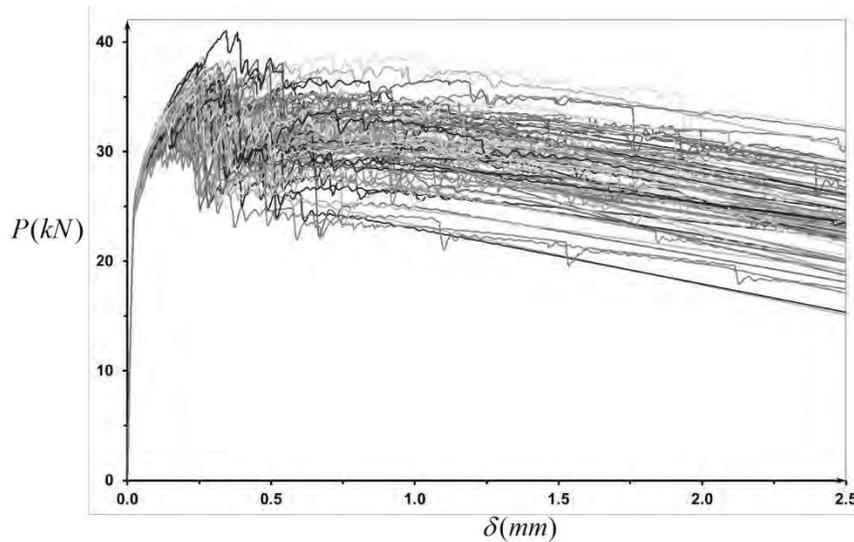
**Figura 6-22:** Ensayo de tracción directa, comparación de resultados experimentales y numéricos. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 1%



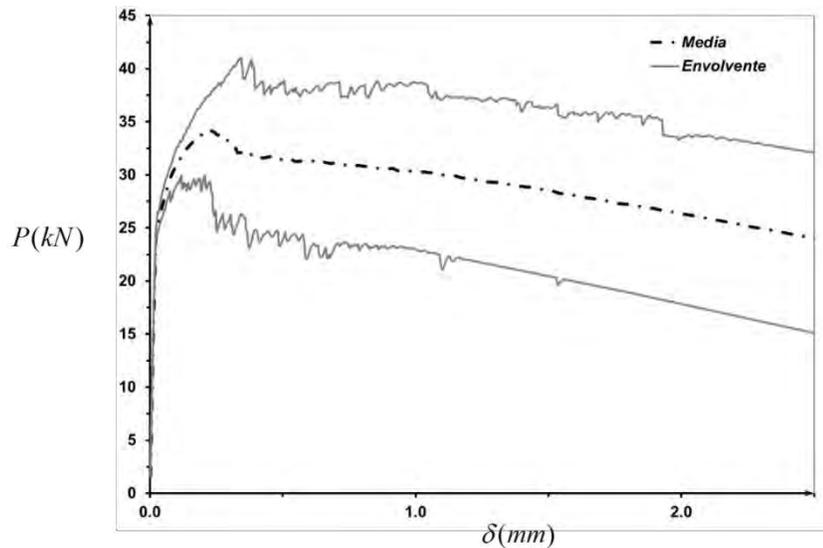
- **Cuantía volumétrica de 1.5%**

A continuación se presentan los resultados para la cuantía volumétrica de 1.5%.  
Ver figura 6-23, figura 6-24, figura 6-25 y figura 6-26.

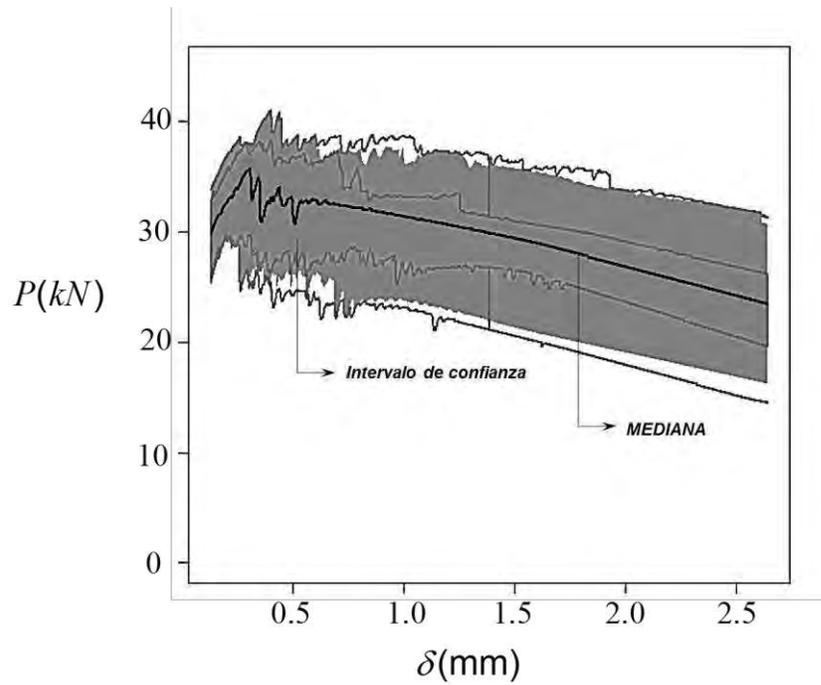
**Figura 6-23:** Ensayo de tracción directa, muestra de cien (100) simulaciones numéricas  
Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 1.5%



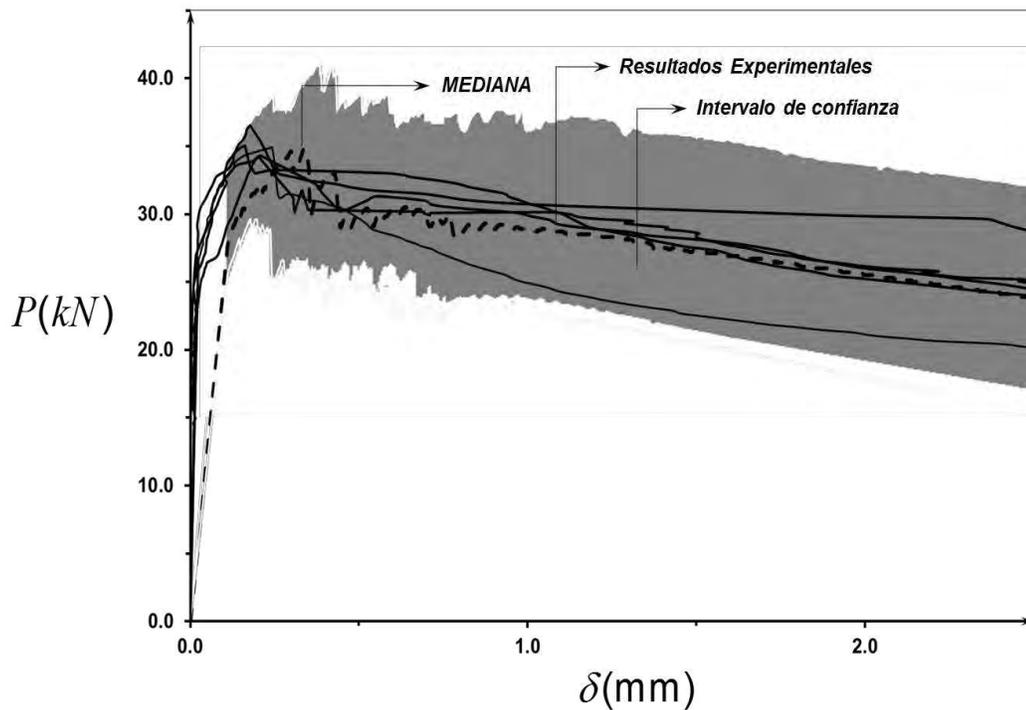
**Figura 6-24:** Ensayo de tracción directa, Media y envolvente.  
Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 1.5%



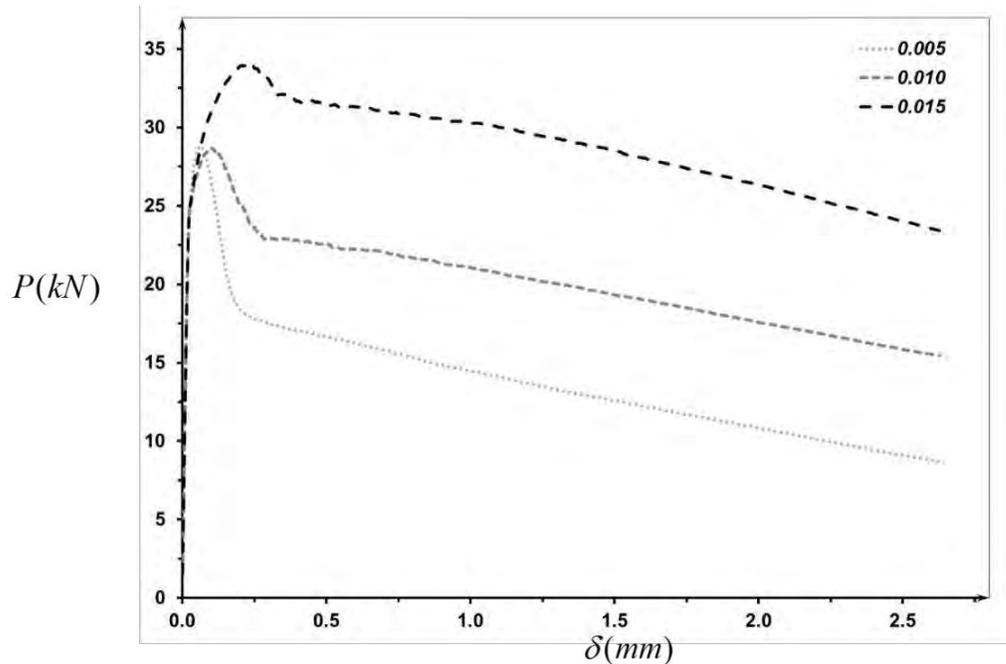
**Figura 6-25:** Ensayo de tracción directa, Mediana, profundidad de banda e intervalos de confianza. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 1.5%



**Figura 6-26:** Ensayo de tracción directa, comparación de resultados experimentales y numéricos. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 1.5%



**Figura 6-27:** Ensayo de tracción directa, Comparación de las medias para las tres cuantías volúmetricas. Curvas carga contra desplazamiento.



- **Evolución del daño.**

En la figura 6-28 se presenta la curva de carga contra desplazamiento para uno de los eventos simulados con una cuantía volumétrica del 0.01 en la cual se han identificado cinco puntos de interés a, b, c y d para los cuales se graficó la evolución del daño y del desplazamiento en la figura 6.29. Finalmente en la figura 6-30 a la figura 6-32 se presenta una comparación entre la fisuración capturada con el modelo numérico y las fisuras obtenidas en un ensayo experimental.

**Figura 6-28:** Ensayo de tracción directa, Ejemplo de simulaciones numérica. Curvas carga contra desplazamiento.

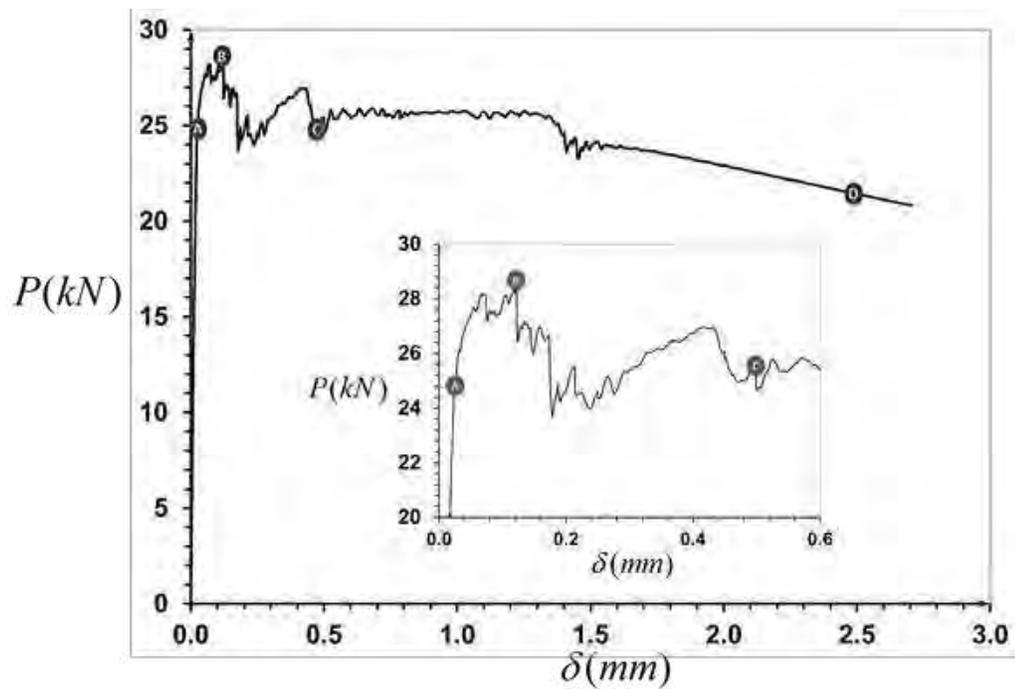
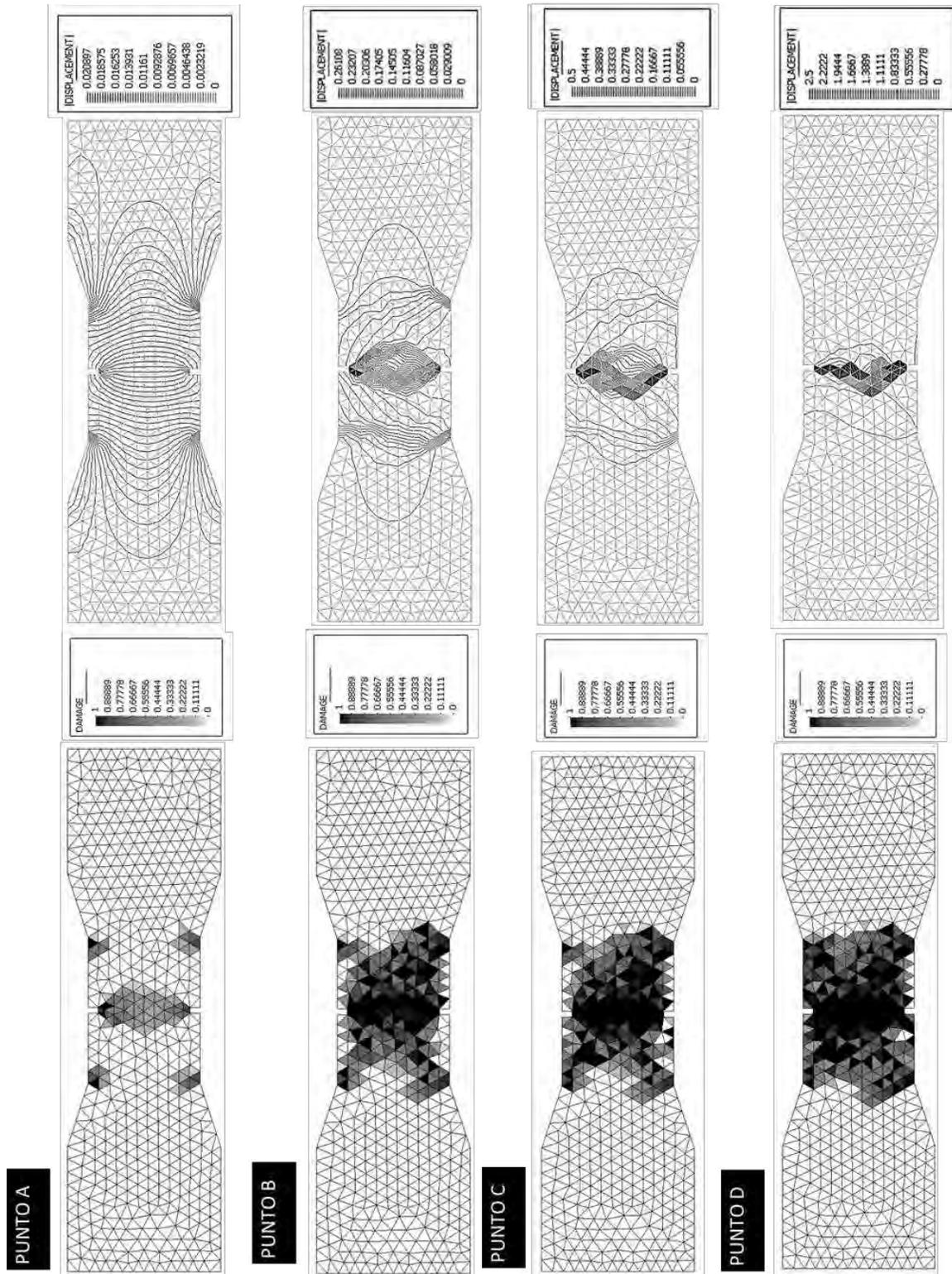
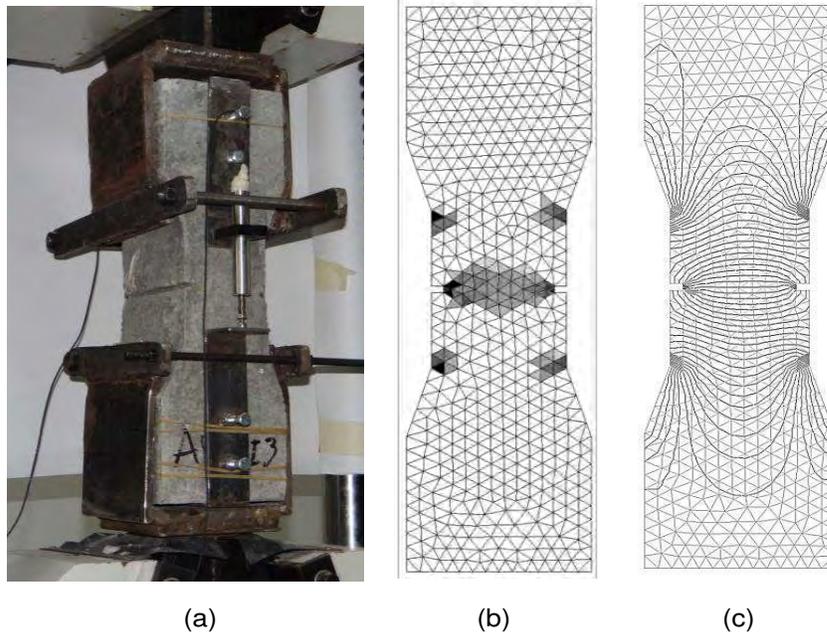


Figura 6-29: Ensayo de tracción directa, Evolución del daño en los puntos a, b, c y d. Simulación Numérica.



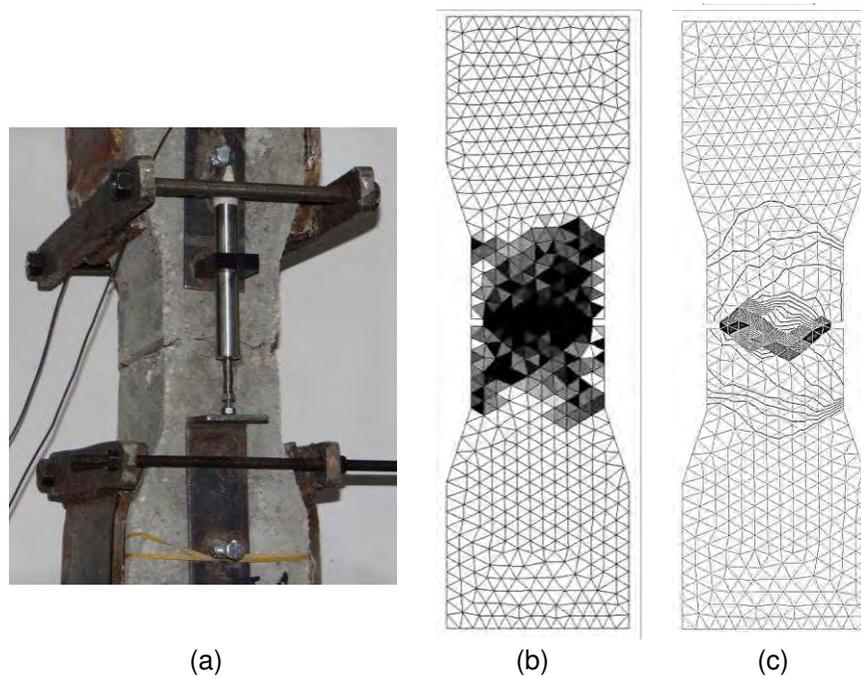
**Figura 6-30:** Ensayo de tracción directa, estado elástico.

(a) Fotografía (b) Daño (c) Desplazamiento



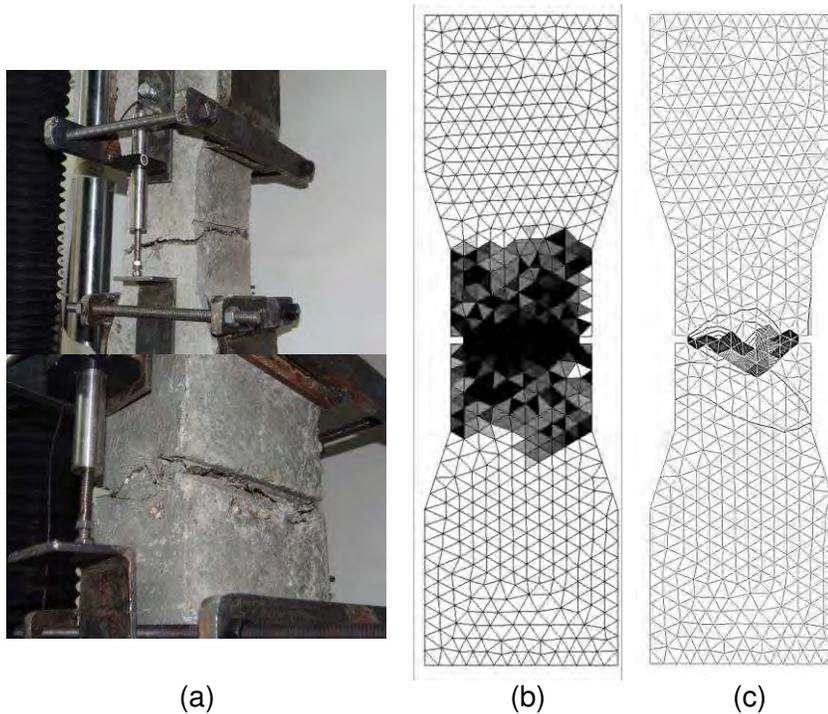
**Figura 6-31:** Ensayo de tracción directa, inicio de la fisuración

(a) Fotografía (b) Daño (c) Desplazamiento



**Figura 6-32:** Ensayo de tracción directa, Fisuración avanzada.

(a) Fotografía (b) Daño (c) Desplazamiento

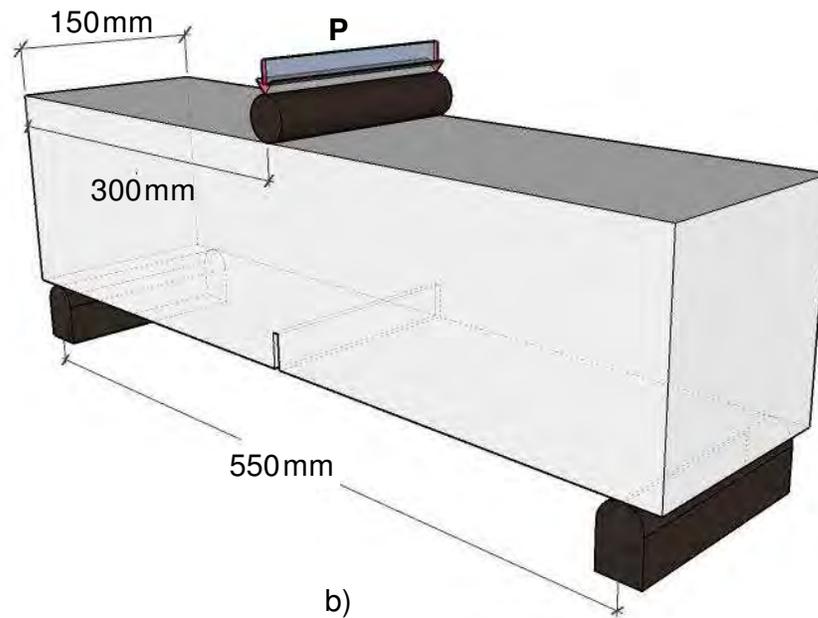
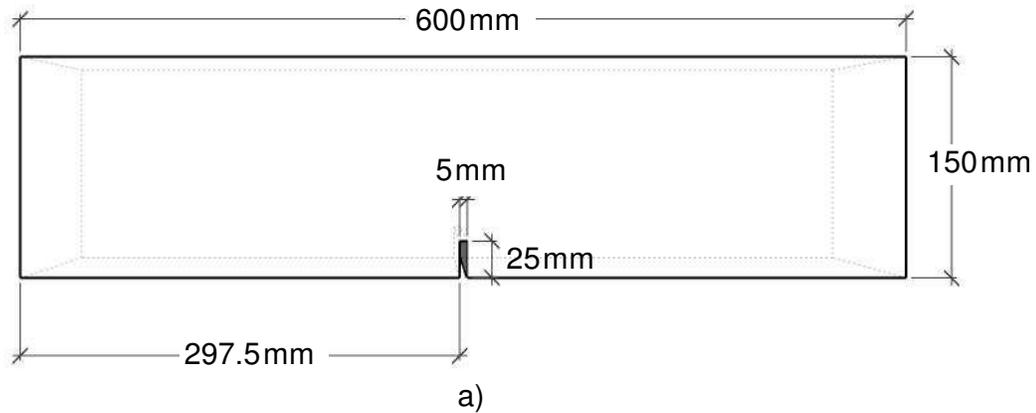


## 6.2 Ensayo de flexión de tres puntos, con entalla

Los ensayos de flexión en vigas prismáticas son quizás los más comunes en los reportes de investigaciones relacionadas con el comportamiento mecánico del SFRC; sin embargo, de la misma forma que sucede con los ensayos de tracción, existen limitantes en la información correspondiente a la caracterización del arrancamiento de las fibras y a las propiedades de la matriz. Por esta razón se realizaron ensayos de flexión con base la norma RILEM TC 162 (RILEM, 2002). Las dimensiones de las probetas y el esquema de aplicación de la carga se muestran en la figura 6-33a y figura 6-33b, respectivamente. Adicionalmente, con el fin de inducir la fractura en el centro de la luz de la probeta solicitada a flexión, se realizó una entalla en esta zona como se puede apreciar en la figura anterior.

**Figura 6-33:** Ensayo de Flexión.

a) Esquemas probetas prismáticas y b) Aplicación de la carga.



### 6.2.1 Materiales

En esta sección se presentan los resultados de la caracterización de los materiales empleados en los ensayos experimentales de las probetas de concreto reforzado con fibras cortas de acero. Se trabajó con un concreto con una relación  $a/mc$  igual a 0.58. La dosificación de la mezcla se presenta en la tabla 6-5.

**Tabla 6-5:** Dosificación de la mezcla de concreto, Ensayos Experimentales. Ensayo de flexión

Dosificación	
Cemento <sup>1</sup>	372kg/m <sup>3</sup>
Agregado	1664kg/m <sup>3</sup>
Agua	216kg/m <sup>3</sup>
Superplastificante <sup>2</sup>	2kg/m <sup>3</sup>

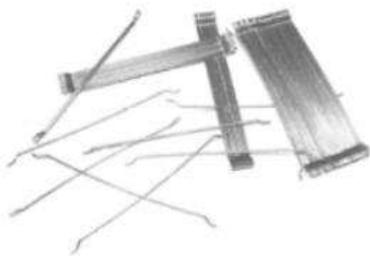
<sup>1</sup>Cemento Portland Tipo I marca Argos

<sup>2</sup>Plastol 6000 Toxement

Se tomaron probetas cilíndricas con un diámetro de 100mm y 200mm de altura para caracterizar la mezcla de concreto, de acuerdo a lo establecido en la norma técnica colombiana NTC 454 y fueron falladas a los 28 días obteniendo una resistencia promedio a la compresión de 25.4MPa. Adicionalmente, se realizaron ensayos de tracción indirecta, acorde a lo estipulado en la NTC 722, con lo que se obtuvo una resistencia promedio de 1.87MPa

A la matriz de concreto se le adicionaron fibras cortas de acero Dramix RC 80/60 BN, que cuentan con una resistencia mínima a la tracción de 1050MPa y una relación de aspecto de 80, según la ficha técnica suministrada por el proveedor de la fibra. Ver tabla 6-6.

**Tabla 6-6:** Ficha técnica de las fibras cortas de acero. Ensayo de Flexión.



Fibras Cortas de Acero Dramix RC 80/60 BN	
Diámetro (d)	0.75 mm ± 0.03 mm
Longitud (L)	60 mm ± 0.03 mm
Relación de Aspecto (L/d)	80
Sección transversal	Circular
Referencia comercial	CHO 80/60
Clasificación NTC 5214	I
Resistencia mínima tensión	1050 MPa

Se llevaron a cabo ensayos de tracción directa en las fibras de acero con el fin de encontrar el modulo de elasticidad del material, el esfuerzo de fluencia, el esfuerzo último y el esfuerzo de falla. Las propiedades mecánicas se pueden observar en la tabla 6-7.

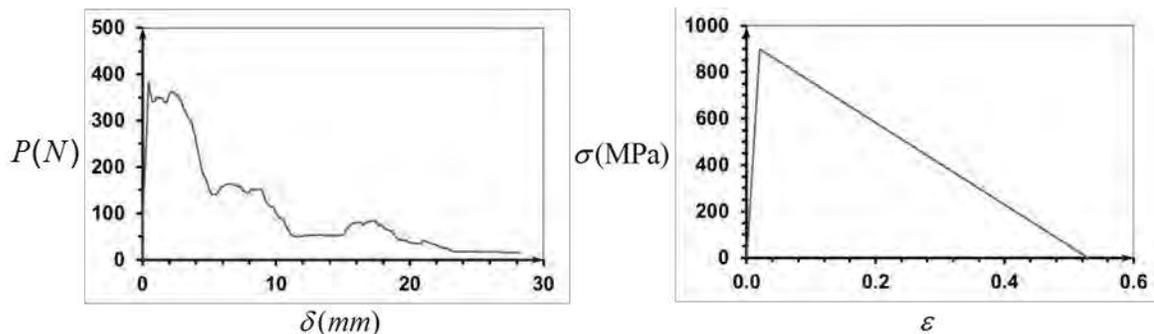
**Tabla 6-7:** Propiedades mecánicas medidas de las fibras cortas de acero usadas en las probetas a flexión.

<b>Propiedades Mecánicas a tracción directa</b>	
Módulo de Elasticidad	200,000 MPa
Esfuerzo de fluencia	1177 Mpa
Esfuerzo último	1826 MPa
Esfuerzo de falla	1600 MPa

Se realizaron ensayos de arrancamiento de las fibras cortas de acero, de acuerdo a lo expuesto en la sección 2.4.1, obteniendo una resistencia promedio de arrancamiento de 900MPa.

A partir de los resultados de los ensayos de arrancamiento se obtuvo el modelo constitutivo de la fibra deformable - deslizante, como se presentó en la sección 3.4. En la figura 6-34a, se puede apreciar el resultado experimental de uno de los ensayos de arrancamiento y en la figura 6-34b se muestra el modelo resultante para la misma.

**Figura 6-34:** Ejemplo de un modelo constitutivo de la fibra deformable – deslizante, para la fibra empleada en el ensayo de flexión



Con base en el modelo constitutivo de la fibra deformable - deslizante se determinó la pendiente elástica igual a 45,000 MPa y la pendiente de ablandamiento de 1710 MPa.

## 6.2.2 Descripción del ensayo de flexión

Todos los ensayos de arrancamiento fueron realizados en conjunto con el estudiante de Maestría en ingeniería civil con énfasis en ingeniería estructural, Sergio Mauricio Segura Arenas, como parte de su tesis (Segura & Lamus, 2014) desarrollado bajo la dirección del autor de esta Tesis.

El plan de ensayos consistió en la elaboración de dos (2) mezclas de SFRC, en las cuales se mantuvo constante la resistencia del concreto y se varió la dosificación de fibra al trabajar con 1% y 2% de cuantía volumétrica. Se llevaron a cabo tres (3) especímenes por cada mezcla, obteniendo un total de 6 probetas ensayadas a flexión. Adicionalmente, se realizaron tres (3) probetas testigo de concreto simple para encontrar la resistencia de la matriz a flexión. En la figura 6-35 se muestra la formaleta utilizada y el proceso de fundida de las probetas de SFRC para ser ensayadas a flexión. La entalla fue elaborada con un disco de corte luego del curado de la probeta.

**Figura 6-35:** Formaleta empleada y proceso de fundidad de las probetas. Ensayo de Flexión

Fuente: Archivo (Segura & Lamus, 2014)



Los ensayos de flexión, de acuerdo con la norma RILEM TC 162 (RILEM, 2002), se realizaron en la máquina universal Shimatzu UT -100 A con celda de carga de 50 Ton, ubicada en el laboratorio de materiales y estructuras de la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito. Fueron empleados dispositivos de medición LVDT (Linear

Variable Differential Transformer) de 1". Para los ensayos se trabajó con una velocidad constante de 0.5mm/min hasta la carga pico y de 1mm/min durante el ablandamiento. Ver figura 6-36.

**Figura 6-36:** Fotografía del ensayo a flexión.

Fuente: Archivo (Segura & Lamus, 2014)



En la figura 6-37 se puede apreciar el ensayo a flexión de la probeta de concreto simple. A continuación, en la figura 6-38 se presenta la ejecución del ensayo de una probeta, junto con la evolución de la fisura hasta que se logra el arrancamiento total de las fibras y la pérdida de la integridad del elemento.

**Figura 6-37:** Ensayo flexión en la probeta de concreto simple.

a) Fotografía de la probeta a ensayar. b) Total pérdida de integridad del elemento.

Fuente: Archivo (Segura & Lamus, 2014)



a)

b)

**figura 6-38:** Evolución de la fisura, arrancamiento total de las fibras y pérdida de integridad del elemento. Ensayo de flexión

Fuente: Archivo (Segura & Lamus, 2014)



a)



b)



c)



d)

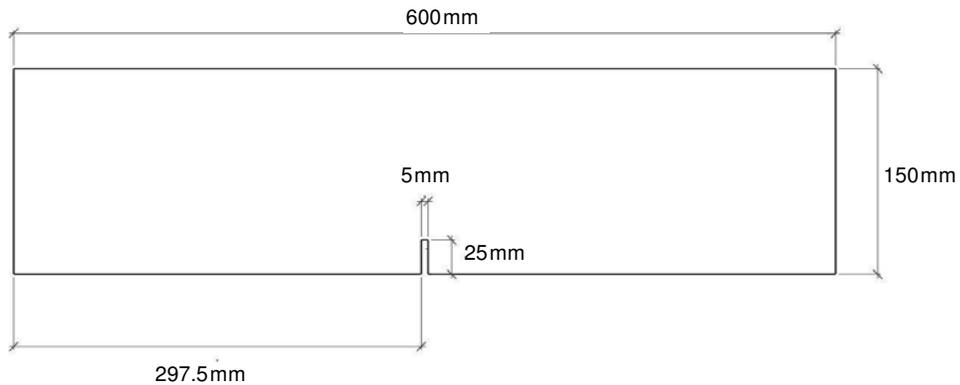


e)

### 6.2.3 Descripción del modelo numérico

Las dimensiones de la probeta que se adoptó en el modelo fueron fijadas con base en los ensayos experimentales, como se muestra en la figura 6-39.

**Figura 6-39:** Dimensiones de la probeta del modelo. Ensayo de Flexión



Los parámetros de entrada para el desarrollo del modelo numérico se definieron con base en las características mecánicas de los materiales ensayados experimentalmente para establecer el proceso determinista a ejecutar. En resumen, se tienen en la tabla 6-8 los valores utilizados que definen el modelo, así como las variables elásticas empleadas.

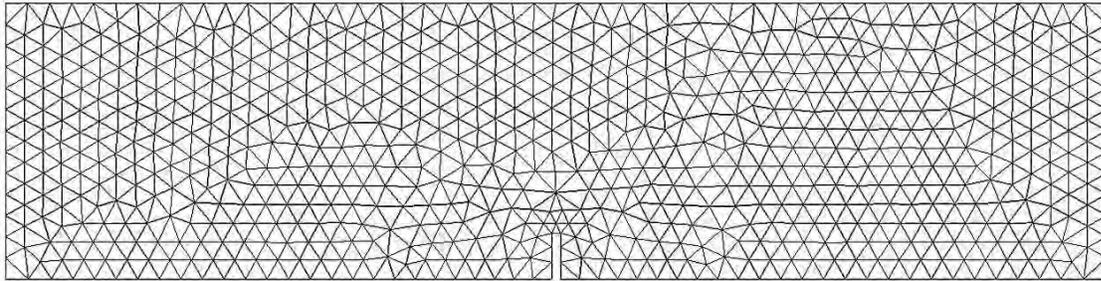
**Tabla 6-8:** Valores de las variables empleadas en el modelo numerico

<b>CONCRETO</b>	
Resistencia a la compresión	25 MPa
Resistencia a la tracción	1.87 MPa
Módulo de Elasticidad	19,500 MPa
Módulo de Poisson	0.2
Energía de Fractura	100 N/mm

<b>FIBRAS CORTAS DE ACERO Dramix® RL 65/50 BN</b>	
Pendiente elástica del modelo constitutivo de la fibra deformable – deslizante	45,000 MPa
Pendiente de ablandamiento del modelo constitutivo de la fibra deformable – deslizante	1710 MPa.

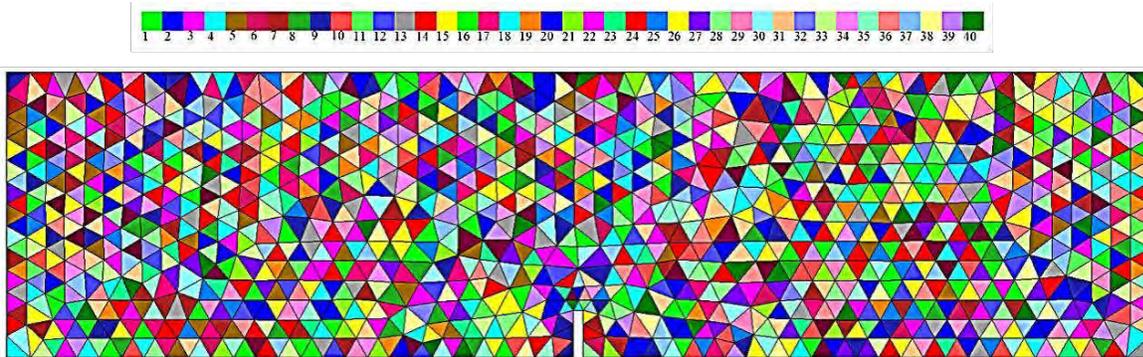
La modelación fue llevada a cabo en un estado plano de esfuerzos y fue especificado un espesor de 150mm. Se definió una malla con el tamaño del elemento de 12mm, obteniendo un total de 1425 elementos y 781 nodos (figura 6-40).

**Figura 6-40:** Malla usada en la simulación del ensayo de Flexión



En la figura 6-41 se puede apreciar la distribución de materiales realizada por el programa, al cual se le asignó un coeficiente de isotropía de 0.3.

**Figura 6-41:** Ejemplo de asignación de materiales en un evento para el ensayo de flexión.

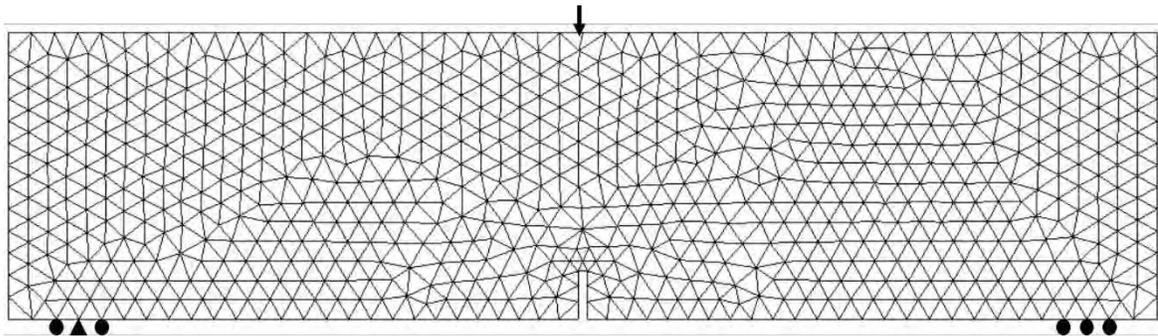


Adicionalmente, se modelaron 100 eventos para las cuantías volumétricas empleadas en la mezcla de SFRC de los ensayos experimentales, es decir 1% y 2%.

Para simular la aplicación de carga a lo largo del ensayo de flexión en las probetas de SFRC, en el proceso de modelación se establecieron condiciones de apoyo al restringir el desplazamiento a lo largo del eje Y en los extremos inferiores de la probeta, tal como se aprecia en la figura 6-42. Ahora bien, en la mitad de la longitud, en la parte superior de la

probeta se le impuso un desplazamiento unitario paralelo a la dirección de aplicación de la carga del ensayo experimental.

**Figura 6-42:** Condiciones de apoyo y aplicación del desplazamiento unitario. Ensayo de flexión



## 6.2.4 Resultados

Los resultados obtenidos de carga contra desplazamiento se graficaron y con base en esto se calculó la curva promedio junto con su envolvente.

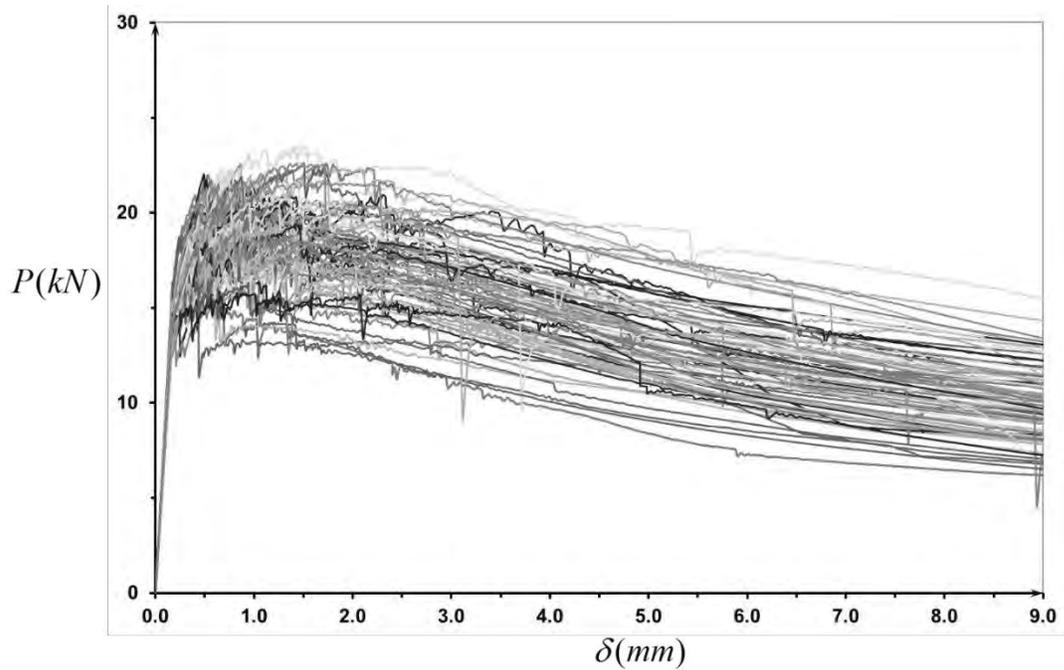
Posteriormente se compararon los resultados numéricos con los experimentales y se hizo un análisis de la evolución del daño. Adicionalmente, luego de aplicar los procedimientos descritos en el capítulo 4, se obtuvieron la mediana, los intervalos de confianza y la profundidad de banda para cada uno de los dos grupos de curvas.

También se tomó lectura de los desplazamientos en la fisura para comparar con los desplazamientos reales en esos puntos.

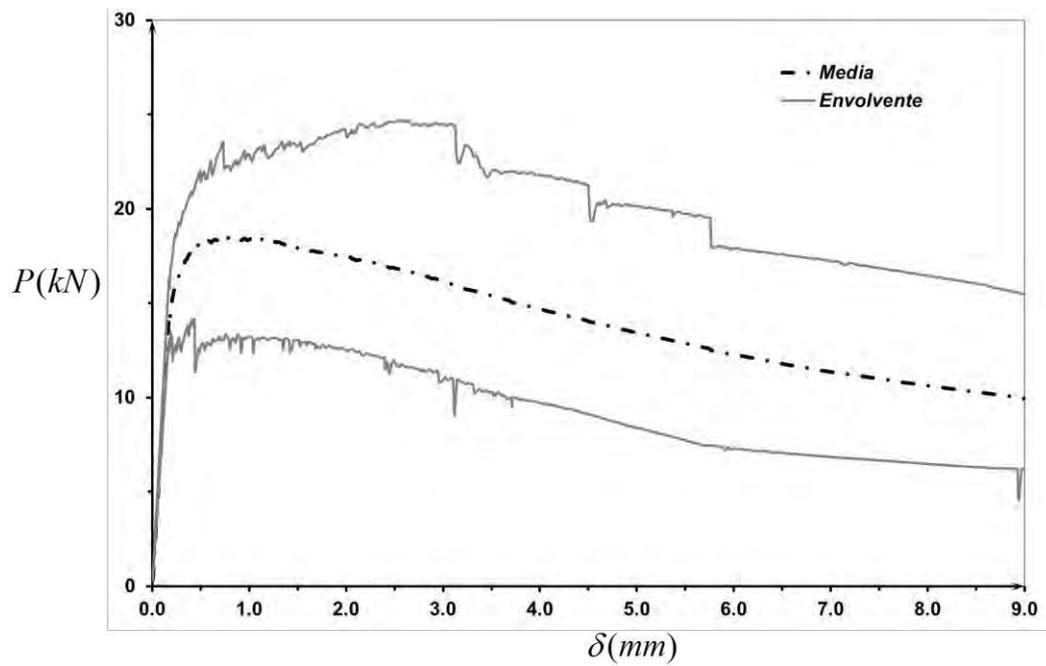
- **Cuantía volumétrica de 1%**

A continuación se presentan los resultados para la cuantía volumétrica de 1%. Ver figura 6-43, figura 6-44, figura 6-45 y figura 6-46.

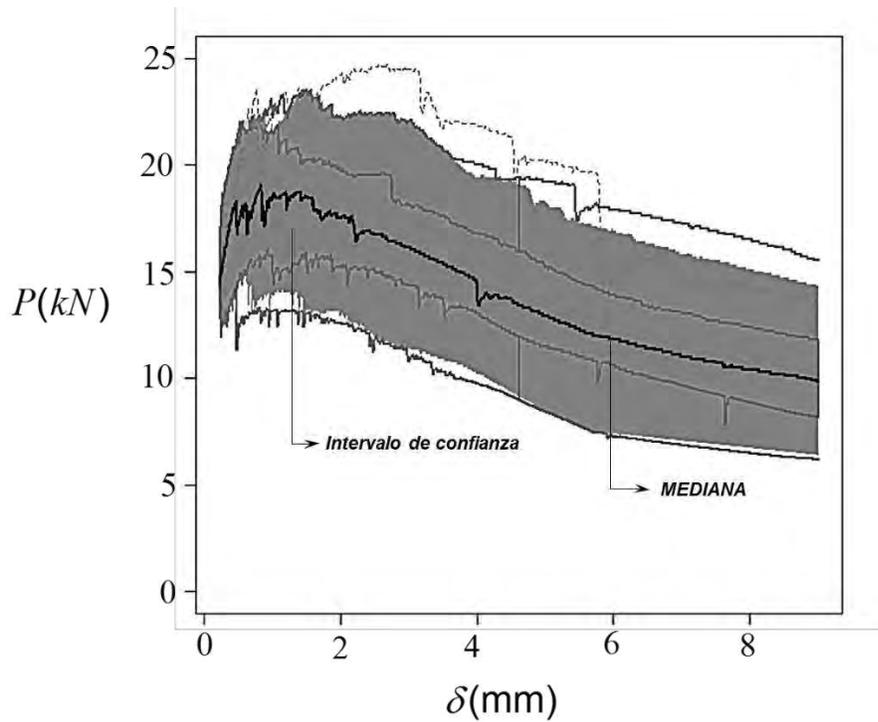
**Figura 6-43:** Ensayo de flexión, muestra de cien (100) simulaciones numéricas Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 1%



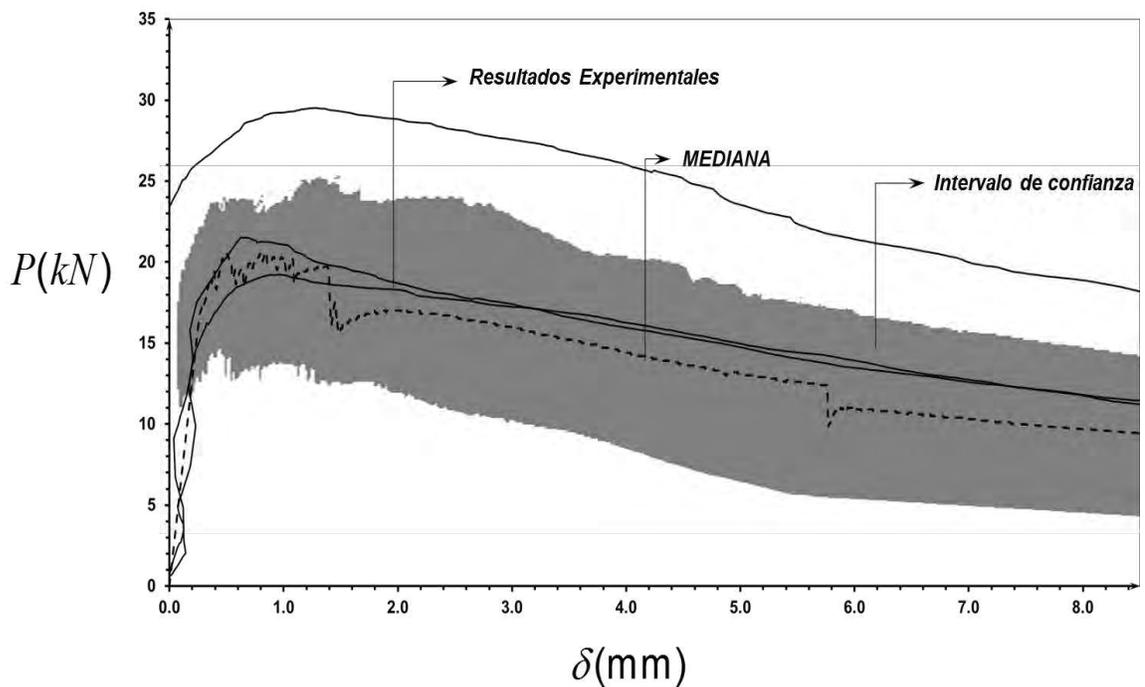
**Figura 6-44:** Ensayo de flexión, Media y envolvente.  
Curvas carga contra deflexión vertical, cuantía 1%



**Figura 6-45:** Ensayo de flexión Mediana, profundidad de banda e intervalos de confianza. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 1%



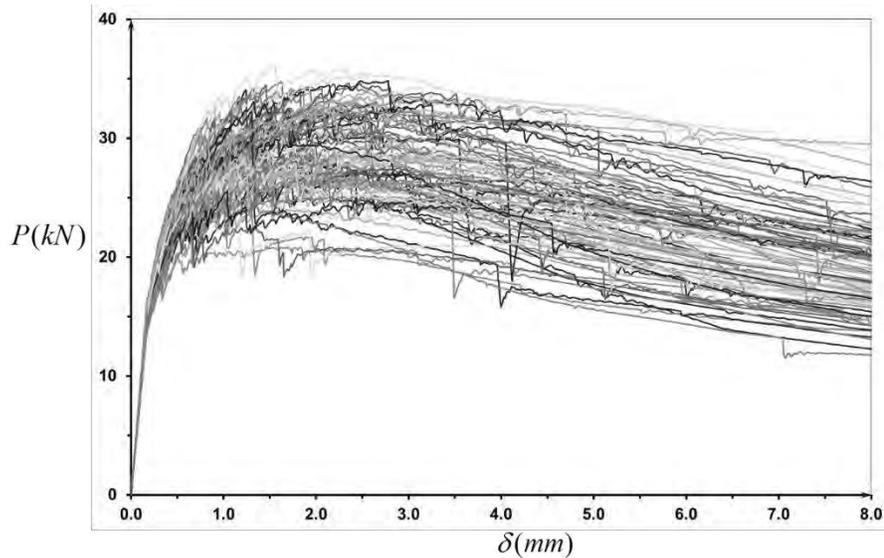
**Figura 6-46:** Ensayo de flexión, comparación de resultados experimentales y numéricos. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 1%



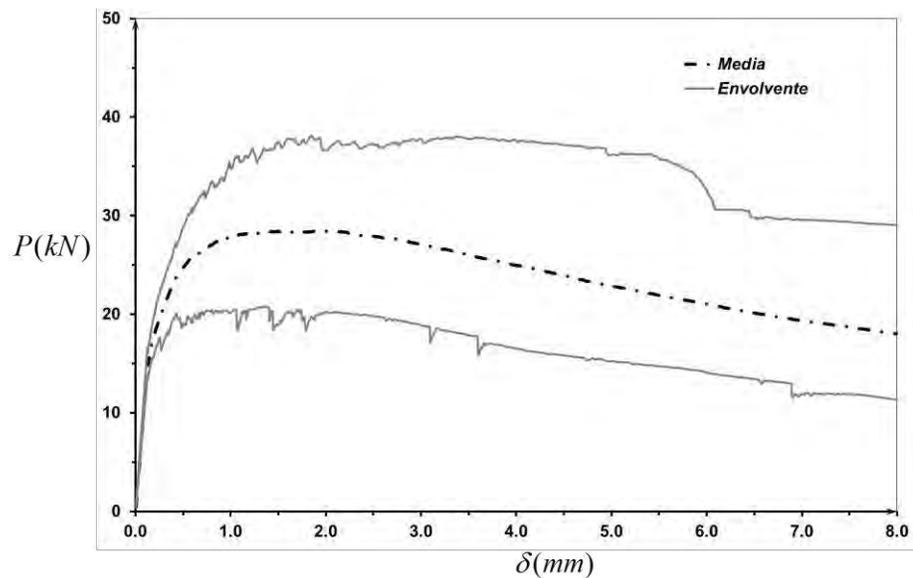
- **Cuantía volumétrica de 2%**

A continuación se presentan los resultados para la cuantía volumétrica de 2%. Ver figura 6-47, figura 6-48, figura 6-49 y figura 6-50.

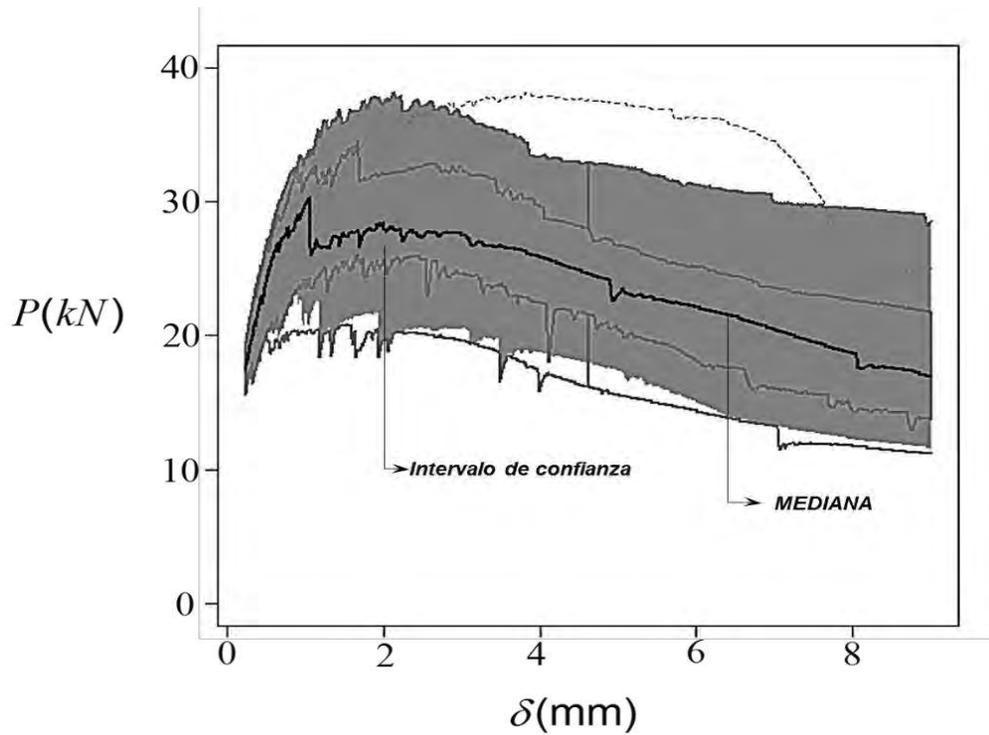
**Figura 6-47:** Ensayo de flexión, muestra de cien (100) simulaciones numéricas Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 2%



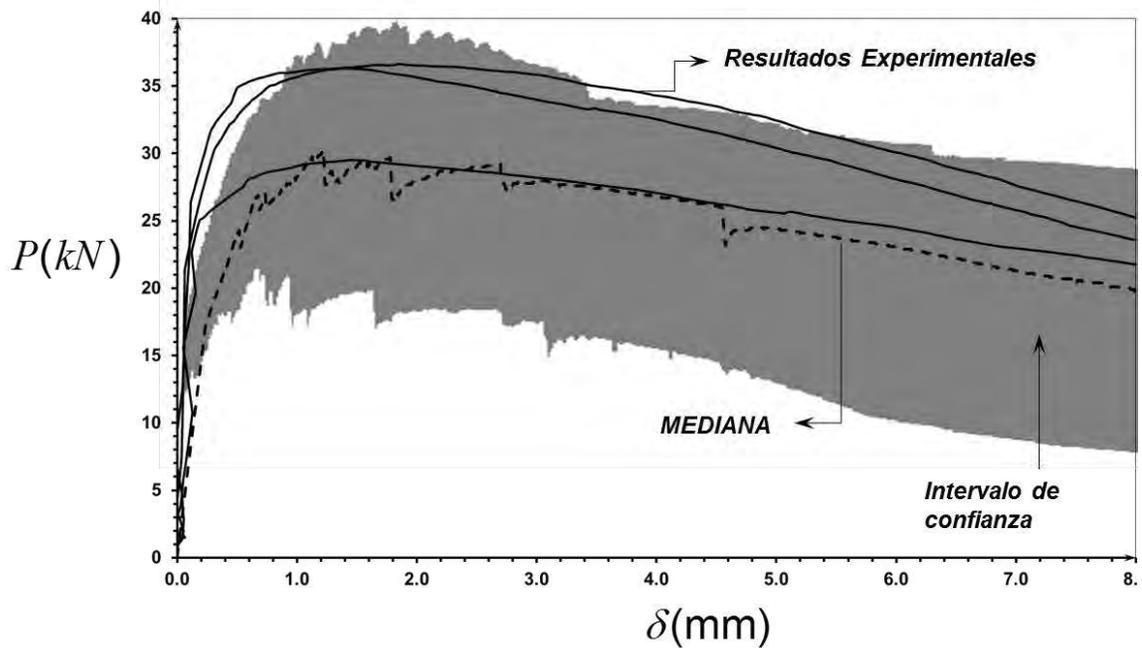
**Figura 6-48:** Ensayo de flexión, Media y envolvente.  
Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 2%



**Figura 6-49:** Ensayo de flexión Mediana, profundidad de banda e intervalos de confianza. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 2%



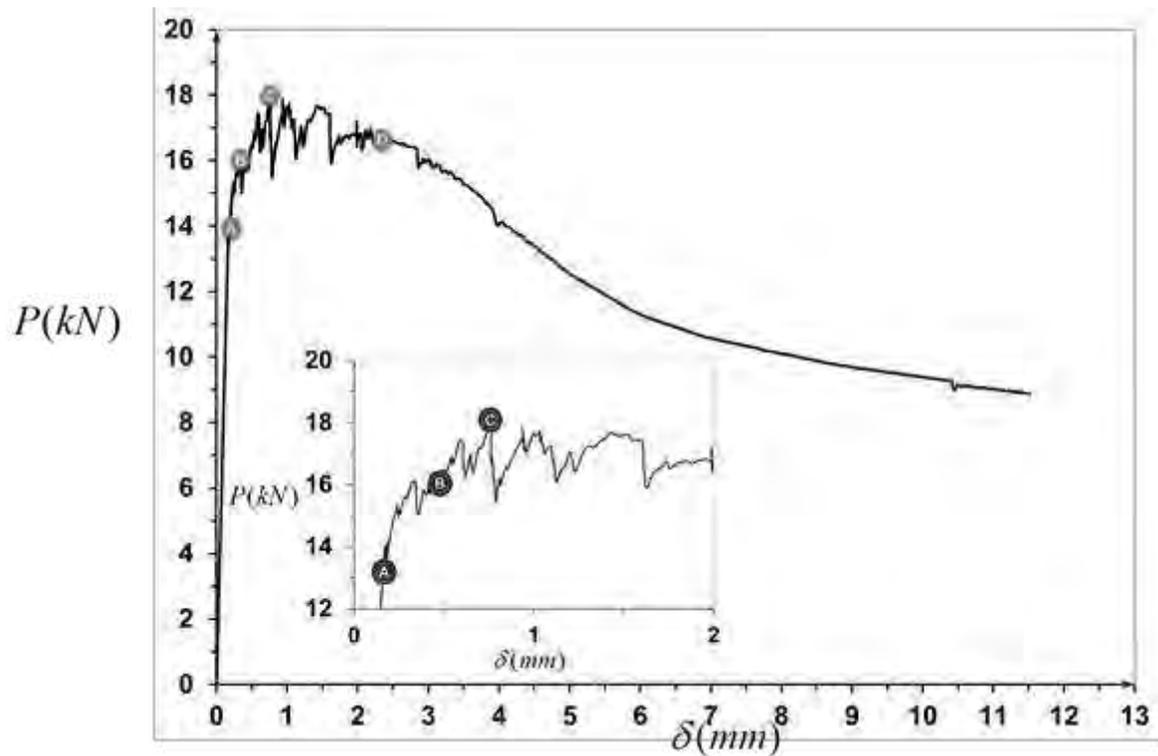
**Figura 6-50:** Ensayo de flexión, comparación de resultados experimentales y numéricos. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 2%



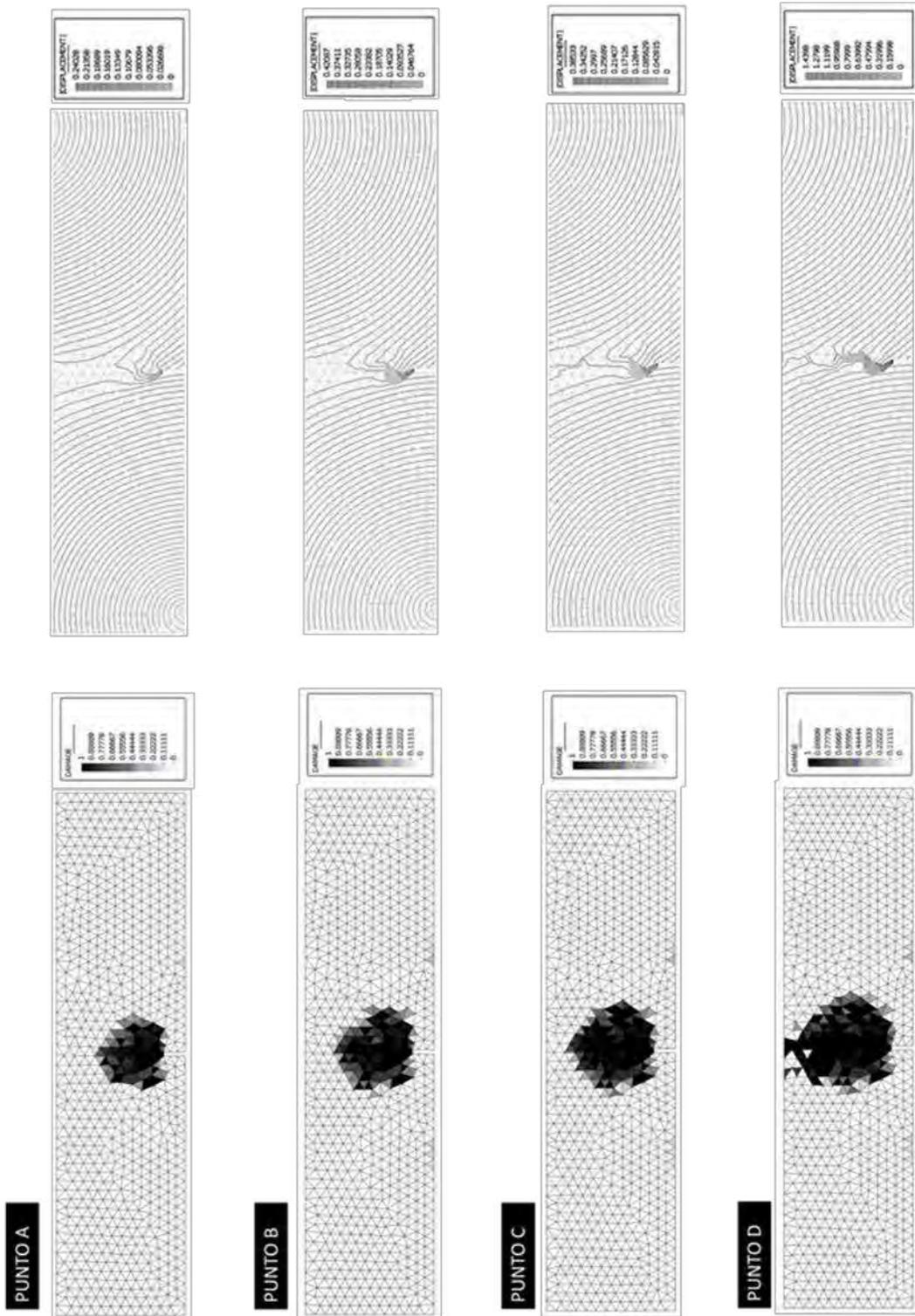
- Evolución del daño.

En las figuras figura 6-51 se presenta la curva de carga contra desplazamiento para uno de los eventos simulados con una cuantía volumétrica del 0.01 en la cual se han identificado cinco puntos de interés a, b, c, d, y e, para los cuales se ha graficado la evolución del daño y del desplazamiento en la figura 6.52.

**Figura 6-51:** Ensayo de flexión, Ejemplo de simulaciones numérica. Curvas carga contra desplazamiento.



**Figura 6-52:** Ensayo de flexión, Evolución del daño en los puntos a, b, c y d. Simulación Numérica.



## 6.3 Ejemplo de aplicación en miembros estructurales

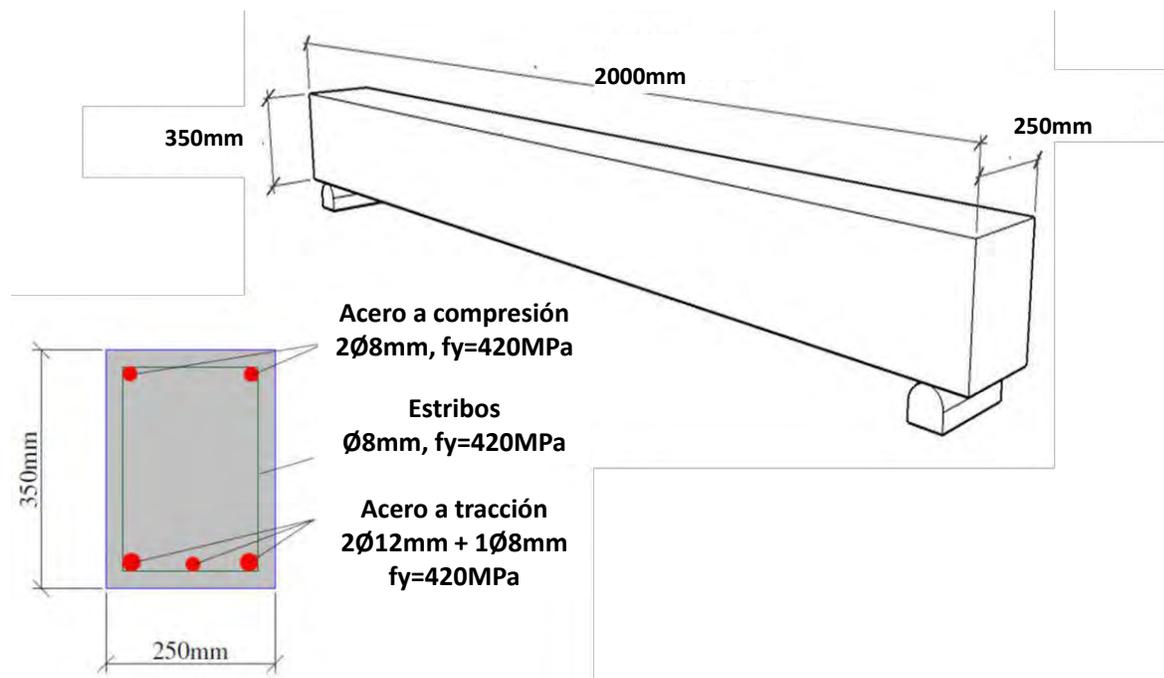
En esta sección se realizó simulación de una viga de concreto reforzado con barras longitudinales, estribos de acero, y fibras cortas de acero. Se pretende demostrar la aplicabilidad del modelo a miembros estructurales con dimensiones cercanas a las empleadas en una estructura y simulando una condición parecida a la permitida por los reglamentos de diseño de edificaciones, en donde el uso de las fibras es permitido únicamente como complemento del refuerzo tradicional.

### 6.3.1 Descripción del ensayo

La configuración geométrica de la viga usada en la simulación, corresponde a la empleada en tres ensayos experimentales realizados por Özcan y colaboradores (Özcan, et al., 2008) (Özcan, et al., 2009) y se presenta en la figura 6-53. Se trata de un elemento de 2m de longitud y una sección transversal de 250mm de base y 350mm de altura.

**Figura 6-53:** Dimensiones la viga de concreto reforzado y fibras de acero.

Fuente: (Özcan, et al., 2009)



Las vigas se reforzaron usando dos barras longitudinales de 8mm de diámetro en la parte superior, dos barras longitudinales de 12mm y una barra longitudinal de 8mm de diámetro en la parte inferior y estribos de 8mm de diámetro cada 20cm (figura 6-53). En la figura 6-54 se presenta una fotografía tomada durante la construcción de las vigas usadas en el ensayo.

**Figura 6-54:** Construcción de los especímenes para los ensayos experimentales de flexión en vigas de concreto reforzado y fibras de acero.

Fuente: (Özcan, et al., 2008)

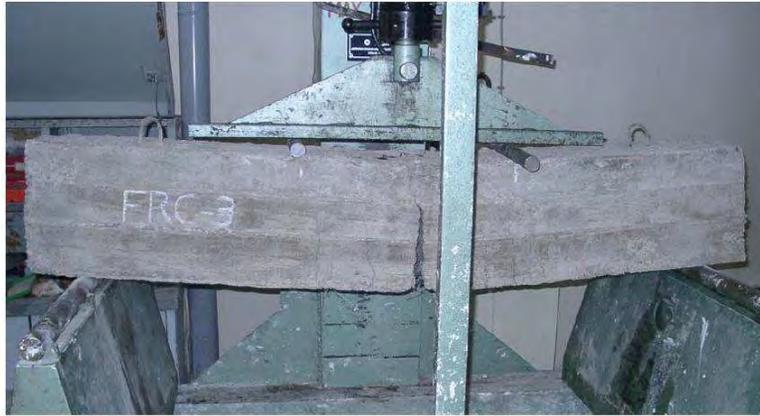


El ensayo de flexión se realizó aplicando carga en los tercios de la viga simplemente apoyada en los extremos. De acuerdo con lo reportado por Özcan y sus colaboradores (Özcan, et al., 2009), se midió el desplazamiento en el centro de la luz a intervalos de carga de 5KN. En la figura 6-54 se presenta la fotografía de uno de los ensayos y un esquema del montaje.

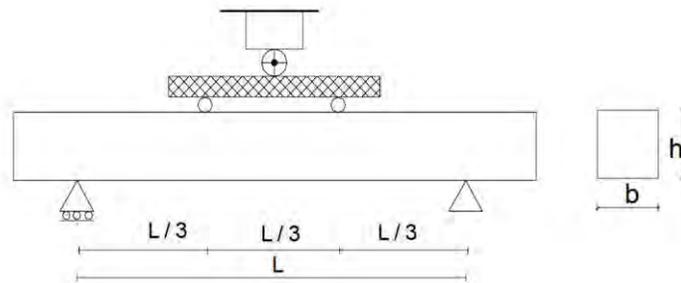
**Figura 6-55:** Montaje para los ensayos experimentales de flexión en vigas de concreto reforzado y fibras de acero.

(a) Fotografía de uno de los ensayos, (b) Esquema del montaje

Fuente: (Özcan, et al., 2008)



(a)



(b)

### 6.3.2 Materiales usados en las vigas de concreto reforzado y fibras de acero

Los propiedades de los materiales usado en la simulación numérica corresponde a los valores reportados por Özcan y sus colaboradores (Özcan, et al., 2008). Los valores de las propiedades mecánicas usadas para la matriz de concreto fueron los determinados experimentalmente en la caracterización del concreto simple. El valor de la resistencia a la tracción de la matriz se calculó como el 10% de la resistencia a la compresión de la misma (tabla 6-9).

**Tabla 6-9:** Valores de las variables empleadas en el modelo numerico

<b>CONCRETO</b>	
Resistencia a la compresión	24.4 MPa
Resistencia a la tracción	2.44 MPa
Módulo de Elasticidad	29500 MPa
Módulo de Poisson	0.2
Energía de Fractura	100 N/m

<b>FIBRAS CORTAS DE ACERO Dramix® RL 60/45 BN</b>	
Pendiente elástica del modelo constitutivo de la fibra deformable – deslizante	45000 MPa
Pendiente de ablandamiento del modelo constitutivo de la fibra deformable – deslizante	1710 MPa.
Cuantía de fibras	0.315%

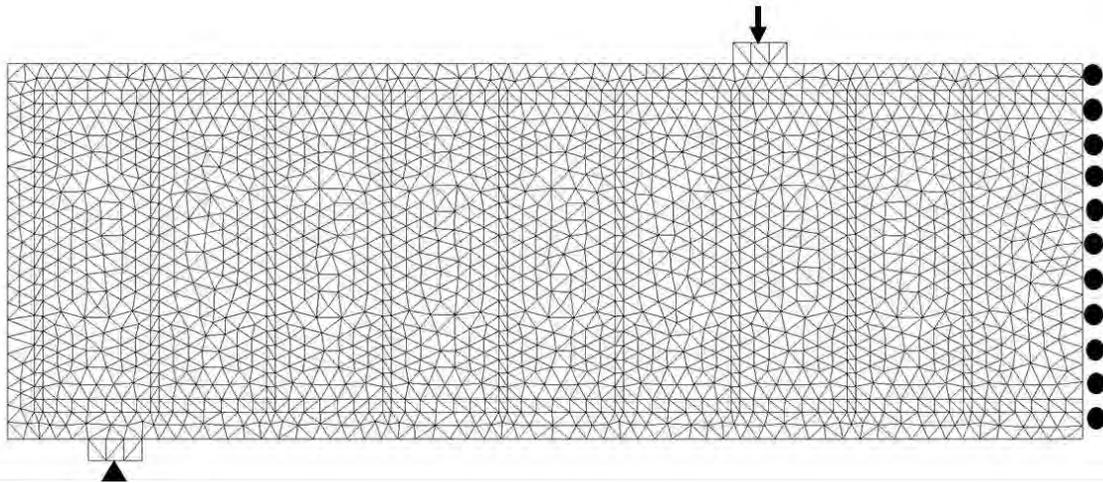
<b>BARRAS DE ACERO DE REFUERZO</b>	
Módulo de elasticidad	200000 MPa
Esfuerzo de fluencia	420 MPa
Parametro de endurecimiento	200

### 6.3.3 Descripción de la modelación

La simulación fue llevada a cabo en un estado plano de esfuerzos y fue especificado un espesor de 250mm. Se definió una malla con el tamaño del elemento de 20mm, obteniendo un total de 5022 elementos y 3677 nodos (figura 6-56)

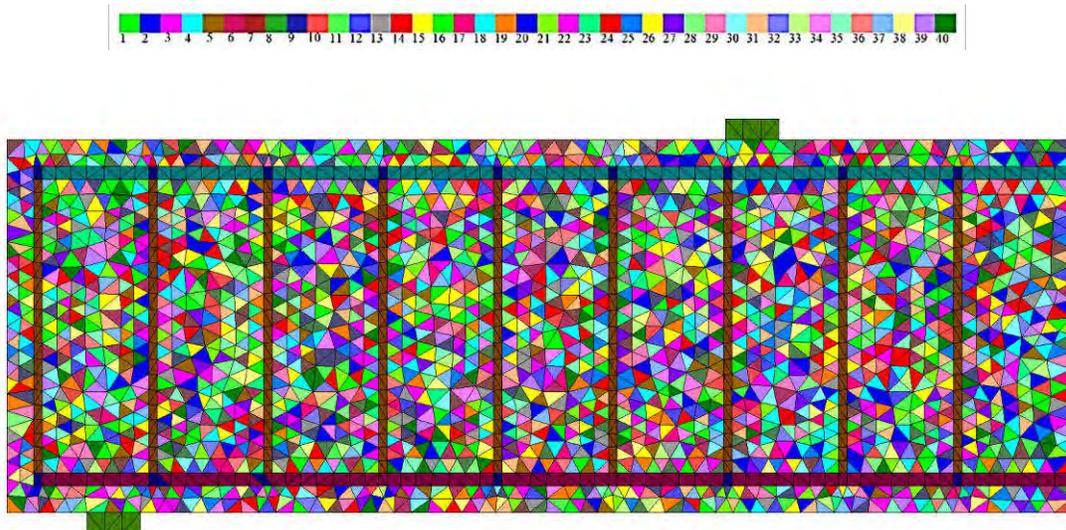
Para simular la aplicación de la carga en la viga simplemente apoyada, en el proceso de modelación se establecieron condiciones de apoyo al restringir el desplazamiento a lo largo del eje X en el extremo derecho del miembro aplicando una condición de simetría. En el apoyo se restringieron los desplazamientos en la dirección Y, tal como se aprecia en la figura 6-56. Los desplazamientos se aplicaron en el tercio de la luz en la dirección Y.

**Figura 6-56:** Condiciones de apoyo y aplicación del desplazamiento unitario. Viga simplemente apoyada en una luz de 2m



En la figura 6-57 se puede apreciar la asignación de materiales realizada por el programa. Se usó un coeficiente de isotropía de 0.3. Para el refuerzo longitudinal y transversal se definieron tres materiales adicionales.

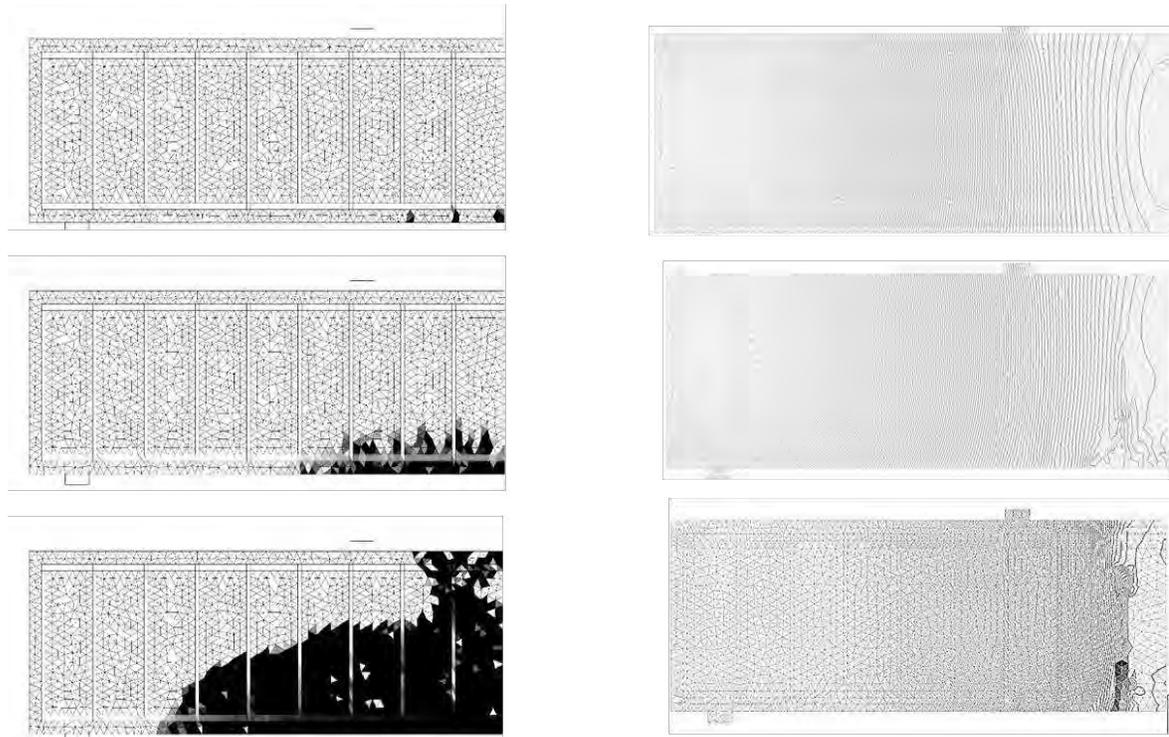
**Figura 6-57:** Distribución de materiales. Viga simplemente apoyada en una luz de 3m



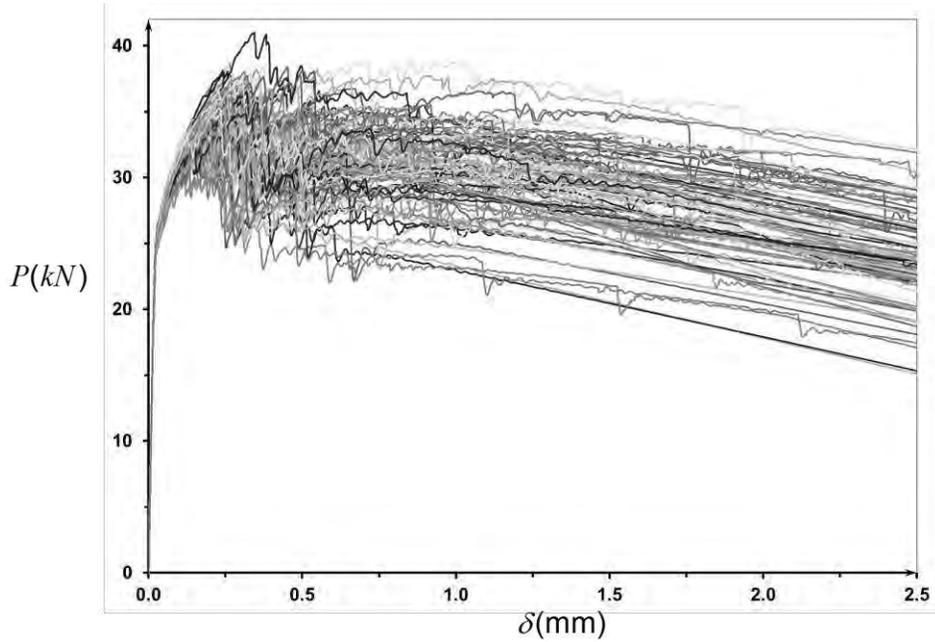
y  
x

Se simularon cien (100) eventos con una cuantía volumétrica del 1% y los resultados obtenidos de la modelación fueron analizados y procesados para obtener la evolución del daño del miembro (figura 6-58) y gráficas de carga contra desplazamiento, así como la media y la envolvente de las mismas (figura 6-59 y figura 6-60).

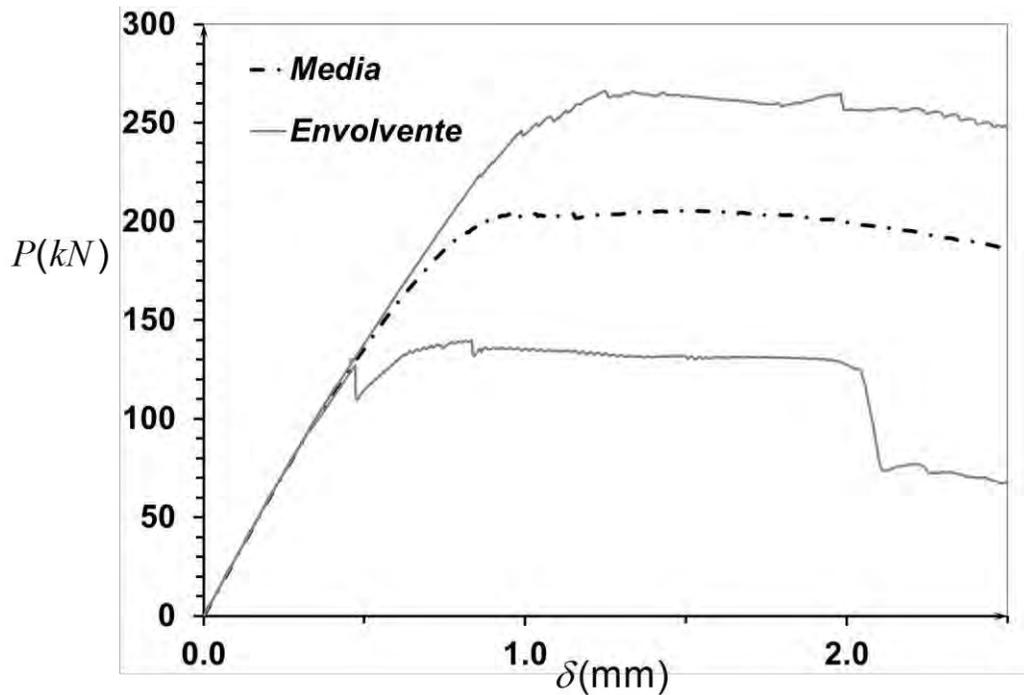
**Figura 6-58:** Evolución de la variable de daño y de los desplazamientos. Viga simplemente apoyada en una luz de 2m.



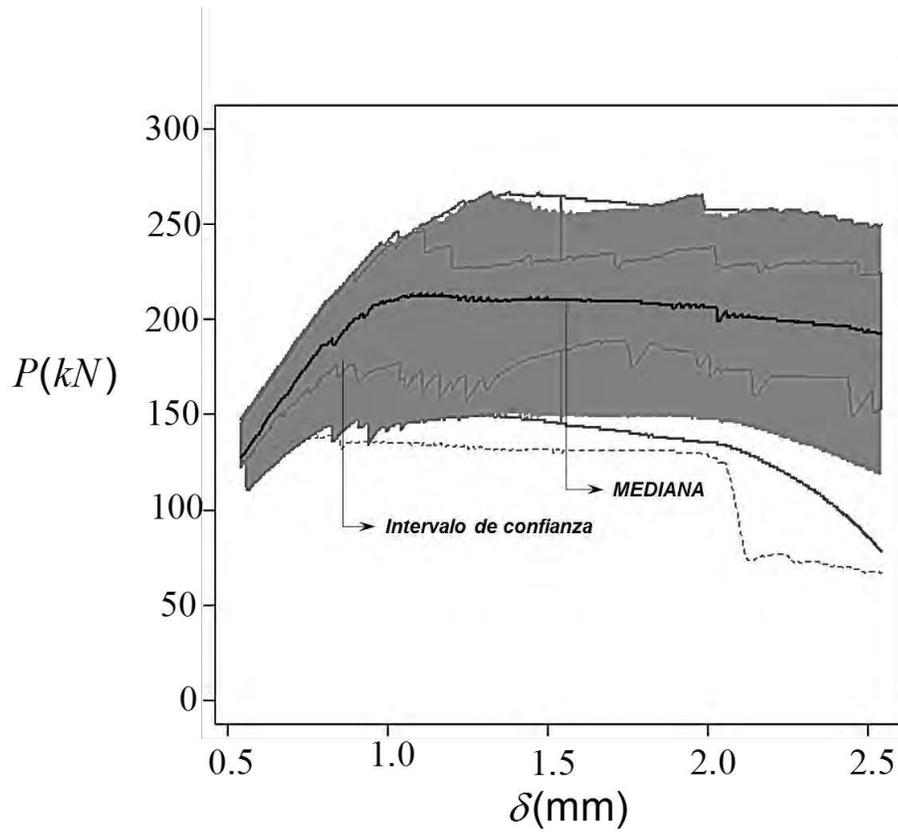
**Figura 6-59:** Muestra de cien (100) simulaciones numéricas. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 0.35%. Viga simplemente apoyada en una luz de 2m



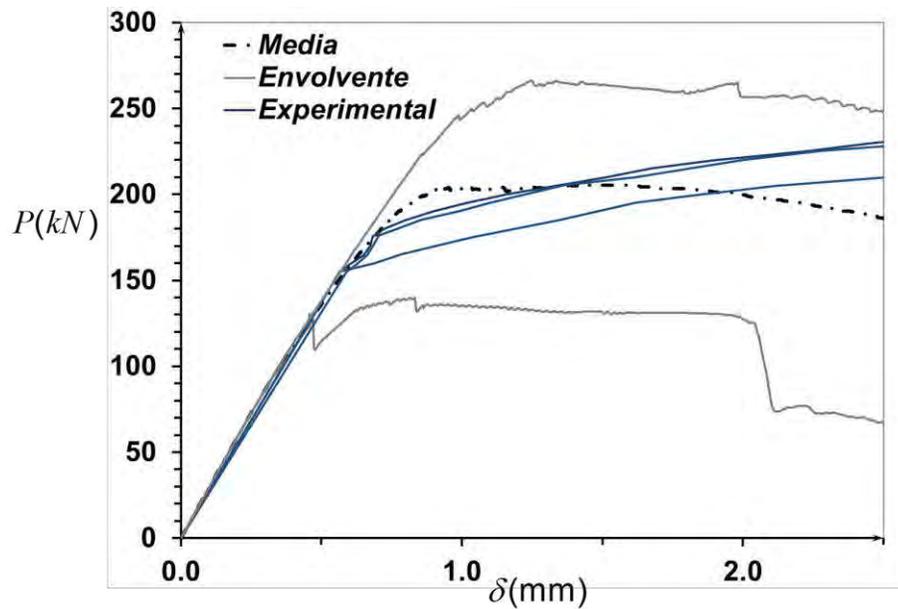
**Figura 6-60:** Media y envolvente. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 0.35%. Viga simplemente apoyada en una luz de 2m



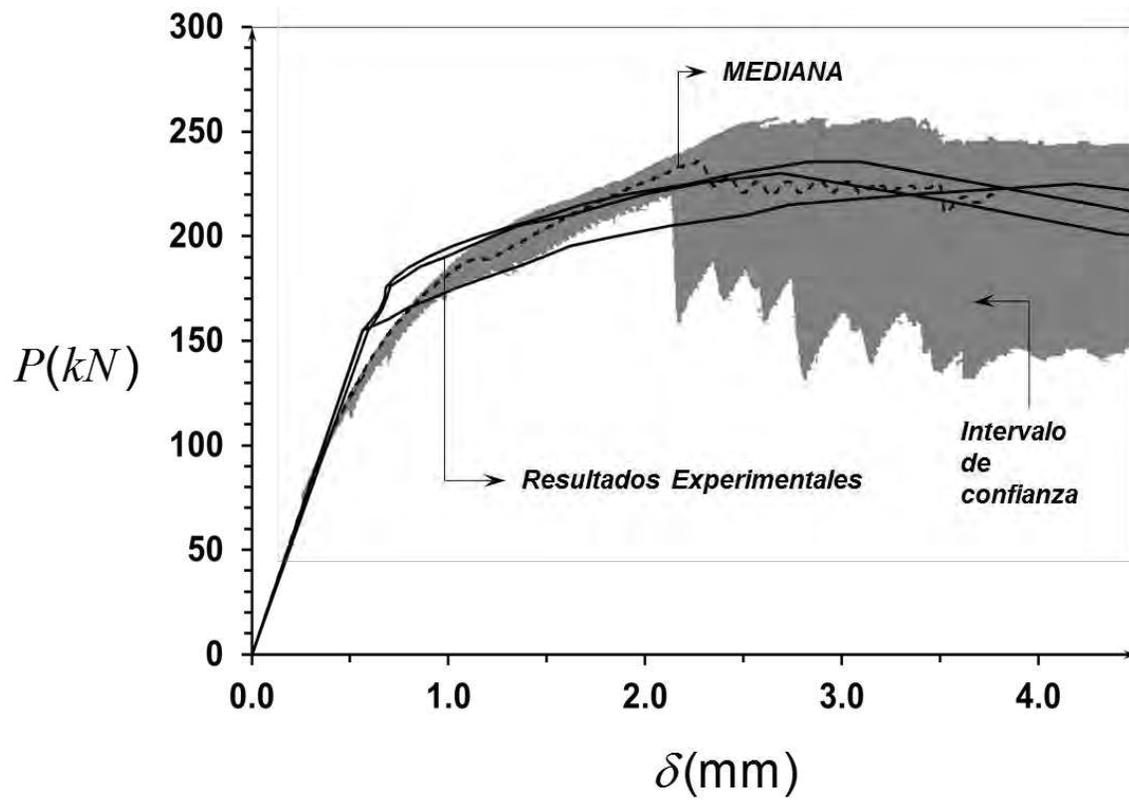
**Figura 6-61:** Ensayo de flexión Mediana, profundidad de banda e intervalos de confianza. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 0.35%



**Figura 6-62:** Ensayo de flexión, comparación de resultados experimentales y numéricos. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 0.35%



**Figura 6-63:** Ensayo de flexión, comparación de resultados experimentales y teóricos con límites de confianza. Curvas carga contra desplazamiento, cuantía 0.35%



## 7. Conclusiones y recomendaciones

Como resultado de esta tesis doctoral, se desarrolló un modelo numérico que describe el comportamiento inelástico de elementos estructurales de Concreto Reforzado con Fibras Cortas de Acero, bajo la acción de cargas estáticas, en condición plana de esfuerzos y considerando deformaciones infinitesimales.

El Concreto reforzado con fibras cortas de acero ha sido representado como un material compuesto, cuyo estado de esfuerzos y de deformaciones se obtienen a través de los modelos constitutivos particulares de los materiales componentes, incluyendo los efectos de interacción entre ellos y la teoría de mezclas (Truesdell & Toupin, 1960), mientras que la formación y propagación de fisuras se describe mediante la metodología de discontinuidades fuertes de continuo (Oliver, 1996b) (Oliver, 1996a) (Oliver, 2000) (Oliver, et al., 2003) (Oliver & Huespe, 2004) (Huespe, et al., 2006) (Oliver, et al., 2006).

Este material compuesto está conformado por una matriz de concreto simple en la que se encuentran embebidas fibras cortas de acero, las cuales son representadas en un punto material, mediante dos grupos de fibras ortogonales orientadas aleatoriamente en el plano. La participación volumétrica de las fibras en cada dirección puede considerarse diferente. Así mismo el contenido de fibras se considera variable y con una distribución normal de probabilidad.

El comportamiento mecánico de la fibra de acero y su deslizamiento con respecto a la matriz ha descrito mediante un modelo constitutivo de plasticidad unidimensional (Simó & Hughes, 1998) denominado fibra deformable-deslizante. Por su parte, la matriz de concreto simple se describió con un modelo de daño con tracción y compresión diferenciadas (Oliver, et al., 1990).

El modelo desarrollado fue implementado en el marco del método de los elementos finitos, a través de un análisis no lineal y considerando deformaciones infinitesimales. Para capturar la aparición y evolución de las fisuras, se emplearon elementos triangulares con discontinuidades embebidas. Los grados de libertad relacionados con el salto de los desplazamientos se condensaron, de manera que la matriz de rigidez de los elementos finitos se expresara en función de los seis grados de libertad convencionales. Para determinar el instante y la dirección de propagación de la fisuras, se realizó un análisis de bifurcación del material compuesto.

Dada la variabilidad de la orientación y de la distribución de las fibras, se desarrolló un modelo estocástico en el cual a cada elemento finito se le asigna un material con orientación y distribución escogida de forma aleatoria entre un grupo de materiales preestablecidos. En consecuencia, un mismo problema se simula  $n$  veces, conformando el conjunto de eventos de una muestra. El modelo estocástico se basa en conceptos de la estadística funcional, alcanzando el intervalo de confianza de la respuesta estructural del problema.

Mediante la simulación de un problema de tracción directa en elementos prismáticos se determinó la sensibilidad del modelo al tamaño del incremento en la aplicación de los desplazamientos, al tamaño de la malla de elementos finitos, al número de eventos simulados y al coeficiente de anisotropía del material. Así mismo se determinó la influencia de la cuantía volumétrica de fibras y de la respuesta al arrancamiento de la fibra.

Con el fin de realizar la validación del modelo, se realizaron ensayos experimentales de tracción y de flexión en elementos prismáticos con diferentes resistencias de las matrices, tipos de fibras y cuantías volumétricas de estas últimas. Consistentemente se realizaron ensayos experimentales para la caracterización de las matrices de concreto, así como de la interacción fibras-matriz determinando el comportamiento al arrancamiento de las fibras.

A continuación se presentan las conclusiones y recomendaciones derivadas de de la formulación, implementación y aplicación del modelo desarrollado.

## 7.1 Conclusiones

- Un modelo numérico basado en la metodología de discontinuidades fuertes de continuo y en la teoría de mezclas, puede predecir la respuesta estructural promedio y la trayectoria de fisuras, durante el proceso de fractura, en miembros de concreto reforzado con fibras cortas de acero solicitados a diferentes estados de carga estática. Así mismo, el análisis estocástico realizado mediante la estadística funcional, permite incluir la variabilidad de la orientación y distribución de las fibras, mejorando la aproximación al problema.
- La formulación de un modelo constitutivo que describe directamente el campo de deformación y de esfuerzo en un punto del material compuesto tipo concreto reforzado con fibras cortas de acero, permite el análisis del problema en la escala macroscópica, evitando el alto coste computacional que supone la discretización de cada material componente y de sus efectos de interacción.
- La metodología de discontinuidades fuertes de continuo puede aplicarse a materiales reforzados con fibras cortas, considerando un campo común de deformaciones como lo establece la teoría de mezclas.
- La correlación obtenida entre los resultados numéricos al utilizar la formulación propuesta y los resultados obtenidos de los ensayos experimentales realizados en este trabajo y aquellos presentados en algunas referencias, fue cualitativa y cuantitativamente satisfactoria. Para la simulación numérica de los ensayos experimentales de las probetas a tracción desarrollados en esta tesis se obtuvo una buena aproximación a la respuesta estructural. Además la concentración de las isóneas de desplazamiento resultantes del análisis numérico, coincide con la trayectoria de las fisuras presentes en las probetas físicas. Igualmente para la simulación numérica de los ensayos experimentales en las probetas a flexión desarrollados por Segura y Lamus (2014) la respuesta obtenida mediante el modelo propuesto, fue satisfactoria.

- El modelo numérico presentado permite describir la respuesta estructural de miembros estructurales de SRFC a partir de la participación volumétrica de fibras y los parámetros mecánicos del concreto simple, de las fibras y la interacción entre fibras y matriz. Lo anterior permite simular el comportamiento del SFRC con diferentes cuantías y demostrar el aumento de la ductilidad a medida que se incrementa tal parámetro.
- El número mínimo de simulaciones de un problema con orientación aleatoria de la fibra, necesarias para obtener una respuesta estructural representativa es de 100. Por lo tanto, las 200 simulaciones o eventos realizadas para cada cuantía son suficientes para obtener una envolvente y un intervalo de confianza de la respuesta estructural del problema.
- Para la descripción de la respuesta estructural del SFRC es ventajoso el uso de la estadística funcional, en comparación a la estadística univariada, puesto que permite obtener la media y los intervalos de confianza para la evolución de la fractura en el material, dentro de un rango de deformaciones infinitesimales, en lugar de los típicos valores escalares evaluados para estados particulares de deformación.
- La dispersión numérica de los resultados es dependiente de las propiedades mecánicas de la matriz y de la fibra, de la cuantía volumétrica de las fibras y del coeficiente de isotropía del material. El rango de valores esperados, estimado a partir de los intervalos de confianza es más amplio durante las primeras etapas de la fisuración, mientras que para aperturas de fisura mayores la dispersión tiende a disminuir.

## 7.2 Recomendaciones

- En un gran número de referencias en las cuales se presentan resultados experimentales de ensayos a diferentes tipos de sollicitaciones, es escasa la información respecto a las características mecánicas de los materiales componentes, así como a l comportamiento de las fibras durante el arrancamiento, por lo que en esta tesis fue necesario realizar ensayos experimentales, acompañados de la correspondiente caracterización de los materiales constituyentes que correspondieran a los empleados en la fabricación de las probetas de SFRC. Se recomienda que en futuras investigaciones, los ensayos experimentales sobre probetas de elementos de SFRC se complementen con ensayos de caracterización a tracción y compresión de la matriz, así como con ensayos de arrancamiento de las fibras de acero usando probetas fabricadas con el mismo tipo de matriz empleada en el SFRC.
- Se recomienda a quienes desean continuar realizando investigación en SFRC y en especial a las casas fabricantes de fibras de acero, que realicen ensayos de arrancamiento de sus productos, usando diferentes tipos de matrices con diferentes resistencias y variando la profundidad embebida de la fibra. Así mismo, se recomienda que el número de ensayos por cada combinación de parámetros sea alto debido a la alta variabilidad de los resultados obtenidos en las mismas.



## Bibliografía

Abrishambaf, A., Barros, J. & Cunha, V., 2013. Relation between fibre distribution and post-cracking behaviour in steel fibre reinforced self-compacting concrete panels. *Cement and concrete research*, Volume 51, pp. 57-66.

Abu-lebdeh, T., Hamoush, S., Heard, W. & Zornig, B., 2011. Effect of matrix strength on pullout behavior of steel fiber reinforced very-high strength concrete composites. *Construction and building materials*, Volume 25, pp. 39-46.

ACI , 2008. *Committee 318 Building code and commentary, Report ACI 318-08/ 318R-08*. Farmington Hills: American Concrete Institute.

ACI, 1988. *Committee 544.4 R-88 Design considerations for steel fiber reinforced concrete*, Farmington Hills: American Concrete Institute.

ACI, 1993. *Committee 544.3 R-93 Guide for Specifying, Proportioning, Mixing, Placing, and Finishing Steel Fiber Reinforced Concrete.*, Farmington Hills: American Concrete Institute.

ACI, 1996. *Committee 544.4 R-88 Design considerations for steel fiber reinforced concrete*, Farmington Hills: American Concrete Institute.

ACI, 2009. *Committee 544.1 R-96 State-of-the-Art Report on Fiber Reinforced Concrete*, Farmington Hills: American Concrete Institute.

AFGC-SETRA, 2002. *Ultra High Performance Fibre Reinforced Concretes, Interim recommendations*. France: AFGC Publication.

Akkaya, Y., Shah, S. P. & Ankenman, B., 2001. Effect of fiber dispersion on multiple cracking of cement composites. *Journal of engineering mechanics*, 127(4), pp. 311-316.

Alfaiate, J., 2003. New developments in the study of strong embedded discontinuities infinite elements. *Adv. Fract. Damage. Mech.*, pp. 251-252.

Altun, F., Haktanir, T. & Ari, K., 2007. Effects of Steel fiber addition on mechanical properties of concrete and RC beams. *Construction and building materials*, 21(3), pp. 654-661.

- Alwan, J. M., Naaman, A. E. & Guerrero, P., 1999. Effect of mechanical clamping on the pull-out response of hooked steel fibers embedded in cementitious matrices. *Concrete Science and Engineering Journal*, Issue 1, pp. 15-25.
- Amin, A., Foster, S. J. & Muttoni, A., 2013. *Evaluation of the tensile strength of SFRC as derived from inverse analysis of notched bending test*. Toledo, Structural Concrete Laboratory of EPFL, p. 9.
- Antonaci, P., Boca, P. & Grazzini, A., 2006. In situ determination of toughness indices of fibre reinforced concrete. *Materials and structures*, Volume 39, pp. 238-290.
- Antoniadis, A. & Sapatinas, T., 2007. Estimation and inference in functional mixed-effects models.. *Computational Statistics and Data Analysis*, Vol. 51, pp. 4793-4813.
- Appa Rao, G. & Sreenivasa Rao, A., 2009. Toughness indices of steel fiber reinforced concrete under mode II loading. *Materials and Structures*, Volume 42, Springer, pp. pp 1173 - 1184.
- ASTM, 2011. *A820/A820M-11 Standard Specification for Steel Fibers for Fiber-Reinforced Concrete*. West Conshohocken: ASTM.
- ASTM, 2012. *A370-12a: Standard Test Methods and Definitions for Mechanical Testing of Steel Products*. West Conshohocken: s.n.
- Balaguru, P. & Dipsia, M. G., 1993. Properties of fiber reinforced high-strength semilighweight concrete. *ACI Materials Journal*, 90(5), pp. 399-405.
- Banthia, N., 1990. A study of some factors affecting the fiber-matrix bond in steel fiber reinforced concrete. *Canadian Journal of Civil Engineerig*, Volume 17, pp. 610-620.
- Banthia, N. & Armelin, H. S., 2002. A novel double anchored steel fiber for shotcrete. *Canadian journal of civil engineering*, Volume 29, pp. 58-63.
- Baran, E., Akis, T. & Yesilmen, S., 2012. Pull-out behavior of prestressing strands in steel fiber reinforced concrete. *Construction and buliding materials*, Volume 28, pp. 362-371.
- Barenblatt, G., 1962. The matematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture. *Advances in applied mechanics*, pp. 55-129.
- Barragán, B., Gettu, R., Martín, M. & Zerbino, R., 2003. Uniaxial tension test for steel fibre reinforced concrete - a parametric study. *Cement & Concrete Composites*, Volume 25, pp. 767-777.
- Barros, J. A. & Cruz, J. S., 2001. Fracture energy of steel fiber-reinforced concrete. *Mechanics of composite materials and structures*, 8(1), pp. 29-45.
- Barros, J. A., Cunha, A. F., Ribeiro, A. F. & Antunes, J. A., 2005. Post-cracking behaviour of steel fibre reinforced concrete. *Materials and structures*, Volume 38, pp. 47-56.

- Bartos, P. J. M. & Duris, M., 1994. Inclined tensile strength of steel fibres in a cement based composite. *Composites*, 25, pp. 945 - 951.
- Bayramov, F., Tasdemir, C. & Tasdemir, M. A., 2004. Optimisation of steel fibre reinforced concretes by means of statistical response surface method. *Cement and concrete composites*, Volume 26, pp. 665-675.
- Bazant, Z. & Planas, J., 1998. *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*. New York: CRC Press.
- Beer, M., Ferson, S. & Kreinovich, V., 2013. Imprecise probabilities in engineering analyses. *Mechanical systems and signal processing*, pp. 4-29.
- Behloul, M., 1995. Définition d'une Loi de Comportement du BPR. *Annales de l'ITBTP*, No 532, pp. 122 - 127.
- Belytschko, T., Moes, N., Usui, S. & Parimi, C., 2001. Arbitrary discontinuities in finite elements. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Issue 50, pp. 993-1013.
- Bentur, A. & Mindness, S., 1990. *Fibre reinforced cementitious composites*. New York: Elsevier Applied Science.
- Benvenuti, E., 2008. A Regularized Xfem Framework For Embedded Cohesive Interfaces. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, Volume 197, pp. 4367-4378.
- Blanco, S., 2006. *Contribuciones al análisis del fallo material en tres dimensiones usando la aproximación de discontinuidades fuertes*. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona: s.n.
- Bordelon, A. & Roesler, J., 2012. *Distribution of fiber-reinforcement in thin concrete overlays*. Quebec, s.n., pp. 545-564.
- Boulekbache, B., Hamrat, M., Chemrouk, M. & Amziane, S., 2010. Flowability of fibre-reinforced concrete and its effect on the mechanical properties of the material. *Construction and building materials*, Volume 24, pp. 1664-1671.
- Bui, T. T., 2007. *Numerical simulation of fracture in plain and fibre-reinforced concrete*. Sydney: University of New South Wales.
- Caicedo, M. A., 2010. *Modelación numérica con elementos finitos del concreto reforzado con fibras cortas mediante un modelo constitutivo de Daño-plasticidad*. Bogotá: Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Colombia.
- Cardot, H., Crambes, C., Kneip, A. & Sarda, P., 2007. Smoothing spline estimators in functional linear regression with errors-in-variables.. *Computational Statistics Data Analysis*, Vol 51, pp. 4832 - 4848.

- Cardot, H., Ferraty, F. & Sarda, P., 1999. Functional linear model.. *Stat. Probab. Lett.*, vol. 45,, pp. 11-22.
- Car, E., 2000. *Modelo constitutivo continuo para el estudio del comportamiento mecánico de materiales compuestos*. Barcelona: Universidad Politécnica de Cataluña.
- Caspeepele, R. & Taerwe, L., 2014. Influence of concrete strength estimation on the structural safety assessment of existing structures. *Construction and Building Materials*, pp. 77-84.
- CEN, 2006. *EN 14889-1:2006 Fibres for concrete. Steel fibres - Definitions, specifications and conformity*. s.l.:British Standards Institution .
- Cervera, M., Agelet, C. & Chiumenti, M., 2001. *COMET. Contact Mechanical and Thermal Analysis. Multi purpose coupled nonlinear program for steady and transient conditions*. Barcelona: s.n.
- Chanvillard, G. & Aitcint, P.-C., 1996. Pull-out behavior of corrugated steel fibers, qualitative and statistical analysis. *Cement based materials*, Volume 4, pp. 28-41.
- Chenkui, H. & Guofan, Z., 1995. Propeties of steel fibre reinforced concrete containing larger coarse aggregate. *Cement and concrete composites*, Volume 17, pp. 199-206.
- Chermant, J.-L.et al., 2001. Some fields of applications of automatic image analysis in civil engineering. *Cement and concrete composites*, Volume 23, pp. 157-169.
- Choi, O. C. & Lee, C., 2003. Flexural performance of ring-type steel fiber-reinforced concrete. *Cement and concrete research*, Volume 33, pp. 841-849.
- CNR, 2006. *CNR-DT 204/2006: Guide for the Design and Construction of Fiber-Reinforced Concrete Structures*. Roma: Italian National Research Council.
- Cuevas, A., Febrero, M. & Fraiman, R., 2002. Linear functional regression: the case of fixed design and functional response.. *Can. J. Stat.*, vol. 30, pp. 285 - 300.
- Cunha, V., Barros, J. & Sena-Cruz, J., 2010. Pullout Behavior of steel fibers in self-compacting concrete. *Journal of materials in civil engineering*, Volume 22, pp. 1-9.
- Dabo-Niang, S. & Rhomari, N., 2009. Kernel regression estimate in a banach space. *J. Stat. Plan. Infer.*, Vol. 131.
- Dalton, S., Atamturktur, S., Farajpour, I. & Juang, H., 2013. An optimization based approach for structural design considering safety robustness, and cost. *Engineering structures*, pp. 356-363.
- de Borst, R., 2002. Fracture in quasi-brittle materials: a review of continuum damage-based approaches. *Engineering Fracture Mechanics*, pp. 96-112.

del Barrio, E., Cuesta - Albertos, J., Fraiman, R. & Matran, C., 2007. The random projection method for goodness of fit for functional data. *Computational Statistics & Data Analysis, this issue*, doi: 10.1016/j.csda.2006.09.007.

Der Kiureghian, A. & Ditlevsen, O., 2009. Aleatory or epistemic? Does it matter?. *Structural Safety*, pp. 105-112.

di Prisco, M., Plizzari, G. & Vandewalle, L., 2009. Fibre reinforced concrete: new design perspectives. *Materials and Structures*, Issue 42, pp. 1261-1281.

Dias, I. F., Oliver, J. & Huespe, A., 2011. *Strain injection, mixed formulation and strong discontinuities in fracture modeling of quasi-brittle materials*. Coimbra, s.n.

Dössland, A., 2008. *Fibre reinforcement in load carrying structures - laboratory and field investigations compared with theory and finite element analysis*. s.l.:s.n.

Dugdale, D., 1960. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal for mechanics of physics and solids*, pp. 100-108.

Düzgün, O. A., Gül, R. & Aydin, A. C., 2005. Effect of aspect. *Materials letters*, Volume 59, pp. 3357-3363.

Feenestra, P. & de Borst, R., 1995. Constitutive model for reinforced concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, pp. 587-595.

Ferrara, L. & Meda, A., 2006. Relationships between fibre distribution, workability and the mechanical properties of SFRC applied to precast roof elements. *Materials and structures*, Volume 39, pp. 411-420.

Ferraty, F. & Vieu, P., 2002. The functional nonparametric model and application to spectrometric data. *Computational Statistics, Vol. 17*, pp. 545 - 564.

Ferraty, F. & Vieu, P., 2006.. *Nonparametric Functional Data Analysis*. Berlin: Springer-Verlag.

Fletcher, T., Lu, C., Pizer, S. & Joshi, S., 2004. Principal Geodesic Analysis for the Study of Nonlinear Statistics of Shape. *IEEE Transactions on medical imaging*, 23(8), p. 995.

Galleguillos, T. A., 2010. *Modelamiento de vigas de hormigon con fibras de acero*. Santiago de Chile: Facultad de ciencias físicas y matemáticas, Universidad de Chile.

Gopalaratnam, V. S., 1995. On the characterization of flexural toughness in fiber reinforced concretes. *Cement and concrete composites*, Volume 17, pp. 239-254.

Grünewald, S., 2004. *Performance-based design of self-compacting fibre reinforced concrete*. Delft: Department of structural and building engineering, Delft University of Technology.

- Guerrero, P. & Naaman, A. E., 2000. Effect of mortar and adhesive agents on the pull-out response of steel fibers. *ACI Materials Journal*, Issue 97, pp. 12-20.
- Guevara, R. D. & Vargas, J. A., 2013. Process capability analysis for nonlinear profiles using depth functions. *Quality and Reliability Engineering International*.
- Gupta, A. K. & Akbar, H., 1984. Cracking in reinforced concrete analysis. *J. Struct. Engrg. ASCE*, 110(8), pp. 1735-1746.
- Herakovich, C. T., 1998. *Mechanics of Fibrous Composites*. New York: John Wiley & Sons, Inc..
- Hesterberg, T., 2011. Bootstrap. *WIREs Computational Statistics*, Volume 3, pp. 497-526.
- Hillerborg, A., 1985. The teoretical basic of a method to determine the fracture energy gf of concrete. *Materials and structures*, pp. 291-296.
- Hillerborg, A., Modeer, M. & Petersson, P., 1976. Analysis of crack formation elements. *Cement and concrete research*, pp. 773-782.
- Hill, R., 1962. Acceleration waves in solid. *Journal for Mechanics of Phisics and Solids*, Volume 10, pp. 1-16.
- Holschemacher, K. & Muller, T., n.d. *Influence of fibre type on hardened properties of steel fibre reinforced concrete*. Vilnius, s.n.
- Huespe, A. E. et al., 2006. On the fracture models determined by the continuum-strong discontinuity approach. *International Journal of Fracture*, 137, pp. 211-229.
- Ibrahim, I. S. & Che Bakar, M. B., 2011. Effects on mechanical properties of industrialised steel fibres addition to normal weight concrete. *Procedia engineering*, Volume 14, pp. 2616-2626.
- ICONTEC, 2010. *NTC 673. Concretos. Ensayo de Resistencia a la Compresión de Especímenes Cilíndricos de Concreto*. Bogotá: ICONTEC.
- Jansson, A., 2011. *Effects of Steel Fibres on Cracking in Reinforced Concrete*. Gothenburg: CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY.
- Jansson, A., Gylltoft, K. & Logfren, I., 2008. *Design methods for fibre-reinforced concrete: a state of the art review*, s.l.: Chalmers tekniska högskola .
- Jenq, Y. & Shah, S., 1991. Features of mechanics of quasi-brittle crack propagation in concrete. *International Journal of fracture*, pp. 103-120.
- Jirásek, M. & Zimmermann, T., 1998. Analysis of the rotating crack model. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, Issue 124, pp. 842-851.

- Johnston, C. D., n.d. *Advances in concrete technology, volume 3, Fiber-reinforced cements and concretes*. s.l.:Taylor and Francis.
- Johnston, C. D. & Skarendahl, A., 1992. Comparative flexural performance evaluation of steel fibre-reinforced concretes according to ASTM C1018 shows importance of fibre parameters. *Materials and structures*, Volume 25, pp. 191-200.
- JSCE, 2010. *Specification for steel fiber for concrete*. s.l.:s.n.
- Kabele, P., 2007. Multiscale framework for modeling of fracture in high performance fiber reinforced cementitious composites. *Engineering Fracture Mechanics*, pp. 194-209.
- Khaloo, A. R. & Kim, N., 1997. Influence of Concrete and Fiber Characteristics on Behaviour of Steel Fiber Reinforced Concrete Under Direct Shear. *ACI Materials Journal*, 94, No 4, pp. pp 592 - 601.
- Khanlou, A. et al., 2013. *Shear performance of steel fibre-reinforced concrete*. Christchurch, s.n.
- Kooiman, A. G., 2000. *Modelling steel fibre reinforced concrete for structural design*. Rotterdam: Optima Grafische Communicatie.
- Kullaa, J., 1994. Fibre-reinforced concrete under uniaxial tension. *Nordic Concrete Research*, 14, pp. 77 - 90.
- Kwak, H. G. & Filippou, F. C., 1990. *Finite Element Analysis of Reinforced Structures under Monotonic Loads, Report No UCB/SEMM-90/14*, s.l.: Structural Engineering Mechanics and Materials.
- Lamus, F. & Segura, S., 2013. Energía de fractura en modo II del concreto de resistencia normal reforzado con fibras cortas de acero. *Revista épsilon*, Issue 20, pp. 159-171.
- Lange - Kornbak, D. & Karihaloo, B. L., 1998. Inclined tensile strength of steel fibres in a cement based composite. *Composites*, 25, pp. 89 - 101.
- Laranjeira, F., 2010. *Design-oriented constitutive model for steel fiber reinforced concrete*. Barcelona: Departament d'Enginyeria de la Construcció, Universitat Politècnica de Catalunya.
- Laranjeira, F., Molins, C. & Aguado, A., 2010. Predicting the pullout response of inclined hooked steel fibers. *Cement and concrete research*, Volume 40, pp. 1471-1487.
- Lee, G. G. & Foster, S. J., 2006. *Behaviour of steel fibre reinforced mortar in shear I: Direct shear tests. UNICIV Report No R-444*, Sydney: University of New South Wales.
- Lee, S. F. & Jacobsen, S., 2011. Study of interfacial microstructure, fracture energy, compressive energy and debonding load of steel fiber-reinforced mortar. *Materials and Structures*, Volume 44, pp. 1451-1465.

- Lei Voo, J. Y. & Foster, S. J., 2003. *Variable engagement model for the design of fibre reinforced concrete structures*. Davos, ECI Digital Archives.
- Lemaitre, J. & Chaboche, J. L., 2000. *Mechanics of Solid Materials*. s.l.:Cambridge University Press.
- Li, F. & Li, Z., 2001. Continuum damage mechanics based modeling of fiber reinforced concrete in tension. *International Journal of Solids and Structures*, pp. 777-793.
- Lim, T. Y., Paramasivam, P. & Lee, S. L., 1987. Analytical model for tensile behaviour of steel - fibre concrete. *ACI Materials Journal, Vol 84, No 4*, pp. 286 -298.
- Linero, D. L., Oliver, X. & Huespe, A. E., 2008. *A model of material failure for reinforced concrete via continuum strong discontinuity approach and mixing theory*. Barcelona: CIMNE.
- Li, V. C., 1992. Post-crack scaling relations for fiber reinforced cementitious composites.. *ASCE Journal of Materials in Civil Engineering 4*, pp. 41 - 57.
- Li, V. C., Stang, H. & Krenchel, H., 1993. Micromechanics of crack bridging in fiber reinforced concrete. *Materials and Structures, 26*, pp. 486 - 494.
- Locantore, N. et al., 1999. Robust principal component analysis for functional. *Test, Vol 8*, pp. 1 - 74.
- Lofgren, I., 2005. *Fibre-reinforced Concrete for Industrial Construction*. Goteborg: Department of Civil and Environmental Engineering, Chalmers University of Technology.
- Lofgren, I., Stang, H. & Olesen, J. F., 2005. Fracture properties of FRC Determined through inverse analysis of wedge splitting and three-point bending test. *Journal of advanced concrete technology, 3(3)*, pp. 423-434.
- López- Pintado, S. & Romo, J., 2007. Depth-based inference for functional data. *Computational Statistics & Data Analysis 51*, pp. 4957 - 4968.
- López-Pintado, S. & Romo, J., 2009. On the Concept of Depth for Functional Data. *Journal of the American Statistical Association, 104(486)*, pp. 718-734.
- Luccioni, B. & López, D., 2002. Modelo para materiales compuestos con deslizamiento de fibras. In: *Análisis y cálculo de estructuras de materiales compuestos*. Barcelona: CIMNE, pp. 411-431.
- Luccioni, B. et al., 2012. A simple approach to model SFRC. *Construction an building materials*, pp. 111-124.
- MacGregor, J. G., 1997. *Reinforced Concrete Mechanics and Design*. New Jersey: Prencite Hall.

- Madsen, H. O., Krenk, S. & Lind, N. C., 1986. *Methods of Structural Safety*. Mineola, New York: Dover Publications, INC..
- Mansur, W. A., Chin, M. S. & Wee, T. H., 1999. Stress-strain relationship of high strength fiber concrete in compression. *Journal of materials in civil engineering*, 11(1), pp. 21-29.
- Mariano, P. & Stazi, F., 2005. Computational aspects of the mechanics of complex materials. *Archives of computational methods in engineering*, Issue 12, pp. 391-478.
- Markovich, I., van Mier, J. G. & Walraven, J. C., 2001. Single fiber pullout from hybrid fiber reinforced concrete. *Heron*, 46(3), pp. 191-200.
- Melenk, J. M. & Babuska, I., 1996. The partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 139, pp. 289-314.
- Memon, B.-A. & SU, X.-z., 2004. Arc-length technique for nonlinear finite element analysis. *Journal of Zhejiang University SCIENCE*, 5(5), pp. 618-628.
- Meyer, C., 2002. Concrete and Sustainable Development. *Special Publication ACI 206, Concrete Materials Science to Application – A Tribute to Surendra P. Shah*.
- Miehe, C., Schroder, J. & Bayreuther, C., 2002. On the homogenization analysis of composite materials based on discretized fluctuations on the micro-structure. *Acta mechanica*, pp. 1-16.
- Mirsayah, A. A. & Banthia, N., 2002. Shear strength of steel fibre-reinforced concrete. *ACI Materials Journal*, 99(5), pp. 473-479.
- Moller, B. et al., 2008. Structural collapse simulation under consideration of uncertainty - improvement of numerical efficiency. *Computers and structures*, p. 1875.
- Mora Méndez, D. F., 2013. *Multifield-Based modeling of material failure in high performance reinforced cementitious composites*. BarcelonA: Universitat Politècnica de Catalunya.
- Naaman, A., 2003. Engineered steel fiber with optimal properties for reinforcement of cement composites. *Journal of advanced concrete technology*, pp. 241-252.
- Naaman, A. E., 2007. High performance fiber reinforced cement composites. In: Caijun, Mo, Y.L. (Eds.), *High Performance Construction Materials - Science and Applications.. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.*, pp. 91 - 153 (Chapter 3).
- Nataraja, M. C., Dhang, N. & Gupta, A. P., 1999. Stress-strain curves for steel-fiber reinforced concrete under compression. *Cement and concrete composites*, Volume 21, pp. 383-390.

- Nerini, D. & Ghattas, B., 2007. Classifying densities using functional regression trees: Applications. *Computational Statistics & Data Analysis* 51, pp. 4984 - 4993.
- Neves, R. D. & Fernandes de Almeida, J. C., 2005. Compressive behaviour of steel fibre reinforced concrete. *Structural Concrete*, 6(1), pp. 1464-4177.
- Nguyen, V. P., Stroeven, M. & Sluys, L. S., 2012. multiscale failure modeling of concrete: Micromechanical modeling, discontinuous homogenization and parallel computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pp. 139-156.
- Nofal, M., 1997. *Continuum damage mechanics for plain, fibre-reinforced, and reinforced concrete materials and structures*. Ottawa: Department of Civil and Environmental Engineering, Carleton University.
- Oliveira de Barros, J. A., 1995. *Comportamento do betão reforçado com fibras, Análise experimental e simulação numérica*. Porto: Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto .
- Oliver, J., 1990. *Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete*. Swansea, N. Bicanic and H. Mang.
- Oliver, J., 1996a. Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 2: Numerical simulation. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, pp. 3601-3623.
- Oliver, J., 1996b. Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part I: Fundamentals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Issue 39, pp. 3575-3600.
- Oliver, J., 2000. On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations. *International Journal of Solid and Structures*, 37, pp. 7207 - 7229.
- Oliver, J., Cervera, M., Oller, S. & Lubliner, J., 1990. *Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete*. Swansea, N. Bicanic and H. Mang.
- Oliver, J. & Huespe, A., 2004. Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pp. 3195-3220.
- Oliver, J., Huespe, A., Cante, J. C. & Díaz, G., 2010. On the numerical resolution of the discontinuous material bifurcation problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Issue 83, pp. 786-804.
- Oliver, J., Huespe, A. E., Blanco, S. & Linero, D. L., 2006. Stability and robustness issues in numerical modeling of material failure in the strong discontinuity approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(52), pp. 7093 - 7114.

- Oliver, J., Huespe, A. E. & Linero, D. L., 2005. *Strong Discontinuity Approach to Fracture of Composite Materials*. Turín (Italia), s.n.
- Oliver, J., Huespe, A. E. & Sánchez, P. J., 2006. A comparative study on finite elements for capturing strong discontinuities: E-FEM vs. X-FEM. *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering*, Volume 195, pp. 4732-4752.
- Oliver, J., Huespe, A. & Samaniego, E., 2003. A study on finite elements for capturing strong discontinuities. *International journal for Numerical Methods in Engineering*, pp. 2135-2161.
- Oliver, J., Huespe, A., Samaniego, E. & Chaves, E., 2004a. Continuum approach to the numerical simulation of material failure in concrete. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Issue 28, pp. 609-632.
- Oliver, et al., 2004b. *Recent advances in computational modelling of material failure*. Jyvaskyla (Finland), University of Jyvaskyla.
- Oliver, X., Linero, D. L., Huespe, A. & Manzoli, O. L., 2008. Two-dimensional modeling of material failure in reinforced concrete by means of a continuum strong discontinuity approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 5(197), pp. 332-348.
- Oller, S., 2003. *Simulación numérica del comportamiento mecánico de materiales compuestos*. Barcelona: CIMNE.
- Oller, S., Oñate, E., Miquel, J. & Botello, S., 1996. A plastic damage constitutive model for composite materials. *International Journal of solid and structures*, pp. 2501-2518.
- Park, R. & Paulay, T., 1975. *Reinforced concrete structures*. New York: John Wiley & sons.
- Peng, X. & Meyer, C., 2000. A continuum damage mechanics model for concrete reinforced with randomly distributed short fibers. *Computers and structures*, pp. 505-515.
- Pierre, P., Pleau, R. & Pigeon, M., 1999. Mechanical properties of steel microfiber reinforced cement pastes and mortars. *Journal of Materials in civil engineering*, 11(1), pp. 21-29.
- Pira, J. M., 2014. *Estudio del comportamiento de la interfaz fibra-matriz bajo carga de Pull-Out con fibras cortas de acero y concretos de uso normal*. Bogotá: Programa de Ingeniería Civil, Universidad de La Salle.
- Planas, J. et al., 2003. Generalizations and specifications of cohesive crack models. *Engineering fracture mechanics*, pp. 1759-1776.
- Prós Parés, A., 2011. *Numerical approach for modeling steel fiber reinforced concrete*. Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya.

- Radtko, F., Simone, A. & Sluys, L. J., 2010. A computational model for failure analysis of fibre reinforced concrete with discrete treatment of fibres. *Engineering Fracture Mechanics*, pp. 597-620.
- Ramsay, J. & Silverman, B., 2005. *Functional data analysis*. New York: Springer.
- Rice, J. R., 1976. *The localization of plastic deformation..* Delft, NorthHolland Publishing Co., pp. 207-220.
- RILEM, 2002. *TC 162 - TDF: Test and design methods for steel fibre reinforced concrete: Bending test recommendation final..* s.l.:Materials and Structures .
- Robins, P., Austin, S. & Jones, P., 2002. Pull-out behaviour of hooked steel fibres. *Materials and structures*, Volume 35, pp. 434-442.
- Robins, P. J., Austin, S. A. & Jones, P. A., 2003. Spatial distribution of steel fibres in sprayed and cast concrete. *Magazine of concrete research*, 55(3), pp. 225-235.
- Rodríguez Lopez, F. & Prado Pérez-Seoane, D., 1984. Hormigón con la incorporación de fibras. *Revista de Obras Públicas*, p. pp 779 a 796.
- Runesson, K., Ottosen, N. & Peric, D., 1991. Discontinuous bifurcations of elastic-plastic solutions at plane stress and plane strain. *International Journal of Plasticity*, Volume 7, pp. 99-121.
- Samaniego, E., 2002. *Contributions to the continuum modelling of strong discontinuities in two dimensional solids. Doctoral Thesis, Technical University of Catalonia*. Barcelona: s.n.
- Schoenberg, I. J., 1946. Contributions to the of approximation of equidistant data by analytic functions. *Quart. Appl. Math.*, Issue 4, pp. 112-141.
- Schoenberg, I. J., 1969. Cardinal interpolation and spline functions. *Journal of Approximation Theory*, Issue 2, pp. 167-206.
- Segura, S. M., 2013. *Tesis Determinación de la energía de fractura para concreto reforzado con fibras cortas de acero SFRC*. Bogotá: Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito.
- Selby, R. G. & Vecchio, F. J., 1997. A constitutive model for analysis of reinforced concrete solids. *Canadian Journal of Civil Engineering*, Vol 24, pp. 460 - 470.
- Shende, A. M. & Pande, A. M., 2011. Experimental study and prediction of tensile strength for steel fiber reinforced concrete. *International journal of civil and structural engineering*, 1(4), pp. 910-917.
- Simó, J. & Hughes, T. H. R., 1998. *Computational Inelasticity*. New York: Springer-Verlag.

Simó, J. & Ju, J., 1987. Strain and stress based continuum damage models. I formulation. *International journal of solid and structures*, pp. 821-840.

Simó, J., Oliver, J. & Armero, F., 1993. An Analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solid. *Computational Mechanics*, 12, pp. 277 - 296.

Simó, J. & Rifai, S., 1990. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29 , pp. 1595 - 1638.

Singh, K. & Xie, M., 2013. *Bootstrap: A statistical method*. [Online]  
Available at: <http://www.stat.rutgers.edu/home/mxie/rcpapers/bootstrap.pdf>

Soe Htut, T. N., 2010. *Fracture processes in steel fiber reinforced concrete*. Sydney: University of New South Wales.

Soe , T. N., 2010. *Fracture processes in steel fibre reinforced concrete*. Sydney: School of Civil and Environmental Engineering, The University of New South Wales.

Soetens, T., Van Gysel, A., Matthys, S. & Taerwe, L., 2013. A semi-analytical model to predict the pull-out behaviour of inclined hooked-end steel fibres. *Construction and building materials*, Volume 43, pp. 253-265.

Sorelli, L. G., Meda, A. & Plizzari, G. A., 2005. Bending and uniaxial tensile tests on concrete reinforced with hybrid steel. *Journal of Materials in Civil Engineering*, 17(5), pp. 519-527.

Sorelli, L. & Toutlemonde, F., 2005. *On the design of steel fiber reinforced concrete tunnel lining segments*. Turin, s.n., p. 6.

Soulioti, D. et al., 2009. Acoustic emission behavior of steel fibre reinforced concrete under bending. *Construction and building materials*, Volume 23, pp. 3532-3536.

Soulioti, D., Barkoula, N., Paipetis, A. & Matikas, T., 2011. Effects of fibre geometry and volume fraction on the flexural behaviour of steel fibre reinforced concrete. *Strain*, pp. e535-e541.

Stähli, P. & van Mier, J., 2007. Manufacturing, fibre anisotropy and fracture of fibre concrete. *Engineering fracture mechanics*, Volume 74, pp. 223-242.

Stramandinoli, R. & La Rovere, H., 2008. An efficient tensio-stiffening model for nonlinear analysis of reinforced concrete members. *Engineering Structures*, Volume 30, pp. 2069-2080.

Sukumar, N., Moes, N., Moran, B. & Belytscko, T., 2000. Extended finite element method for three dimensional crack modelling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(11), pp. 1549-1570.

- Sun, H., Di, S., Zhang, N. & Wu, C., 2001. Micromechanics of composite materials using multivariable finite element method and homogenization theory. *International journal of solids and structures*, pp. 3007-3020.
- Sun, Y. & Genton, M. G., 2011. Functional Boxplots. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 20(2), pp. 316-334.
- Suwaka, H. & Fukuyama, H., 2006. Nonlinear finite element analysis on shear failure structural elements using high performance fiber cement composite. *Journal of Advanced Concrete Technology*, pp. 4, pp 45 - 57.
- Suwannakarn, S. W., 2009. *Post - Cracking Characteristics of High Performance Fiber Reinforced Cementitious Composites. Doctoral Thesis, University of Michigan.* s.l.:s.n.
- Tarrio, J., 2012. *Evaluación y clasificación de materiales: un enfoque estadístico. Tesis Doctoral.* La Coruña: Universidade da Coruña.
- Taylor, M., Lydon, F. & Barr, B., 1997. Toughness measurements on steel fibre-reinforced high strength concrete. *Cement and concrete composites*, Volume 19, pp. 329-340.
- Timoshenko, S. P. & Young, D. H., 1965. *Theory of Structures.* s.l.:Mcgraw - Hill College.
- Torrijos, M. C., Barragan, B. E. & Zerbino, R. L., 2010. Placing conditions, mesostructural characteristics and post-cracking response of fibre reinforced self-compacting concretes. *Construction and building materials*, Volume 24, pp. 1078-1085.
- Truesdell, C. & Toupin, R., 1960. *The classical field theories.* Berlín: Springer.
- UNICEMENTO, 2003. *UNI 11039 - Concrete reinforced with steel fibers. Part II: test method for the determination of first cracking strength and ductility indexes.* Italy: Ente di Normazione dei Leganti Idraulici, Malte, Calcestruzzi.
- Valle, M. & Buyukozturk, O., 1993. Behaviour of fiber reinforced high strength concrete under direct shear. *ACI Materials Journal*, 90(2), pp. 122-133.
- Van de Loock, L., 1987. *Influence of steel fibres on the shear transfer in cracks.* s.l., s.n., pp. 1101-1112.
- Vandewalle, L., Heirman, G. & Van Rickstal, F., 2008. *Fibre orientation in self-compacting fibre reinforced concrete.* s.l., s.n., pp. 719 - 728.
- Vasiliev, V. & Morozov, E., 2001. *Mechanics and analysis of composite materials.* Oxford: Elsevier.
- Vecchio, F. & Collins, M., 1986. The modified compression - field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. *ACI Journal* 83 (2), pp. 219 - 231.
- Vecchio, F. J., 2000. Disturbed stress field model for reinforced concrete: formulation. *Journal of structural engineering*, pp. 1070-1077.

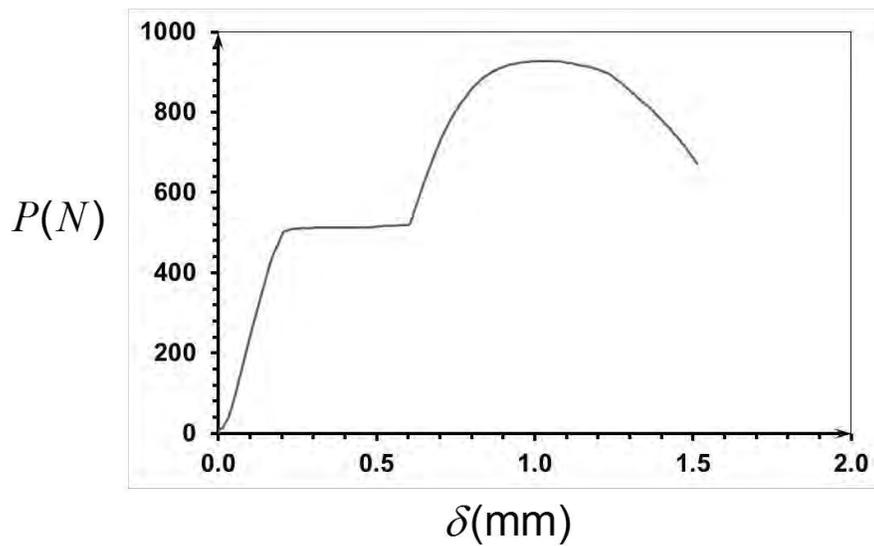
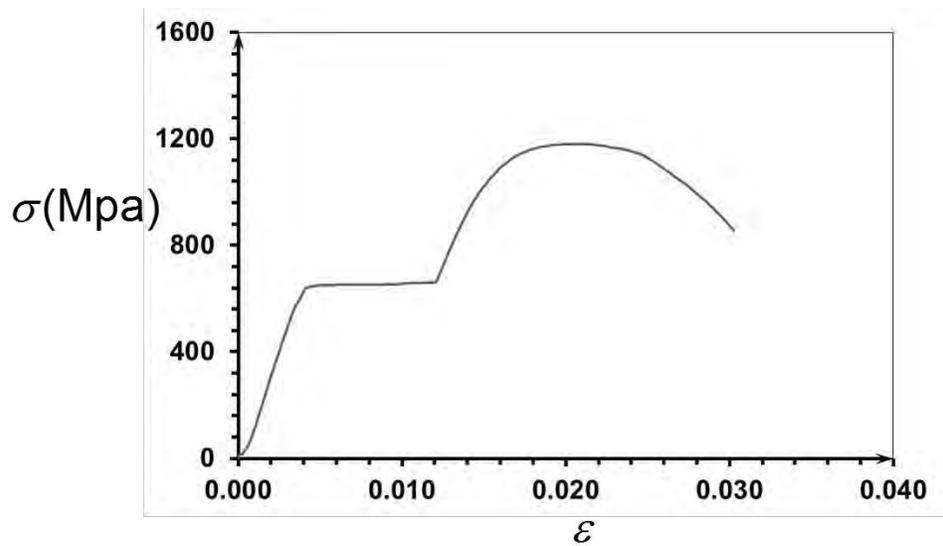
- Vecchio, F. J., 2001. Disturbed stress field model for reinforced concrete: implementation. *Journal of structural engineering*, pp. 12-20.
- Walraven, J. C., 2009. High performance fiber reinforced concrete: progress in knowledge and design codes. *Materials and structures*, Volume 42, pp. 1247-1260.
- Williamson, G. R., 1974. The effect of steel fibers on the compressive strength of concrete. *Fiber reinforced concrete SP-44*, pp. 195-207.
- Yan, A., Wu, K. & Zhang, X., 2002. A quantitative stud on the surface crack pattern of concrete with high content of steel fiber. *Cement and concrete research*, Volume 32, pp. 1371-1375.
- Yazici, S., Inan, G. & Tabak, V., 2007. Effect of aspect ratio and volume fraction of steel fiber on the mechanical properties of SFRC. *Construction and building materials*, Volume 21, pp. 1250-1253.
- Zhang, J. & Li, V., 2004. Simulation of crack propagation in fiber-reinforced concrete by fracture mechanics. *Cement and Concrete Research*, Volume 34, pp. 333-339.
- Zile, E. & Zile, O., 2013. Effect of the fiber geometry on the pullout response fo mechanically deformed steel fibers. *Cement and concrete research*, Volume 44, pp. 18-24.



**A. Anexo: Caracterización de fibras  
– Resultados de ensayos de Tracción**

**Ensayo de tracción****Fibra tipo A | Dramix® RL 45/50 BN**

Probeta	<b>A-1</b>
Longitud (mm)	50.2
diametro (mm)	1
área (mm <sup>2</sup> )	0.7854

**Curva carga - desplazamiento****Curva esfuerzo-deformación unitaria**

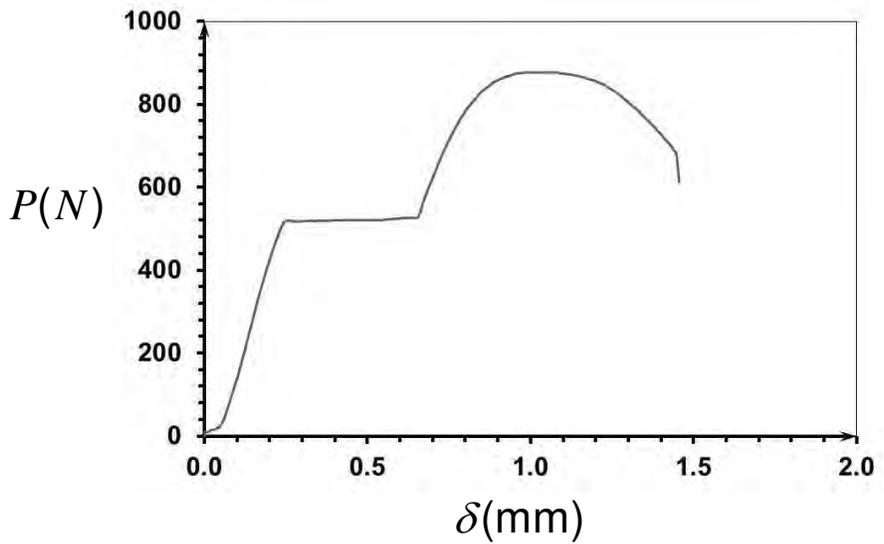
**Ensayo de tracción**

**Fibra tipo A | Dramix® RL 45/50 BN**

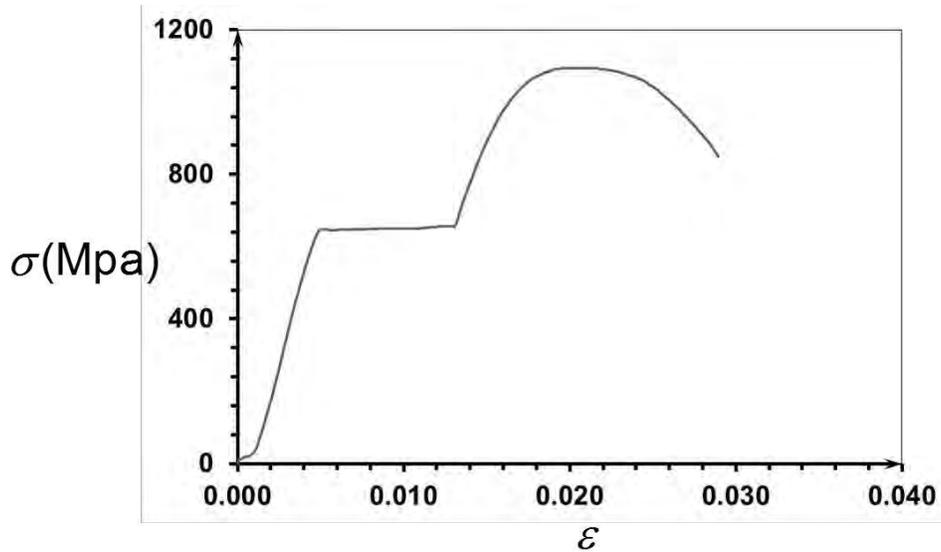
Probeta	<b>A-2</b>
Longitud (mm)	49.97
diametro (mm)	1.01
área (mm <sup>2</sup> )	0.8012



**Curva carga - desplazamiento**

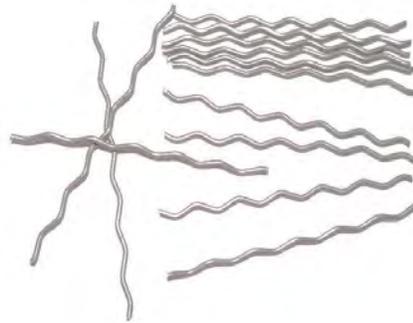
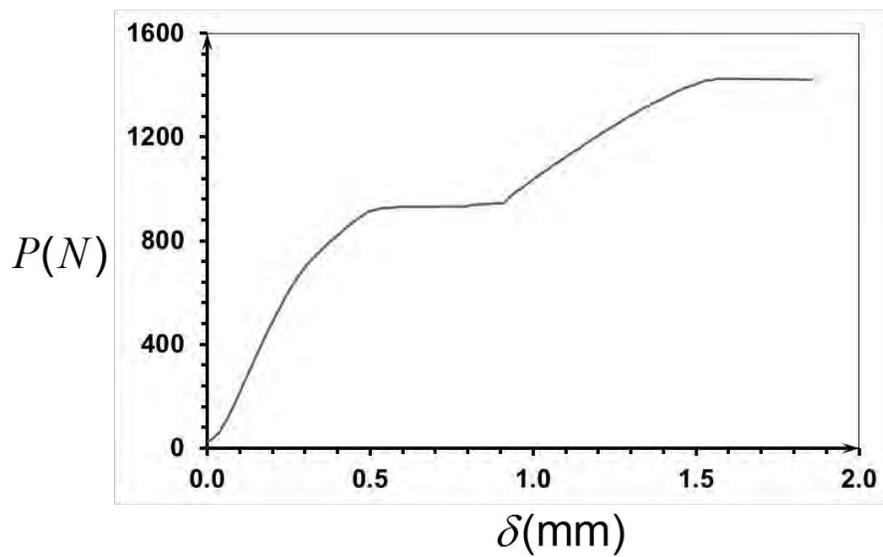
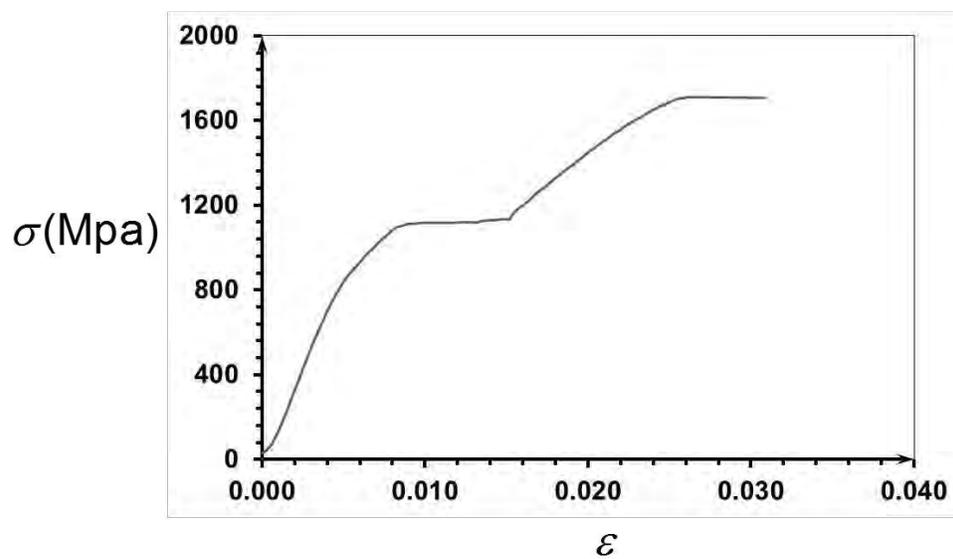


**Curva esfuerzo-deformación unitaria**



**Ensayo de tracción****Fibra tipo B Circular ondulada**

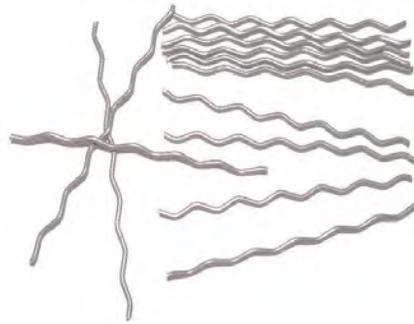
Probeta	<b>B-1</b>
Longitud (mm)	50.5
diametro (mm)	1.03
área (mm <sup>2</sup> )	0.8332

**Curva carga - desplazamiento****Curva esfuerzo-deformación unitaria**

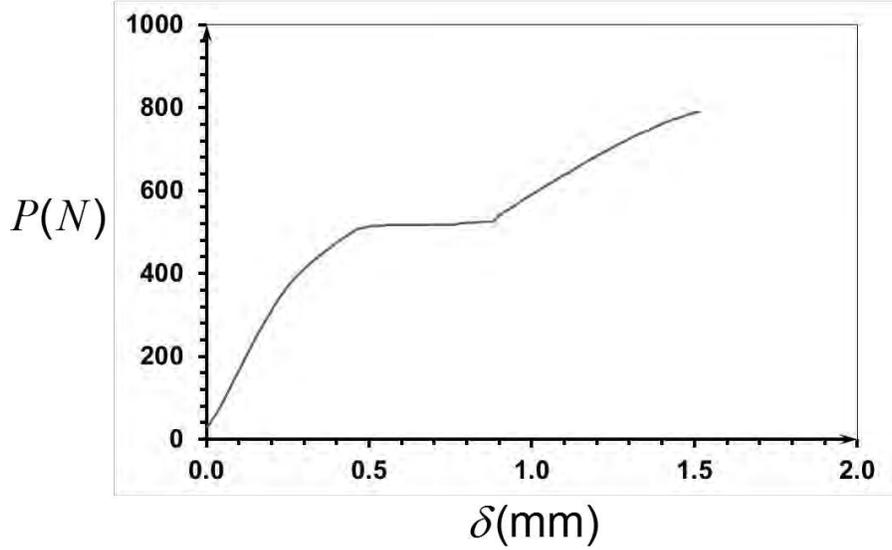
**Ensayo de tracción**

**Fibra tipo B Circular ondulada**

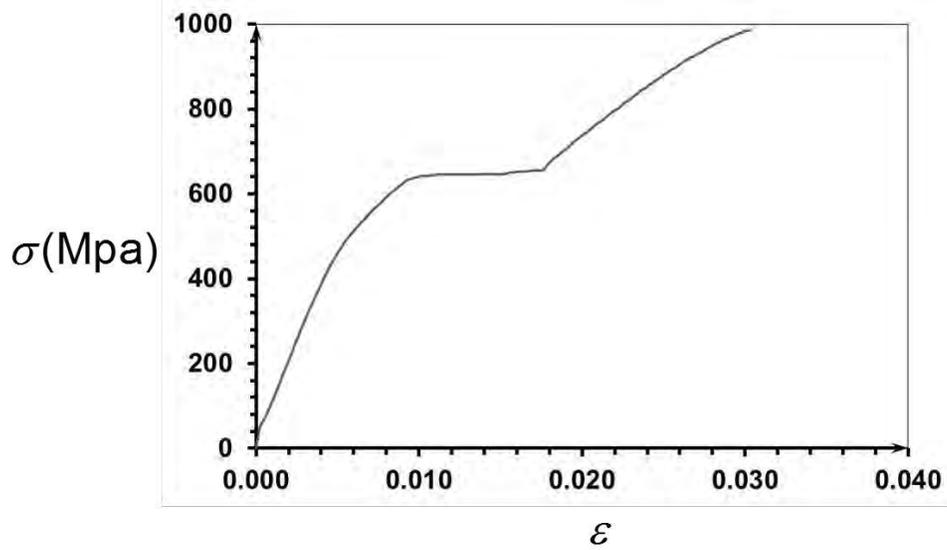
Probeta	<b>B-2</b>
Longitud (mm)	50.5
diametro (mm)	1.1
área (mm <sup>2</sup> )	0.9503



**Curva carga - desplazamiento**

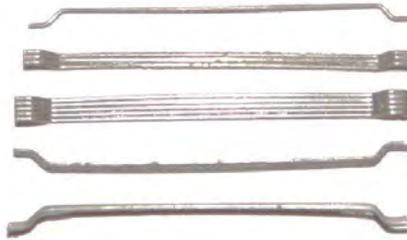
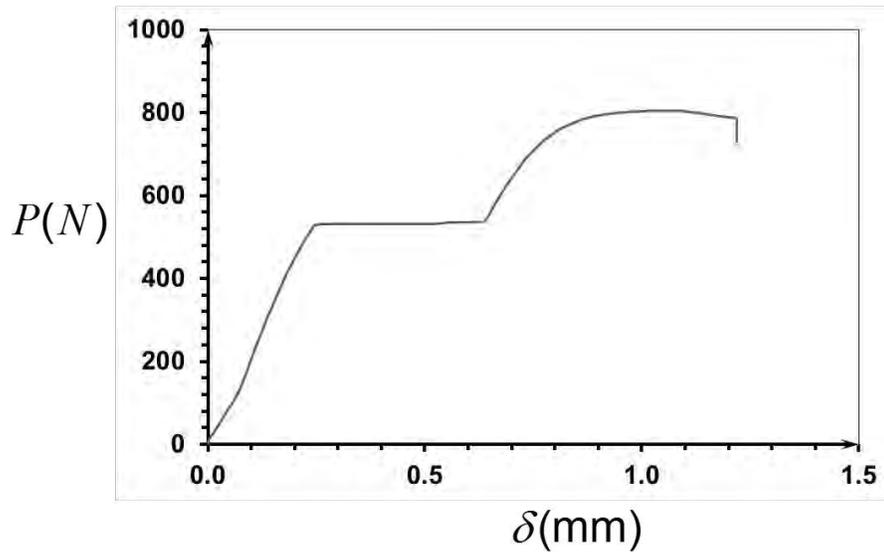
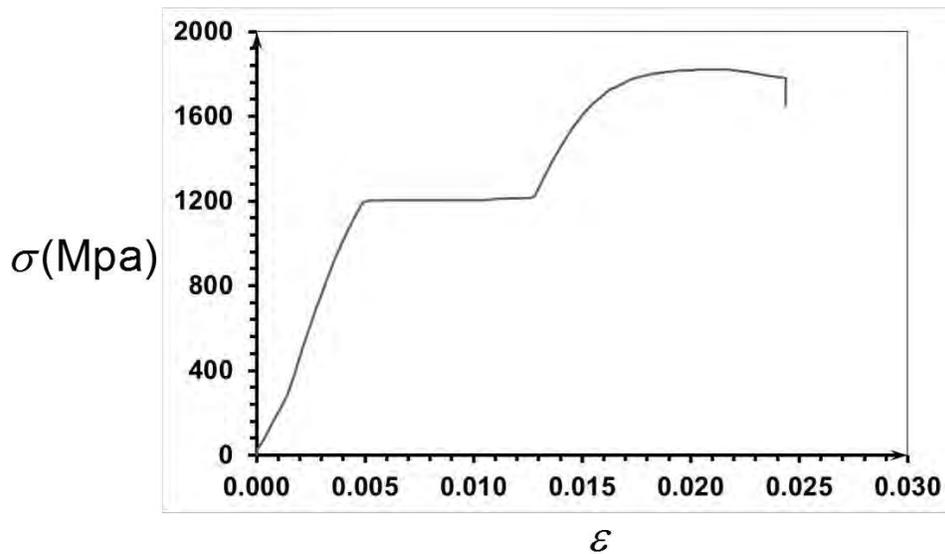


**Curva esfuerzo-deformación unitaria**



**Ensayo de tracción****Fibra tipo C** **Dramix® RL 60/45 BN**

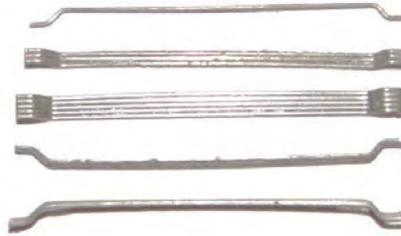
Probeta	<b>C-1</b>
Longitud (mm)	60.1
diametro (mm)	0.75
área (mm <sup>2</sup> )	0.4418

**Curva carga - desplazamiento****Curva esfuerzo-deformación unitaria**

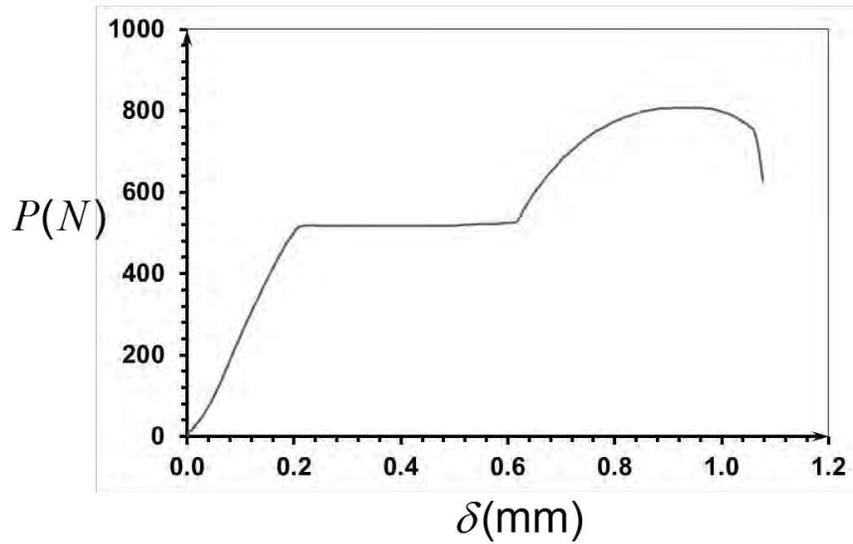
**Ensayo de tracción**

**Fibra tipo C | Dramix® RL 60/45 BN**

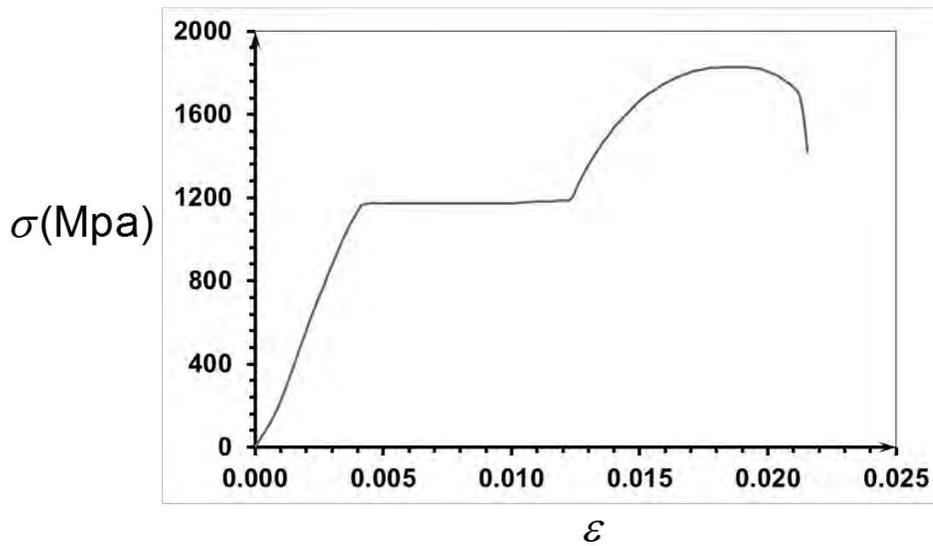
Probeta	<b>C-2</b>
Longitud (mm)	60.1
diámetro (mm)	0.74
área (mm <sup>2</sup> )	0.4301



**Curva carga - desplazamiento**

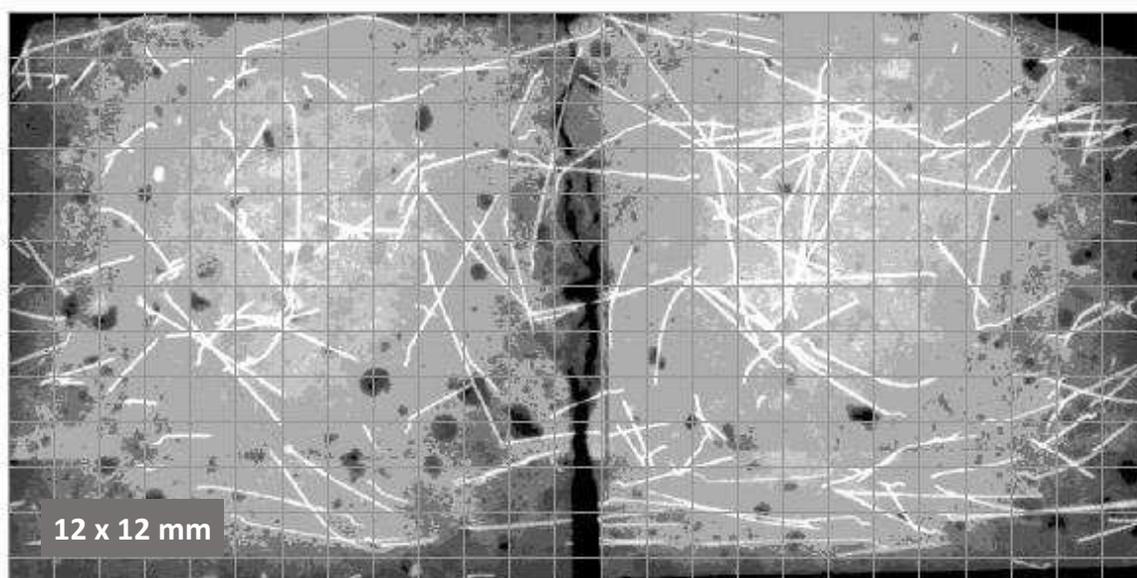
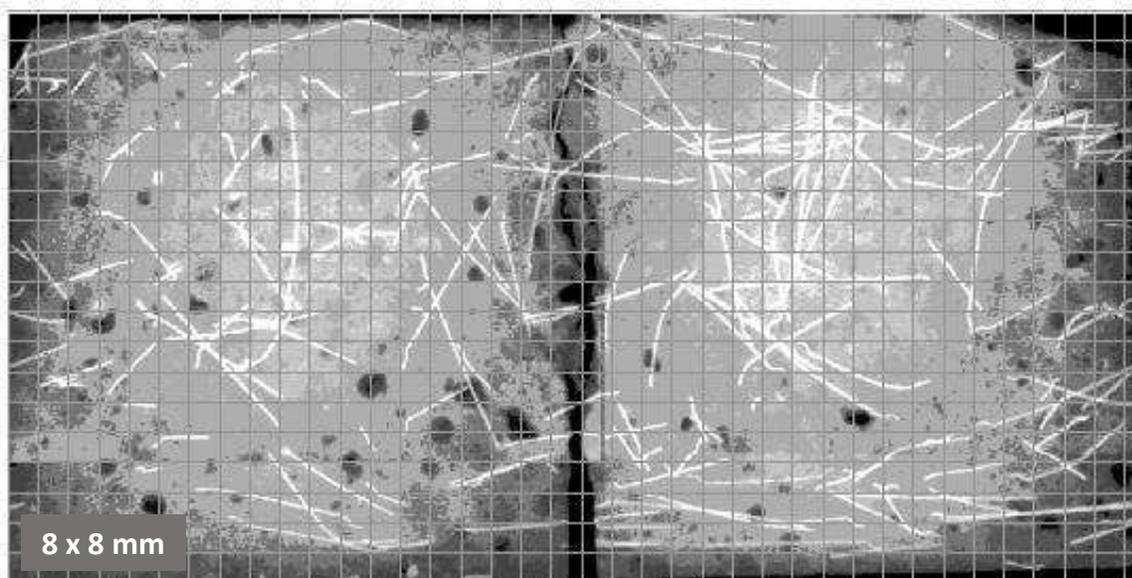


**Curva esfuerzo-deformación unitaria**



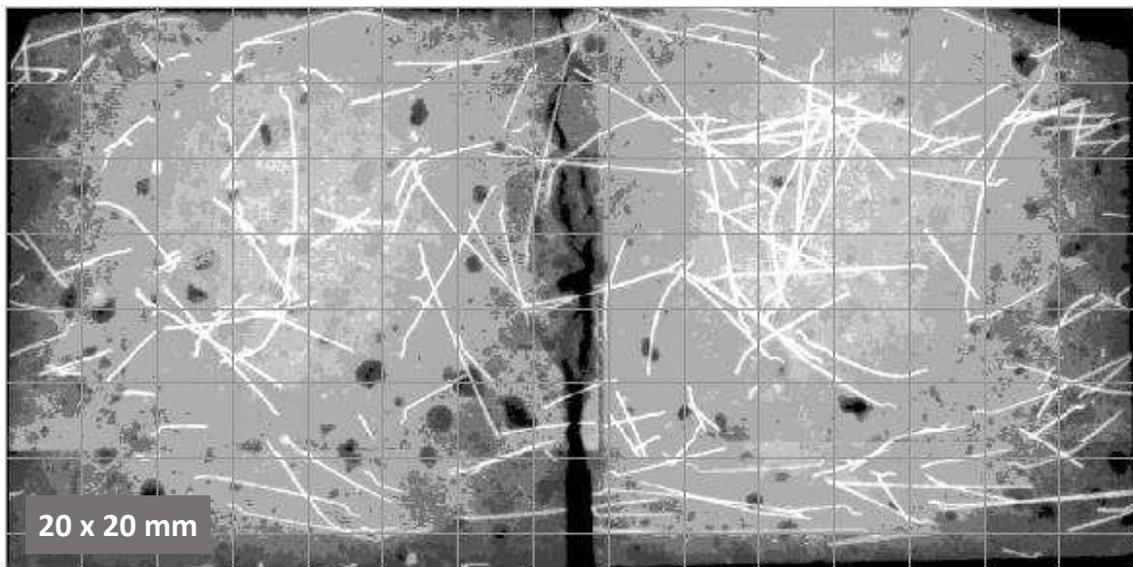
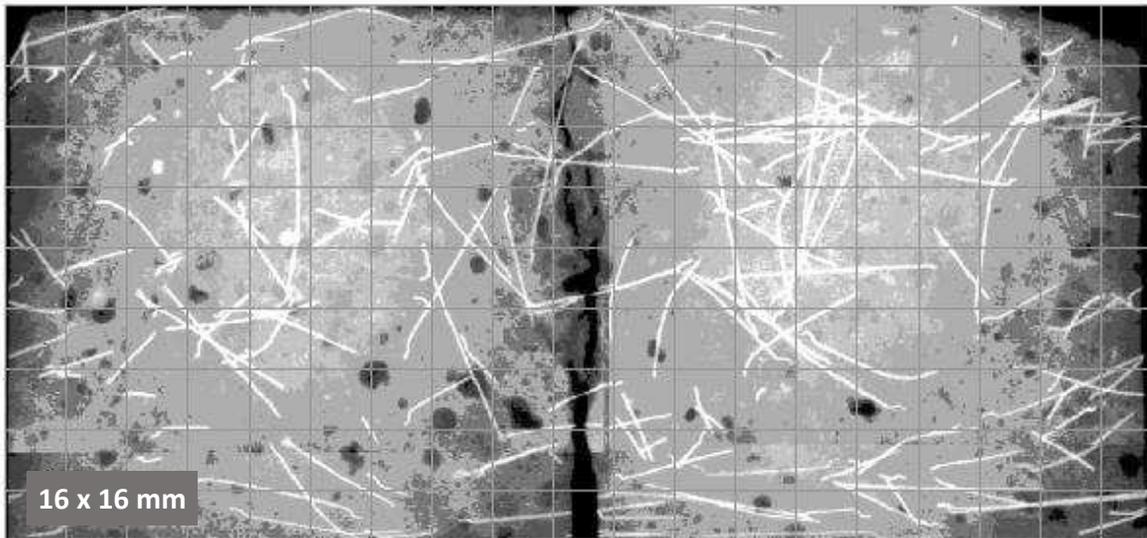


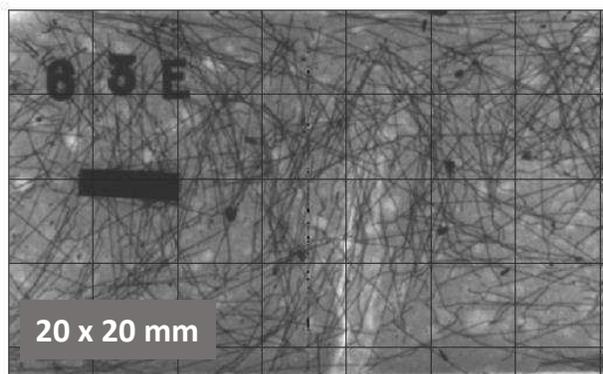
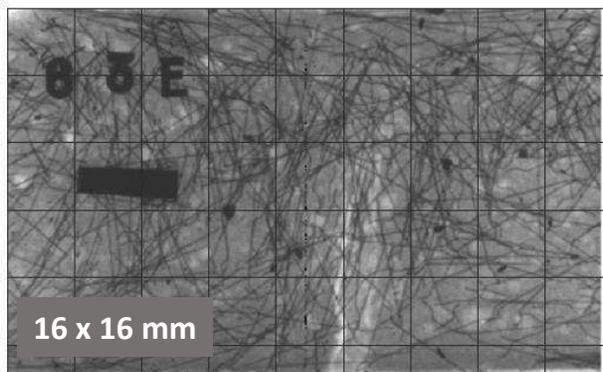
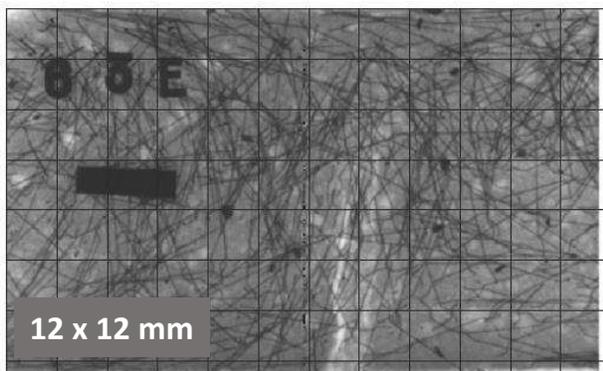
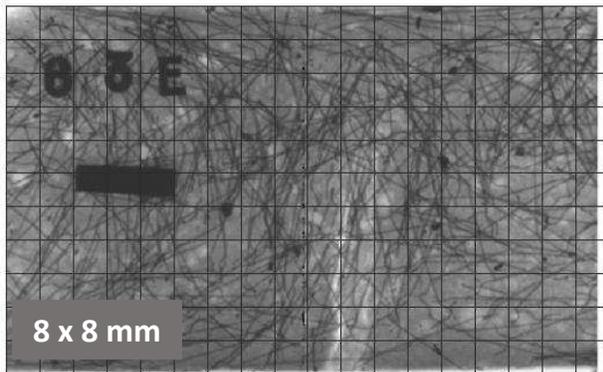
**B. Anexo: Radiografías empleadas  
en el cálculo de coeficiente de  
isotropía**

**FOTO 1**

Fuente: (Vandewalle, et al., 2008)

**FOTO 1**



**FOTO 2**

Fuente: (Robins, et al., 2003)

**C. Anexo: Tablas de cálculo del  
coeficiente de isotropía y del  
coeficiente de dispersión**

<b>TM 20 - FOTO 1 ESPELOR DE LA PROBETA 30mm (1T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coficiente de Isotropía</b>	<b>Coficiente de Dispersión</b>
1	30.4589	0.5635	0.0685
2	16.2040	0.7501	0.0365
3	2.6038	0.4192	0.0059
4	36.5140	0.5785	0.0822
5	1.6094	0.7262	0.0036
6	31.4867	0.6516	0.0708
7	26.6732	0.3103	0.0600
8	10.8153	0.6920	0.0243
9	6.3388	0.6516	0.0143
10	4.3525	0.4679	0.0098
11	13.2889	0.3301	0.0299
12	18.2598	0.1057	0.0411
13	4.4276	0.7624	0.0100
14	21.5571	0.4521	0.0485
15	6.2314	0.8405	0.0140
16	9.1005	0.3645	0.0205
17	6.1631	0.5322	0.0139
18	16.3857	0.5811	0.0369
19	8.4539	0.2753	0.0190
20	1.6809	0.8167	0.0038
21	11.2534	0.0000	0.0253
22	0.7787	0.0000	0.0018
23	7.6960	0.1433	0.0173
24	12.9516	0.1722	0.0291
25	12.4240	0.3587	0.0280
26	34.0889	0.2255	0.0767
27	8.2564	0.6484	0.0186
28	12.0749	0.4685	0.0272
29	5.4131	0.3506	0.0122
30	0.0000	0.0000	0.0000
31	13.4848	0.0000	0.0303
32	3.7473	0.0000	0.0084
33	53.3426	0.7292	0.1200
34	38.2581	0.5054	0.0861
35	1.2210	0.1103	0.0027
36	3.8991	0.2728	0.0088
37	0.0000	0.0000	0.0000
38	0.6305	0.6305	0.0014
39	0.4733	0.4733	0.0011
40	13.8972	0.2223	0.0313

<b>TM 20 - FOTO 1 ESPESOR DE LA PROBETA 60mm (2T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	41.2742	0.6951	0.0929
2	16.9827	0.7812	0.0382
3	54.9803	0.4692	0.1237
4	48.5889	0.5289	0.1093
5	14.0334	0.5762	0.0316
6	37.6498	0.7843	0.0847
7	35.1271	0.3506	0.0790
8	14.7144	0.5044	0.0331
9	44.5969	0.6874	0.1003
10	10.6913	0.5744	0.0241
11	47.3778	0.2941	0.1066
12	30.3347	0.3125	0.0683
13	8.1749	0.7248	0.0184
14	22.3358	0.4528	0.0503
15	17.0467	0.7872	0.0384
16	17.5544	0.3704	0.0395
17	36.6220	0.7288	0.0824
18	20.8133	0.7113	0.0468
19	22.3511	0.3089	0.0503
20	55.0235	0.9026	0.1238
21	47.7674	0.6747	0.1075
22	4.5260	0.1099	0.0102
23	9.3054	0.4741	0.0209
24	19.1830	0.6110	0.0432
25	43.9107	0.8051	0.0988
26	37.9880	0.2422	0.0855
27	9.9373	0.7677	0.0224
28	25.3638	0.5368	0.0571
29	5.4131	0.4626	0.0122
30	11.2534	0.0000	0.0253
31	43.9437	0.6235	0.0989
32	37.8362	0.2317	0.0851
33	66.8534	0.7608	0.1504
34	38.2581	0.3213	0.0861
35	1.9997	0.1320	0.0045
36	9.3122	0.3071	0.0210
37	10.9205	0.7146	0.0246
38	15.1202	0.3128	0.0340
39	60.0725	0.7701	0.1352
40	15.5781	0.5092	0.0351

<b>TM 20 - FOTO 1 ESPESOR DE LA PROBETA 90mm (3T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	53.6982	0.7956	0.1208
2	27.7980	0.8258	0.0625
3	57.5841	0.4692	0.1296
4	100.9654	0.6350	0.2272
5	16.6372	0.8650	0.0374
6	38.4285	0.7864	0.0865
7	49.0243	0.3720	0.1103
8	36.2715	0.4937	0.0816
9	71.2701	0.6587	0.1604
10	15.0438	0.5505	0.0338
11	58.1931	0.3877	0.1309
12	61.8214	0.5243	0.1391
13	18.9902	0.8218	0.0427
14	33.1511	0.5439	0.0746
15	29.1216	0.7052	0.0655
16	19.2353	0.3704	0.0433
17	44.3180	0.6026	0.0997
18	33.7649	0.7475	0.0760
19	35.8359	0.3198	0.0806
20	66.2769	0.7754	0.1491
21	51.5147	0.6566	0.1159
22	8.9536	0.7326	0.0201
23	30.8625	0.4622	0.0694
24	23.5355	0.6031	0.0530
25	56.8623	0.7223	0.1279
26	48.8033	0.3719	0.1098
27	19.0378	0.7060	0.0428
28	55.8227	0.5531	0.1256
29	5.4131	0.6772	0.0122
30	16.6665	0.3730	0.0375
31	57.4285	0.5944	0.1292
32	54.0402	0.4504	0.1216
33	97.3123	0.6954	0.2190
34	38.2581	0.5397	0.0861
35	32.4586	0.5162	0.0730
36	15.5436	0.5006	0.0350
37	17.2593	0.8932	0.0388
38	16.7296	0.7411	0.0376
39	72.1474	0.6457	0.1623
40	28.5297	0.4712	0.0642

<b>TM 20 - FOTO 1 ESPESOR DE LA PROBETA 120mm (4T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	56.3020	0.8407	0.1267
2	29.0190	0.7285	0.0653
3	65.2801	0.6916	0.1469
4	137.4794	0.6182	0.3093
5	50.7261	0.6186	0.1141
6	91.7711	0.9002	0.2065
7	61.4483	0.3721	0.1383
8	49.7563	0.4896	0.1120
9	79.5265	0.6841	0.1789
10	19.4714	0.6918	0.0438
11	64.6860	0.3907	0.1455
12	93.3081	0.6673	0.2099
13	19.7689	0.8164	0.0445
14	36.8984	0.5330	0.0830
15	50.6787	0.5958	0.1140
16	30.4887	0.4098	0.0686
17	60.7037	0.6215	0.1366
18	37.5122	0.7124	0.0844
19	67.3226	0.4741	0.1515
20	118.6534	0.8264	0.2670
21	57.6778	0.5966	0.1298
22	17.2100	0.7556	0.0387
23	44.7597	0.4377	0.1007
24	50.2087	0.6553	0.1130
25	63.0937	0.7617	0.1420
26	85.3173	0.5186	0.1920
27	72.3804	0.7341	0.1629
28	86.2816	0.5556	0.1941
29	5.4131	0.4771	0.0122
30	43.3397	0.4265	0.0975
31	70.3801	0.5518	0.1584
32	66.1151	0.5102	0.1488
33	110.6012	0.5861	0.2489
34	38.2581	0.5517	0.0861
35	32.4586	0.5162	0.0730
36	21.7750	0.5982	0.0490
37	53.7733	0.7999	0.1210
38	47.1885	0.5292	0.1062
39	110.4055	0.6874	0.2484
40	81.8723	0.5731	0.1842

<b>TM 20 - FOTO 1 ESPELOR DE LA PROBETA 150mm (5T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coficiente de Isotropía</b>	<b>Coficiente de Dispersión</b>
1	69.7868	0.9121	0.1570
2	42.5038	0.6978	0.0956
3	66.9610	0.7430	0.1507
4	141.8319	0.7384	0.3191
5	61.5414	0.6317	0.1385
6	99.4671	0.7731	0.2238
7	70.5488	0.4074	0.1587
8	56.0951	0.6258	0.1262
9	109.9854	0.7515	0.2475
10	22.0752	0.6780	0.0497
11	91.3592	0.4869	0.2056
12	99.6469	0.7707	0.2242
13	25.1820	0.7265	0.0567
14	41.3260	0.6209	0.0930
15	50.6787	0.5958	0.1140
16	31.2674	0.5166	0.0704
17	61.4824	0.6209	0.1383
18	41.9398	0.7419	0.0944
19	73.8155	0.4620	0.1661
20	122.4007	0.8600	0.2754
21	79.2349	0.5561	0.1783
22	30.7208	0.8047	0.0691
23	53.8602	0.4601	0.1212
24	81.6954	0.7800	0.1838
25	64.3147	0.6904	0.1447
26	101.7030	0.5464	0.2288
27	78.5435	0.7930	0.1767
28	97.0969	0.5766	0.2185
29	5.4131	0.4452	0.0122
30	73.7986	0.5565	0.1660
31	71.1588	0.5514	0.1601
32	67.7960	0.6007	0.1525
33	112.2106	0.6135	0.2525
34	38.2581	0.5363	0.0861
35	45.9694	0.5836	0.1034
36	30.2289	0.4393	0.0680
37	59.9364	0.7063	0.1349
38	99.5650	0.5605	0.2240
39	112.0864	0.7244	0.2522
40	81.8723	0.5731	0.1842

<b>TM 20 - FOTO 2 ESPESOR DE LA PROBETA 30mm (1T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	307.9253	0.7102	0.2309
2	239.5758	0.5472	0.1797
3	320.9087	0.4585	0.2407
4	259.3230	0.7632	0.1945
5	339.5403	0.6290	0.2547
6	223.5039	0.6399	0.1676
7	357.0168	0.7623	0.2678
8	299.2663	0.5307	0.2244
9	231.3296	0.6680	0.1735
10	388.5809	0.3706	0.2914
11	218.6449	0.6181	0.1640
12	391.7031	0.6060	0.2938
13	391.1942	0.6645	0.2934
14	307.2970	0.6378	0.2305
15	282.2656	0.5041	0.2117
16	383.2924	0.7009	0.2875
17	201.8876	0.5207	0.1514
18	205.8905	0.3818	0.1544
19	252.5993	0.5810	0.1894
20	376.7424	0.7803	0.2826

<b>TM 20 - FOTO 2 ESPESOR DE LA PROBETA 60mm (2T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	628.8340	0.5757	0.4716
2	441.4634	0.8446	0.3311
3	712.6118	0.8587	0.5345
4	566.6200	0.7905	0.4250
5	647.4656	0.7236	0.4856
6	482.8269	0.7617	0.3621
7	696.5571	0.9209	0.5224
8	517.9112	0.8181	0.3884
9	538.6266	0.6544	0.4040
10	709.4896	0.5280	0.5321
11	595.3873	0.8189	0.4465
12	597.5936	0.7707	0.4482
13	699.1195	0.8127	0.5243
14	698.4912	0.7493	0.5239
15	589.5626	0.6012	0.4422
16	766.5848	0.7009	0.5749
17	509.8129	0.7456	0.3824
18	205.8905	0.6432	0.1544
19	551.8656	0.5655	0.4139
20	608.0720	0.7863	0.4561

<b>TM 20 - FOTO 2 ESPESOR DE LA PROBETA 90mm (3T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	928.1003	0.7437	0.6961
2	664.9673	0.8101	0.4987
3	1101.1927	0.7920	0.8259
4	955.2009	0.6558	0.7164
5	906.7886	0.7425	0.6801
6	859.5693	0.9007	0.6447
7	949.1564	0.8239	0.7119
8	719.7988	0.7736	0.5398
9	927.2075	0.6475	0.6954
10	1049.0299	0.5929	0.7868
11	902.6843	0.8440	0.6770
12	828.9232	0.7939	0.6217
13	998.3858	0.8678	0.7488
14	1005.7882	0.7443	0.7543
15	946.5794	0.8040	0.7099
16	1074.5101	0.8258	0.8059
17	769.1359	0.7941	0.5769
18	205.8905	0.8172	0.1544
19	943.5687	0.7261	0.7077
20	928.9807	0.7882	0.6967

<b>TM 20 - FOTO 2 ESPESOR DE LA PROBETA 120mm (4T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	1319.8034	0.8973	0.9899
2	904.5431	0.7365	0.6784
3	1360.5157	0.8142	1.0204
4	1194.7767	0.7645	0.8961
5	1298.4917	0.9093	0.9739
6	1099.1451	0.8200	0.8244
7	1337.7373	0.7229	1.0033
8	951.1284	0.7489	0.7133
9	1248.1162	0.6720	0.9361
10	1331.2955	0.5716	0.9985
11	1285.9767	0.8315	0.9645
12	1047.5681	0.8096	0.7857
13	1355.4026	0.8818	1.0166
14	1207.6758	0.7309	0.9058
15	1177.9090	0.7790	0.8834
16	1293.1550	0.8550	0.9699
17	1160.8390	0.8627	0.8706
18	205.8905	0.7037	0.1544
19	1149.4592	0.7011	0.8621
20	1312.2731	0.8044	0.9842

<b>TM 20 - FOTO 2 ESPESOR DE LA PROBETA 150mm (5T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	1559.3792	0.8860	1.1695
2	1212.4684	0.7496	0.9094
3	1749.0966	0.7301	1.3118
4	1551.7935	0.8627	1.1638
5	1655.5085	0.9353	1.2416
6	1407.0704	0.8135	1.0553
7	1543.6278	0.6620	1.1577
8	1272.0371	0.8107	0.9540
9	1530.3818	0.6357	1.1478
10	1630.5618	0.6015	1.2229
11	1642.9935	0.8222	1.2322
12	1278.8977	0.8313	0.9592
13	1614.7256	0.9242	1.2110
14	1590.9682	0.7307	1.1932
15	1566.4899	0.7443	1.1749
16	1600.4520	0.8477	1.2003
17	1552.5421	0.7882	1.1644
18	205.8905	0.6574	0.1544
19	1408.7822	0.7529	1.0566
20	1703.9762	0.8847	1.2780

<b>TM 16 - FOTO 1 ESPESOR DE LA PROBETA 30mm (1T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	0.0000	0.0000	0.0000
2	32.6726	0.2336	0.1149
3	15.7781	0.7682	0.0555
4	49.8416	0.6523	0.1752
5	33.4460	0.5293	0.1176
6	38.1958	0.5575	0.1343
7	28.0581	0.1645	0.0986
8	16.0889	0.3905	0.0566
9	26.5970	0.2356	0.0935
10	31.0809	0.5419	0.1093
11	58.3422	0.7098	0.2051
12	35.6940	0.5140	0.1255
13	32.7878	0.4360	0.1153
14	14.8217	0.4317	0.0521
15	21.7253	0.2992	0.0764
16	20.1234	0.3263	0.0707
17	53.5294	0.1779	0.1882
18	68.1257	0.5807	0.2395
19	24.5435	0.3101	0.0863
20	34.1903	0.1640	0.1202
21	1.7096	0.0000	0.0060
22	6.3495	0.6380	0.0223
23	19.8851	0.1141	0.0699
24	3.9512	0.4975	0.0139
25	2.6054	0.2676	0.0092
26	16.0097	0.0637	0.0563
27	32.2035	0.5612	0.1132
28	1.1992	0.3342	0.0042
29	0.0000	0.0000	0.0000
30	10.1842	0.0524	0.0358
31	3.9653	0.1584	0.0139
32	2.2727	0.1405	0.0080
33	1.7527	0.2670	0.0062
34	6.4415	0.6288	0.0226
35	13.2251	0.1061	0.0465
36	41.2565	0.4522	0.1450
37	6.6738	0.2621	0.0235
38	7.6218	0.6652	0.0268
39	1.8489	0.3183	0.0065
40	19.7324	0.0396	0.0694

<b>TM 16 - FOTO 1 ESPESOR DE LA PROBETA 60mm (2T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	0.0000	0.0524	0.0000
2	32.6726	0.1642	0.1149
3	15.7781	0.7156	0.0555
4	49.8416	0.6684	0.1752
5	33.4460	0.5293	0.1176
6	38.1958	0.6770	0.1343
7	28.0581	0.5921	0.0986
8	16.0889	0.4794	0.0566
9	26.5970	0.2726	0.0935
10	31.0809	0.5684	0.1093
11	58.3422	0.7366	0.2051
12	35.6940	0.4950	0.1255
13	32.7878	0.8032	0.1153
14	14.8217	0.9048	0.0521
15	21.7253	0.6703	0.0764
16	20.1234	0.2719	0.0707
17	53.5294	0.5181	0.1882
18	68.1257	0.5536	0.2395
19	24.5435	0.3845	0.0863
20	34.1903	0.5237	0.1202
21	1.7096	0.3057	0.0060
22	6.3495	0.4404	0.0223
23	19.8851	0.4191	0.0699
24	3.9512	0.6992	0.0139
25	2.6054	0.1940	0.0092
26	16.0097	0.7950	0.0563
27	32.2035	0.5596	0.1132
28	1.1992	0.2589	0.0042
29	0.0000	0.2621	0.0000
30	10.1842	0.1838	0.0358
31	3.9653	0.7584	0.0139
32	2.2727	0.2930	0.0080
33	1.7527	0.1890	0.0062
34	6.4415	0.2730	0.0226
35	13.2251	0.1061	0.0465
36	41.2565	0.5451	0.1450
37	6.6738	0.5833	0.0235
38	7.6218	0.3939	0.0268
39	1.8489	0.2620	0.0065
40	19.7324	0.1970	0.0694

<b>TM 16 - FOTO 1 ESPEJOR DE LA PROBETA 90mm (3T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	0.0000	0.6130	0.0000
2	32.6726	0.1577	0.1149
3	15.7781	0.7843	0.0555
4	49.8416	0.6633	0.1752
5	33.4460	0.8194	0.1176
6	38.1958	0.5108	0.1343
7	28.0581	0.5757	0.0986
8	16.0889	0.5118	0.0566
9	26.5970	0.2726	0.0935
10	31.0809	0.5653	0.1093
11	58.3422	0.7198	0.2051
12	35.6940	0.5119	0.1255
13	32.7878	0.7948	0.1153
14	14.8217	0.6973	0.0521
15	21.7253	0.7082	0.0764
16	20.1234	0.4788	0.0707
17	53.5294	0.5217	0.1882
18	68.1257	0.5999	0.2395
19	24.5435	0.4489	0.0863
20	34.1903	0.5759	0.1202
21	1.7096	0.5128	0.0060
22	6.3495	0.5653	0.0223
23	19.8851	0.6229	0.0699
24	3.9512	0.5976	0.0139
25	2.6054	0.2191	0.0092
26	16.0097	0.8021	0.0563
27	32.2035	0.6583	0.1132
28	1.1992	0.5227	0.0042
29	0.0000	0.6318	0.0000
30	10.1842	0.2485	0.0358
31	3.9653	0.7584	0.0139
32	2.2727	0.7200	0.0080
33	1.7527	0.7650	0.0062
34	6.4415	0.7002	0.0226
35	13.2251	0.1213	0.0465
36	41.2565	0.6587	0.1450
37	6.6738	0.5975	0.0235
38	7.6218	0.4656	0.0268
39	1.8489	0.5783	0.0065
40	19.7324	0.6139	0.0694

<b>TM 16 - FOTO 1      ESPESOR DE LA PROBETA 120mm (4T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	0.0000	0.5927	0.0000
2	32.6726	0.1914	0.1149
3	15.7781	0.7224	0.0555
4	49.8416	0.6922	0.1752
5	33.4460	0.7154	0.1176
6	38.1958	0.4507	0.1343
7	28.0581	0.5833	0.0986
8	16.0889	0.8253	0.0566
9	26.5970	0.7515	0.0935
10	31.0809	0.5693	0.1093
11	58.3422	0.7203	0.2051
12	35.6940	0.4625	0.1255
13	32.7878	0.7824	0.1153
14	14.8217	0.6543	0.0521
15	21.7253	0.7086	0.0764
16	20.1234	0.4314	0.0707
17	53.5294	0.8228	0.1882
18	68.1257	0.7161	0.2395
19	24.5435	0.9122	0.0863
20	34.1903	0.6524	0.1202
21	1.7096	0.5583	0.0060
22	6.3495	0.7324	0.0223
23	19.8851	0.7417	0.0699
24	3.9512	0.7280	0.0139
25	2.6054	0.3900	0.0092
26	16.0097	0.7373	0.0563
27	32.2035	0.6974	0.1132
28	1.1992	0.5227	0.0042
29	0.0000	0.6016	0.0000
30	10.1842	0.2565	0.0358
31	3.9653	0.7518	0.0139
32	2.2727	0.5679	0.0080
33	1.7527	0.7892	0.0062
34	6.4415	0.6660	0.0226
35	13.2251	0.4795	0.0465
36	41.2565	0.6081	0.1450
37	6.6738	0.5687	0.0235
38	7.6218	0.5117	0.0268
39	1.8489	0.6163	0.0065
40	19.7324	0.6032	0.0694

<b>TM 16 - FOTO 1      ESPESOR DE LA PROBETA 150mm (5T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	0.0000	0.5287	0.0000
2	32.6726	0.1516	0.1149
3	15.7781	0.5333	0.0555
4	49.8416	0.6873	0.1752
5	33.4460	0.7123	0.1176
6	38.1958	0.4507	0.1343
7	28.0581	0.6335	0.0986
8	16.0889	0.9182	0.0566
9	26.5970	0.6959	0.0935
10	31.0809	0.6416	0.1093
11	58.3422	0.7668	0.2051
12	35.6940	0.5034	0.1255
13	32.7878	0.7770	0.1153
14	14.8217	0.7355	0.0521
15	21.7253	0.7333	0.0764
16	20.1234	0.4888	0.0707
17	53.5294	0.6913	0.1882
18	68.1257	0.7251	0.2395
19	24.5435	0.8545	0.0863
20	34.1903	0.6566	0.1202
21	1.7096	0.6565	0.0060
22	6.3495	0.7105	0.0223
23	19.8851	0.7042	0.0699
24	3.9512	0.8056	0.0139
25	2.6054	0.5672	0.0092
26	16.0097	0.7470	0.0563
27	32.2035	0.6604	0.1132
28	1.1992	0.5289	0.0042
29	0.0000	0.6168	0.0000
30	10.1842	0.2700	0.0358
31	3.9653	0.6717	0.0139
32	2.2727	0.5554	0.0080
33	1.7527	0.7891	0.0062
34	6.4415	0.7679	0.0226
35	13.2251	0.4691	0.0465
36	41.2565	0.6442	0.1450
37	6.6738	0.5687	0.0235
38	7.6218	0.4838	0.0268
39	1.8489	0.8045	0.0065
40	19.7324	0.5965	0.0694

<b>TM 16 - FOTO 2 ESPESOR DE LA PROBETA 30mm (1T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	183.9611	0.5302	0.2156
2	262.2580	0.6831	0.3073
3	151.4616	0.4584	0.1775
4	178.7914	0.6057	0.2095
5	227.7163	0.5199	0.2669
6	196.8618	0.5166	0.2307
7	231.1561	0.4965	0.2709
8	166.2064	0.3671	0.1948
9	257.5302	0.6655	0.3018
10	263.6663	0.5628	0.3090
11	223.5713	0.7031	0.2620
12	234.1161	0.6378	0.2744
13	177.8960	0.6184	0.2085
14	273.4839	0.7940	0.3205
15	219.3545	0.8828	0.2571
16	198.9374	0.9488	0.2331
17	112.6809	0.6504	0.1320
18	207.0746	0.5499	0.2427
19	100.2322	0.3840	0.1175
20	232.2780	0.8100	0.2722

<b>TM 16 - FOTO 2 ESPESOR DE LA PROBETA 60mm (2T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	362.7525	0.8957	0.4251
2	485.8293	0.8445	0.5693
3	382.6177	0.7363	0.4484
4	362.7525	0.8957	0.4251
5	491.3826	0.6330	0.5758
6	348.3234	0.5851	0.4082
7	488.6863	0.9010	0.5727
8	400.3225	0.4918	0.4691
9	408.9918	0.5897	0.4793
10	491.3826	0.6330	0.5758
11	323.8035	0.8579	0.3795
12	491.6463	0.6637	0.5761
13	412.0121	0.8710	0.4828
14	480.5585	0.7898	0.5632
15	418.2919	0.9381	0.4902
16	430.0935	0.7075	0.5040
17	296.6420	0.7412	0.3476
18	403.9364	0.5494	0.4734
19	319.5867	0.5540	0.3745
20	489.8082	0.7421	0.5740

<b>TM 16 - FOTO 2 ESPESOR DE LA PROBETA 90mm (3T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	559.6143	0.8576	0.6558
2	669.7904	0.7636	0.7849
3	548.8241	0.6689	0.6432
4	561.6899	0.9175	0.6582
5	604.0635	0.7282	0.7079
6	461.0043	0.7845	0.5402
7	762.1702	0.9167	0.8932
8	500.5547	0.6547	0.5866
9	587.7832	0.7553	0.6888
10	688.2444	0.8403	0.8065
11	597.2874	0.9341	0.6999
12	765.1302	0.7283	0.8966
13	619.0867	0.8123	0.7255
14	679.4959	0.8485	0.7963
15	597.0833	0.8280	0.6997
16	664.2096	0.8760	0.7784
17	475.4334	0.9520	0.5571
18	677.4203	0.7538	0.7939
19	432.2676	0.6097	0.5066
20	641.2698	0.6607	0.7515

<b>TM 16 - FOTO 2      ESPESOR DE LA PROBETA 120mm (4T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	823.2806	0.8799	0.9648
2	876.8650	0.9085	1.0276
3	782.9402	0.6613	0.9175
4	745.6510	0.8105	0.8738
5	811.1381	0.8875	0.9506
6	638.9003	0.7583	0.7487
7	928.3766	0.7855	1.0879
8	731.7108	0.8569	0.8575
9	861.2671	0.7711	1.0093
10	854.4508	0.7018	1.0013
11	829.5654	0.9030	0.9721
12	949.0913	0.6877	1.1122
13	882.7530	0.9807	1.0345
14	907.2122	0.8302	1.0631
15	774.9793	0.7668	0.9082
16	843.0010	0.8199	0.9879
17	709.5495	0.8670	0.8315
18	900.9916	0.8697	1.0558
19	655.8389	0.8230	0.7686
20	807.4762	0.5789	0.9463

<b>TM 16 - FOTO 2      ESPESOR DE LA PROBETA 150mm (5T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	1030.3552	0.8882	1.2074
2	1108.0211	0.8548	1.2985
3	990.0148	0.7859	1.1602
4	858.3319	0.8700	1.0059
5	1030.4926	0.8878	1.2076
6	870.0564	0.8799	1.0196
7	1135.4512	0.8940	1.3306
8	930.6482	0.8748	1.0906
9	961.4993	0.8577	1.1268
10	1088.5669	0.6894	1.2757
11	1026.4272	0.9444	1.2028
12	1172.6626	0.6972	1.3742
13	1115.0310	0.9527	1.3067
14	1164.7424	0.8329	1.3649
15	973.9167	0.8220	1.1413
16	1075.2790	0.8836	1.2601
17	943.6656	0.8039	1.1059
18	1052.4532	0.9147	1.2333
19	854.7763	0.8681	1.0017
20	1041.5923	0.5904	1.2206

<b>TM 12 - FOTO 1      ESPESOR DE LA PROBETA 30mm (1T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	28.7911	0.7488	0.1799
2	35.9678	0.6679	0.2248
3	22.5960	0.1882	0.1412
4	28.4067	0.4720	0.1775
5	29.9426	0.4117	0.1871
6	28.7408	0.7564	0.1796
7	40.8135	0.1817	0.2551
8	30.6314	0.3507	0.1914
9	33.6167	0.6652	0.2101
10	34.4096	0.6259	0.2151
11	32.4127	0.2423	0.2026
12	30.0518	0.4571	0.1878
13	49.7232	0.6268	0.3108
14	31.4787	0.5239	0.1967
15	29.0547	0.2299	0.1816
16	28.8540	0.2175	0.1803
17	41.5007	0.3107	0.2594
18	45.0502	0.5673	0.2816
19	13.5238	0.6846	0.0845
20	17.8801	0.1558	0.1118
21	6.9320	0.4417	0.0433
22	2.0220	0.0000	0.0126
23	12.4176	0.1457	0.0776
24	4.9203	0.0000	0.0308
25	12.0215	0.0000	0.0751
26	0.0000	0.0000	0.0000
27	6.9622	0.0371	0.0435
28	12.0190	0.0000	0.0751
29	7.0480	0.0000	0.0441
30	0.0000	0.0000	0.0000
31	17.3865	0.4005	0.1087
32	20.6206	0.3431	0.1289
33	4.8573	0.0175	0.0304
34	39.3236	0.1187	0.2458
35	11.7216	0.1179	0.0733
36	14.7144	0.2303	0.0920
37	12.0261	0.0000	0.0752
38	39.7439	0.5350	0.2484
39	12.2303	0.0000	0.0764
40	21.4888	0.3845	0.1343

<b>TM 12 - FOTO 1      ESPESOR DE LA PROBETA 60mm (2T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	61.2038	0.5086	0.3825
2	56.5884	0.5522	0.3537
3	57.0056	0.7846	0.3563
4	59.8854	0.6507	0.3743
5	62.3553	0.3315	0.3897
6	58.7926	0.6077	0.3675
7	53.0438	0.1593	0.3315
8	66.5992	0.6058	0.4162
9	38.5370	0.7382	0.2409
10	34.4096	0.6259	0.2151
11	62.4645	0.3812	0.3904
12	59.1065	0.5937	0.3694
13	99.4464	0.6268	0.6215
14	48.8652	0.6537	0.3054
15	49.6753	0.6951	0.3105
16	28.8540	0.2175	0.1803
17	62.9895	0.4096	0.3937
18	49.9705	0.6041	0.3123
19	47.9334	0.6902	0.2996
20	49.3588	0.6970	0.3085
21	20.4558	0.8103	0.1278
22	14.4396	0.2685	0.0902
23	44.8303	0.2329	0.2802
24	9.7776	0.1752	0.0611
25	40.4282	0.3472	0.2527
26	17.3865	0.4005	0.1087
27	36.0169	0.4763	0.2251
28	34.6150	0.1285	0.2163
29	7.0480	0.0000	0.0441
30	7.0480	0.0000	0.0441
31	32.1009	0.7727	0.2006
32	60.3645	0.5361	0.3773
33	9.7776	0.1752	0.0611
34	51.3451	0.1031	0.3209
35	42.3530	0.4526	0.2647
36	19.5717	0.3104	0.1223
37	44.4388	0.6344	0.2777
38	51.7654	0.4549	0.3235
39	41.0843	0.4152	0.2568
40	26.4091	0.3681	0.1651

<b>TM 12 - FOTO 1      ESPESOR DE LA PROBETA 90mm (3T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	97.1716	0.5656	0.6073
2	78.0772	0.6124	0.4880
3	74.8857	0.6188	0.4680
4	88.7394	0.7303	0.5546
5	64.3773	0.3620	0.4024
6	93.2022	0.8193	0.5825
7	83.0956	0.4242	0.5193
8	73.5312	0.6086	0.4596
9	66.9437	0.6579	0.4184
10	55.8984	0.8103	0.3494
11	74.4835	0.3394	0.4655
12	98.8504	0.6464	0.6178
13	112.9702	0.6762	0.7061
14	55.9132	0.7600	0.3495
15	80.3067	0.5418	0.5019
16	40.5756	0.1933	0.2536
17	67.9098	0.4360	0.4244
18	82.3832	0.4932	0.5149
19	83.9012	0.7703	0.5244
20	88.6824	0.4376	0.5543
21	60.1997	0.6023	0.3762
22	26.4611	0.1871	0.1654
23	58.3541	0.3451	0.3647
24	49.1012	0.1822	0.3069
25	52.1498	0.3385	0.3259
26	29.6168	0.2336	0.1851
27	36.0169	0.4763	0.2251
28	52.4951	0.2199	0.3281
29	21.7624	0.1713	0.1360
30	19.4656	0.1265	0.1217
31	39.1489	0.6049	0.2447
32	101.1780	0.5777	0.6324
33	40.4090	0.4943	0.2526
34	71.9657	0.2959	0.4498
35	60.2331	0.5402	0.3765
36	31.9893	0.2482	0.1999
37	72.8455	0.6078	0.4553
38	92.5789	0.6792	0.5786
39	71.1361	0.4813	0.4446
40	33.4571	0.3261	0.2091

<b>TM 12 - FOTO 1 ESPESOR DE LA PROBETA 120mm (4T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	146.8948	0.6573	0.9181
2	111.6939	0.7112	0.6981
3	103.2924	0.6486	0.6456
4	119.3708	0.6873	0.7461
5	69.2346	0.3768	0.4327
6	129.1700	0.8098	0.8073
7	111.5023	0.6486	0.6969
8	102.3223	0.7138	0.6395
9	84.8238	0.6422	0.5301
10	77.3872	0.6477	0.4837
11	103.5382	0.4696	0.6471
12	98.8504	0.6464	0.6178
13	124.9892	0.6706	0.7812
14	84.6540	0.8723	0.5291
15	121.1202	0.8265	0.7570
16	72.9883	0.2610	0.4562
17	108.7233	0.8633	0.6795
18	116.7928	0.6657	0.7300
19	105.3900	0.7688	0.6587
20	110.1712	0.4228	0.6886
21	90.2515	0.5639	0.5641
22	55.2522	0.5108	0.3453
23	75.7406	0.5267	0.4734
24	79.7326	0.3229	0.4983
25	57.0701	0.3265	0.3567
26	71.1175	0.6531	0.4445
27	65.9595	0.5465	0.4122
28	67.2095	0.2267	0.4201
29	54.1751	0.2158	0.3386
30	24.3859	0.1219	0.1524
31	57.0290	0.4704	0.3564
32	129.9691	0.6309	0.8123
33	81.9097	0.4104	0.5119
34	103.4444	0.4712	0.6465
35	90.2849	0.5460	0.5643
36	72.8028	0.5333	0.4550
37	107.2551	0.8344	0.6703
38	121.3700	0.7199	0.7586
39	100.1908	0.7060	0.6262
40	65.8698	0.2984	0.4117

<b>TM 12 - FOTO 1 ESPESOR DE LA PROBETA 150mm (5T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	158.9209	0.7632	0.9933
2	151.4378	0.6567	0.9465
3	116.8162	0.6689	0.7301
4	124.2281	0.7005	0.7764
5	98.0886	0.3737	0.6131
6	151.7660	0.7003	0.9485
7	123.5213	0.7196	0.7720
8	115.8461	0.7359	0.7240
9	86.8458	0.6697	0.5428
10	117.1311	0.6420	0.7321
11	145.0389	0.5630	0.9065
12	119.4710	0.6438	0.7467
13	164.3128	0.5435	1.0270
14	124.3979	0.7444	0.7775
15	123.1422	0.8279	0.7696
16	118.0385	0.4516	0.7377
17	153.7735	0.7824	0.9611
18	145.8475	0.7043	0.9115
19	117.6203	0.8705	0.7351
20	122.1927	0.3845	0.7637
21	102.4818	0.6373	0.6405
22	67.2783	0.7263	0.4205
23	87.7667	0.6815	0.5485
24	112.1453	0.3318	0.7009
25	106.7933	0.5375	0.6675
26	101.1693	0.8204	0.6323
27	105.7034	0.6336	0.6606
28	88.6983	0.2871	0.5544
29	59.0954	0.2106	0.3693
30	55.0173	0.4125	0.3439
31	69.0505	0.4208	0.4316
32	129.9691	0.6309	0.8123
33	93.6313	0.4715	0.5852
34	108.3647	0.4572	0.6773
35	119.1389	0.4818	0.7446
36	113.6163	0.4159	0.7101
37	119.4854	0.8774	0.7468
38	121.3700	0.7199	0.7586
39	130.8222	0.8041	0.8176
40	95.9216	0.3765	0.5995

<b>TM 12 - FOTO 2      ESPESOR DE LA PROBETA 30mm (1T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	87.2159	0.6891	0.1817
2	77.0482	0.3837	0.1605
3	55.0385	0.7475	0.1147
4	101.7010	0.2957	0.2119
5	83.5686	0.6224	0.1741
6	83.7137	0.3472	0.1744
7	65.7177	0.6840	0.1369
8	112.0602	0.4489	0.2335
9	97.8523	0.4078	0.2039
10	79.9412	0.6047	0.1665
11	123.6119	0.7940	0.2575
12	75.2094	0.5492	0.1567
13	141.2374	0.3001	0.2942
14	26.7062	0.2701	0.0556
15	52.3095	0.3373	0.1090
16	87.1675	0.5240	0.1816
17	77.8435	0.3836	0.1622
18	108.2941	0.2823	0.2256
19	104.1128	0.5105	0.2169
20	61.8847	0.2544	0.1289

<b>TM 12 - FOTO 2      ESPESOR DE LA PROBETA 60mm (2T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	167.1571	0.6737	0.3482
2	132.0867	0.5667	0.2752
3	142.2060	0.6865	0.2963
4	242.9384	0.5749	0.5061
5	135.8781	0.5404	0.2831
6	110.4199	0.3356	0.2300
7	127.6024	0.7286	0.2658
8	127.6024	0.7286	0.2658
9	177.7935	0.5312	0.3704
10	134.9797	0.8639	0.2812
11	175.9214	0.6079	0.3665
12	153.0529	0.7679	0.3189
13	193.5469	0.3156	0.4032
14	104.5497	0.7106	0.2178
15	150.1618	0.3793	0.3128
16	210.7794	0.8917	0.4391
17	181.9563	0.5236	0.3791
18	195.4616	0.4248	0.4072
19	130.8190	0.7507	0.2725
20	203.1221	0.3930	0.4232

<b>TM 12 - FOTO 2      ESPESOR DE LA PROBETA 90mm (3T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	290.7690	0.7514	0.6058
2	219.3026	0.6963	0.4569
3	220.0495	0.8188	0.4584
4	330.1059	0.7275	0.6877
5	197.7628	0.5876	0.4120
6	185.6293	0.4148	0.3867
7	204.6506	0.5850	0.4264
8	204.6506	0.5850	0.4264
9	265.0094	0.6144	0.5521
10	218.5483	0.7636	0.4553
11	284.2155	0.7896	0.5921
12	236.6215	0.8984	0.4930
13	271.3904	0.3987	0.5654
14	156.8592	0.5875	0.3268
15	202.4713	0.3672	0.4218
16	312.4804	0.7924	0.6510
17	208.6625	0.6670	0.4347
18	319.0735	0.8015	0.6647
19	272.0564	0.5624	0.5668
20	311.4162	0.6974	0.6488

<b>TM 12 - FOTO 2      ESPESOR DE LA PROBETA 120mm (4T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	352.6537	0.7809	0.7347
2	331.3628	0.7149	0.6903
3	343.6614	0.8353	0.7160
4	356.8121	0.8265	0.7434
5	277.7040	0.5965	0.5786
6	247.5140	0.4218	0.5157
7	281.6988	0.5166	0.5869
8	281.6988	0.5166	0.5869
9	362.8617	0.5594	0.7560
10	270.8578	0.6977	0.5643
11	336.5250	0.6755	0.7011
12	320.1901	0.7977	0.6671
13	354.9590	0.4980	0.7395
14	233.9074	0.9120	0.4873
15	310.7654	0.5153	0.6474
16	410.3327	0.7995	0.8549
17	235.3687	0.7845	0.4904
18	399.0147	0.9498	0.8313
19	395.6683	0.6420	0.8243
20	389.2597	0.7089	0.8110

<b>TM 12 - FOTO 2      ESPESOR DE LA PROBETA 150mm (5T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	436.3674	0.8799	0.9091
2	415.0765	0.6034	0.8647
3	423.6026	0.8940	0.8825
4	418.6968	0.8126	0.8723
5	361.2726	0.6048	0.7527
6	322.7234	0.4621	0.6723
7	343.5835	0.5109	0.7158
8	343.5835	0.5109	0.7158
9	486.4736	0.6115	1.0135
10	382.9180	0.8331	0.7977
11	413.5732	0.8763	0.8616
12	424.3029	0.7898	0.8840
13	409.9975	0.6202	0.8542
14	357.5193	0.9015	0.7448
15	385.9748	0.6702	0.8041
16	437.0389	0.8667	0.9105
17	290.4072	0.8446	0.6050
18	451.3242	0.8139	0.9403
19	479.3820	0.8533	0.9987
20	476.4756	0.7513	0.9927

<b>TM 8 - FOTO 1      ESPESOR DE LA PROBETA 30mm (1T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	5.6687	0.4863	0.0797
2	8.8134	0.1637	0.1239
3	6.9214	0.0524	0.0973
4	11.4058	0.1308	0.1604
5	8.0000	0.0000	0.1125
6	8.6894	0.0683	0.1222
7	16.1910	0.1840	0.2277
8	15.9110	0.5125	0.2237
9	16.3056	0.1379	0.2293
10	8.0463	0.0000	0.1132
11	8.0463	0.0000	0.1132
12	5.7761	0.3358	0.0812
13	8.2898	0.0000	0.1166
14	17.3509	0.0699	0.2440
15	8.1710	0.0000	0.1149
16	8.0347	0.0000	0.1130
17	8.2277	0.0000	0.1157
18	17.1301	0.5840	0.2409
19	0.0000	0.0000	0.0000
20	7.5587	0.1405	0.1063
21	7.6107	0.2845	0.1070
22	7.3866	0.0175	0.1039
23	7.8745	0.1799	0.1107
24	15.1880	0.1952	0.2136
25	3.8372	0.0000	0.0540
26	13.9206	0.1282	0.1958
27	0.0000	0.0000	0.0000
28	18.9301	0.4909	0.2662
29	9.3483	0.1409	0.1315
30	0.0000	0.0000	0.0000
31	15.5945	0.3075	0.2193
32	17.7423	0.4786	0.2495
33	17.5737	0.4019	0.2471
34	35.4743	0.0000	0.4989
35	7.4295	0.0000	0.1045
36	8.0464	0.0000	0.1132
37	7.9862	0.5943	0.1123
38	14.4837	0.4444	0.2037
39	2.4119	0.8357	0.0339
40	21.9906	0.6805	0.3092

<b>TM 8 - FOTO 1      ESPESOR DE LA PROBETA 60mm (2T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	13.7034	0.2698	0.1927
2	24.7244	0.4789	0.3477
3	14.9677	0.4432	0.2105
4	17.1819	0.7101	0.2416
5	16.8134	0.3580	0.2364
6	8.6894	0.0683	0.1222
7	23.8017	0.3892	0.3347
8	21.5797	0.6998	0.3035
9	20.1428	0.1521	0.2833
10	10.4582	0.1908	0.1471
11	15.6050	0.4188	0.2194
12	13.2056	0.5174	0.1857
13	15.2112	0.3535	0.2139
14	24.7375	0.3696	0.3479
15	16.2173	0.1571	0.2281
16	19.4405	0.2117	0.2734
17	10.6396	0.1817	0.1496
18	19.5420	0.6143	0.2748
19	8.0463	0.0000	0.1132
20	15.5587	0.4810	0.2188
21	23.5217	0.4287	0.3308
22	9.7985	0.2029	0.1378
23	16.6879	0.2454	0.2347
24	23.8774	0.1613	0.3358
25	9.6133	0.3892	0.1352
26	21.9068	0.3594	0.3081
27	6.9214	0.0524	0.0973
28	26.9764	0.3835	0.3794
29	17.3946	0.1148	0.2446
30	5.7761	0.3358	0.0812
31	33.3368	0.4211	0.4688
32	21.7475	0.3578	0.3058
33	25.6084	0.5995	0.3601
34	51.3853	0.5696	0.7226
35	15.4295	0.8009	0.2170
36	16.2741	0.1832	0.2289
37	7.9862	0.5943	0.1123
38	32.2260	0.7234	0.4532
39	18.3229	0.5817	0.2577
40	39.1207	0.8309	0.5501

<b>TM 8 - FOTO 1 ESPEJOR DE LA PROBETA 90mm (3T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coficiente de Isotropía</b>	<b>Coficiente de Dispersión</b>
1	29.6144	0.6945	0.4165
2	32.7707	0.4647	0.4608
3	20.7438	0.3791	0.2917
4	24.1033	0.7525	0.3390
5	23.7348	0.4013	0.3338
6	12.5266	0.2264	0.1762
7	31.9727	0.4996	0.4496
8	43.5703	0.7653	0.6127
9	27.5294	0.1780	0.3871
10	10.4582	0.1908	0.1471
11	29.5256	0.2845	0.4152
12	29.3966	0.3938	0.4134
13	30.3992	0.3037	0.4275
14	43.6676	0.6080	0.6141
15	24.0918	0.3862	0.3388
16	35.0350	0.2554	0.4927
17	22.0454	0.7366	0.3100
18	27.5282	0.8225	0.3871
19	17.3946	0.1148	0.2446
20	15.5587	0.4810	0.2188
21	39.8273	0.3235	0.5601
22	17.8448	0.3966	0.2509
23	24.7342	0.3320	0.3478
24	31.3069	0.4387	0.4403
25	16.9999	0.4692	0.2391
26	29.2934	0.4781	0.4119
27	14.7959	0.1196	0.2081
28	42.8874	0.4716	0.6031
29	26.7429	0.1236	0.3761
30	41.2504	0.3338	0.5801
31	55.3274	0.6273	0.7780
32	21.7475	0.6510	0.3058
33	33.6548	0.7639	0.4733
34	59.6130	0.3868	0.8383
35	21.2056	0.4984	0.2982
36	32.4651	0.3126	0.4565
37	16.1572	0.2771	0.2272
38	49.5769	0.7294	0.6972
39	37.2530	0.6143	0.5239
40	39.1207	0.8309	0.5501

<b>TM 8 - FOTO 1      ESPESOR DE LA PROBETA 120mm (4T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	37.7854	0.7136	0.5314
2	40.8170	0.3628	0.5740
3	26.4125	0.5931	0.3714
4	32.3931	0.6177	0.4555
5	31.7695	0.5835	0.4468
6	29.6567	0.7159	0.4170
7	37.7488	0.4351	0.5308
8	59.4813	0.6984	0.8365
9	43.7204	0.4693	0.6148
10	29.3883	0.4326	0.4133
11	46.6557	0.5201	0.6561
12	37.4429	0.4047	0.5265
13	39.0886	0.2778	0.5497
14	51.2263	0.5771	0.7204
15	46.0824	0.5173	0.6480
16	43.0813	0.4568	0.6058
17	39.7877	0.6125	0.5595
18	34.4496	0.6528	0.4844
19	26.2080	0.2558	0.3686
20	23.5587	0.2938	0.3313
21	47.8737	0.2799	0.6732
22	32.3285	0.5624	0.4546
23	32.7806	0.4238	0.4610
24	39.3533	0.3740	0.5534
25	34.7422	0.5170	0.4886
26	34.9621	0.6897	0.4917
27	22.7959	0.4732	0.3206
28	51.1151	0.4124	0.7188
29	62.2172	0.1305	0.8749
30	56.4384	0.2908	0.7937
31	74.2575	0.7906	1.0442
32	29.8144	0.8405	0.4193
33	51.2285	0.6349	0.7204
34	75.5240	0.4849	1.0621
35	25.0428	0.5200	0.3522
36	32.4651	0.3126	0.4565
37	32.0682	0.4188	0.4510
38	67.3192	0.6804	0.9467
39	59.2436	0.6606	0.8331
40	39.1207	0.8309	0.5501

<b>TM 8 - FOTO 1      ESPESOR DE LA PROBETA 150mm (5T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	44.7068	0.8834	0.6287
2	48.8633	0.2976	0.6871
3	26.4125	0.5931	0.3714
4	40.4394	0.5280	0.5687
5	39.8158	0.5952	0.5599
6	35.3254	0.9317	0.4968
7	41.5860	0.4530	0.5848
8	59.4813	0.6984	0.8365
9	57.6410	0.4391	0.8106
10	37.6781	0.3527	0.5298
11	46.6557	0.5201	0.6561
12	51.3635	0.3771	0.7223
13	39.0886	0.2778	0.5497
14	73.2169	0.6403	1.0296
15	49.9196	0.5309	0.7020
16	51.2523	0.5663	0.7207
17	42.1996	0.6236	0.5934
18	48.9333	0.6677	0.6881
19	45.1381	0.3794	0.6348
20	39.8643	0.2279	0.5606
21	66.8038	0.3630	0.9394
22	32.3285	0.5624	0.4546
23	49.9107	0.5756	0.7019
24	61.3439	0.4711	0.8626
25	34.7422	0.5170	0.4886
26	52.5358	0.6882	0.7388
27	38.9869	0.3567	0.5483
28	51.1151	0.4124	0.7188
29	70.2635	0.1204	0.9881
30	60.2756	0.3258	0.8476
31	82.5473	0.7416	1.1608
32	29.8843	0.9260	0.4202
33	59.2748	0.6012	0.8336
34	91.4350	0.5307	1.2858
35	32.4723	0.6808	0.4566
36	41.2785	0.2890	0.5805
37	40.8816	0.5588	0.5749
38	83.6248	0.5253	1.1760
39	74.4316	0.5436	1.0467
40	46.0421	0.6377	0.6475

<b>TM 8 - FOTO 2      ESPESOR DE LA PROBETA 30mm (1T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	23.8326	0.7553	0.1117
2	20.8170	0.3436	0.0976
3	56.2890	0.4979	0.2639
4	36.4988	0.7465	0.1711
5	64.7181	0.7923	0.3034
6	39.2926	0.3835	0.1842
7	59.6117	0.2992	0.2794
8	45.0572	0.4475	0.2112
9	45.0327	0.8241	0.2111
10	64.9263	0.5944	0.3043
11	76.0874	0.6875	0.3567
12	51.6085	0.2500	0.2419
13	46.3507	0.6008	0.2173
14	52.1807	0.2391	0.2446
15	60.7116	0.5783	0.2846
16	47.4132	0.5552	0.2222
17	68.0395	0.3917	0.3189
18	72.5007	0.3977	0.3398
19	63.9478	0.5947	0.2998
20	19.8361	0.1991	0.0930

<b>TM 8 - FOTO 2      ESPESOR DE LA PROBETA 60mm (2T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	84.5442	0.7255	0.3963
2	77.1060	0.7678	0.3614
3	124.3285	0.8112	0.5828
4	83.9120	0.7167	0.3933
5	116.3266	0.5593	0.5453
6	60.1096	0.4041	0.2818
7	105.9624	0.5518	0.4967
8	104.6689	0.3504	0.4906
9	109.9590	0.7958	0.5154
10	88.7589	0.7359	0.4161
11	112.5862	0.7366	0.5277
12	90.9011	0.3507	0.4261
13	82.8495	0.7076	0.3884
14	72.0168	0.2425	0.3376
15	112.8923	0.5974	0.5292
16	107.0249	0.4263	0.5017
17	104.5383	0.5752	0.4900
18	93.3177	0.8023	0.4374
19	131.9873	0.5103	0.6187
20	76.1251	0.7521	0.3568

<b>TM 8 - FOTO 2      ESPESOR DE LA PROBETA 90mm (3T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coficiente de Isotropía</b>	<b>Coficiente de Dispersión</b>
1	130.8949	0.7665	0.6136
2	129.2867	0.7577	0.6060
3	160.8273	0.8860	0.7539
4	120.4108	0.7661	0.5644
5	181.0447	0.6638	0.8486
6	124.0574	0.3959	0.5815
7	145.2550	0.4420	0.6809
8	125.4859	0.5230	0.5882
9	149.2516	0.7505	0.6996
10	145.0479	0.6374	0.6799
11	164.1947	0.6233	0.7697
12	154.8489	0.4078	0.7259
13	139.1385	0.8324	0.6522
14	124.1975	0.2412	0.5822
15	173.6039	0.5957	0.8138
16	154.4381	0.4689	0.7239
17	164.1500	0.8076	0.7695
18	139.6684	0.9194	0.6547
19	195.9351	0.5439	0.9184
20	148.6258	0.6228	0.6967

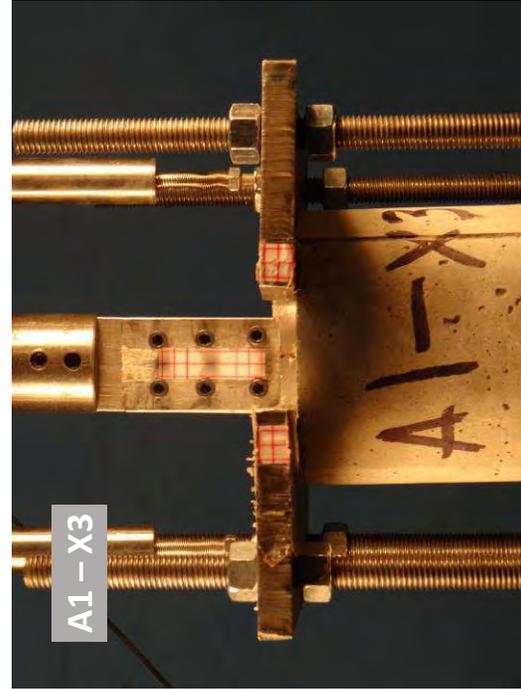
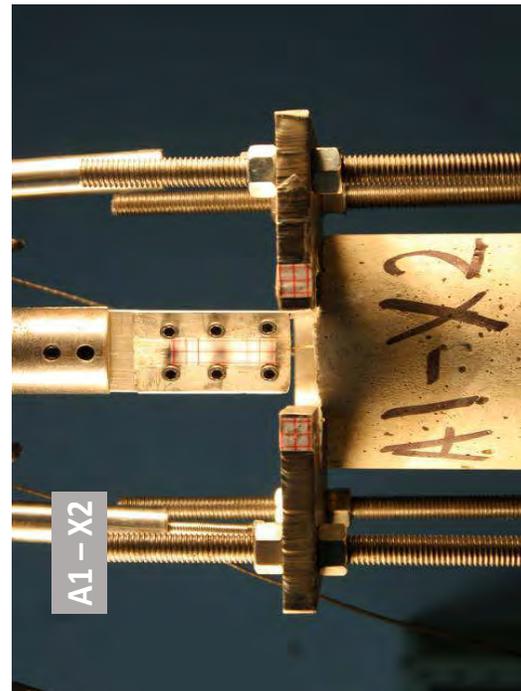
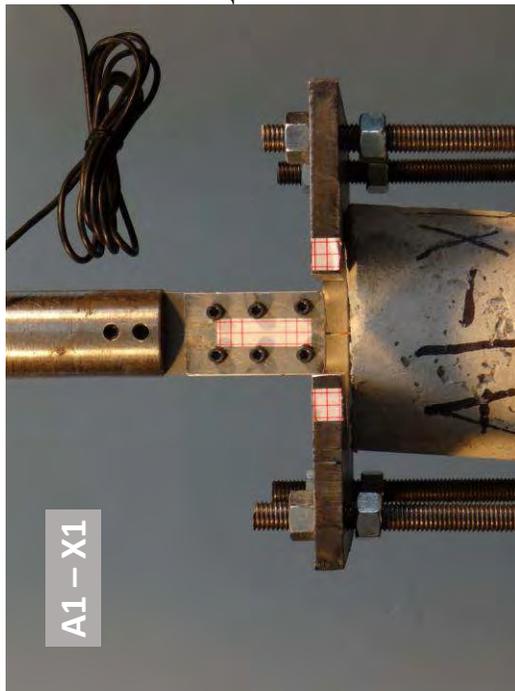
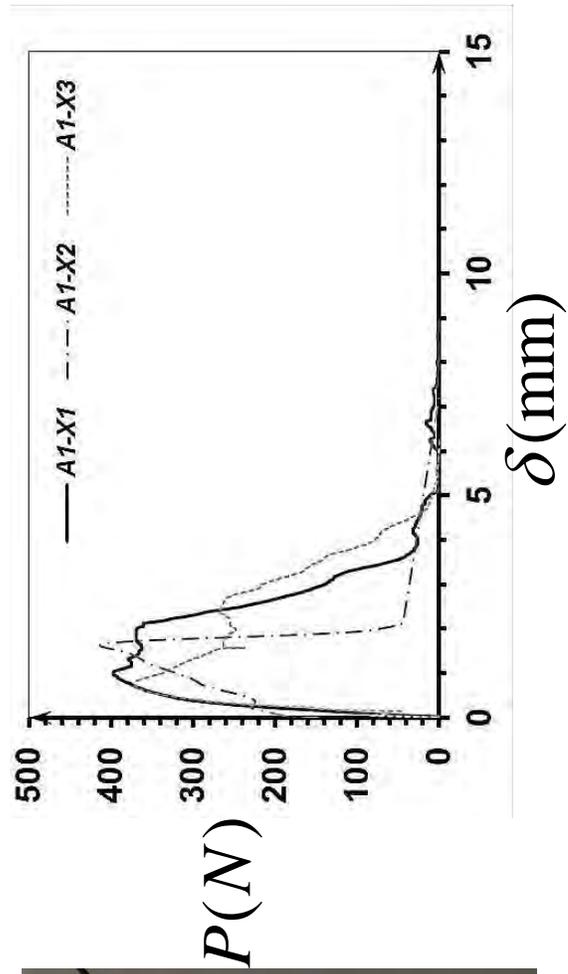
<b>TM 8 - FOTO 2      ESPESOR DE LA PROBETA 120mm (4T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coefficiente de Isotropía</b>	<b>Coefficiente de Dispersión</b>
1	151.7119	0.7524	0.7111
2	176.6999	0.8442	0.8283
3	225.5454	0.8674	1.0572
4	188.4503	0.7155	0.8834
5	227.3954	0.6561	1.0659
6	175.6659	0.3739	0.8234
7	190.2877	0.6043	0.8920
8	190.2040	0.7669	0.8916
9	217.2911	0.7108	1.0186
10	201.3369	0.5943	0.9438
11	185.0117	0.5896	0.8672
12	219.7752	0.5927	1.0302
13	211.6392	0.7265	0.9921
14	180.4865	0.7141	0.8460
15	174.3206	0.6081	0.8171
16	199.4953	0.4655	0.9351
17	210.5007	0.8848	0.9867
18	178.9610	0.7359	0.8389
19	243.3483	0.7126	1.1407
20	172.4584	0.6883	0.8084

<b>TM 8 - FOTO 2      ESPESOR DE LA PROBETA 150mm (5T)</b>			
<b>Sector</b>	<b>Longitud de la fibra</b>	<b>Coficiente de Isotropía</b>	<b>Coficiente de Dispersión</b>
1	191.0045	0.7214	0.8953
2	241.6262	0.8010	1.1326
3	290.2635	0.8512	1.3606
4	208.2864	0.6571	0.9763
5	292.1135	0.7055	1.3693
6	227.8466	0.3588	1.0680
7	226.7865	0.6893	1.0631
8	255.1303	0.8025	1.1959
9	238.1081	0.6772	1.1161
10	252.9454	0.8075	1.1857
11	230.0689	0.6648	1.0784
12	243.6078	0.6749	1.1419
13	263.8199	0.8851	1.2367
14	232.6672	0.6180	1.0906
15	235.0322	0.5993	1.1017
16	259.1070	0.4288	1.2146
17	275.2188	0.8985	1.2901
18	224.0182	0.8599	1.0501
19	311.3878	0.6420	1.4596
20	217.5156	0.6928	1.0196

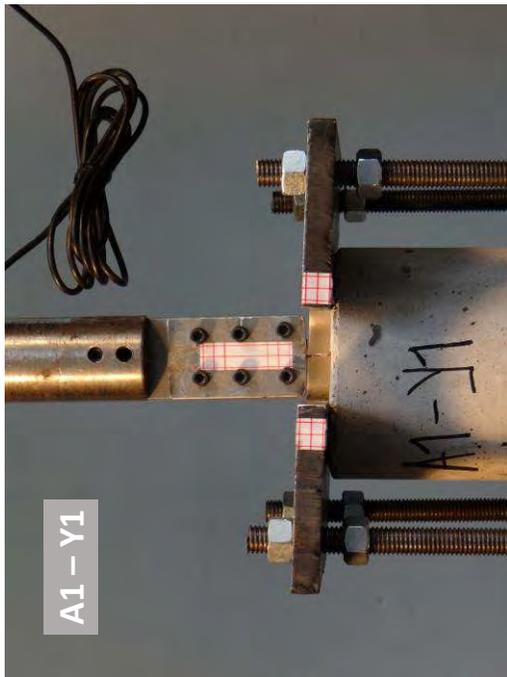
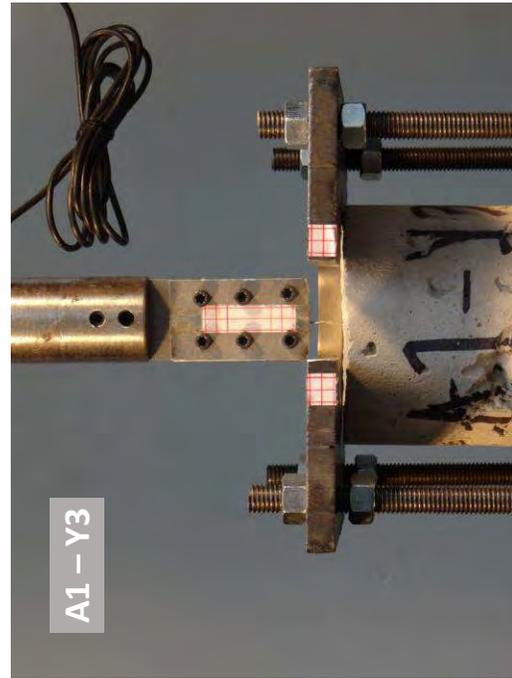
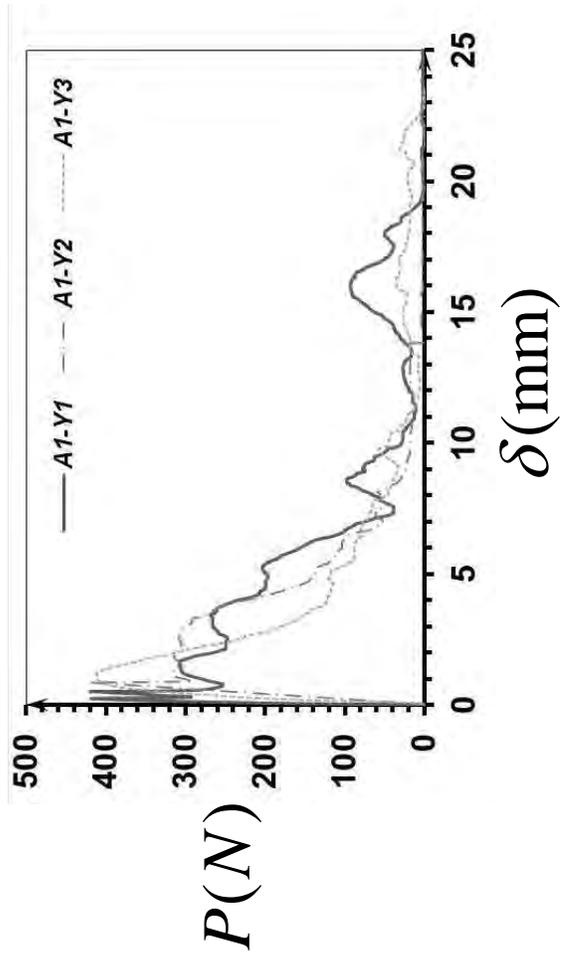


## **D. Anexo: Ensayos de arrancamiento**

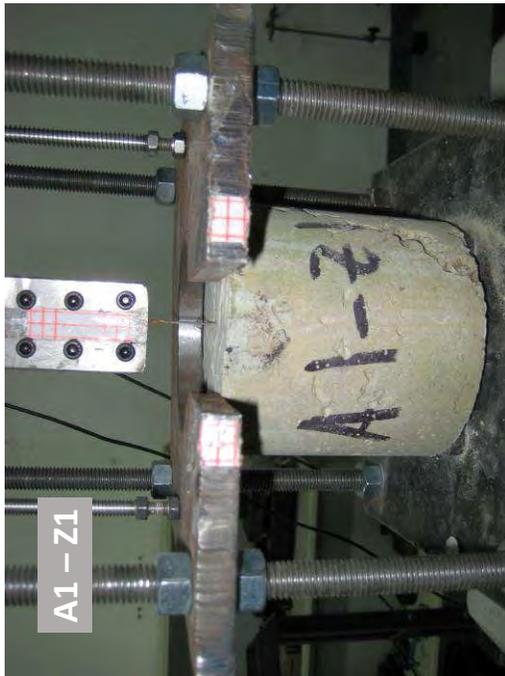
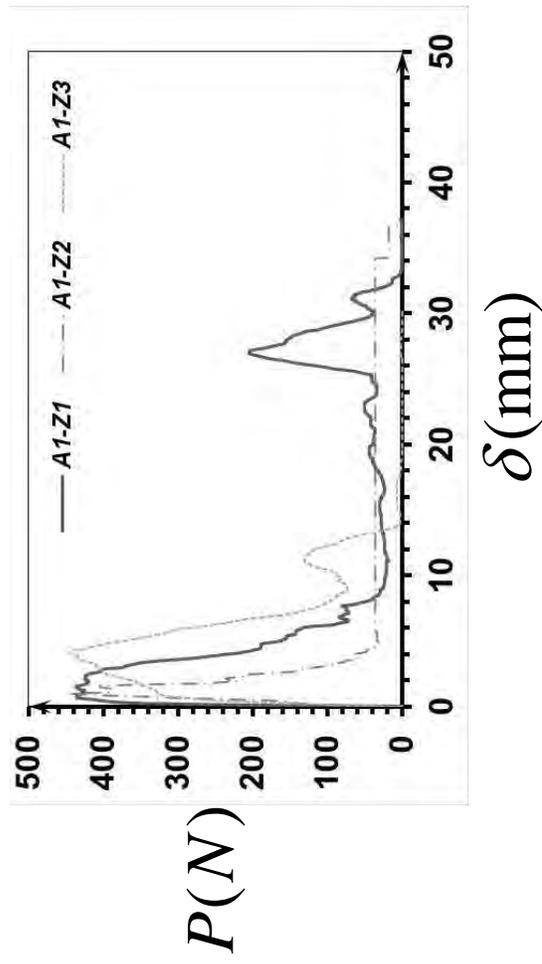
A1-X1				A1-X2				A1-X3									
<b>PESO DE LA PROBETA</b>		<b>w (g)</b>	1906.23	<b>PESO DE LA PROBETA</b>		<b>w (g)</b>	2034.66	<b>PESO DE LA PROBETA</b>		<b>w (g)</b>	1972.03						
<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>				<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>				<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>									
$\Phi_1$	(mm)	107.55	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_1$	(mm)	108.3	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_1$	(mm)	111	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>						
$\Phi_2$	(mm)	106.56		$\Phi_2$	(mm)	109.9		$\Phi_2$	(mm)	109							
$\Phi_3$	(mm)	105.1		$\Phi_3$	(mm)	108.2		$\Phi_3$	(mm)	111.5							
$\Phi_4$	(mm)	107.58		$\Phi_4$	(mm)	109.2		$\Phi_4$	(mm)	110.1							
106.6975				108.9				110.4									
<b>ALTURA h</b>				<b>ALTURA h</b>				<b>ALTURA h</b>									
$h_1$	(mm)	102.75	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	103	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	105	<b>h promedio (mm)</b>						
$h_2$	(mm)	102.73		$h_2$	(mm)	100.3		$h_2$	(mm)	105.1							
$h_3$	(mm)	103.52		$h_3$	(mm)	102.5		$h_3$	(mm)	104.92							
$h_4$	(mm)	103.82		$h_4$	(mm)	100.1		$h_4$	(mm)	104.98							
103.205				101.475				105									
Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )		8941.25		Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )		9314.20		Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )		9572.56							
Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )		922781.98		Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )		945158.62		Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )		1005118.64							
<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>				<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>				<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>									
$\phi_f$	(mm)	1.03		$\phi_f$	(mm)	1		$\phi_f$	(mm)	1.05							
<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>				<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>				<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>									
$l_a^f$	(mm)	31.66	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	50	$l_a^f$	(mm)	36.6	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	50	$l_a^f$	(mm)	34.5	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	50			
$l_e^f$	(mm)	18.34		$l_e^f$	(mm)	13.4	$l_e^f$		(mm)	15.5							
Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )		0.833		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )		0.785		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )		0.866							
<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>				<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>				<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>									
$\leftrightarrow$	(mm)	56.87	$\updownarrow$	(mm)	54.64	$\leftrightarrow$	(mm)	55.5	$\updownarrow$	(mm)	49.7	$\leftrightarrow$	(mm)	56	$\updownarrow$	(mm)	52



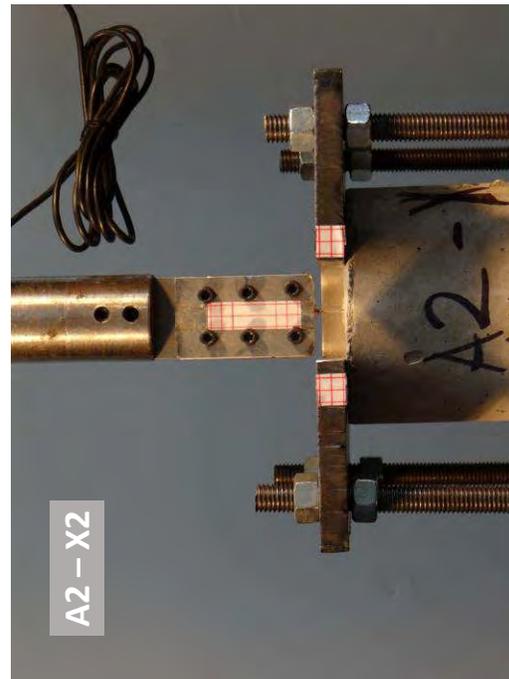
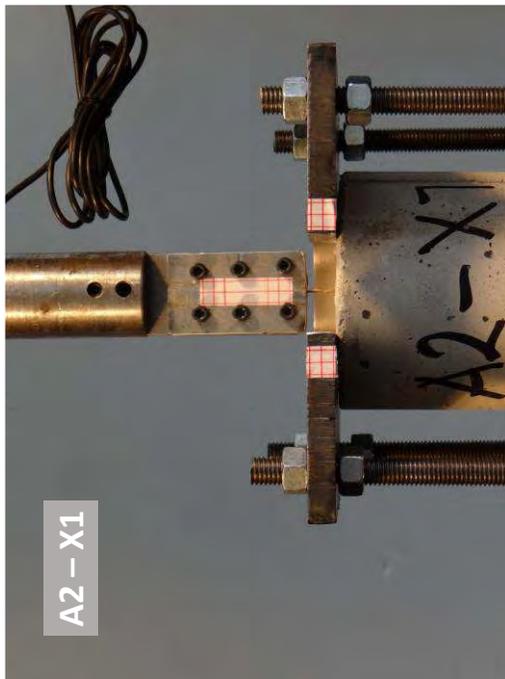
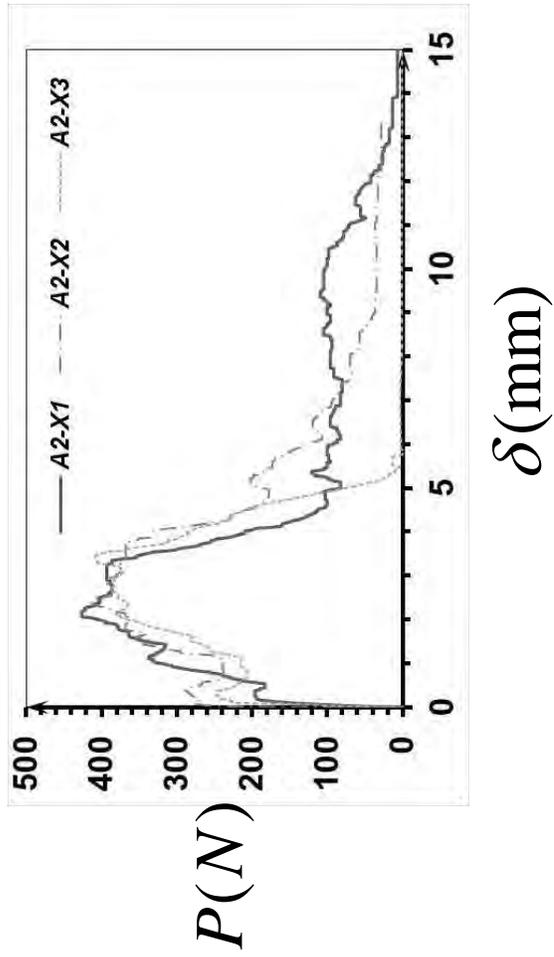
A1-Y1					A1-Y2					A1-Y3							
<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1978.65	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1988.78	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1944.09			
<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>							
$\Phi_1$	(mm)	105	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>		$\Phi_1$	(mm)	109	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>		$\Phi_1$	(mm)	108	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>				
$\Phi_2$	(mm)	106.2			$\Phi_2$	(mm)	108.2			$\Phi_2$	(mm)	108.2					
$\Phi_3$	(mm)	105.8			$\Phi_3$	(mm)	108.8			$\Phi_3$	(mm)	106					
$\Phi_4$	(mm)	104.8			$\Phi_4$	(mm)	109.2			$\Phi_4$	(mm)	107.55					
105.45					108.8					107.4375							
<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>							
$h_1$	(mm)	105	<b>h promedio (mm)</b>		$h_1$	(mm)	103.6	<b>h promedio (mm)</b>		$h_1$	(mm)	98	<b>h promedio (mm)</b>				
$h_2$	(mm)	102.4			$h_2$	(mm)	100.3			$h_2$	(mm)	101					
$h_3$	(mm)	104			$h_3$	(mm)	101.4			$h_3$	(mm)	101.1					
$h_4$	(mm)	103.6			$h_4$	(mm)	102.8			$h_4$	(mm)	100.5					
103.75					102.025					100.15							
Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			8733.39		Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9297.10		Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9065.71				
Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			906089.62		Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			948537.00		Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			907930.54				
<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>							
$\phi_f$	(mm)	1.05			$\phi_f$	(mm)	1.05			$\phi_f$	(mm)	1.01					
<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>							
$l_a^f$	(mm)	20	$l^f$ (mm)	50	$l_a^f$	(mm)	21.2	$l^f$ (mm)	50	$l_a^f$	(mm)	19	$l^f$ (mm)	50			
$l_e^f$	(mm)	30			$l_e^f$	(mm)	28.8			$l_e^f$	(mm)	31					
Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.866		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.866		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.801				
<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>							
$\leftrightarrow$	(mm)	53	$\updownarrow$	(mm)	56	$\leftrightarrow$	(mm)	56	$\updownarrow$	(mm)	56	$\leftrightarrow$	(mm)	55	$\updownarrow$	(mm)	53



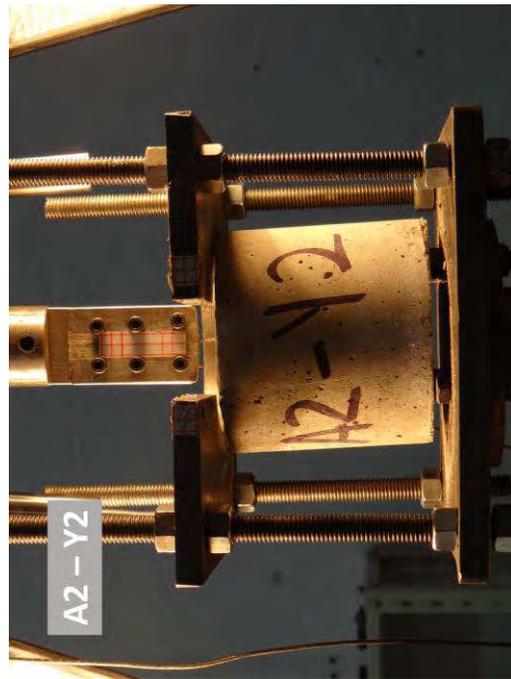
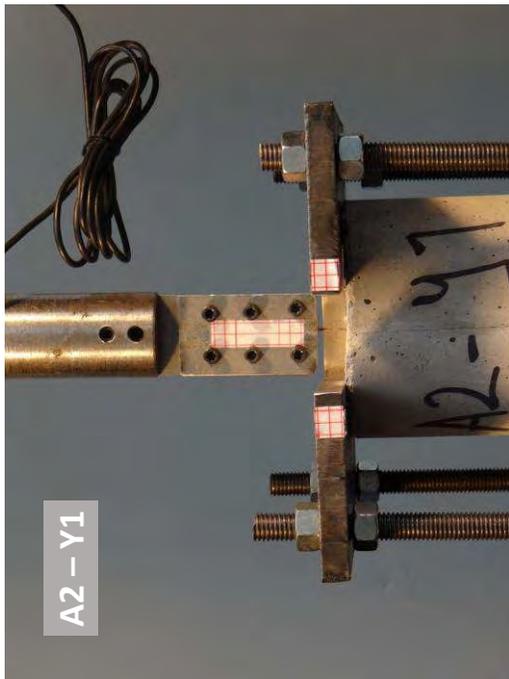
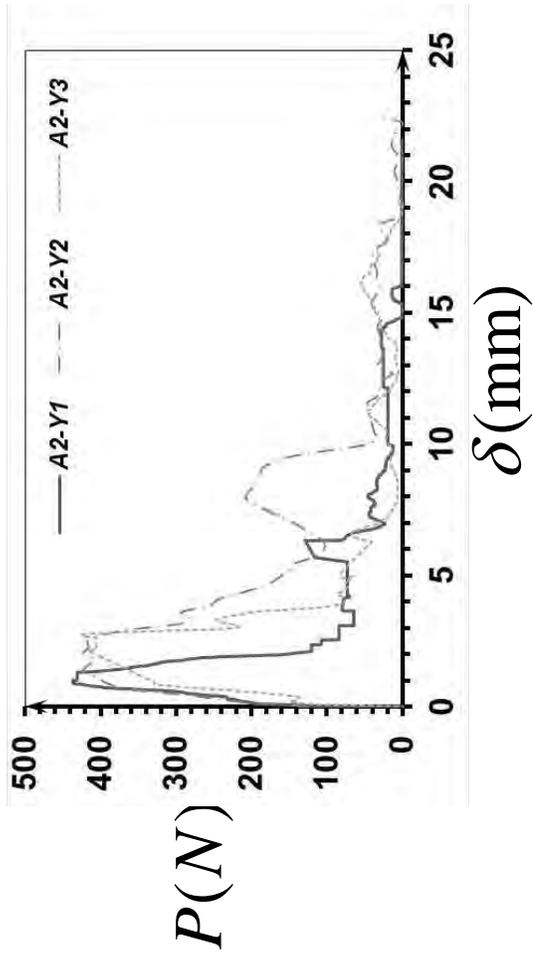
A1-Z1					A1-Z2					A1-Z3							
<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1968.64	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1878.36	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1983.57			
<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>							
$\Phi_1$	(mm)	107	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_1$	(mm)	107.1	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_1$	(mm)	109.7	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>						
$\Phi_2$	(mm)	107.3		$\Phi_2$	(mm)	105.5		$\Phi_2$	(mm)	111							
$\Phi_3$	(mm)	107.1		$\Phi_3$	(mm)	107.5		$\Phi_3$	(mm)	111							
$\Phi_4$	(mm)	107.4		$\Phi_4$	(mm)	104.9		$\Phi_4$	(mm)	109							
107.2					106.25					110.175							
<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>							
$h_1$	(mm)	102.5	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	130	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	101.2	<b>h promedio (mm)</b>						
$h_2$	(mm)	104.2		$h_2$	(mm)	110		$h_2$	(mm)	103.8							
$h_3$	(mm)	103.5		$h_3$	(mm)	111		$h_3$	(mm)	103.1							
$h_4$	(mm)	102.6		$h_4$	(mm)	130		$h_4$	(mm)	101.1							
103.2					120.25					102.3							
Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9025.67	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			8866.41	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9533.58						
Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			931449.15	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			1066185.68	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			975285.20						
<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>							
$\phi_f$	(mm)	0.99			$\phi_f$	(mm)	1.01			$\phi_f$	(mm)	1					
<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>							
$l_a^f$	(mm)	15.4	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	50	$l_a^f$	(mm)	11.4	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	50	$l_a^f$	(mm)	14.2	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	50			
$l_e^f$	(mm)	34.6			$l_e^f$	(mm)	38.6			$l_e^f$	(mm)	35.8					
Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.770		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.801		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.785				
<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>							
$\leftrightarrow$	(mm)	56	$\updownarrow$	(mm)	52	$\leftrightarrow$	(mm)	52	$\updownarrow$	(mm)	50	$\leftrightarrow$	(mm)	52	$\updownarrow$	(mm)	54



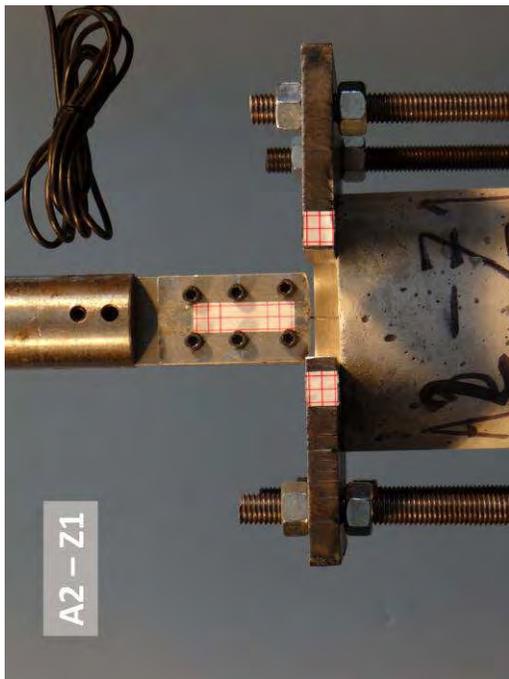
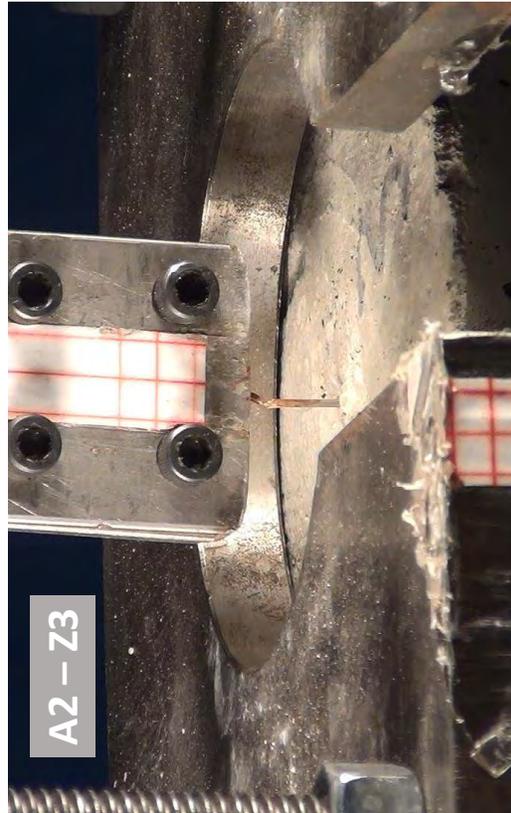
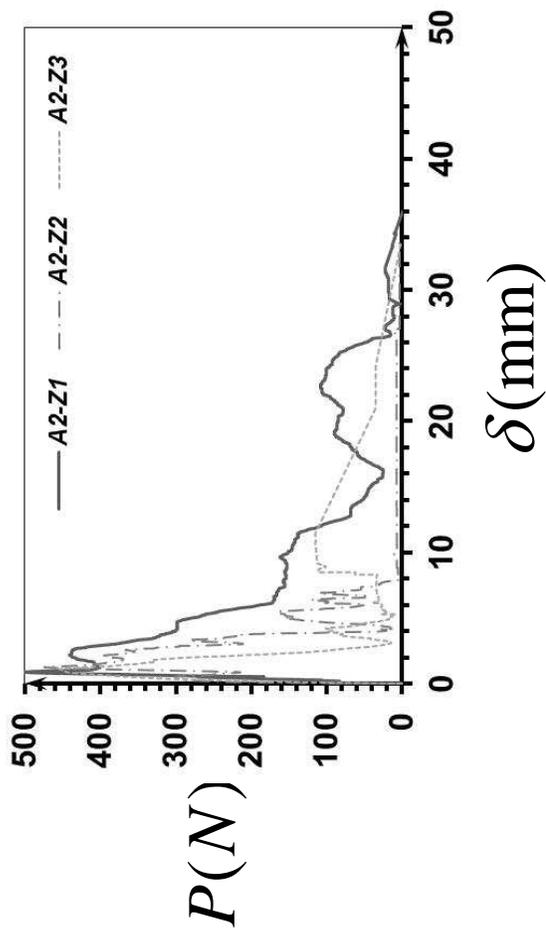
A2-X1				A2-X2				A2-X3									
<b>PESO DE LA PROBETA</b>		<b>w (g)</b>	1927.16	<b>PESO DE LA PROBETA</b>		<b>w (g)</b>	2033.38	<b>PESO DE LA PROBETA</b>		<b>w (g)</b>	2005.99						
<b>DIAMETRO <math>\phi</math></b>				<b>DIAMETRO <math>\phi</math></b>				<b>DIAMETRO <math>\phi</math></b>									
$\phi_1$	(mm)	108	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>	$\phi_1$	(mm)	107	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>	$\phi_1$	(mm)	106.25	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>						
$\phi_2$	(mm)	108.8		$\phi_2$	(mm)	108.2		$\phi_2$	(mm)	106.2							
$\phi_3$	(mm)	108.2		$\phi_3$	(mm)	108.6		$\phi_3$	(mm)	106.3							
$\phi_4$	(mm)	108		$\phi_4$	(mm)	107.1		$\phi_4$	(mm)	106							
108.25				107.725				106.1875									
<b>ALTURA h</b>				<b>ALTURA h</b>				<b>ALTURA h</b>									
$h_1$	(mm)	98	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	102	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	103.8	<b>h promedio (mm)</b>						
$h_2$	(mm)	100		$h_2$	(mm)	101		$h_2$	(mm)	103.5							
$h_3$	(mm)	100.1		$h_3$	(mm)	102.5		$h_3$	(mm)	103.2							
$h_4$	(mm)	98		$h_4$	(mm)	101.1		$h_4$	(mm)	104							
99.025				101.65				103.625									
Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )		9203.34		Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )		9114.29		Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )		8855.98							
Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )		911361.22		Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )		926467.67		Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )		917701.03							
<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>				<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>				<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>									
$\phi_f$	(mm)	0.98		$\phi_f$	(mm)	1.02		$\phi_f$	(mm)	1.01							
<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>				<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>				<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>									
$l_a^f$	(mm)	24	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	50	$l_a^f$	(mm)	28	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	50	$l_a^f$	(mm)	33	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	50			
$l_e^f$	(mm)	26		$l_e^f$	(mm)	22	$l_e^f$		(mm)	17							
Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )		0.754		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )		0.817		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )		0.801							
<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>				<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>				<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>									
$\leftrightarrow$	(mm)	51.5	$\updownarrow$	(mm)	53.6	$\leftrightarrow$	(mm)	48	$\updownarrow$	(mm)	53	$\leftrightarrow$	(mm)	45	$\updownarrow$	(mm)	55



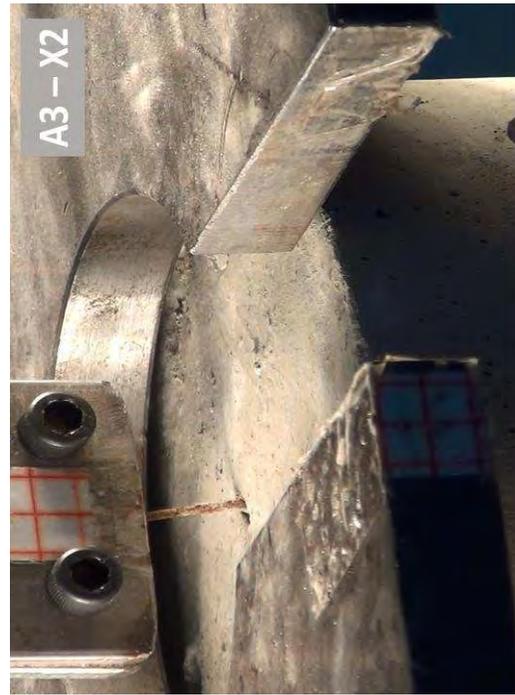
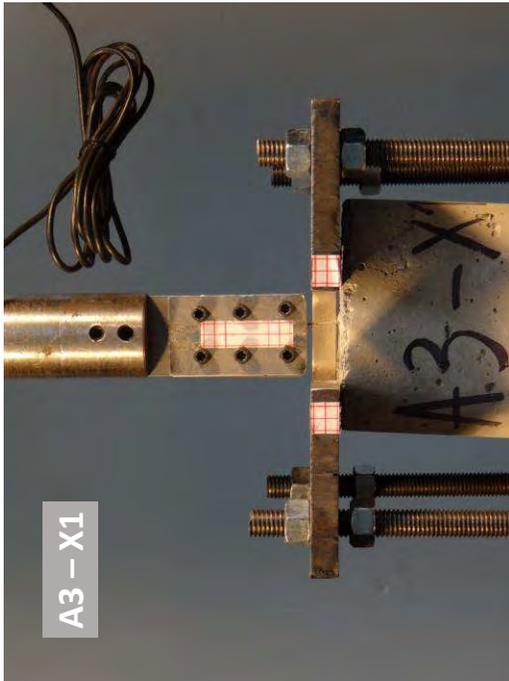
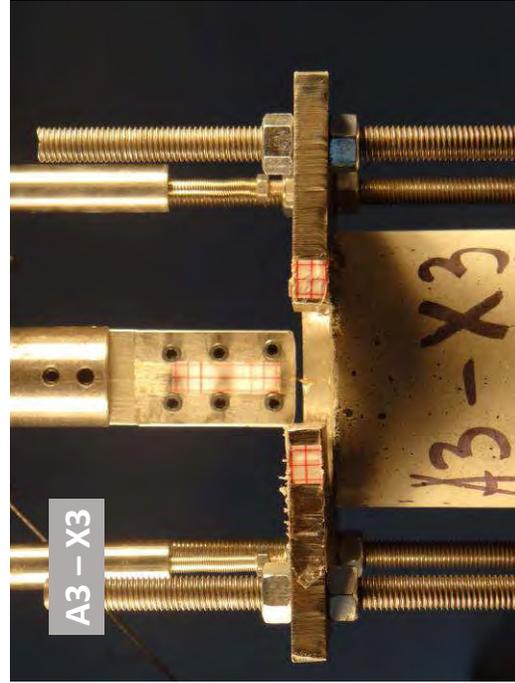
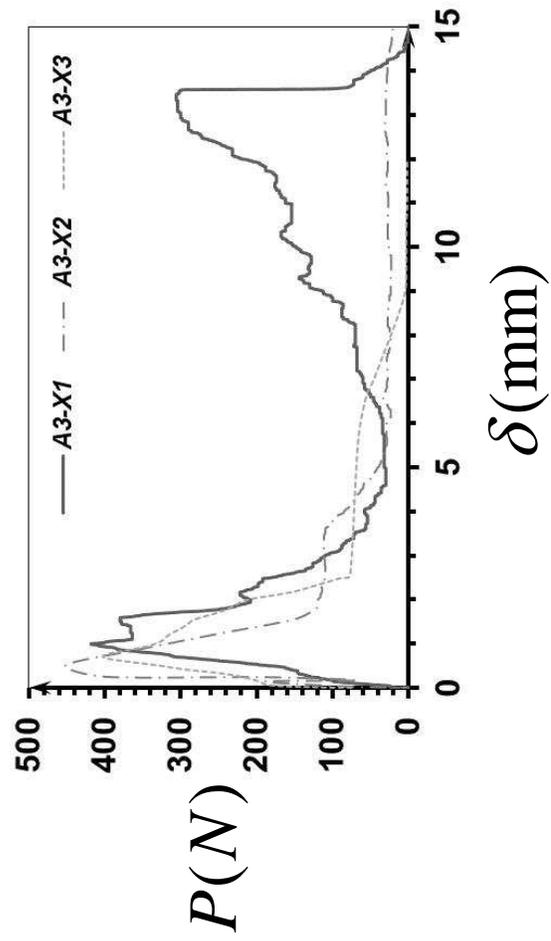
A2-Y1			A2-Y2			A2-Y3		
PESO DE LA PROBETA		w (g)	PESO DE LA PROBETA		w (g)	PESO DE LA PROBETA		w (g)
DIAMETRO $\phi$			DIAMETRO $\phi$			DIAMETRO $\phi$		
$\phi_1$	(mm)	107.55	$\phi_1$	(mm)	108.3	$\phi_1$	(mm)	111
$\phi_2$	(mm)	106.56	$\phi_2$	(mm)	109.9	$\phi_2$	(mm)	109
$\phi_3$	(mm)	105.1	$\phi_3$	(mm)	108.2	$\phi_3$	(mm)	111.5
$\phi_4$	(mm)	107.58	$\phi_4$	(mm)	109.2	$\phi_4$	(mm)	110.1
ALTURA h			ALTURA h			ALTURA h		
$h_1$	(mm)	102.75	$h_1$	(mm)	103	$h_1$	(mm)	105
$h_2$	(mm)	102.73	$h_2$	(mm)	100.3	$h_2$	(mm)	105.1
$h_3$	(mm)	103.52	$h_3$	(mm)	102.5	$h_3$	(mm)	104.92
$h_4$	(mm)	103.82	$h_4$	(mm)	100.1	$h_4$	(mm)	104.98
Area-A <sub>p</sub> (mm <sup>2</sup> )		8941.252691	Area-A <sub>p</sub> (mm <sup>2</sup> )		9314.201753	Area-A <sub>p</sub> (mm <sup>2</sup> )		9572.558479
Volumen-V <sub>p</sub> (mm <sup>3</sup> )		922751.984	Volumen-V <sub>p</sub> (mm <sup>3</sup> )		945158.6229	Volumen-V <sub>p</sub> (mm <sup>3</sup> )		1005118.64
Diametro de la fibra $\phi$			Diametro de la fibra $\phi$			Diametro de la fibra $\phi$		
$\phi_f$	(mm)	1.01	$\phi_f$	(mm)	0.99	$\phi_f$	(mm)	0.98
Longitud de la fibra L'			Longitud de la fibra L'			Longitud de la fibra L'		
L <sub>ef</sub>	(mm)	31.66	L <sub>ef</sub>	(mm)	36.6	L <sub>ef</sub>	(mm)	34.5
L <sub>fr</sub>	(mm)	18.34	L <sub>fr</sub>	(mm)	13.4	L <sub>fr</sub>	(mm)	15.5
Area-A <sub>f</sub> (mm <sup>2</sup> )		0.801184665	Area-A <sub>f</sub> (mm <sup>2</sup> )		0.76976874	Area-A <sub>f</sub> (mm <sup>2</sup> )		0.754296395
Ubicación de la fibra en la probeta			Ubicación de la fibra en la probeta			Ubicación de la fibra en la probeta		
←	(mm)	56.87	←	(mm)	55.5	←	(mm)	56
		±			±			±
		(mm)			(mm)			(mm)
		54.64			49.7			52



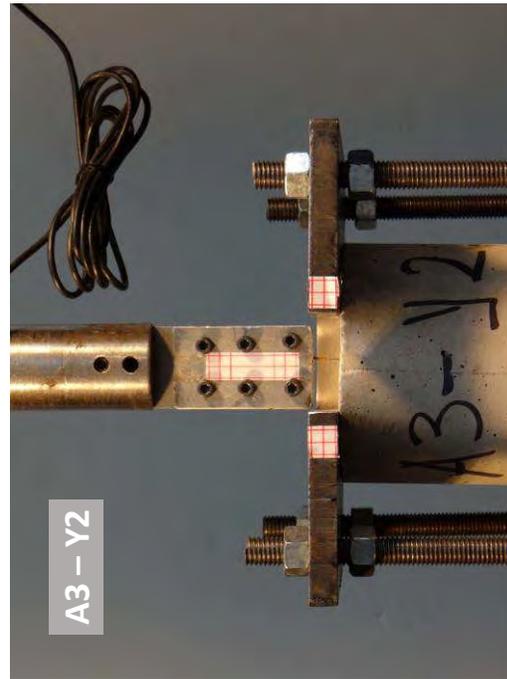
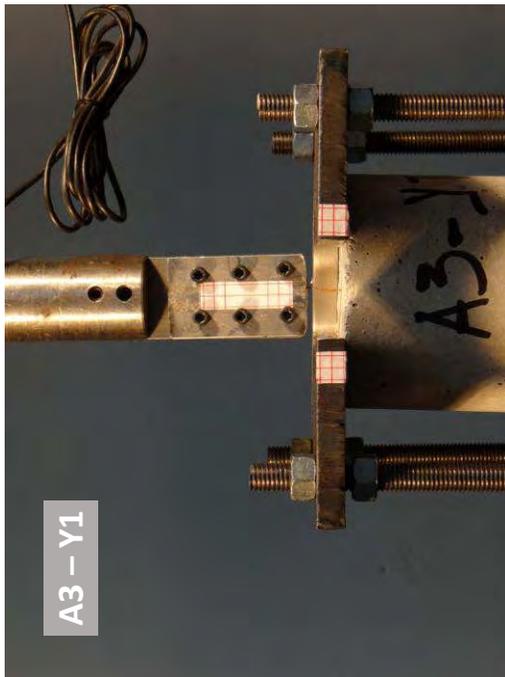
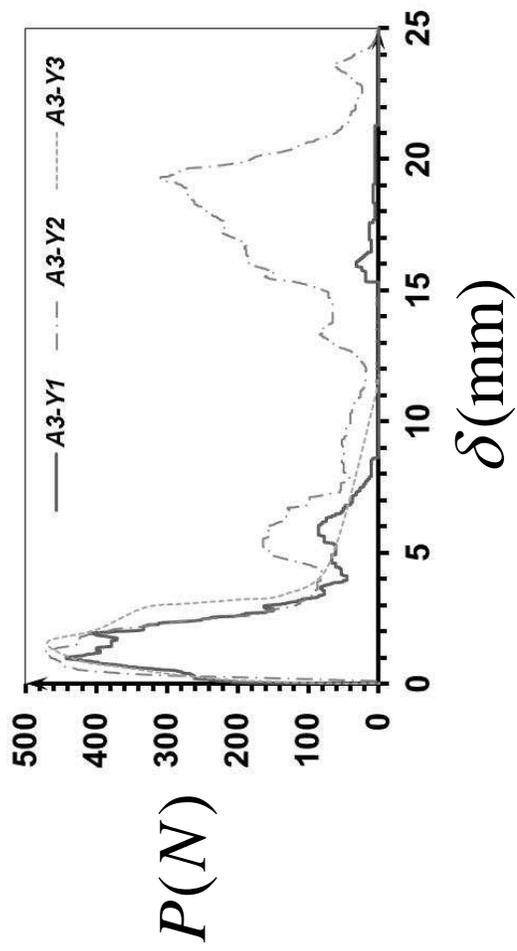
A2-Z1					A2-Z2					A2-Z3							
<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1995.39	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	2064.73	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1899.75			
<b>DIAMETRO <math>\phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\phi</math></b>							
$\phi_1$	(mm)	105	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>	$\phi_1$	(mm)	184	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>	$\phi_1$	(mm)	184	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>	$\phi_1$	(mm)	184			
$\phi_2$	(mm)	104.5		$\phi_2$	(mm)	176		$\phi_2$	(mm)	176							
$\phi_3$	(mm)	105		$\phi_3$	(mm)	186		$\phi_3$	(mm)	176.5							
$\phi_4$	(mm)	105.1		$\phi_4$	(mm)	184.5		$\phi_4$	(mm)	183.5							
104.9					182.625					180							
<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>							
$h_1$	(mm)	103	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	142	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	142	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	142			
$h_2$	(mm)	101		$h_2$	(mm)	138		$h_2$	(mm)	138							
$h_3$	(mm)	99		$h_3$	(mm)	135		$h_3$	(mm)	138.1							
$h_4$	(mm)	99.8		$h_4$	(mm)	138		$h_4$	(mm)	142.5							
100.7					138.25					140.15							
Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			8642.53	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			26194.51	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			25446.90						
Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			870302.69	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			3621391.51	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			3566383.10						
<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>							
$\phi_f$	(mm)	1.01			$\phi_f$	(mm)	1.02			$\phi_f$	(mm)	1.01					
<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>							
$l_a^f$	(mm)	10	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	50	$l_a^f$	(mm)	14.4	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	50	$l_a^f$	(mm)	15	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	50			
$l_e^f$	(mm)	40			$l_e^f$	(mm)	35.6			$l_e^f$	(mm)	35					
Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.801		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.817		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.801				
<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>							
$\leftrightarrow$	(mm)	52	$\updownarrow$	(mm)	50	$\leftrightarrow$	(mm)	56	$\updownarrow$	(mm)	52	$\leftrightarrow$	(mm)	54	$\updownarrow$	(mm)	52



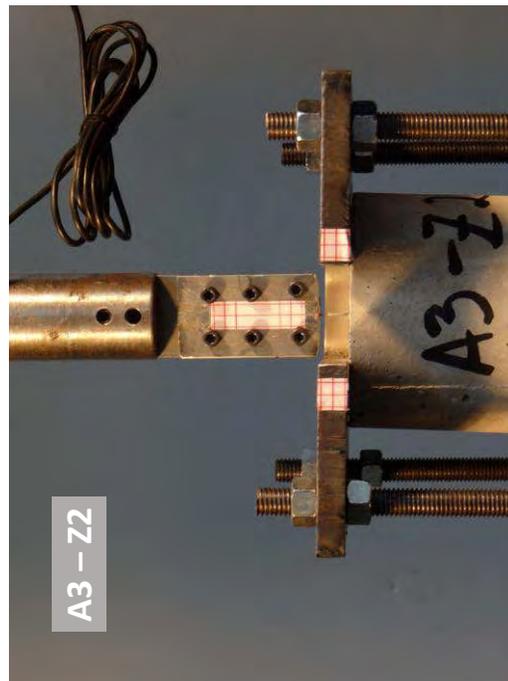
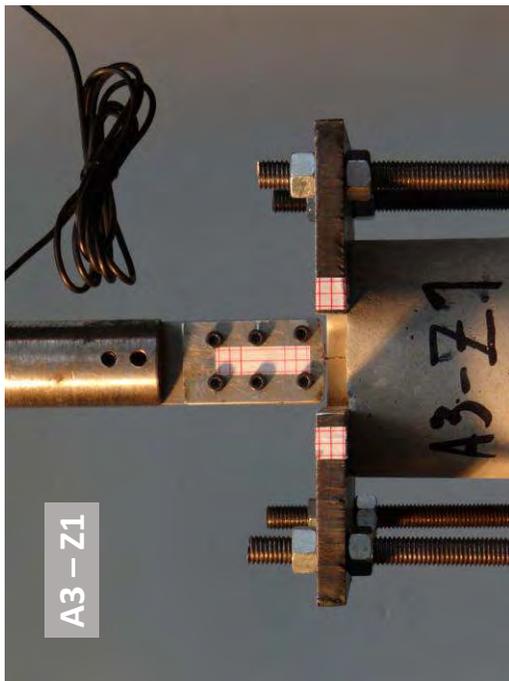
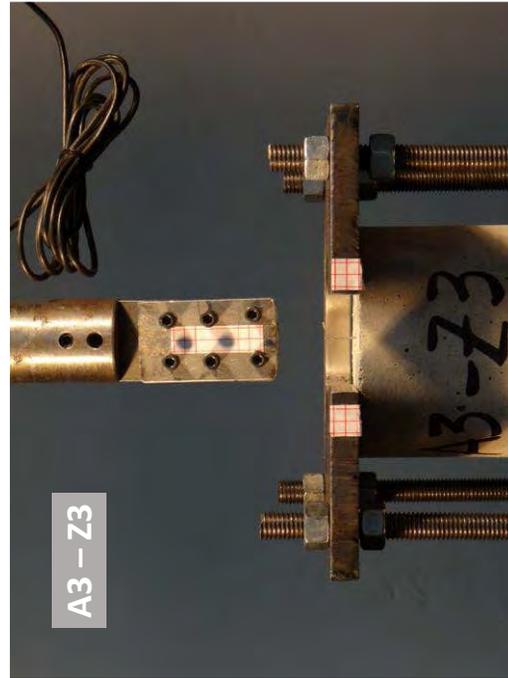
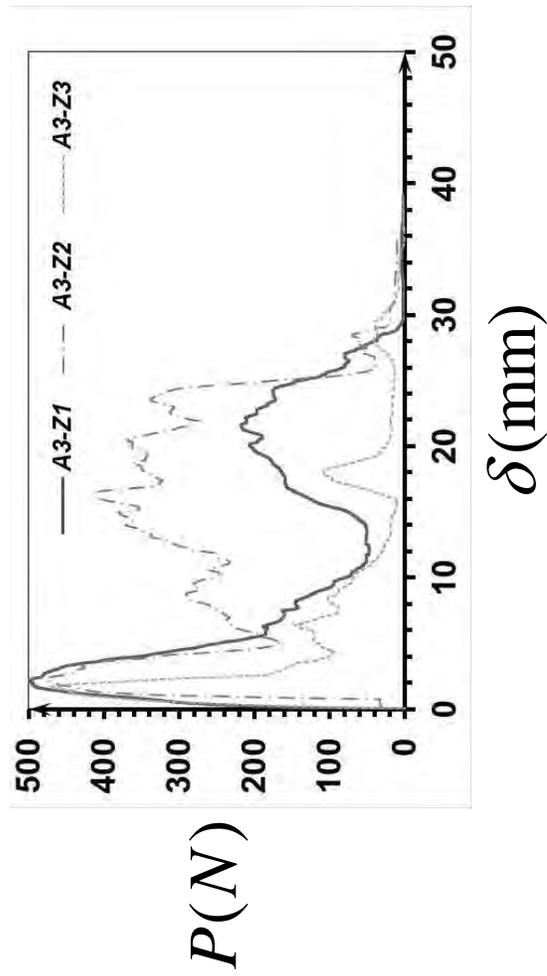
A3-X1					A3-X1					A3-X3							
<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1891	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1885	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1972.57			
<b>DIAMETRO <math>\phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\phi</math></b>							
$\phi_1$	(mm)	107	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>	$\phi_1$	(mm)	105.2	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>	$\phi_1$	(mm)	109	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>	$\phi_1$	(mm)	107			
$\phi_2$	(mm)	107.5		$\phi_2$	(mm)	108.1		$\phi_2$	(mm)	106.9							
$\phi_3$	(mm)	105.2		$\phi_3$	(mm)	107.1		$\phi_3$	(mm)	109.1							
$\phi_4$	(mm)	105.8		$\phi_4$	(mm)	105.7		$\phi_4$	(mm)	107							
<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>							
$h_1$	(mm)	111.2	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	101	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	102.6	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	102.6			
$h_2$	(mm)	110.8		$h_2$	(mm)	102.1		$h_2$	(mm)	102							
$h_3$	(mm)	110		$h_3$	(mm)	101.5		$h_3$	(mm)	103.1							
$h_4$	(mm)	110.7		$h_4$	(mm)	101.3		$h_4$	(mm)	102.5							
Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			8887.283365	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			8912.365055	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9160.884178						
Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			983600.0864	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			904382.2439	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			939448.6724						
<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>							
$\phi_f$	(mm)	1.02			$\phi_f$	(mm)	1			$\phi_f$	(mm)	0.95					
<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>							
$l_a^f$	(mm)	27	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	50	$l_a^f$	(mm)	27	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	50	$l_a^f$	(mm)	28.5	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	50			
$l_e^f$	(mm)	23			$l_e^f$	(mm)	23			$l_e^f$	(mm)	21.5					
Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.817128249		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.785398163		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.708821842				
<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>							
$\leftrightarrow$	(mm)	51	$\updownarrow$	(mm)	55	$\leftrightarrow$	(mm)	51	$\updownarrow$	(mm)	55	$\leftrightarrow$	(mm)	54.6	$\updownarrow$	(mm)	52.2



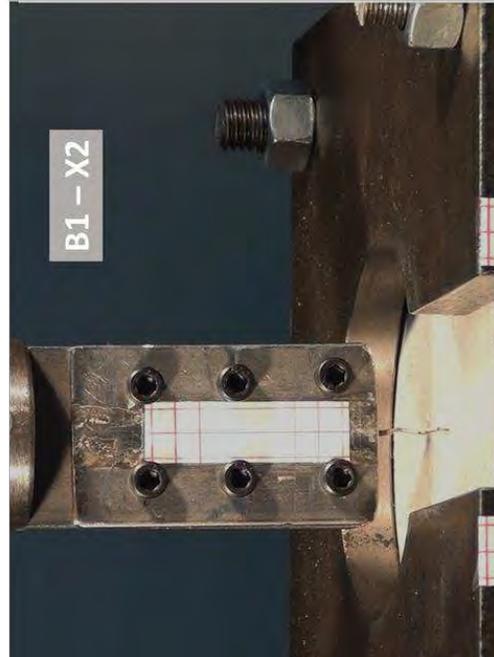
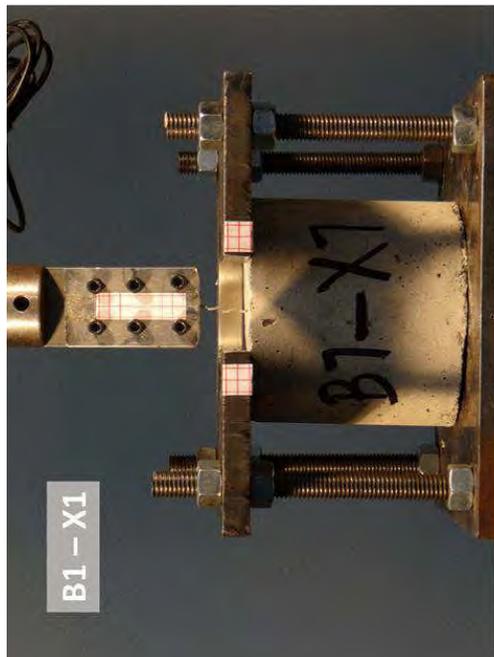
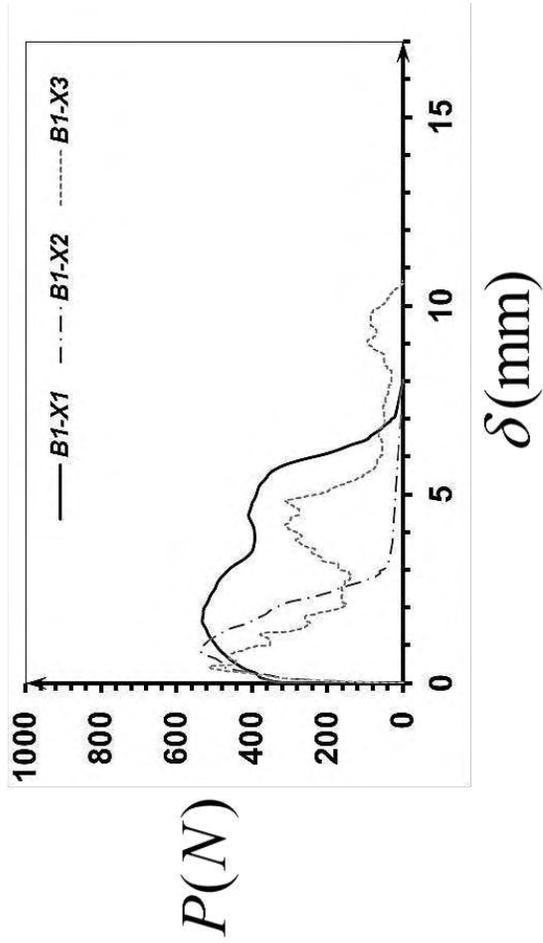
A3-Y1					A3-Y2					A3-Y3							
<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1952.72	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1882.56	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1917.39			
<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>							
$\Phi_1$	(mm)	109.4	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>		$\Phi_1$	(mm)	105.7	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>		$\Phi_1$	(mm)	108.92	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>				
$\Phi_2$	(mm)	109.2			$\Phi_2$	(mm)	106.1			$\Phi_2$	(mm)	108.5					
$\Phi_3$	(mm)	108			$\Phi_3$	(mm)	105.3			$\Phi_3$	(mm)	108.3					
$\Phi_4$	(mm)	108.6			$\Phi_4$	(mm)	105.9			$\Phi_4$	(mm)	108.1					
108.8					105.75					108.455							
<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>							
$h_1$	(mm)	101.4	<b>h promedio (mm)</b>		$h_1$	(mm)	99.5	<b>h promedio (mm)</b>		$h_1$	(mm)	104.93	<b>h promedio (mm)</b>				
$h_2$	(mm)	102.2			$h_2$	(mm)	99.3			$h_2$	(mm)	104.3					
$h_3$	(mm)	104.25			$h_3$	(mm)	99			$h_3$	(mm)	105					
$h_4$	(mm)	102.25			$h_4$	(mm)	99.1			$h_4$	(mm)	104.7					
102.525					99.225					104.7325							
Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9297.103635		Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			8783.156749		Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9238.235706				
Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			953185.5502		Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			871508.7284		Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			967543.5211				
<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>							
$\phi_f$	(mm)	1.05			$\phi_f$	(mm)	1.05			$\phi_f$	(mm)	1.03					
<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>							
$l_a^f$	(mm)	22.3	$l^f$ (mm)	50	$l_a^f$	(mm)	22	$l^f$ (mm)	50	$l_a^f$	(mm)	23	$l^f$ (mm)	50			
$l_e^f$	(mm)	27.7			$l_e^f$	(mm)	28			$l_e^f$	(mm)	27					
Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.865901475		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.865901475		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.833228912				
<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>							
$\leftrightarrow$	(mm)	53	$\updownarrow$	(mm)	55	$\leftrightarrow$	(mm)	51	$\updownarrow$	(mm)	5.2	$\leftrightarrow$	(mm)	56.87	$\updownarrow$	(mm)	53.11



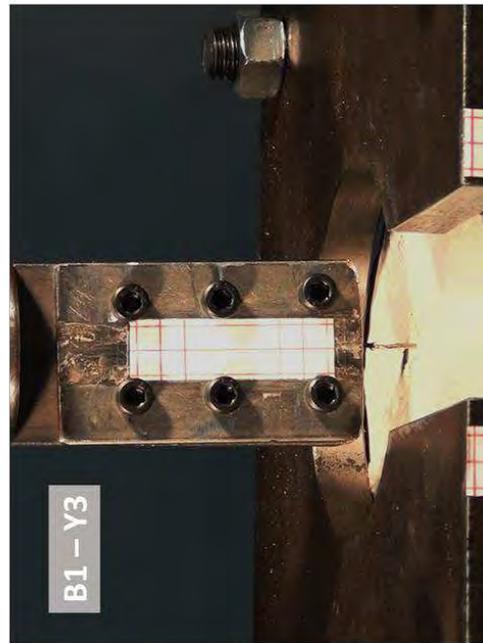
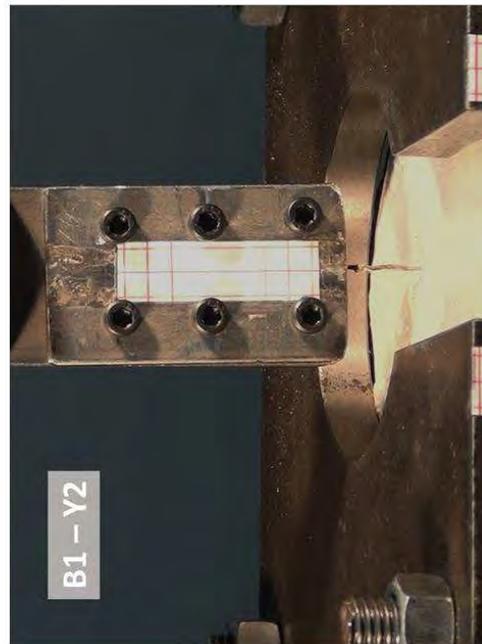
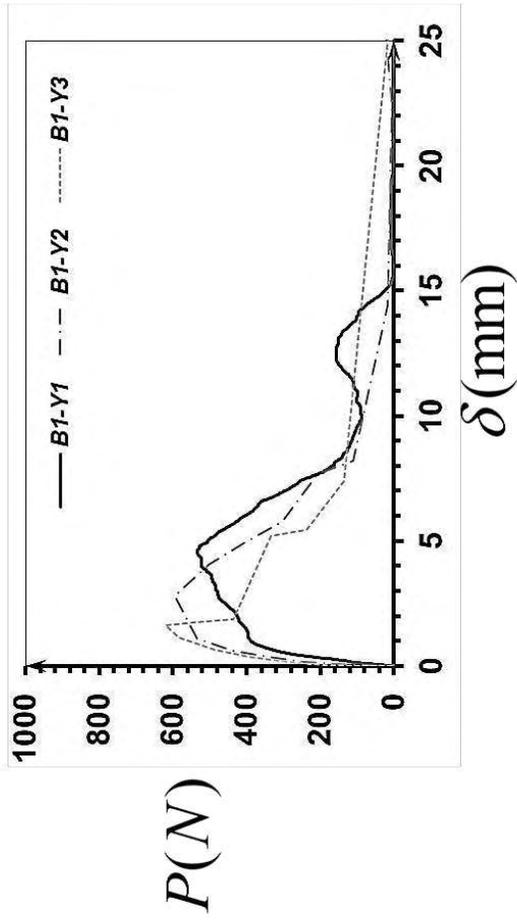
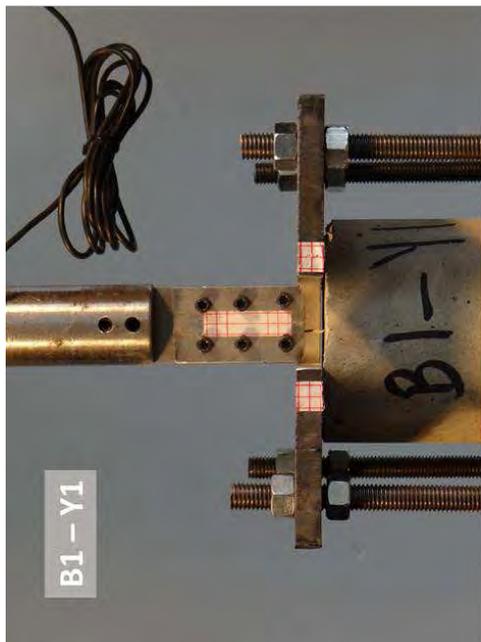
A3-Z1					A3-Z2					A3-Z3							
<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1870.72	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1833.18	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1918.77			
<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>							
$\Phi_1$	(mm)	108.8	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>		$\Phi_1$	(mm)	105	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>		$\Phi_1$	(mm)	107.1	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>				
$\Phi_2$	(mm)	107.3			$\Phi_2$	(mm)	104.8			$\Phi_2$	(mm)	108.1					
$\Phi_3$	(mm)	106.8			$\Phi_3$	(mm)	106			$\Phi_3$	(mm)	107.4					
$\Phi_4$	(mm)	107.3			$\Phi_4$	(mm)	105			$\Phi_4$	(mm)	108.15					
107.55					105.2					107.6875							
<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>							
$h_1$	(mm)	96.66	<b>h promedio (mm)</b>		$h_1$	(mm)	100	<b>h promedio (mm)</b>		$h_1$	(mm)	99.4	<b>h promedio (mm)</b>				
$h_2$	(mm)	97.4			$h_2$	(mm)	100.6			$h_2$	(mm)	99.4					
$h_3$	(mm)	97.2			$h_3$	(mm)	100.45			$h_3$	(mm)	100.9					
$h_4$	(mm)	96.8			$h_4$	(mm)	101.8			$h_4$	(mm)	102.2					
97.015					100.7125					100.475							
Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9084.70		Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			8692.03		Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9107.95				
Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			881352.41		Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			875396.36		Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			915120.92				
<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>							
$\phi_f$	(mm)	1			$\phi_f$	(mm)	1.05			$\phi_f$	(mm)	1.05					
<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>							
$l_a^f$	(mm)	14	$l^f$ (mm)	50	$l_a^f$	(mm)	14.6	$l^f$ (mm)	50	$l_a^f$	(mm)	15.25	$l^f$ (mm)	50			
$l_e^f$	(mm)	36			$l_e^f$	(mm)	35.4			$l_e^f$	(mm)	34.75					
Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.785		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.866		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.866				
<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>							
$\leftrightarrow$	(mm)	52	$\updownarrow$	(mm)	52	$\leftrightarrow$	(mm)	53	$\updownarrow$	(mm)	50	$\leftrightarrow$	(mm)	55.1	$\updownarrow$	(mm)	51



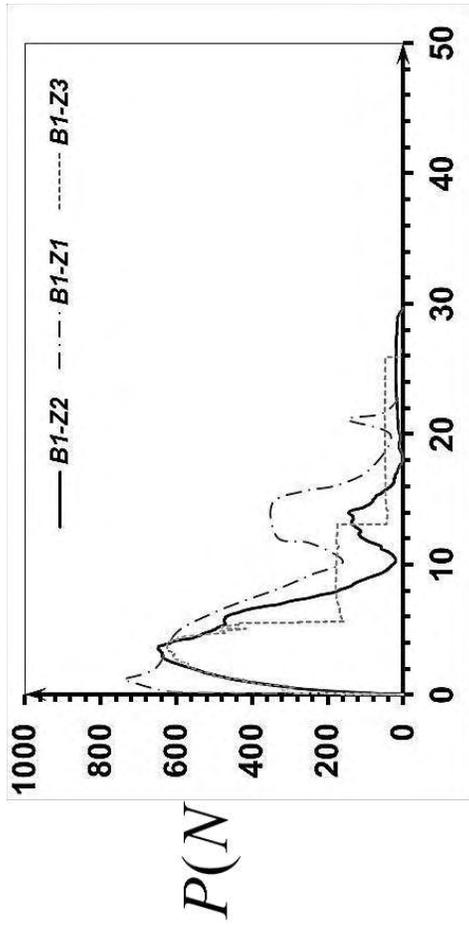
B1-X3					B1-X2					B1-X3							
<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1998.63	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1969.69	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	2050			
<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>							
$\phi_1$	(mm)	110.1	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>	$\phi_1$	(mm)	109.3	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>	$\phi_1$	(mm)	108.6	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>	$\phi_1$	(mm)	108.6			
$\phi_2$	(mm)	109.5		$\phi_2$	(mm)	112.8		$\phi_2$	(mm)	107.5		$\phi_2$	(mm)	107.5			
$\phi_3$	(mm)	109.3		$\phi_3$	(mm)	112.5		$\phi_3$	(mm)	108.6		$\phi_3$	(mm)	108.6			
$\phi_4$	(mm)	109.3		$\phi_4$	(mm)	109.1		$\phi_4$	(mm)	107.1		$\phi_4$	(mm)	107.1			
<b>109.55</b>					<b>110.925</b>					<b>107.95</b>							
<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>							
$h_1$	(mm)	100.1	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	100.5	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	101.6	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	101.6			
$h_2$	(mm)	98.5		$h_2$	(mm)	99.6		$h_2$	(mm)	102		$h_2$	(mm)	102			
$h_3$	(mm)	98.6		$h_3$	(mm)	100.2		$h_3$	(mm)	103		$h_3$	(mm)	103			
$h_4$	(mm)	99.5		$h_4$	(mm)	99.7		$h_4$	(mm)	102.5		$h_4$	(mm)	102.5			
<b>99.175</b>					<b>100</b>					<b>102.275</b>							
Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9425.722402	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9663.81831	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9152.403841						
Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			934796.0192	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			966381.831	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			936062.1029						
<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>							
$\phi_f$	(mm)	1.05			$\phi_f$	(mm)	1			$\phi_f$	(mm)	1.05					
<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>							
$l^f_a$	(mm)	37.1	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	55	$l^f_a$	(mm)	37.1	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	55	$l^f_a$	(mm)	22.6	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	55			
$l^f_e$	(mm)	17.9			$l^f_e$	(mm)	17.9			$l^f_e$	(mm)	32.4					
Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.865901475	Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.785398163	Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.865901475						
<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>							
$\leftrightarrow$	(mm)	55.2	$\updownarrow$	(mm)	56.4	$\leftrightarrow$	(mm)	54.4	$\updownarrow$	(mm)	54.2	$\leftrightarrow$	(mm)	55.2	$\updownarrow$	(mm)	53.8



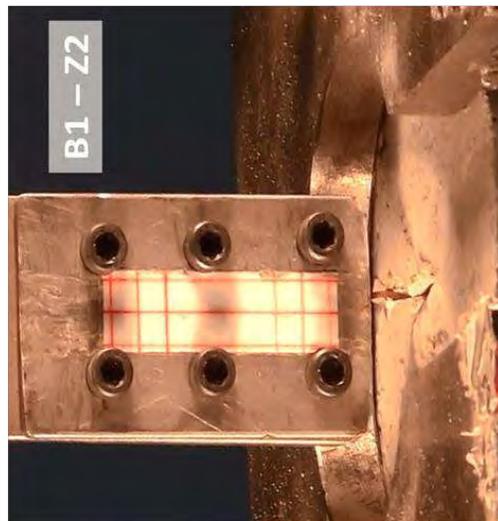
B1-Y1				B1-Y2				B1-Y3									
<b>PESO DE LA PROBETA</b>		<b>w (g)</b>	1896.2	<b>PESO DE LA PROBETA</b>		<b>w (g)</b>	1955.56	<b>PESO DE LA PROBETA</b>		<b>w (g)</b>	1951.71						
<b>DIAMETRO <math>\phi</math></b>				<b>DIAMETRO <math>\phi</math></b>				<b>DIAMETRO <math>\phi</math></b>									
$\phi_1$	(mm)	101.2	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>	$\phi_1$	(mm)	109.3	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>	$\phi_1$	(mm)	109.6	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>						
$\phi_2$	(mm)	100.5		$\phi_2$	(mm)	109.7		$\phi_2$	(mm)	109.2							
$\phi_3$	(mm)	101.6		$\phi_3$	(mm)	110.1		$\phi_3$	(mm)	108.9							
$\phi_4$	(mm)	101.5		$\phi_4$	(mm)	109.2		$\phi_4$	(mm)	109.1							
<b>ALTURA h</b>				<b>ALTURA h</b>				<b>ALTURA h</b>									
$h_1$	(mm)	98.5	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	97.4	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	102.2	<b>h promedio (mm)</b>						
$h_2$	(mm)	99.3		$h_2$	(mm)	99.6		$h_2$	(mm)	103.5							
$h_3$	(mm)	98.6		$h_3$	(mm)	98.1		$h_3$	(mm)	103							
$h_4$	(mm)	99.2		$h_4$	(mm)	99.5		$h_4$	(mm)	102.1							
Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )		8043.608167		Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )		9430.024911		Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )		9365.590355							
Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )		795512.8477		Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )		930271.9575		Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )		961846.1295							
<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>				<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>				<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>									
$\phi_f$	(mm)	1.05		$\phi_f$	(mm)	1.05		$\phi_f$	(mm)	1							
<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>				<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>				<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>									
$l_a^f$	(mm)	24.9	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	55	$l_a^f$	(mm)	25.3	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	55	$l_a^f$	(mm)	23.6	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	55			
$l_e^f$	(mm)	30.1		$l_e^f$	(mm)	29.7	$l_e^f$		(mm)	31.4							
Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )		0.865901475		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )		0.865901475		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )		0.785398163							
<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>				<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>				<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>									
$\leftrightarrow$	(mm)	51.2	$\updownarrow$	(mm)	56	$\leftrightarrow$	(mm)	52.1	$\updownarrow$	(mm)	54.8	$\leftrightarrow$	(mm)	55	$\updownarrow$	(mm)	52



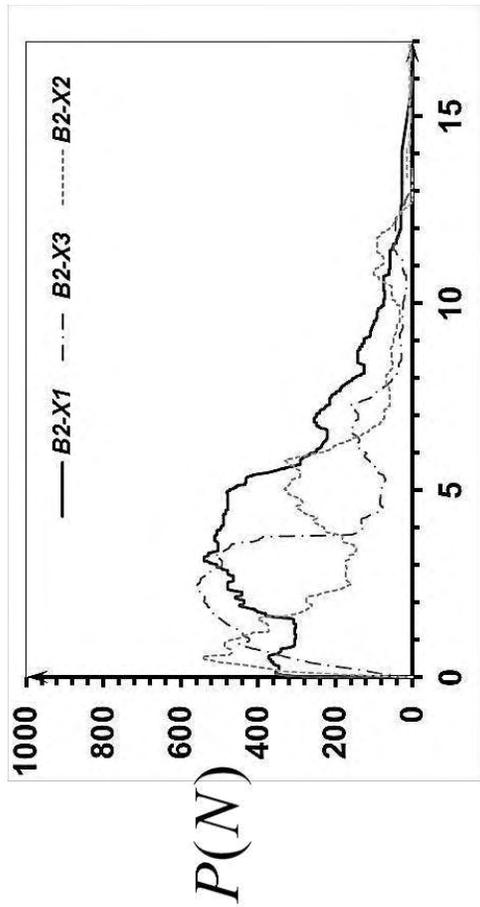
B1-Z1					B1-Z2					B1-Z3							
<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1939.27	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1963.2	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1976.55			
<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>							
$\Phi_1$	(mm)	107.53	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_1$	(mm)	105.6	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_1$	(mm)	109.4	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_1$	(mm)	107.5			
$\Phi_2$	(mm)	107.1		$\Phi_2$	(mm)	105.2		$\Phi_2$	(mm)	110.1		$\Phi_2$	(mm)	107.1			
$\Phi_3$	(mm)	105.8		$\Phi_3$	(mm)	104.8		$\Phi_3$	(mm)	109.6		$\Phi_3$	(mm)	105.8			
$\Phi_4$	(mm)	106.1		$\Phi_4$	(mm)	104.9		$\Phi_4$	(mm)	110.2		$\Phi_4$	(mm)	106.1			
<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>							
$h_1$	(mm)	102.2	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	105.6	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	101.4	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	102.2			
$h_2$	(mm)	102.8		$h_2$	(mm)	103.8		$h_2$	(mm)	98.1		$h_2$	(mm)	102.8			
$h_3$	(mm)	103.5		$h_3$	(mm)	105.6		$h_3$	(mm)	102		$h_3$	(mm)	103.5			
$h_4$	(mm)	101.9		$h_4$	(mm)	104.1		$h_4$	(mm)	98.5		$h_4$	(mm)	101.9			
Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			8930.362007	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			8679.643725	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9473.104001	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )					
Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			916255.1419	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			909409.6713	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			947310.4001	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )					
<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>							
$\phi_f$	(mm)	1.05			$\phi_f$	(mm)	1.01			$\phi_f$	(mm)	1.02					
<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>							
$l_a^f$	(mm)	32.86	$l^f$ (mm)	55	$l_a^f$	(mm)	32.86	$l^f$ (mm)	55	$l_a^f$	(mm)	13.9	$l^f$ (mm)	55			
$l_e^f$	(mm)	22.14			$l_e^f$	(mm)	22.14			$l_e^f$	(mm)	41.1					
Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.865901475	Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.801184666	Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.817128249	Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )					
<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>							
$\leftrightarrow$	(mm)	50	$\updownarrow$	(mm)	48	$\leftrightarrow$	(mm)	53	$\updownarrow$	(mm)	48	$\leftrightarrow$	(mm)	51.1	$\updownarrow$	(mm)	53



$\delta(mm)$



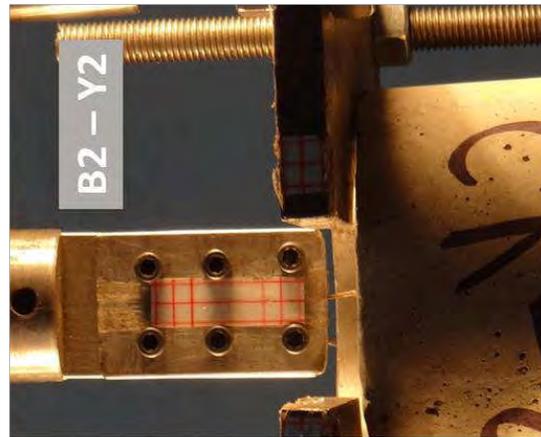
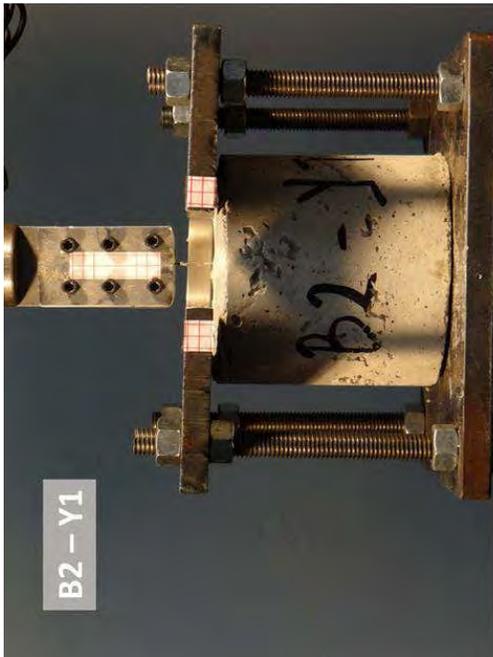
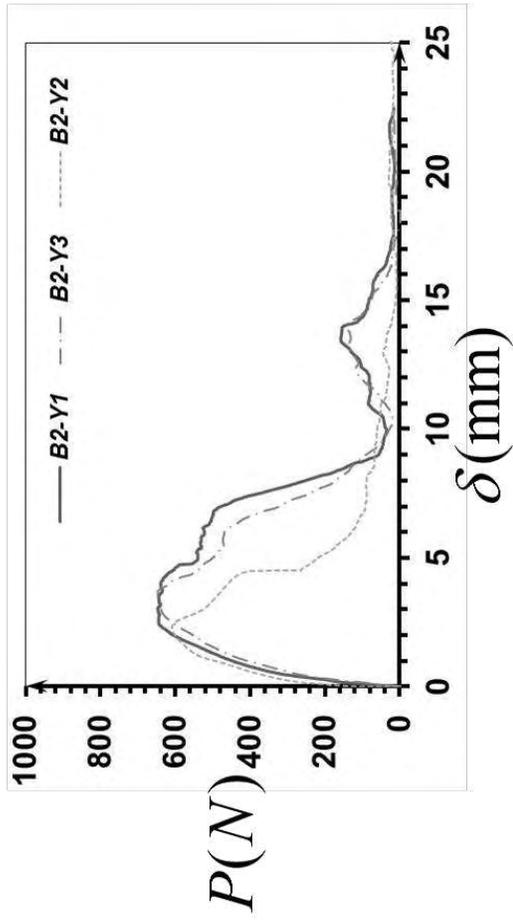
B2-X1					B2-X2					B2-X3							
<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1720.54	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	2081.36	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1985.4			
<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>							
$\Phi_1$	(mm)	107.5	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>		$\Phi_1$	(mm)	108	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>		$\Phi_1$	(mm)	105.2	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>				
$\Phi_2$	(mm)	107			$\Phi_2$	(mm)	107			$\Phi_2$	(mm)	102.9					
$\Phi_3$	(mm)	106.8			$\Phi_3$	(mm)	108.9			$\Phi_3$	(mm)	104.1					
$\Phi_4$	(mm)	106.1			$\Phi_4$	(mm)	108.1			$\Phi_4$	(mm)	103.8					
<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>							
$h_1$	(mm)	99.5	<b>h promedio (mm)</b>		$h_1$	(mm)	105	<b>h promedio (mm)</b>		$h_1$	(mm)	104.6	<b>h promedio (mm)</b>				
$h_2$	(mm)	98.5			$h_2$	(mm)	105.1			$h_2$	(mm)	104.2					
$h_3$	(mm)	99.1			$h_3$	(mm)	104.6			$h_3$	(mm)	105.1					
$h_4$	(mm)	98.8			$h_4$	(mm)	104.7			$h_4$	(mm)	105.3					
Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			8966.829963		Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9160.884178		Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			8494.866535				
Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			887491.9956		Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			960518.706		Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			890262.0129				
<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>							
$\phi_f$	(mm)	1.05			$\phi_f$	(mm)	1			$\phi_f$	(mm)	1.05					
<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>							
$l_a^f$	(mm)	29.5	<b><math>l^f</math> (mm)</b>		55	$l_a^f$	(mm)	28	<b><math>l^f</math> (mm)</b>		55	$l_a^f$	(mm)	30.2	<b><math>l^f</math> (mm)</b>		55
$l_e^f$	(mm)	25.5			$l_e^f$	(mm)	27	$l_e^f$			(mm)	24.8					
Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.865901475		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.785398163		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.865901475				
<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>							
$\leftrightarrow$	(mm)	49	$\updownarrow$	(mm)	55	$\leftrightarrow$	(mm)	51	$\updownarrow$	(mm)	49	$\leftrightarrow$	(mm)	51	$\updownarrow$	(mm)	49



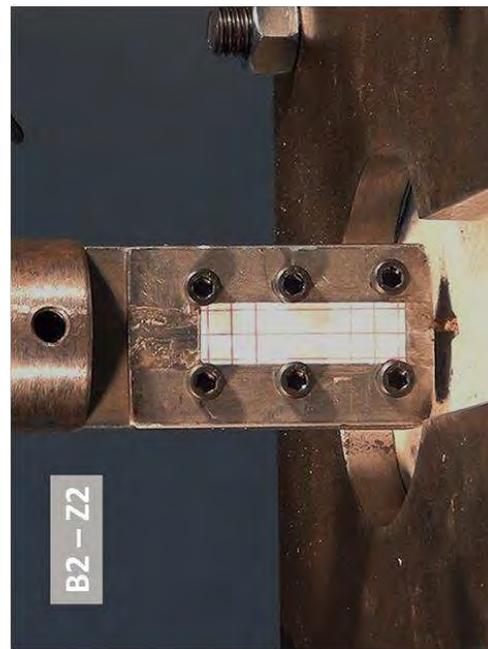
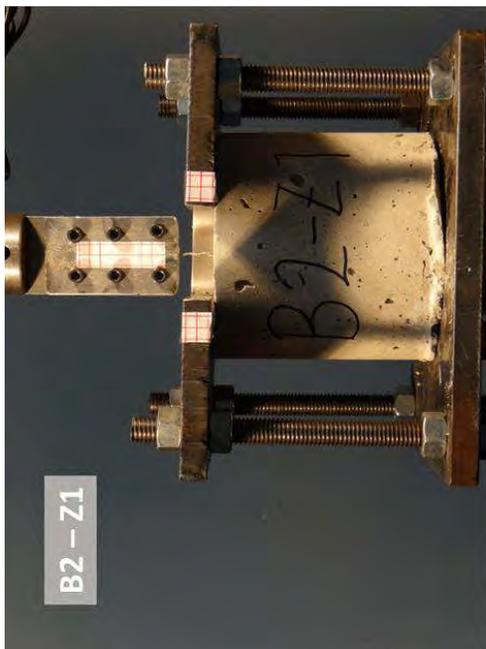
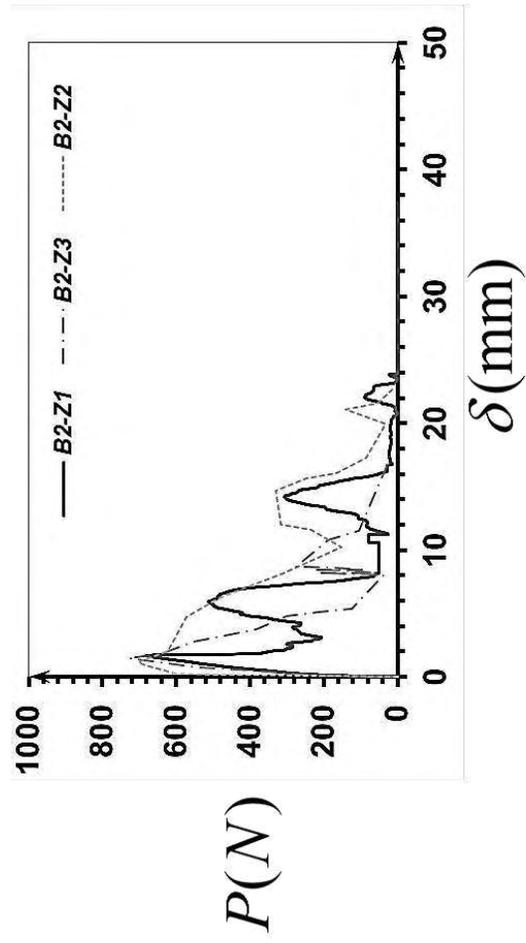
$\delta(mm)$



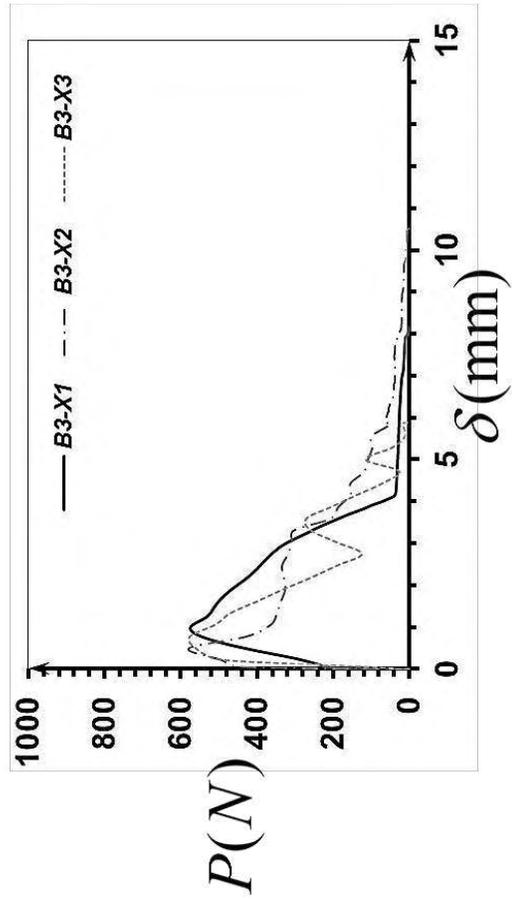
B2-Y1				B2-Y2				B2-Y3									
<b>PESO DE LA PROBETA</b>		<b>w (g)</b>	2098.46	<b>PESO DE LA PROBETA</b>		<b>w (g)</b>	2058.6	<b>PESO DE LA PROBETA</b>		<b>w (g)</b>	1892.47						
<b>DIAMETRO <math>\phi</math></b>				<b>DIAMETRO <math>\phi</math></b>				<b>DIAMETRO <math>\phi</math></b>									
$\phi_1$	(mm)	108.8	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>	$\phi_1$	(mm)	108.6	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>	$\phi_1$	(mm)	107	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>						
$\phi_2$	(mm)	109		$\phi_2$	(mm)	108.7		$\phi_2$	(mm)	107.6							
$\phi_3$	(mm)	108.9		108.5	$\phi_3$	(mm)		108	108.275	$\phi_3$		(mm)	107.2	107.275			
$\phi_4$	(mm)	107.3			$\phi_4$	(mm)		107.8		$\phi_4$		(mm)	107.3				
<b>ALTURA h</b>				<b>ALTURA h</b>				<b>ALTURA h</b>									
$h_1$	(mm)	103.6	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	104.94	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	97	<b>h promedio (mm)</b>						
$h_2$	(mm)	105.7		$h_2$	(mm)	109.3		$h_2$	(mm)	98.1							
$h_3$	(mm)	108.9		106.525	$h_3$	(mm)		108.1	107.56	$h_3$		(mm)	97.6	97.475			
$h_4$	(mm)	107.9			$h_4$	(mm)		107.9		$h_4$		(mm)	97.2				
Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )		9245.903529		Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )		9207.596225		Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )		9038.30365							
Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )		984919.8734		Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )		990369.0499		Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )		881008.6483							
<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>				<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>				<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>									
$\phi_f$	(mm)	1.05		$\phi_f$	(mm)	1.05		$\phi_f$	(mm)	1.02							
<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>				<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>				<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>									
$l_a^f$	(mm)	18.3	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	55	$l_a^f$	(mm)	25.6	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	55	$l_a^f$	(mm)	23	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	55			
$l_e^f$	(mm)	36.7		$l_e^f$	(mm)	29.4	$l_e^f$		(mm)	32							
Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )		0.865901475		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )		0.865901475		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )		0.817128249							
<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>				<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>				<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>									
$\leftrightarrow$	(mm)	51	$\updownarrow$	(mm)	53.9	$\leftrightarrow$	(mm)	55	$\updownarrow$	(mm)	52	$\leftrightarrow$	(mm)	46	$\updownarrow$	(mm)	52



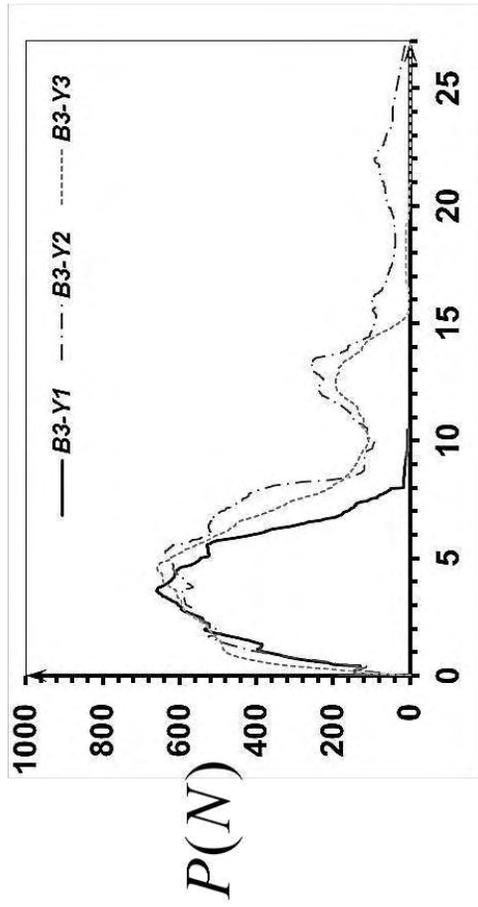
B2-Z1				B2-Z2				B2-Z3									
<b>PESO DE LA PROBETA</b>		<b>w (g)</b>	2050.25	<b>PESO DE LA PROBETA</b>		<b>w (g)</b>	1964.5	<b>PESO DE LA PROBETA</b>		<b>w (g)</b>	2041.25						
<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>				<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>				<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>									
$\Phi_1$	(mm)	109.3	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_1$	(mm)	103.5	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_1$	(mm)	107.9	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>						
$\Phi_2$	(mm)	109		$\Phi_2$	(mm)	104.2		$\Phi_2$	(mm)	107.8							
$\Phi_3$	(mm)	108.6		$\Phi_3$	(mm)	103.1		$\Phi_3$	(mm)	110.4							
$\Phi_4$	(mm)	108.8		$\Phi_4$	(mm)	103.9		$\Phi_4$	(mm)	110.1							
108.925				103.675				109.05									
<b>ALTURA h</b>				<b>ALTURA h</b>				<b>ALTURA h</b>									
$h_1$	(mm)	103.6	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	102.1	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	107.5	<b>h promedio (mm)</b>						
$h_2$	(mm)	103.9		$h_2$	(mm)	103.5		$h_2$	(mm)	110							
$h_3$	(mm)	106		$h_3$	(mm)	101.9		$h_3$	(mm)	101.6							
$h_4$	(mm)	105.7		$h_4$	(mm)	103.1		$h_4$	(mm)	101.9							
104.8				102.65				105.25									
Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )		9318.48		Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )		8441.86		Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )		9339.88							
Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )		976576.57		Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )		866556.58		Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )		983022.20							
<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>				<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>				<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>									
$\phi_f$	(mm)	1.05		$\phi_f$	(mm)	1.02		$\phi_f$	(mm)	1.05							
<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>				<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>				<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>									
$l_a^f$	(mm)	21.5	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	55	$l_a^f$	(mm)	20.5	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	55	$l_a^f$	(mm)	13.9	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	55			
$l_e^f$	(mm)	33.5		$l_e^f$	(mm)	34.5	$l_e^f$		(mm)	41.1							
Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )		0.8659		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )		0.8171		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )		0.8659							
<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>				<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>				<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>									
$\leftrightarrow$	(mm)	54	$\updownarrow$	(mm)	48	$\leftrightarrow$	(mm)	56.2	$\updownarrow$	(mm)	52.5	$\leftrightarrow$	(mm)	51.1	$\updownarrow$	(mm)	53



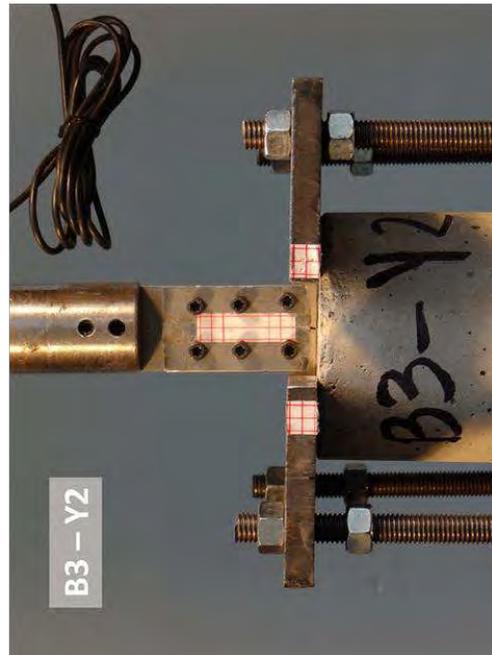
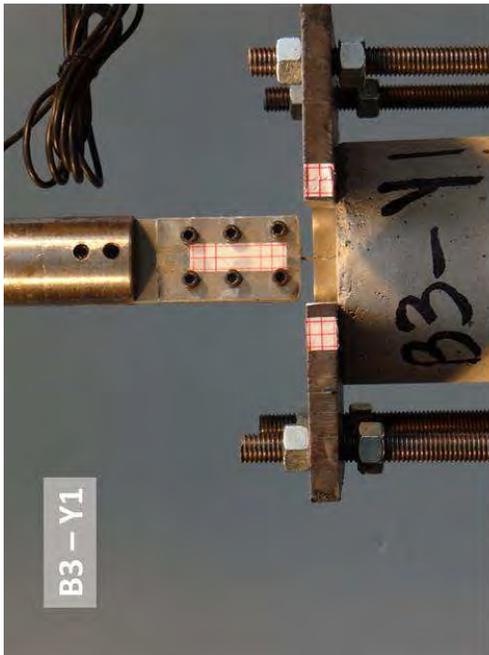
B3-X1					B3-X2					B3-X3							
<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1957.5	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	2023.58	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1957.35			
<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>							
$\Phi_1$	(mm)	109.11	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_1$	(mm)	107.8	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_1$	(mm)	108.4	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>						
$\Phi_2$	(mm)	108.2		$\Phi_2$	(mm)	107.8		$\Phi_2$	(mm)	108.2							
$\Phi_3$	(mm)	108.5		$\Phi_3$	(mm)	107.1		$\Phi_3$	(mm)	107.6							
$\Phi_4$	(mm)	109.1		$\Phi_4$	(mm)	106.8		$\Phi_4$	(mm)	107.9							
108.7275					107.375					108.025							
<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>							
$h_1$	(mm)	103.25	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	106.82	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	107.15	<b>h promedio (mm)</b>						
$h_2$	(mm)	103.5		$h_2$	(mm)	107.1		$h_2$	(mm)	108.1							
$h_3$	(mm)	105		$h_3$	(mm)	108.1		$h_3$	(mm)	107							
$h_4$	(mm)	104.6		$h_4$	(mm)	106.9		$h_4$	(mm)	107.1							
104.0875					107.23					107.3375							
Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9284.717322	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9055.162222	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9165.125819						
Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			966423.0143	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			970985.0451	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			983761.6926						
<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>							
$\phi_f$	(mm)	1.05			$\phi_f$	(mm)	1.05			$\phi_f$	(mm)	1					
<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>							
$l_a^f$	(mm)	33.15	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	55	$l_a^f$	(mm)	33.59	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	55	$l_a^f$	(mm)	33.4	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	55			
$l_e^f$	(mm)	21.85			$l_e^f$	(mm)	21.41			$l_e^f$	(mm)	21.6					
Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.865901475		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.865901475		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.785398163				
<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>							
$\leftrightarrow$	(mm)	56	$\updownarrow$	(mm)	54	$\leftrightarrow$	(mm)	57.03	$\updownarrow$	(mm)	56.13	$\leftrightarrow$	(mm)	57.03	$\updownarrow$	(mm)	56.13



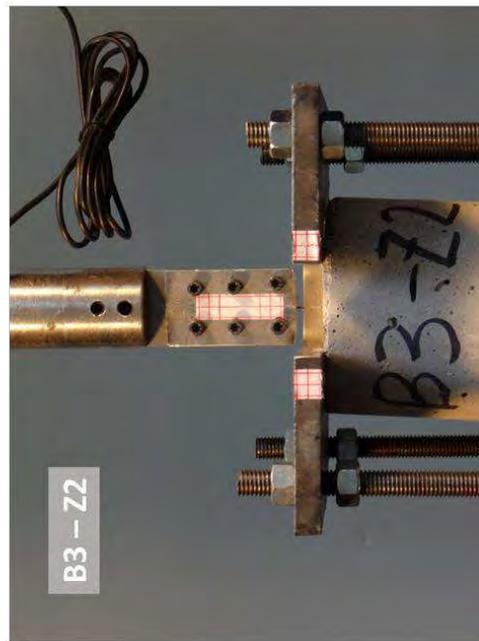
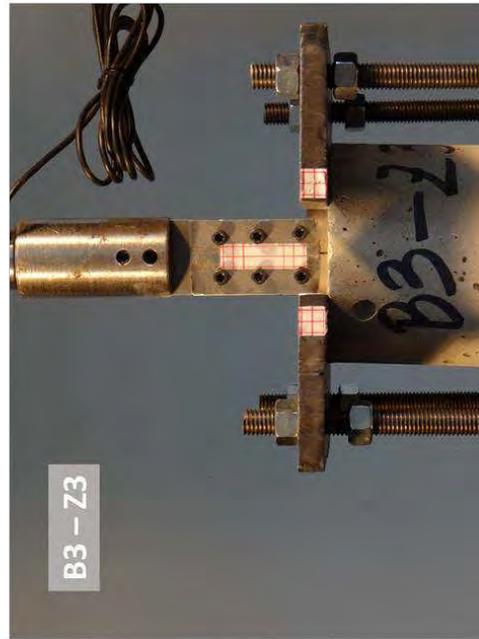
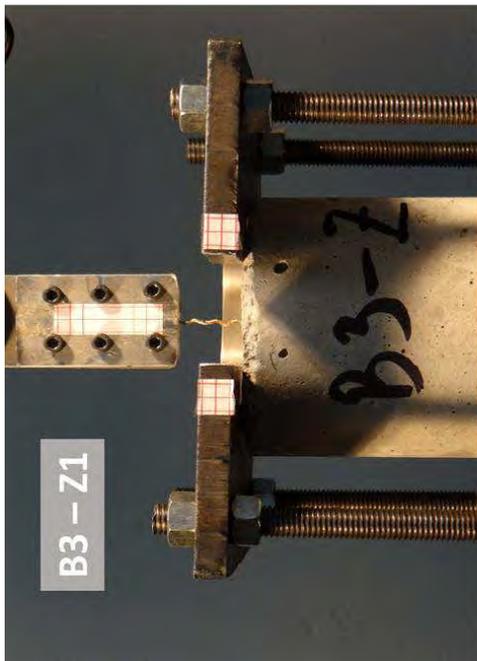
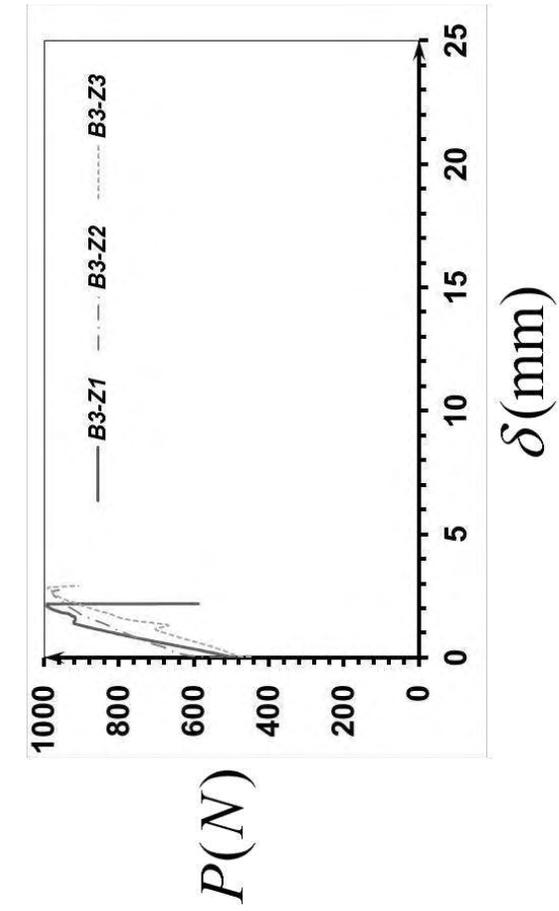
B3-Y1					B3-Y2					B3-Y3							
<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1975	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1828.62	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	2656			
<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>							
$\phi_1$	(mm)	107	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>	$\phi_1$	(mm)	106.9	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>	$\phi_1$	(mm)	106.2	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>	$\phi_1$	(mm)	106.2			
$\phi_2$	(mm)	108.5		$\phi_2$	(mm)	107.1		$\phi_2$	(mm)	107.9							
$\phi_3$	(mm)	107.5		$\phi_3$	(mm)	106.1		$\phi_3$	(mm)	107.1							
$\phi_4$	(mm)	107.1		$\phi_4$	(mm)	107		$\phi_4$	(mm)	106							
107.525					106.775					106.8							
<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>							
$h_1$	(mm)	95	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	98.8	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	101.6	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	101.6			
$h_2$	(mm)	102		$h_2$	(mm)	98.1		$h_2$	(mm)	101.5							
$h_3$	(mm)	101		$h_3$	(mm)	98.2		$h_3$	(mm)	105.2							
$h_4$	(mm)	96.7		$h_4$	(mm)	98.6		$h_4$	(mm)	104.2							
98.675					98.425					103.125							
Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9080.479532	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			8954.246412	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			8958.439947						
Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			896016.3178	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			881321.7031	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			923839.1196						
<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>							
$\phi_f$	(mm)	1.05			$\phi_f$	(mm)	1.05			$\phi_f$	(mm)	1.05					
<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>							
$l_a^f$	(mm)	18	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	55	$l_a^f$	(mm)	23.6	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	55	$l_a^f$	(mm)	21.6	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	55			
$l_e^f$	(mm)	37			$l_e^f$	(mm)	31.4			$l_e^f$	(mm)	33.4					
Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.865901475		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.865901475		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.865901475				
<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>							
$\leftrightarrow$	(mm)	54	$\updownarrow$	(mm)	54	$\leftrightarrow$	(mm)	47	$\updownarrow$	(mm)	48	$\leftrightarrow$	(mm)	53	$\updownarrow$	(mm)	51



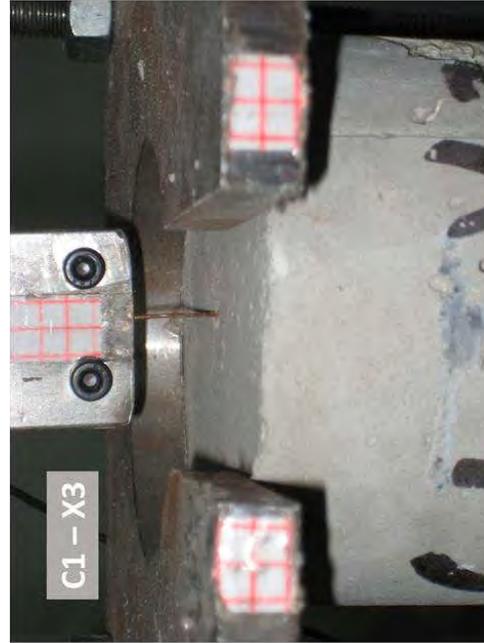
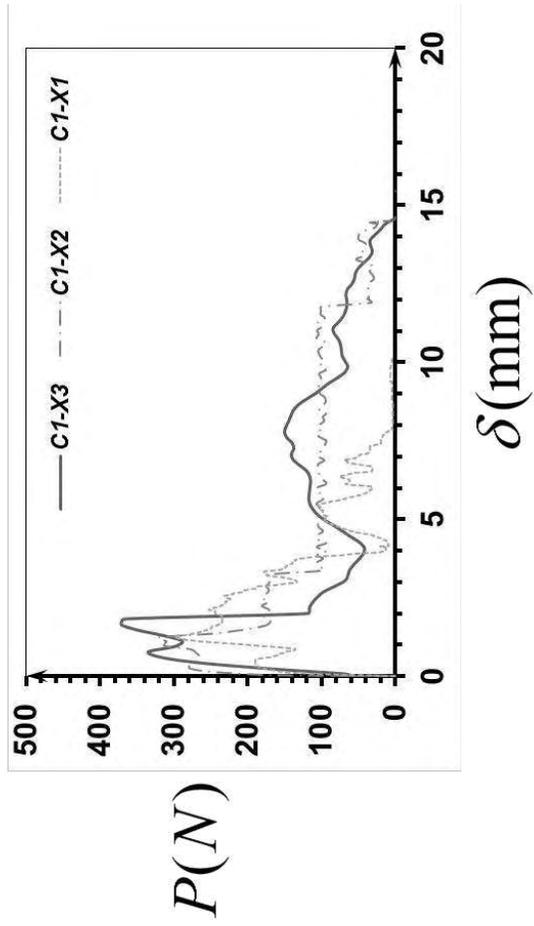
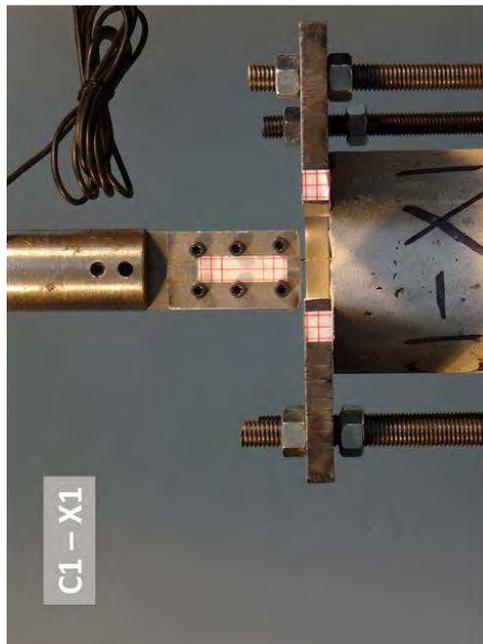
$\delta$  (mm)



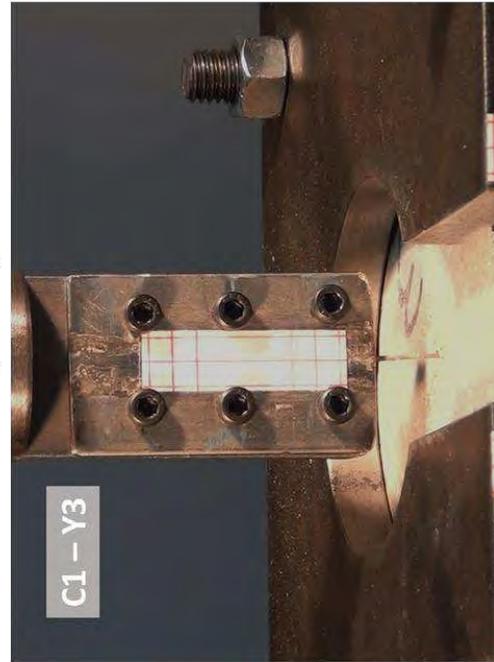
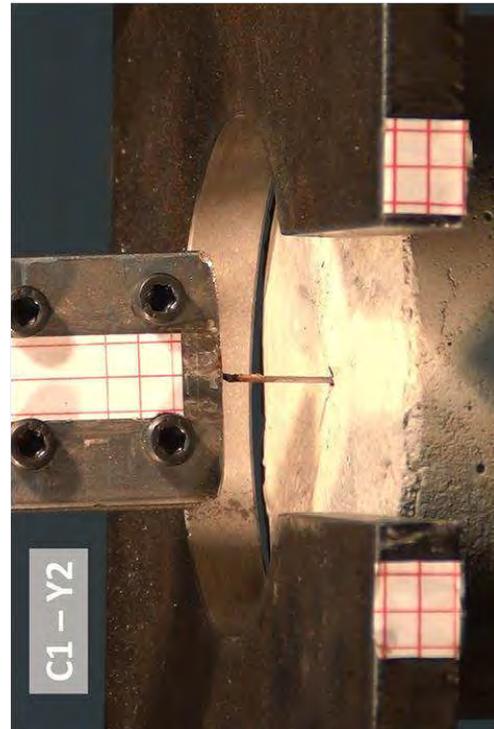
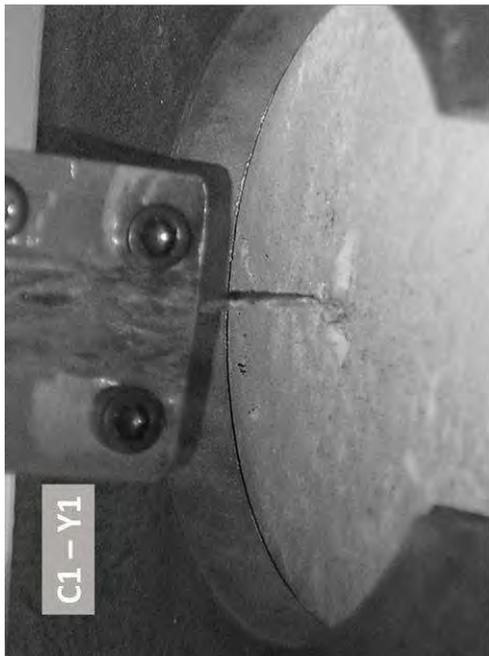
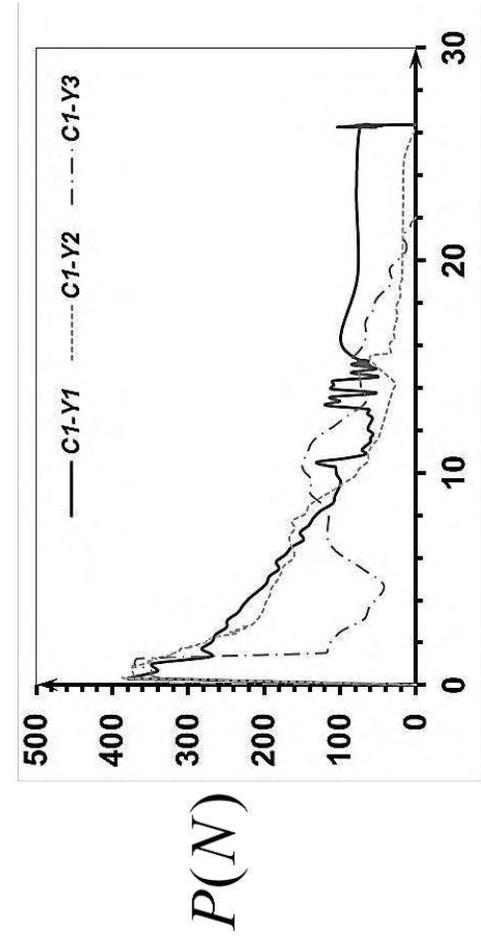
B3-Z1					B3-Z2					B3-Z3							
<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1900.92	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1871.95	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1909.79			
<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>							
$\Phi_1$	(mm)	105.8	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_1$	(mm)	105	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_1$	(mm)	106.5	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_1$	(mm)	106.5			
$\Phi_2$	(mm)	105.9		$\Phi_2$	(mm)	106.5		$\Phi_2$	(mm)	106.2							
$\Phi_3$	(mm)	104.4		$\Phi_3$	(mm)	105.2		$\Phi_3$	(mm)	106							
$\Phi_4$	(mm)	105.8		$\Phi_4$	(mm)	105.3		$\Phi_4$	(mm)	105.5							
105.475					105.5					106.05							
<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>							
$h_1$	(mm)	103.6	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	98	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	102	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	102			
$h_2$	(mm)	101.8		$h_2$	(mm)	102		$h_2$	(mm)	101							
$h_3$	(mm)	101.6		$h_3$	(mm)	103		$h_3$	(mm)	102.5							
$h_4$	(mm)	102		$h_4$	(mm)	102.5		$h_4$	(mm)	100							
102.25					101.375					101.375							
Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			8737.5	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			8741.7	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			8833.1						
Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			893413.0	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			886187.6	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			895451.6						
<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>							
$\phi_f$	(mm)	1.05			$\phi_f$	(mm)	1.05			$\phi_f$	(mm)	0.98					
<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>							
$l_a^f$	(mm)	17	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	55	$l_a^f$	(mm)	12	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	55	$l_a^f$	(mm)	9.8	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	55			
$l_e^f$	(mm)	38			$l_e^f$	(mm)	43			$l_e^f$	(mm)	45.2					
Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.8659		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.8659		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.7543				
<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>							
$\leftrightarrow$	(mm)	50	$\updownarrow$	(mm)	47	$\leftrightarrow$	(mm)	53	$\updownarrow$	(mm)	52	$\leftrightarrow$	(mm)	51	$\updownarrow$	(mm)	53



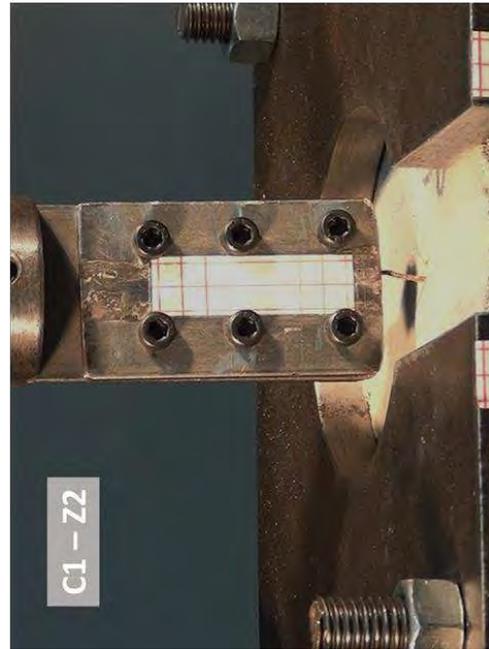
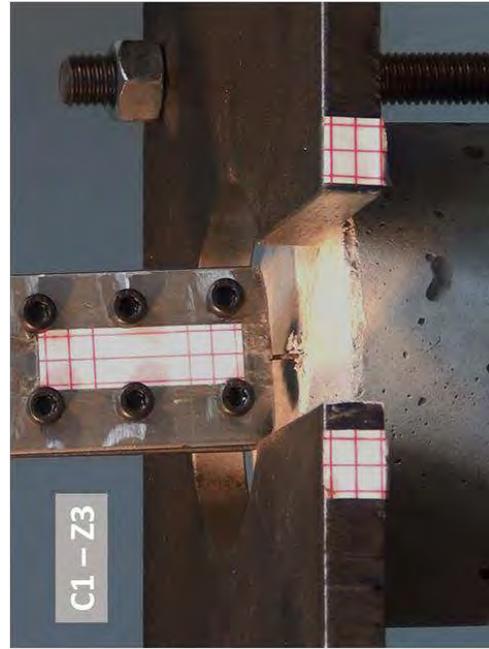
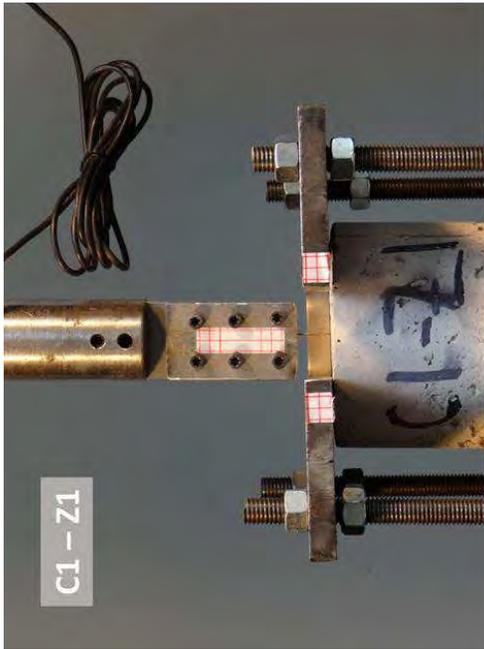
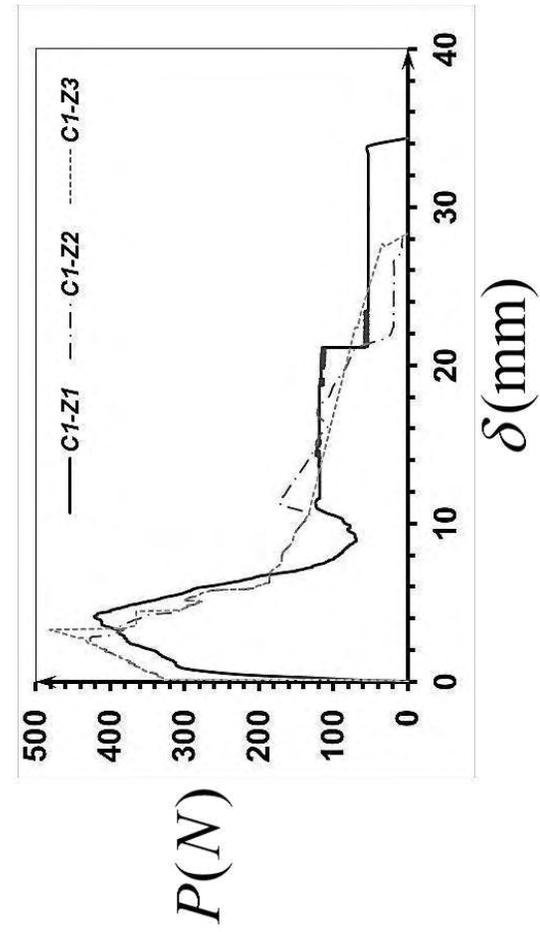
C1-X1					C1-X2					C1-X3							
<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1899.75	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1971.5	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	2016.3			
<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>							
$\Phi_1$	(mm)	106	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>		$\Phi_1$	(mm)	106	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>		$\Phi_1$	(mm)	109.4	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>				
$\Phi_2$	(mm)	106.5			$\Phi_2$	(mm)	106.5			$\Phi_2$	(mm)	109.5					
$\Phi_3$	(mm)	108.1			$\Phi_3$	(mm)	107.1			$\Phi_3$	(mm)	108.1					
$\Phi_4$	(mm)	109			$\Phi_4$	(mm)	107.5			$\Phi_4$	(mm)	108.5					
<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>							
$h_1$	(mm)	101.5	<b>h promedio (mm)</b>		$h_1$	(mm)	109.5	<b>h promedio (mm)</b>		$h_1$	(mm)	98.6	<b>h promedio (mm)</b>				
$h_2$	(mm)	101			$h_2$	(mm)	110.2			$h_2$	(mm)	103.7					
$h_3$	(mm)	103.5			$h_3$	(mm)	108.1			$h_3$	(mm)	101.5					
$h_4$	(mm)	103.6			$h_4$	(mm)	108.5			$h_4$	(mm)	98.7					
Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9059.4		Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			8954.2		Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9309.9				
Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			927680.4		Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			976684.4		Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			936811.3				
<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>							
$\Phi_f$	(mm)	0.75			$\Phi_f$	(mm)	0.78			$\Phi_f$	(mm)	0.75					
<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>							
$l_a^f$	(mm)	35.2	<b><math>l^f</math> (mm)</b>		60	$l_a^f$	(mm)	32.1	<b><math>l^f</math> (mm)</b>		60	$l_a^f$	(mm)	33.3	<b><math>l^f</math> (mm)</b>		60
$l_e^f$	(mm)	24.8			$l_e^f$	(mm)	27.9	$l_e^f$			(mm)	26.7					
Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.442		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.478		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.442				
<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>							
$\leftrightarrow$	(mm)	55	$\updownarrow$	(mm)	54.7	$\leftrightarrow$	(mm)	54.2	$\updownarrow$	(mm)	51	$\leftrightarrow$	(mm)	55	$\updownarrow$	(mm)	50



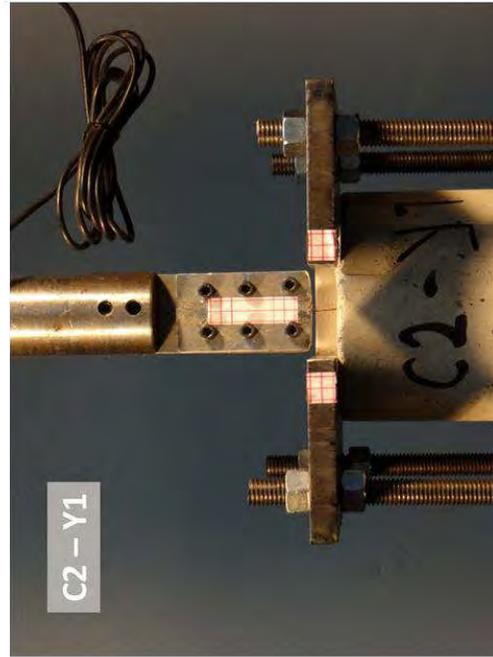
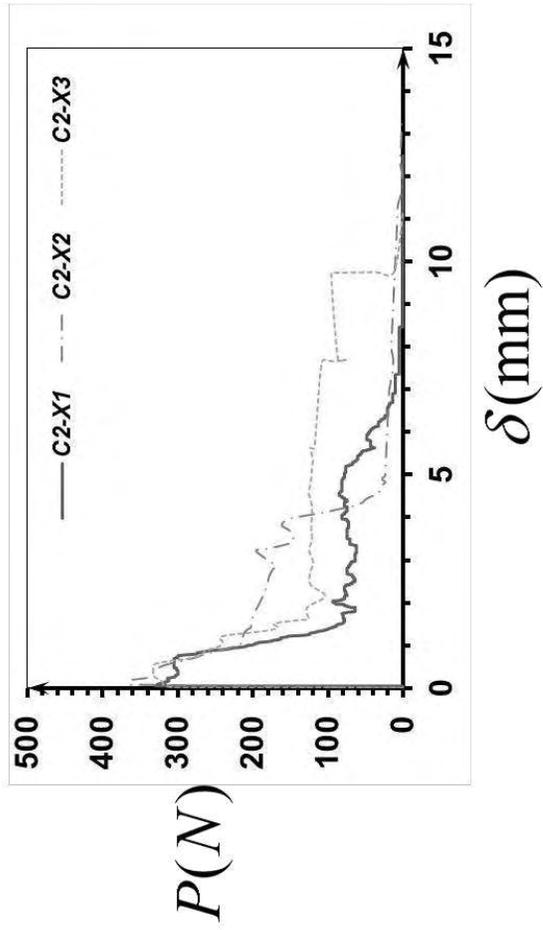
C1-Y1					C1-Y2					C1-Y3							
<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1856.1	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	2008.5	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	2016.3			
<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>							
$\Phi_1$	(mm)	101.5	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_1$	(mm)	107.5	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_1$	(mm)	109.4	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_1$	(mm)	101.5			
$\Phi_2$	(mm)	105.1		$\Phi_2$	(mm)	107.8		$\Phi_2$	(mm)	110.1		$\Phi_2$	(mm)	105.1			
$\Phi_3$	(mm)	105.5		$\Phi_3$	(mm)	106.1		$\Phi_3$	(mm)	108.8		$\Phi_3$	(mm)	105.5			
$\Phi_4$	(mm)	101.2		$\Phi_4$	(mm)	106		$\Phi_4$	(mm)	109.1		$\Phi_4$	(mm)	101.2			
<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>							
$h_1$	(mm)	110.5	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	110	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	98.6	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	110.5			
$h_2$	(mm)	112.1		$h_2$	(mm)	112		$h_2$	(mm)	103.7		$h_2$	(mm)	112.1			
$h_3$	(mm)	111.5		$h_3$	(mm)	113		$h_3$	(mm)	102.8		$h_3$	(mm)	111.5			
$h_4$	(mm)	113.1		$h_4$	(mm)	110.5		$h_4$	(mm)	98.1		$h_4$	(mm)	113.1			
Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			8384.95	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			8966.83	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9391.34						
Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			937437.91	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			998680.69	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			946646.84						
<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>							
$\phi_f$	(mm)	0.75			$\phi_f$	(mm)	0.75			$\phi_f$	(mm)	0.75					
<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>							
$l_a^f$	(mm)	31.5	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	60	$l_a^f$	(mm)	60	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	60	$l_a^f$	(mm)	33.3	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	60			
$l_e^f$	(mm)	28.5			$l_e^f$	(mm)				26.7							
Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.4418		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.4418		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.4418				
<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>							
$\leftrightarrow$	(mm)	55	$\updownarrow$	(mm)	54	$\leftrightarrow$	(mm)	54.5	$\updownarrow$	(mm)	52	$\leftrightarrow$	(mm)	55	$\updownarrow$	(mm)	50



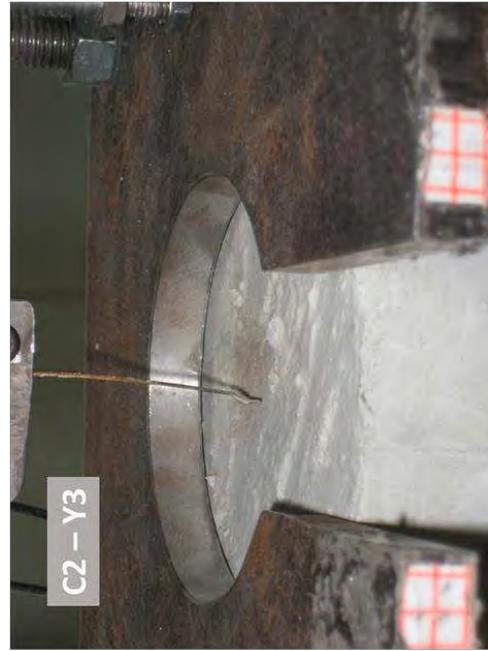
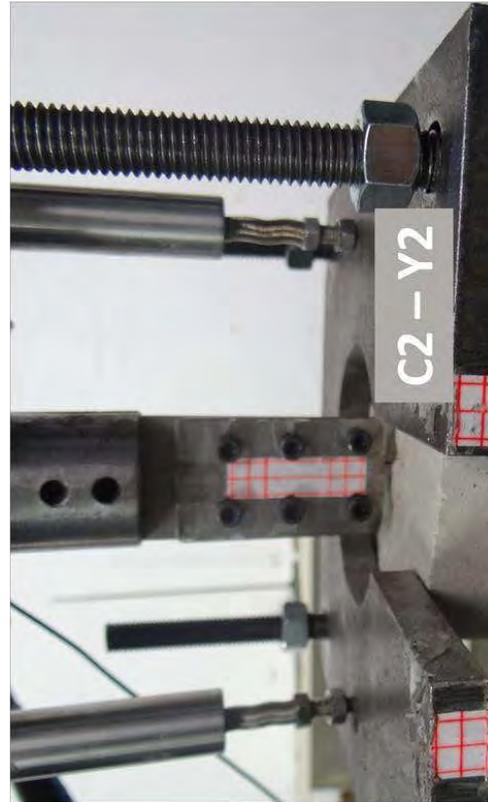
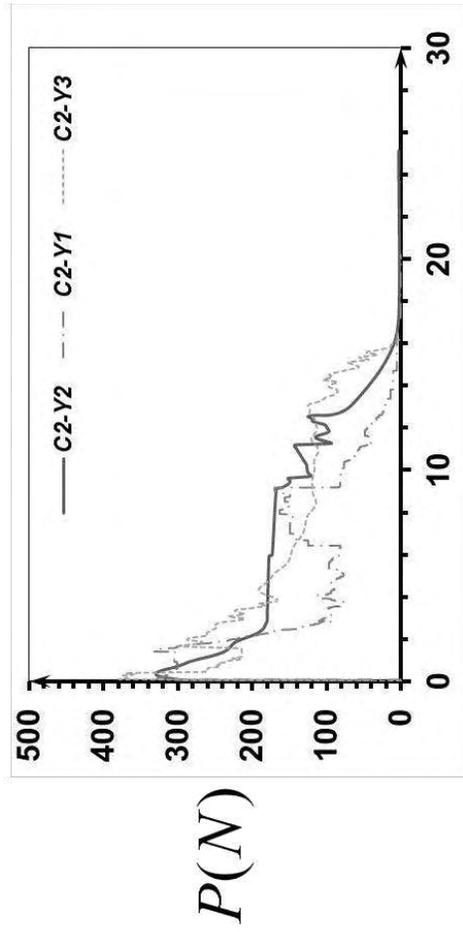
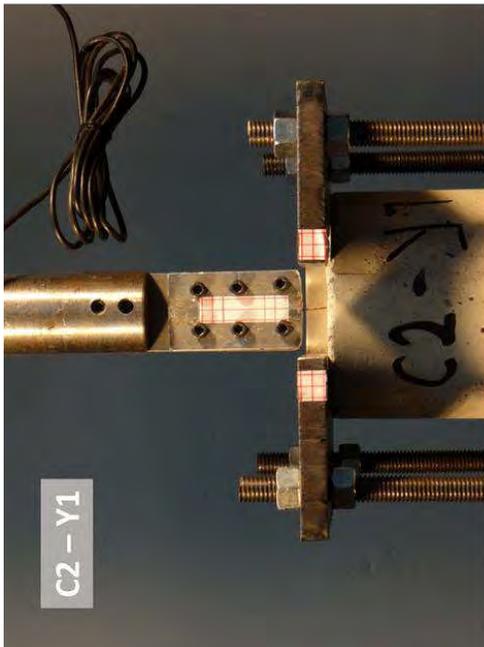
C1-Z1					C1-Z2					C1-Z3							
<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1883.7	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1897.2	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1947.8			
<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>							
$\Phi_1$	(mm)	107	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_1$	(mm)	102.1	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_1$	(mm)	105.1	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_1$	(mm)	105.1			
$\Phi_2$	(mm)	105.5		$\Phi_2$	(mm)	105.1		$\Phi_2$	(mm)	107.1							
$\Phi_3$	(mm)	107.1		$\Phi_3$	(mm)	102.3		$\Phi_3$	(mm)	105.2							
$\Phi_4$	(mm)	105.1		$\Phi_4$	(mm)	103.1		$\Phi_4$	(mm)	106.8							
<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>							
$h_1$	(mm)	100	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	98.5	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	101.1	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	101.1			
$h_2$	(mm)	101		$h_2$	(mm)	99.6		$h_2$	(mm)	106.5							
$h_3$	(mm)	100.5		$h_3$	(mm)	99.7		$h_3$	(mm)	104.5							
$h_4$	(mm)	102.8		$h_4$	(mm)	98		$h_4$	(mm)	105.1							
Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			8853.90	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			8356.58	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			8833.06						
Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			894907.55	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			826883.15	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			921288.26						
<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>							
$\phi_f$	(mm)	0.75			$\phi_f$	(mm)	0.75			$\phi_f$	(mm)	0.77					
<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>							
$l_a^f$	(mm)	22	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	60	$l_a^f$	(mm)	19.2	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	60	$l_a^f$	(mm)	20.5	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	60			
$l_e^f$	(mm)	38			$l_e^f$	(mm)	40.8			$l_e^f$	(mm)	39.5					
Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.441786467		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.441786467		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.465662571				
<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>							
$\leftrightarrow$	(mm)	54	$\updownarrow$	(mm)	53	$\leftrightarrow$	(mm)	54	$\updownarrow$	(mm)	53	$\leftrightarrow$	(mm)	52	$\updownarrow$	(mm)	50



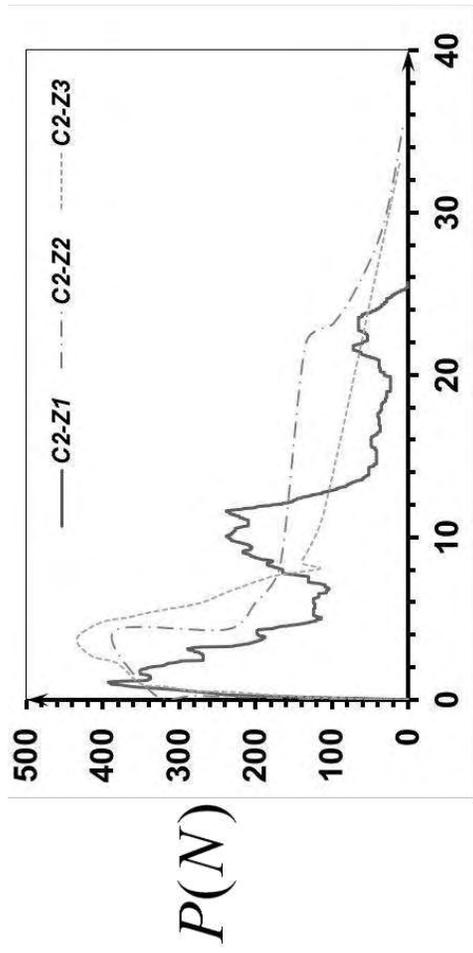
C2-X1					C2-X2					C2-X3							
<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	2087.93	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1994.74	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1965			
<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>							
$\Phi_1$	(mm)	109.8	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_1$	(mm)	111	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_1$	(mm)	110.5	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_1$	(mm)	110.5			
$\Phi_2$	(mm)	109.6		$\Phi_2$	(mm)	110		$\Phi_2$	(mm)	105.2		$\Phi_2$	(mm)	105.2			
$\Phi_3$	(mm)	109		$\Phi_3$	(mm)	111.5		$\Phi_3$	(mm)	105.8		$\Phi_3$	(mm)	105.8			
$\Phi_4$	(mm)	109.4		$\Phi_4$	(mm)	111.1		$\Phi_4$	(mm)	107.1		$\Phi_4$	(mm)	107.1			
<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>							
$h_1$	(mm)	109.2	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	102.2	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	112.5	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	112.5			
$h_2$	(mm)	103.8		$h_2$	(mm)	101.5		$h_2$	(mm)	111.1		$h_2$	(mm)	111.1			
$h_3$	(mm)	105.2		$h_3$	(mm)	102.1		$h_3$	(mm)	111.9		$h_3$	(mm)	111.9			
$h_4$	(mm)	108.9		$h_4$	(mm)	101		$h_4$	(mm)	111.2		$h_4$	(mm)	111.2			
Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9408.5	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9659.5	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9017.3						
Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			1004595.0	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			982367.4	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			1007001.7						
<b>Díametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Díametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Díametro de la fibra <math>\phi</math></b>							
$\phi_f$	(mm)	0.75			$\phi_f$	(mm)	0.75			$\phi_f$	(mm)	0.75					
<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>							
$l_a^f$	(mm)	36.5	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	60	$l_a^f$	(mm)	41	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	60	$l_a^f$	(mm)	42.5	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	60			
$l_e^f$	(mm)	23.5			$l_e^f$	(mm)	19			$l_e^f$	(mm)	17.5					
Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.4418		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.4418		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.4418				
<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>							
$\leftrightarrow$	(mm)	56	$\updownarrow$	(mm)	55	$\leftrightarrow$	(mm)	56	$\updownarrow$	(mm)	54	$\leftrightarrow$	(mm)	52.8	$\updownarrow$	(mm)	50.2



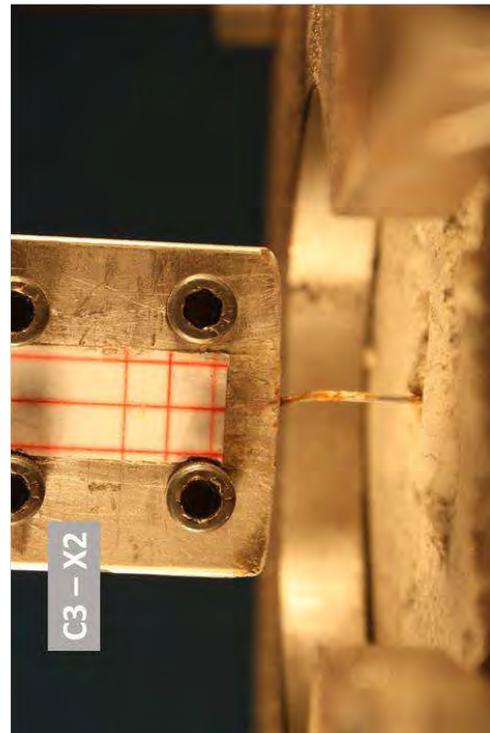
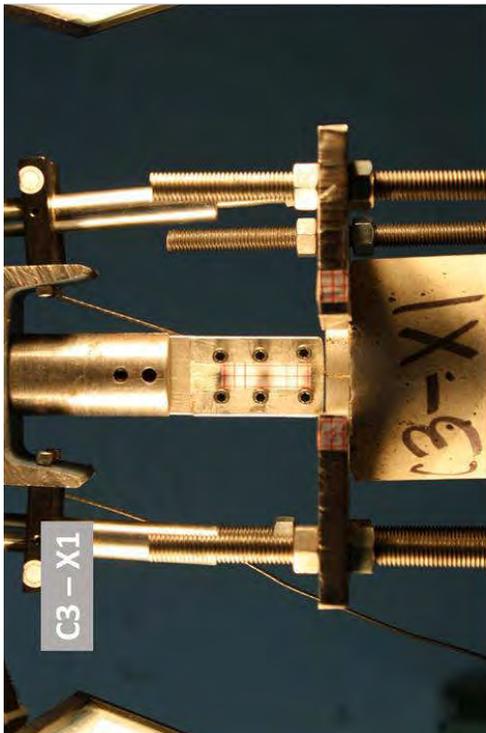
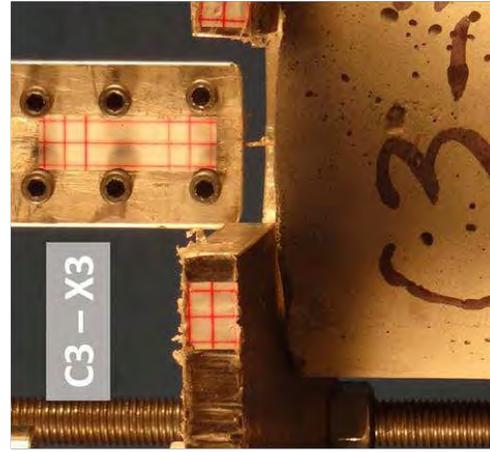
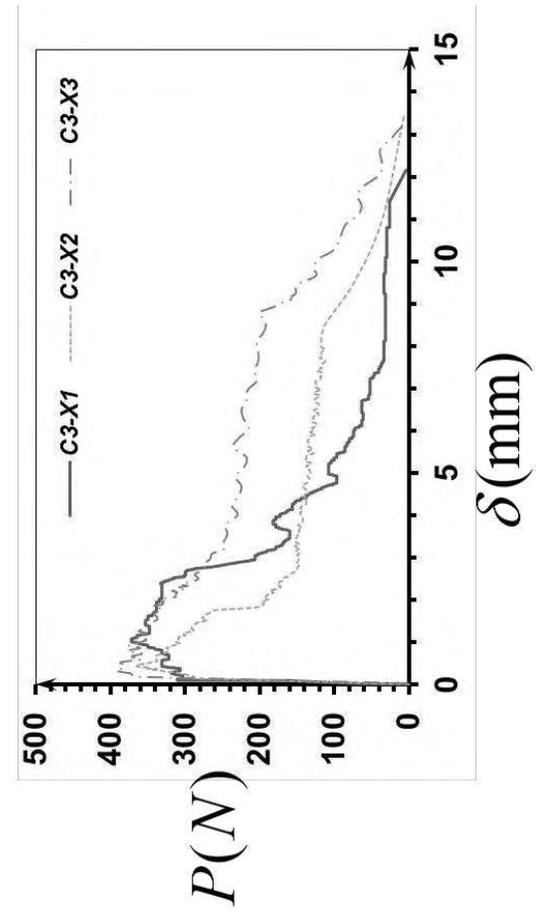
C2-Y1					C2-Y3					C2-Y3							
PESO DE LA PROBETA			w (g)	2006.02	PESO DE LA PROBETA			w (g)	1896.4	PESO DE LA PROBETA			w (g)	1966			
DIAMETRO $\Phi$					DIAMETRO $\Phi$					DIAMETRO $\Phi$							
$\phi_1$	(mm)	108.5	$\varphi$ promedio (mm)		$\phi_1$	(mm)	105.2	$\varphi$ promedio (mm)		$\phi_1$	(mm)	105.8	$\varphi$ promedio (mm)				
$\phi_2$	(mm)	106.8			$\phi_2$	(mm)	103.1			$\phi_2$	(mm)	106.9					
$\phi_3$	(mm)	108			$\phi_3$	(mm)	103.2			$\phi_3$	(mm)	106.2					
$\phi_4$	(mm)	108.5			$\phi_4$	(mm)	103			$\phi_4$	(mm)	105.4					
107.95					103.625					106.075							
ALTURA h					ALTURA h					ALTURA h							
$\hat{h}_1$	(mm)	101.6	$\hat{h}$ promedio (mm)		$\hat{h}_1$	(mm)	110.1	$\hat{h}$ promedio (mm)		$\hat{h}_1$	(mm)	110.5	$\hat{h}$ promedio (mm)				
$\hat{h}_2$	(mm)	100.4			$\hat{h}_2$	(mm)	110.8			$\hat{h}_2$	(mm)	112.1					
$\hat{h}_3$	(mm)	101.5			$\hat{h}_3$	(mm)	105.1			$\hat{h}_3$	(mm)	112					
$\hat{h}_4$	(mm)	100.9			$\hat{h}_4$	(mm)	105.8			$\hat{h}_4$	(mm)	110.9					
101.1					107.95					111.375							
Area- $\mathcal{A}_p$ (mm <sup>2</sup> )			9152.40		Area- $\mathcal{A}_p$ (mm <sup>2</sup> )			8433.72		Area- $\mathcal{A}_p$ (mm <sup>2</sup> )			8837.23				
Volumen- $\mathcal{V}_p$ (mm <sup>3</sup> )			925308.03		Volumen- $\mathcal{V}_p$ (mm <sup>3</sup> )			910419.63		Volumen- $\mathcal{V}_p$ (mm <sup>3</sup> )			984246.05				
Diametro de la fibra $\varphi$					Diametro de la fibra $\varphi$					Diametro de la fibra $\varphi$							
$\phi_f$	(mm)	0.75			$\phi_f$	(mm)	0.75			$\phi_f$	(mm)	0.75					
Longitud de la fibra $l^f$					Longitud de la fibra $l^f$					Longitud de la fibra $l^f$							
$l_a^f$	(mm)	23.85	$l^f$ (mm)		60	$l_a^f$	(mm)	29.6	$l^f$ (mm)		60	$l_a^f$	(mm)	28.4	$l^f$ (mm)		60
$l_e^f$	(mm)	36.15			$l_e^f$	(mm)	30.4	$l_e^f$			(mm)	31.6					
Area- $\mathcal{A}_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.4418		Area- $\mathcal{A}_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.4418		Area- $\mathcal{A}_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.4418				
Ubicación de la fibra en la probeta					Ubicación de la fibra en la probeta					Ubicación de la fibra en la probeta							
$\leftrightarrow$	(mm)	53	$\updownarrow$	(mm)	58	$\leftrightarrow$	(mm)	52	$\updownarrow$	(mm)	51	$\leftrightarrow$	(mm)	54	$\updownarrow$	(mm)	55



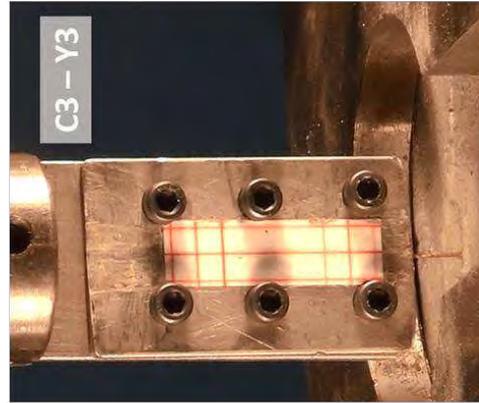
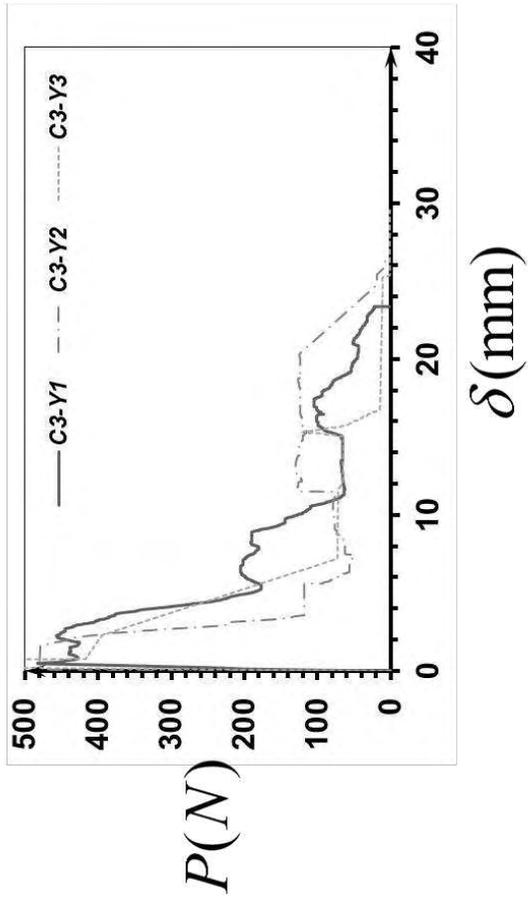
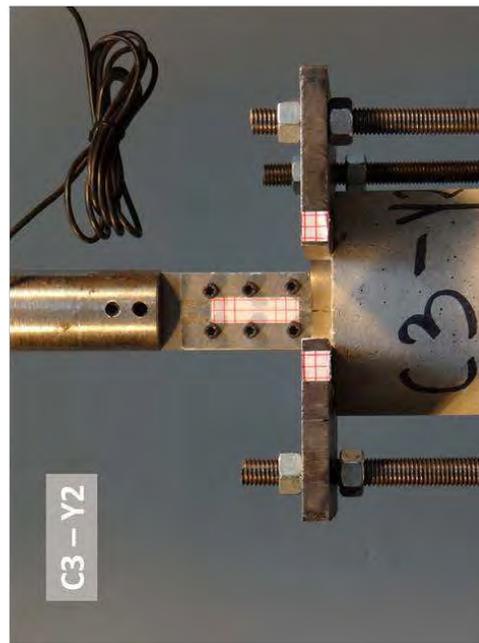
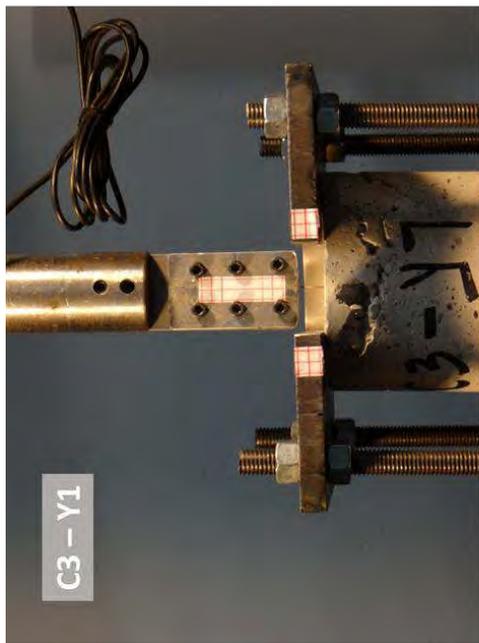
C2-Z1					C2-Z2					C2-Z3							
<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	2081.93	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	2094.18	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	2000.45			
<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>							
$\Phi_1$	(mm)	105.8	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_1$	(mm)	111.3	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_1$	(mm)	108	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_1$	(mm)	105.8			
$\Phi_2$	(mm)	104.6		$\Phi_2$	(mm)	110.9		$\Phi_2$	(mm)	110		$\Phi_2$	(mm)	104.6			
$\Phi_3$	(mm)	105		$\Phi_3$	(mm)	110.5		$\Phi_3$	(mm)	109.5		$\Phi_3$	(mm)	105			
$\Phi_4$	(mm)	103.4		$\Phi_4$	(mm)	111		$\Phi_4$	(mm)	107.9		$\Phi_4$	(mm)	103.4			
<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>							
$h_1$	(mm)	119	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	101.3	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	110.1	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	119			
$h_2$	(mm)	109.8		$h_2$	(mm)	98.5		$h_2$	(mm)	108.9		$h_2$	(mm)	109.8			
$h_3$	(mm)	109.2		$h_3$	(mm)	101.5		$h_3$	(mm)	109.1		$h_3$	(mm)	109.2			
$h_4$	(mm)	108.9		$h_4$	(mm)	100.3		$h_4$	(mm)	109.6		$h_4$	(mm)	108.9			
Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			8609.6	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9663.82	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9305.65						
Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			961908.2	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			970247.36	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			1018270.83						
<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>							
$\phi_f$	(mm)	0.75			$\phi_f$	(mm)	0.74			$\phi_f$	(mm)	0.75					
<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>							
$l_a^f$	(mm)	21.5	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	60	$l_a^f$	(mm)	18.5	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	60	$l_a^f$	(mm)	14.5	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	60			
$l_e^f$	(mm)	38.5		$l_e^f$	(mm)	41.5	$l_e^f$		(mm)	45.5							
Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.4418		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.4301		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.4418				
<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>							
$\leftrightarrow$	(mm)	56	$\updownarrow$	(mm)	55	$\leftrightarrow$	(mm)	56	$\updownarrow$	(mm)	55.1	$\leftrightarrow$	(mm)	52	$\updownarrow$	(mm)	51



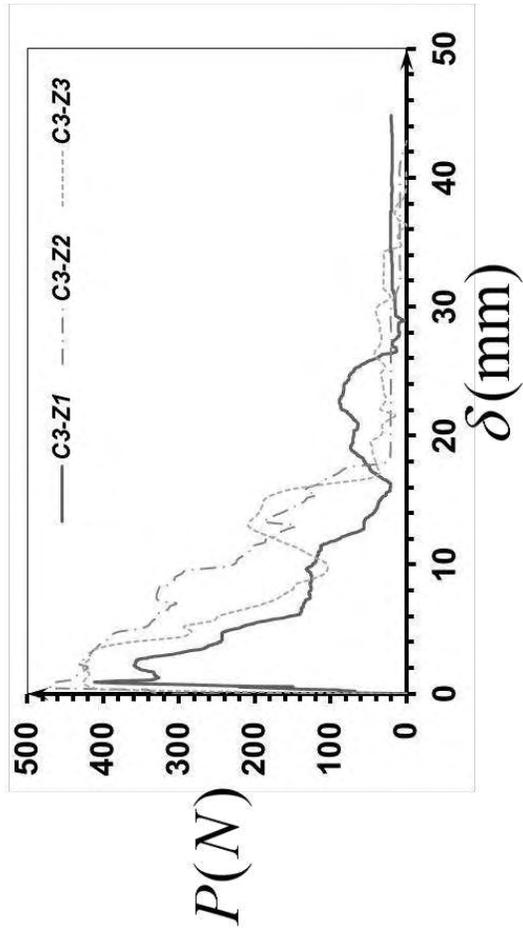
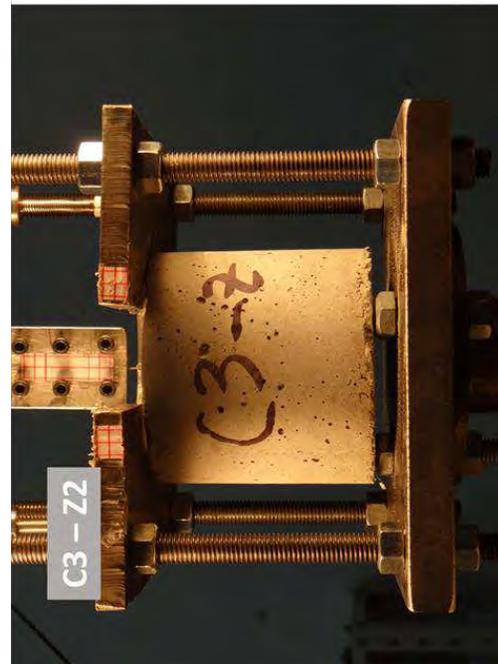
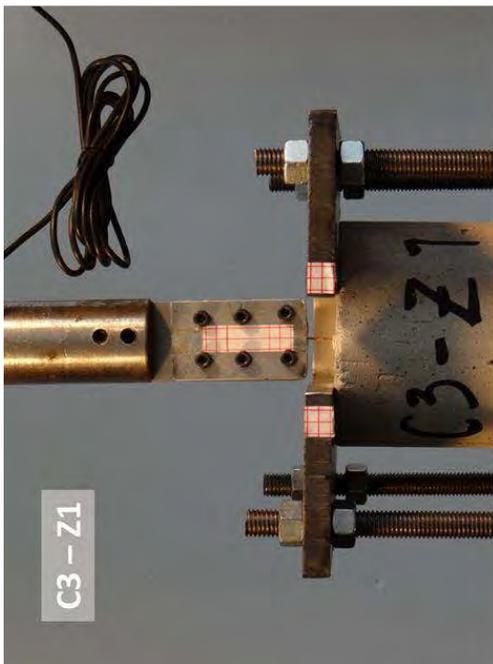
C3-X1					C3-X2					C3-X3							
<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1952.33	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1874.24	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1880.38			
<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>							
$\Phi_1$	(mm)	106.9	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>		$\Phi_1$	(mm)	107.2	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>		$\Phi_1$	(mm)	109.2	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>				
$\Phi_2$	(mm)	108.5			$\Phi_2$	(mm)	107			$\Phi_2$	(mm)	110.5					
$\Phi_3$	(mm)	108.1			$\Phi_3$	(mm)	108			$\Phi_3$	(mm)	110.3					
$\Phi_4$	(mm)	106.1			$\Phi_4$	(mm)	108.5			$\Phi_4$	(mm)	109.8					
107.4					107.675					109.95							
<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>							
$h_1$	(mm)	101.05	<b>h promedio (mm)</b>		$h_1$	(mm)	98	<b>h promedio (mm)</b>		$h_1$	(mm)	100	<b>h promedio (mm)</b>				
$h_2$	(mm)	101.1			$h_2$	(mm)	100.1			$h_2$	(mm)	100.5					
$h_3$	(mm)	100.9			$h_3$	(mm)	99.8			$h_3$	(mm)	105.1					
$h_4$	(mm)	100.7			$h_4$	(mm)	99			$h_4$	(mm)	100.2					
100.9375					99.225					101.45							
Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9059.38		Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9105.83		Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9494.68				
Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			914431.10		Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			903526.20		Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			963235.32				
<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>							
$\phi_f$	(mm)	0.75			$\phi_f$	(mm)	0.75			$\phi_f$	(mm)	0.77					
<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>							
$l_a^f$	(mm)	38.2	<b><math>l^f</math> (mm)</b>		60	$l_a^f$	(mm)	39.55	<b><math>l^f</math> (mm)</b>		60	$l_a^f$	(mm)	25.3	<b><math>l^f</math> (mm)</b>		60
$l_e^f$	(mm)	21.8			$l_e^f$	(mm)	20.45	$l_e^f$			(mm)	34.7					
Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.442		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.442		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.466				
<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>							
$\leftrightarrow$	(mm)	52.6	$\updownarrow$	(mm)	54	$\leftrightarrow$	(mm)	52.1	$\updownarrow$	(mm)	50.4	$\leftrightarrow$	(mm)	51.2	$\updownarrow$	(mm)	56



C3-Y1					C3-Y2					C3-Y3							
<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1907.57	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1887.2	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1971.5			
<b>DIAMETRO <math>\phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\phi</math></b>							
$\phi_1$	(mm)	108.4	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>	$\phi_1$	(mm)	102.2	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>	$\phi_1$	(mm)	105.1	<b><math>\phi</math> promedio (mm)</b>	$\phi_1$	(mm)	108.4			
$\phi_2$	(mm)	109.1		$\phi_2$	(mm)	101.8		$\phi_2$	(mm)	104.9							
$\phi_3$	(mm)	109.2		$\phi_3$	(mm)	101.5		$\phi_3$	(mm)	103.8							
$\phi_4$	(mm)	108.5		$\phi_4$	(mm)	102		$\phi_4$	(mm)	104.7							
<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>							
$h_1$	(mm)	99.4	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	99	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	100.1	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	99.4			
$h_2$	(mm)	100.8		$h_2$	(mm)	98.5		$h_2$	(mm)	100							
$h_3$	(mm)	102.5		$h_3$	(mm)	98.7		$h_3$	(mm)	99							
$h_4$	(mm)	102		$h_4$	(mm)	99.1		$h_4$	(mm)	100							
Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			9297.10	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			8151.27	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			8597.28						
Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			940634.46	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			805548.97	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			857793.12						
<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>							
$\phi_f$	(mm)	0.75			$\phi_f$	(mm)	0.75			$\phi_f$	(mm)	0.75					
<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>							
$l_a^f$	(mm)	20.85	$l^f$ (mm)	60	$l_a^f$	(mm)	27	$l^f$ (mm)	60	$l_a^f$	(mm)	27	$l^f$ (mm)	60			
$l_e^f$	(mm)	39.15			$l_e^f$	(mm)	33			$l_e^f$	(mm)	33					
Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.442		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.442		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.442				
<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>							
$\leftrightarrow$	(mm)	50	$\updownarrow$	(mm)	55	$\leftrightarrow$	(mm)	50	$\updownarrow$	(mm)	52	$\leftrightarrow$	(mm)	48	$\updownarrow$	(mm)	53



C3-Z1					C3-Z2					C3-Z3							
<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1839.71	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1943.8	<b>PESO DE LA PROBETA</b>			<b>w (g)</b>	1874			
<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>					<b>DIAMETRO <math>\Phi</math></b>							
$\Phi_1$	(mm)	106.1	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_1$	(mm)	102.8	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_1$	(mm)	109.1	<b><math>\Phi</math> promedio (mm)</b>	$\Phi_2$	(mm)	105.8			
$\Phi_2$	(mm)	105.8		$\Phi_2$	(mm)	105.2		$\Phi_2$	(mm)	105.8							
$\Phi_3$	(mm)	107		$\Phi_3$	(mm)	104.9		$\Phi_3$	(mm)	104.8							
$\Phi_4$	(mm)	106.4		$\Phi_4$	(mm)	103.5		$\Phi_4$	(mm)	107.1							
<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>					<b>ALTURA h</b>							
$h_1$	(mm)	100	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	110.25	<b>h promedio (mm)</b>	$h_1$	(mm)	101.5	<b>h promedio (mm)</b>	$h_2$	(mm)	100.4			
$h_2$	(mm)	100.4		$h_2$	(mm)	110.1		$h_2$	(mm)	101.6							
$h_3$	(mm)	101.5		$h_3$	(mm)	110.7		$h_3$	(mm)	102							
$h_4$	(mm)	102		$h_4$	(mm)	109.8		$h_4$	(mm)	102.1							
Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			8878.93	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			8511.21	Area- $A_p$ (mm <sup>2</sup> )			8941.67						
Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			896550.02	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			938041.81	Volumen- $V_p$ (mm <sup>3</sup> )			910262.18						
<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>					<b>Diametro de la fibra <math>\phi</math></b>							
$\phi_f$	(mm)	0.75			$\phi_f$	(mm)	0.75			$\phi_f$	(mm)	0.75					
<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>					<b>Longitud de la fibra <math>l^f</math></b>							
$l_a^f$	(mm)	16	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	60	$l_a^f$	(mm)	17.2	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	60	$l_a^f$	(mm)	15.1	<b><math>l^f</math> (mm)</b>	60			
$l_e^f$	(mm)	44			$l_e^f$	(mm)	42.8			$l_e^f$	(mm)	44.9					
Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.442		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.442		Area- $A_f$ (mm <sup>2</sup> )			0.442				
<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>					<b>Ubicación de la fibra en la probeta</b>							
$\leftrightarrow$	(mm)	52.5	$\updownarrow$	(mm)	48	$\leftrightarrow$	(mm)	50.2	$\updownarrow$	(mm)	52	$\leftrightarrow$	(mm)	53	$\updownarrow$	(mm)	51



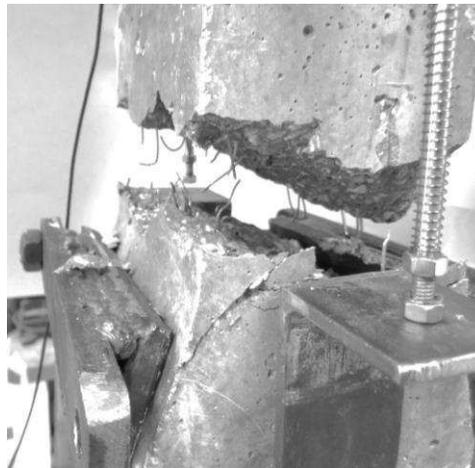
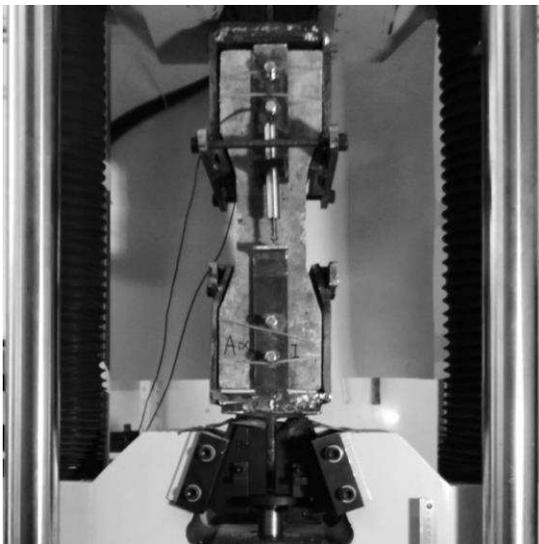
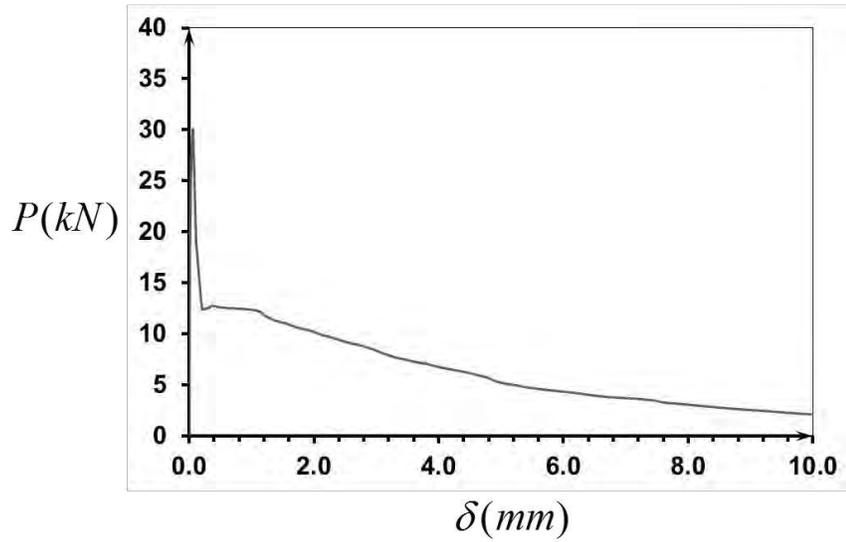


## **E. Anexo: Ensayos de tracción directa en SFRC**

A continuación se presentan las curvas de carga de tracción contra el desplazamiento resultante en el ensayo realizado para las probetas de concreto con una relación  $a/cm$  de 0.4, cuantía volumétrica de fibras de 0%, 0.5%, 1% y 1.5%.

**Ensayo de tracción directa en SFRC**

<b>Probeta</b>	<b>A - <math>\alpha</math> - I - 1</b>
<b>Fibra tipo A</b>	<b>Dramix ® RL 45/50 BN</b>
<b>Cuantía volumetrica</b>	0.5%
<b><i>a</i> (mm)</b>	151.48
<b><i>H</i> (mm)</b>	122.04
<b><i>H2</i> (mm)</b>	138.16
<b><i>H3</i> (mm)</b>	66.84
<b><i>b</i> (mm)</b>	152.19
<b><i>b2</i> (mm)</b>	104.21
<b><i>e</i> (mm)</b>	8.17

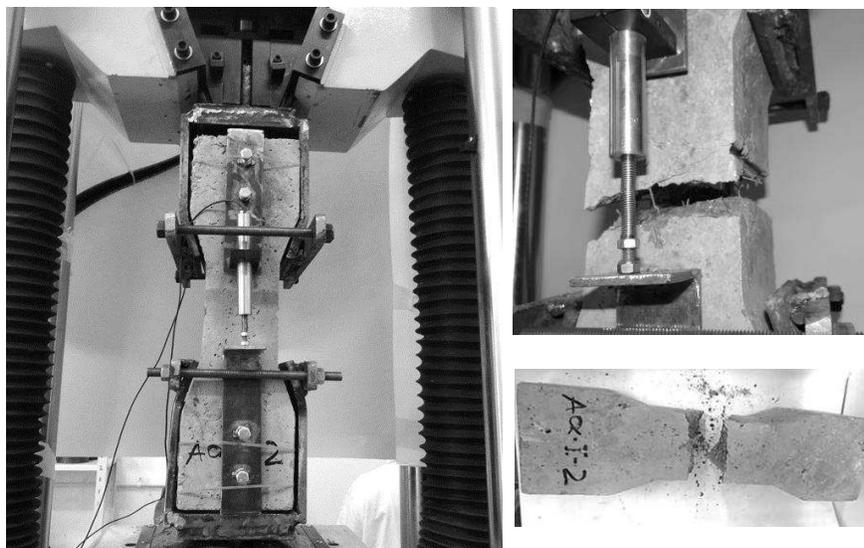
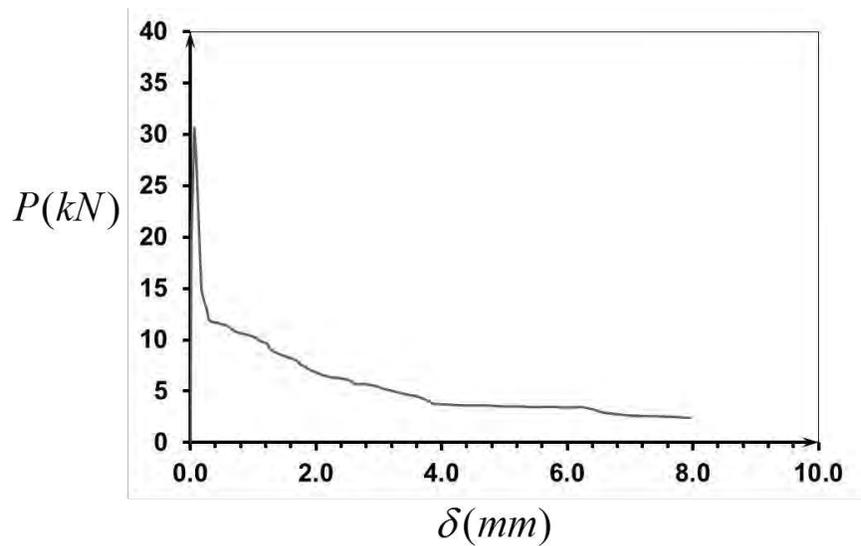
**Curva carga - desplazamiento**

**Ensayo de tracción directa en SFRC**

<b>Probeta</b>	<b>A-<math>\alpha</math>-I-2</b>
<b>Fibra tipo A</b>	<b>Dramix® RL 45/50 BN</b>
<b>Cuántia volumétrica</b>	<b>0.5%</b>
<b>a (mm)</b>	151.52
<b>H (mm)</b>	121.13
<b>H2 (mm)</b>	137.57
<b>H3 (mm)</b>	67.8
<b>b (mm)</b>	150.70
<b>b2 (mm)</b>	103.38
<b>e (mm)</b>	8.15

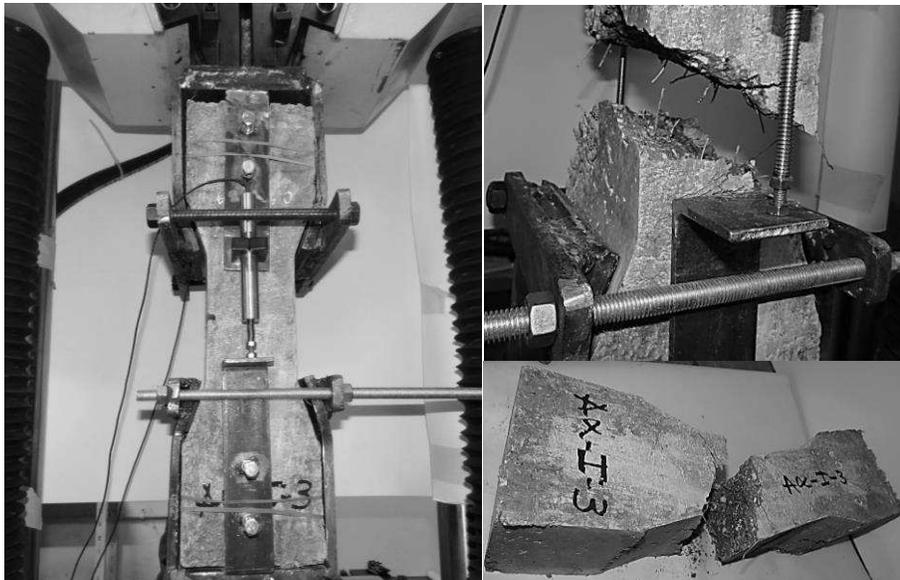
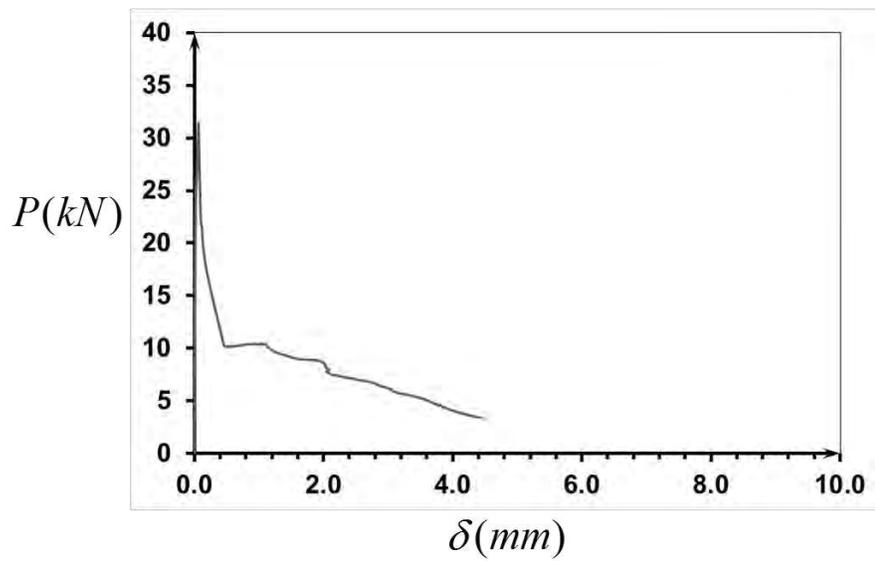


**Curva carga - desplazamiento**



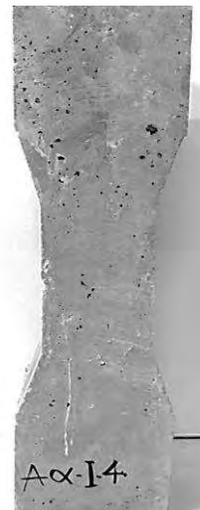
*Ensayo de tracción directa en SFRC*

<b>Probeta</b>	<b>A-<math>\alpha</math>-1-3</b>
<b>Fibra tipo A</b>	<b>Dramix® RL 45/50 BN</b>
<b>Cuántia volumétrica</b>	0.5%
<b><i>a</i> (mm)</b>	151.13
<b><i>H</i> (mm)</b>	122.15
<b><i>H2</i> (mm)</b>	137.2
<b><i>H3</i> (mm)</b>	66.97
<b><i>b</i> (mm)</b>	150.55
<b><i>b2</i> (mm)</b>	103.57
<b><i>e</i> (mm)</b>	8.13

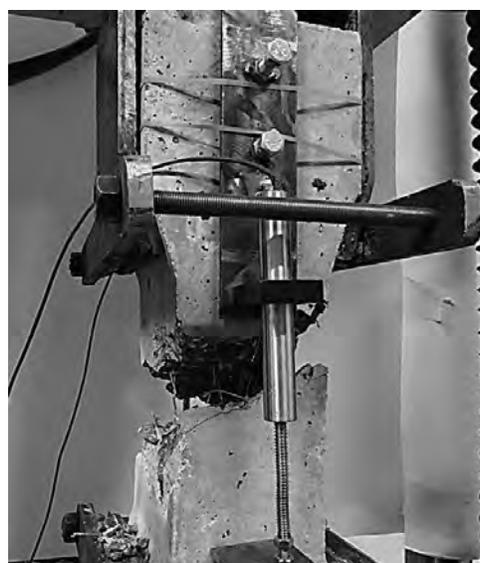
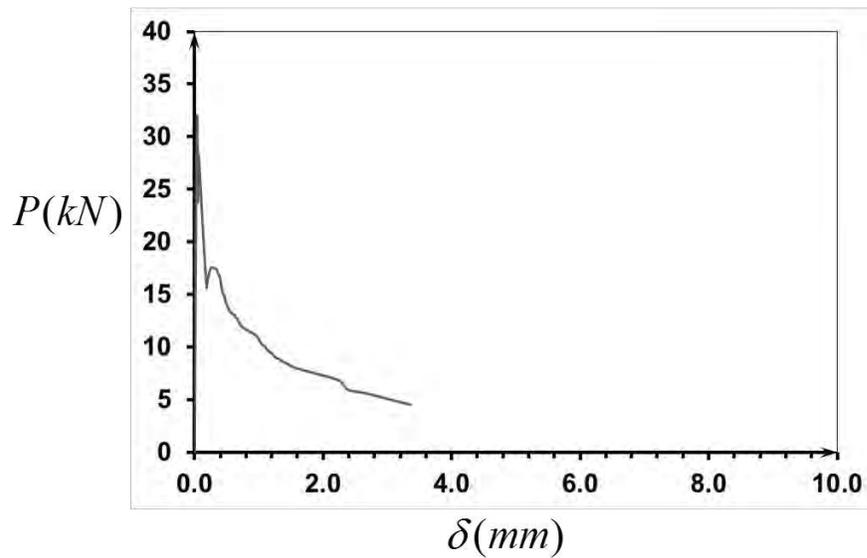
**Curva carga - desplazamiento**

**Ensayo de tracción directa en SFRC**

<b>Probeta</b>	<b>A - <math>\alpha</math> - 1 - 4</b>
<b>Fibra tipo A</b>	<b>Dramix ® RL 45/50 BN</b>
<b>Cuántia volumétrica</b>	0.5%
<b>a (mm)</b>	151.94
<b>H (mm)</b>	121.14
<b>H2 (mm)</b>	136.2
<b>H3 (mm)</b>	66.63
<b>b (mm)</b>	151.86
<b>b2 (mm)</b>	104.67
<b>e (mm)</b>	9.1

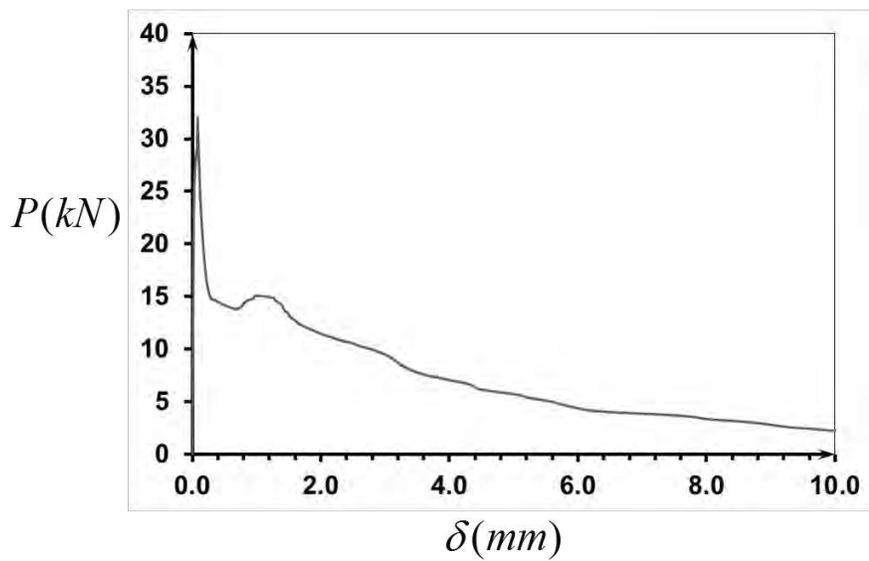


**Curva carga - desplazamiento**



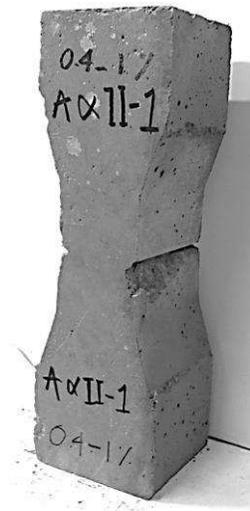
*Ensayo de tracción directa en SFRC*

<b>Probeta</b>	<b>A-<math>\alpha</math>-1-5</b>
<b>Fibra tipo A</b>	<b>Dramix® RL 45/50 BN</b>
<b>Cuántia volumétrica</b>	<b>0.5%</b>
<b><i>a</i> (mm)</b>	150.37
<b><i>H</i> (mm)</b>	122.28
<b><i>H2</i> (mm)</b>	137.6
<b><i>H3</i> (mm)</b>	67.41
<b><i>b</i> (mm)</b>	153.11
<b><i>b2</i> (mm)</b>	103.97
<b><i>e</i> (mm)</b>	8.2

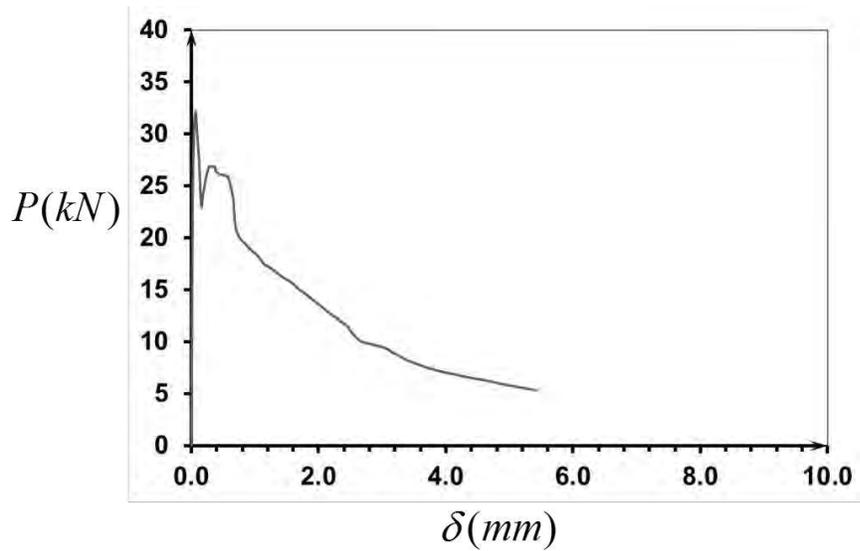
**Curva carga - desplazamiento**

**Ensayo de tracción directa en SFRC**

<b>Probeta</b>	<b>A - <math>\alpha</math> - II - 1</b>
<b>Fibra tipo A</b>	<b>Dramix® RL 45/50 BN</b>
<b>Cuántia volumétrica</b>	<b>1.0%</b>
<b>a (mm)</b>	153.4
<b>H (mm)</b>	117.16
<b>H2 (mm)</b>	140.95
<b>H3 (mm)</b>	67.1
<b>b (mm)</b>	151.63
<b>b2 (mm)</b>	104.11
<b>e (mm)</b>	6.69

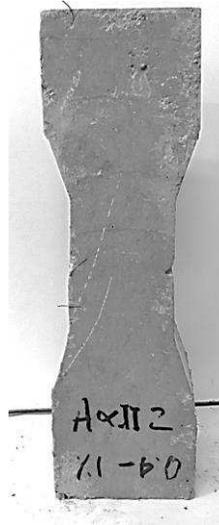
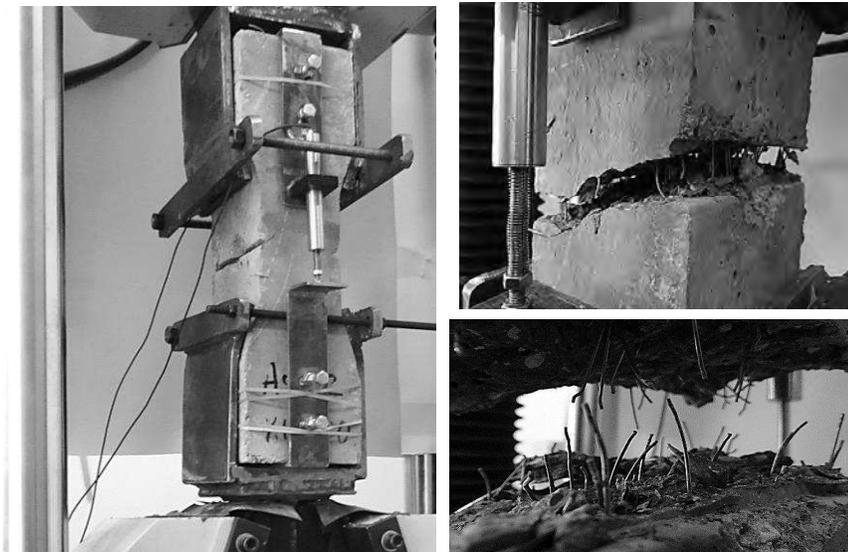
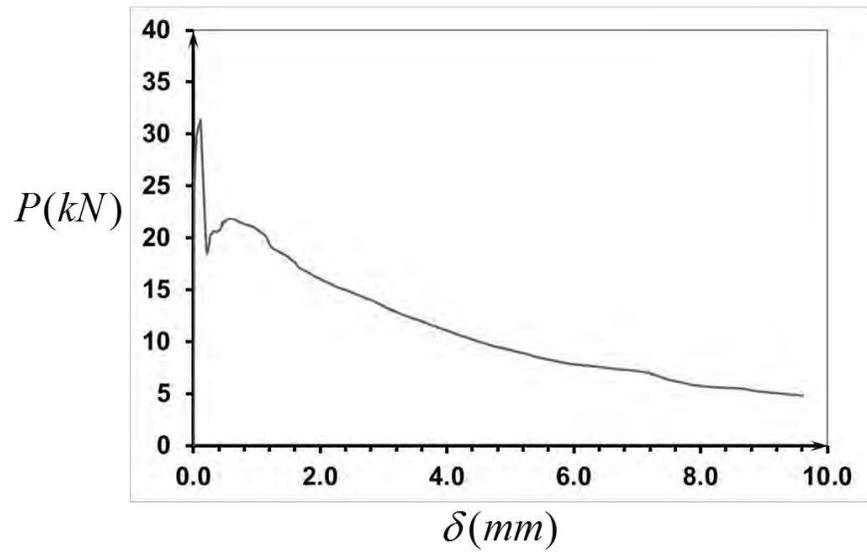


**Curva carga - desplazamiento**



**Ensayo de tracción directa en SFRC**

<b>Probeta</b>	<b>A - <math>\alpha</math> - II - 2</b>
<b>Fibra tipo A</b>	<b>Dramix® RL 45/50 BN</b>
<b>Cuantía volumetrica</b>	1.0%
<b><i>a</i> (mm)</b>	151.52
<b><i>H</i> (mm)</b>	121.13
<b><i>H2</i> (mm)</b>	137.57
<b><i>H3</i> (mm)</b>	67.8
<b><i>b</i> (mm)</b>	150.7
<b><i>b2</i> (mm)</b>	103.38
<b><i>e</i> (mm)</b>	8.15

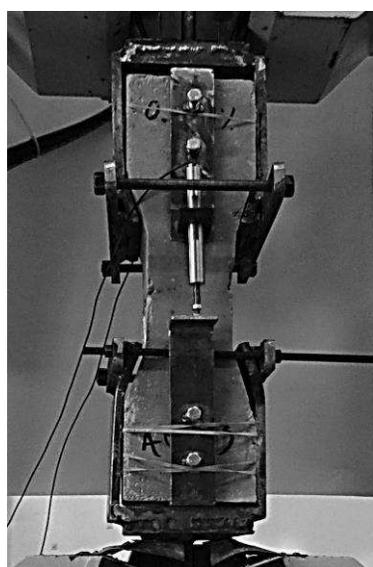
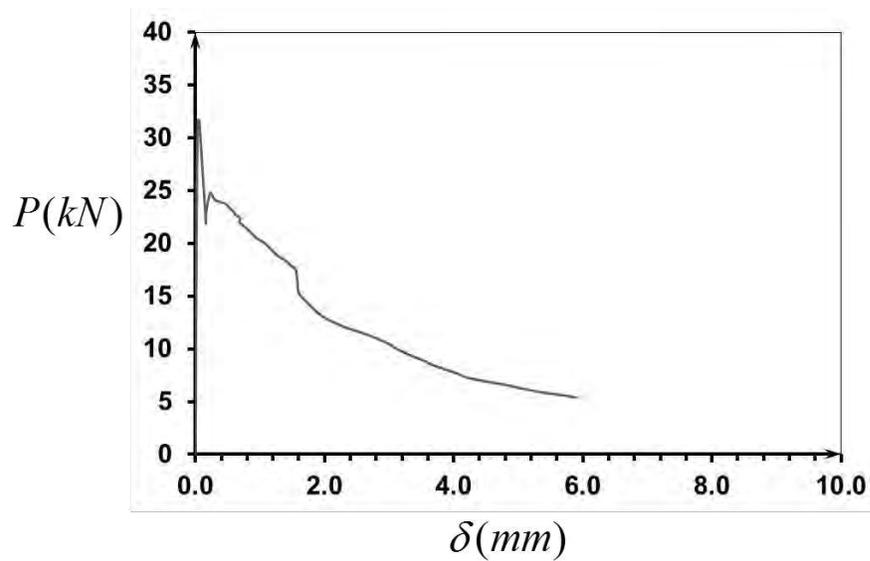
**Curva carga - desplazamiento**

**Ensayo de tracción directa en SFRC**

<b>Probeta</b>	<b>A - <math>\alpha</math> - II - 3</b>
<b>Fibra tipo A</b>	<b>Dramix® RL 45/50 BN</b>
<b>Cuántia volumétrica</b>	<b>1.0%</b>
<i>a (mm)</i>	151.4
<i>H (mm)</i>	117.83
<i>H2 (mm)</i>	134.78
<i>H3 (mm)</i>	68.04
<i>b (mm)</i>	150.78
<i>b2 (mm)</i>	103.47
<i>e (mm)</i>	7.9

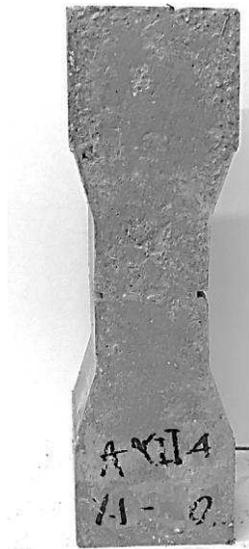
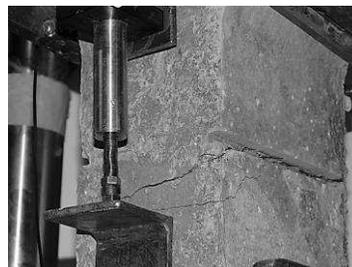
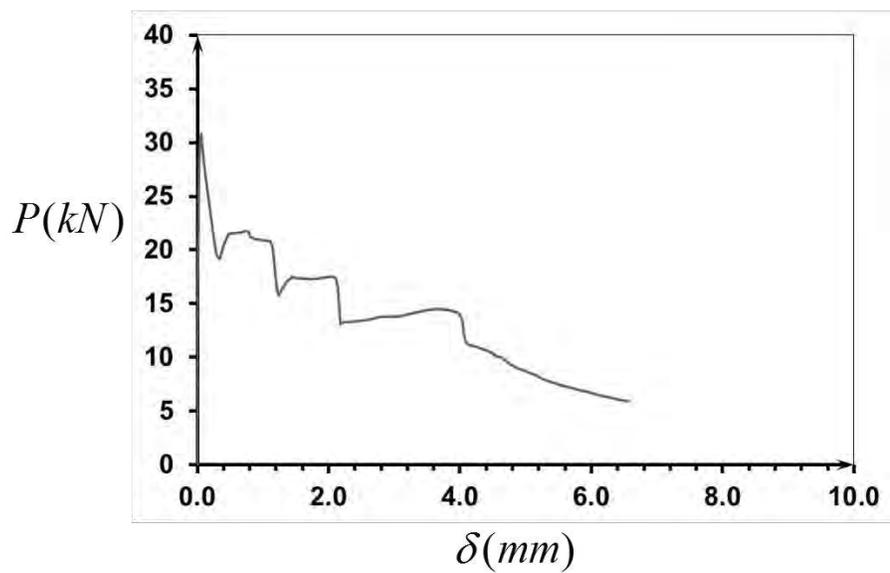


**Curva carga - desplazamiento**



*Ensayo de tracción directa en SFRC*

<b>Probeta</b>	<b>A - <math>\alpha</math> - II - 4</b>
<b>Fibra tipo A</b>	<b>Dramix® RL 45/50 BN</b>
<b>Cuantía volumétrica</b>	1.0%
<i>a (mm)</i>	151.94
<i>H (mm)</i>	121.14
<i>H2 (mm)</i>	136.2
<i>H3 (mm)</i>	66.63
<i>b (mm)</i>	151.86
<i>b2 (mm)</i>	104.67
<i>e (mm)</i>	9.1

**Curva carga - desplazamiento**

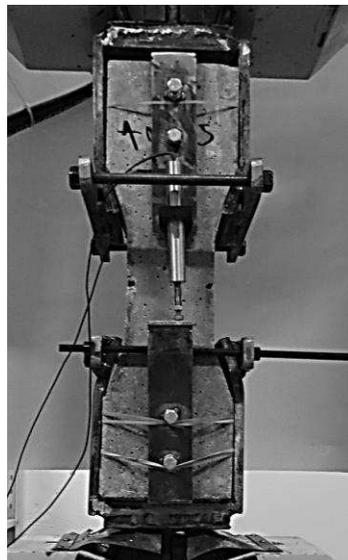
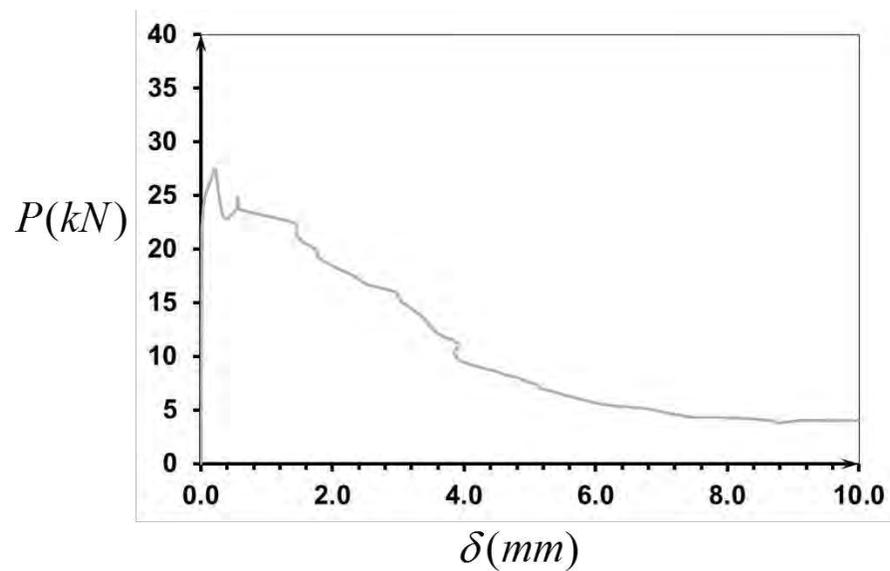


**Ensayo de tracción directa en SFRC**

<b>Probeta</b>	<b>A - <math>\alpha</math> - II - 5</b>
<b>Fibra tipo A</b>	<b>Dramix® RL 45/50 BN</b>

<b>Cuantía volumétrica</b>	1.0%
----------------------------	------

<i>a (mm)</i>	152.1
<i>H (mm)</i>	116.9
<i>H2 (mm)</i>	140.78
<i>H3 (mm)</i>	68.09
<i>b (mm)</i>	152.09
<i>b2 (mm)</i>	103.42
<i>e (mm)</i>	8.12

**Curva carga - desplazamiento**

**Ensayo de tracción directa en SFRC**

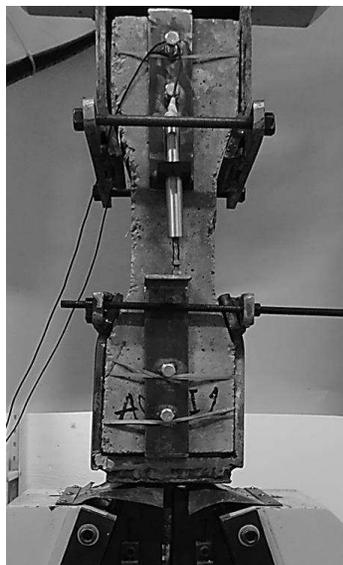
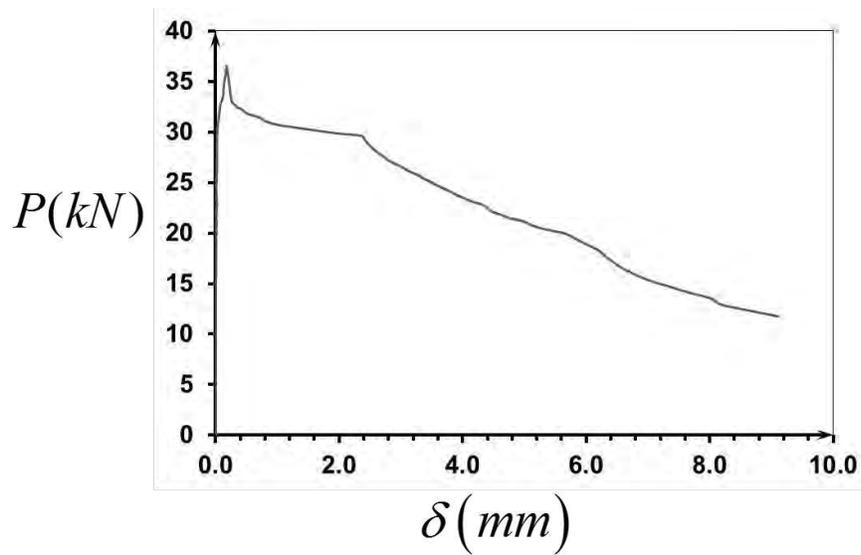
<b>Probeta</b>	<b>A - <math>\alpha</math> - III - 1</b>
<b>Fibra tipo A</b>	<b>Dramix® RL 45/50 BN</b>

<b>Cuantía volumetrica</b>	1.5%
----------------------------	------

<i>a (mm)</i>	151.11
<i>H (mm)</i>	117.32
<i>H2 (mm)</i>	137.42
<i>H3 (mm)</i>	66.78
<i>b (mm)</i>	151.74
<i>b2 (mm)</i>	105.57
<i>e (mm)</i>	6.83



**Curva carga - desplazamiento**

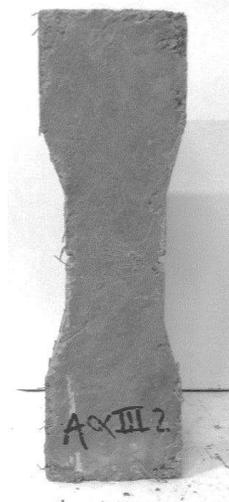
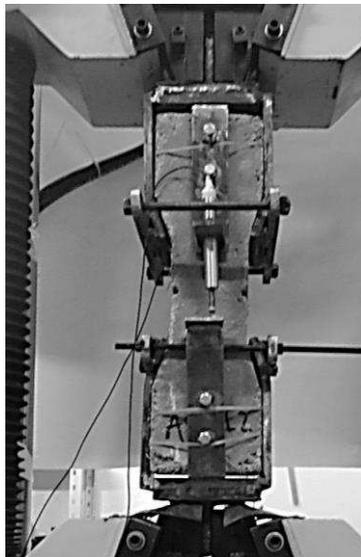
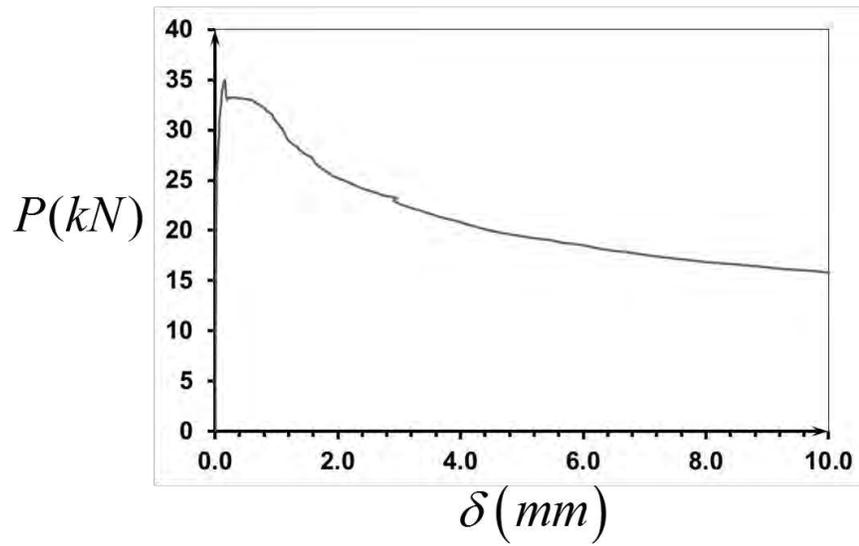


**Ensayo de tracción directa en SFRC**

<b>Probeta</b>	<b>A - <math>\alpha</math> - III - 2</b>
<b>Fibra tipo A</b>	<b>Dramix® RL 45/50 BN</b>

<b>Cuantía volumetrica</b>	1.5%
----------------------------	------

<b><i>a</i> (mm)</b>	150.89
<b><i>H</i> (mm)</b>	118.47
<b><i>H2</i> (mm)</b>	140.82
<b><i>H3</i> (mm)</b>	67.48
<b><i>b</i> (mm)</b>	150.98
<b><i>b2</i> (mm)</b>	103.97
<b><i>e</i> (mm)</b>	6.43

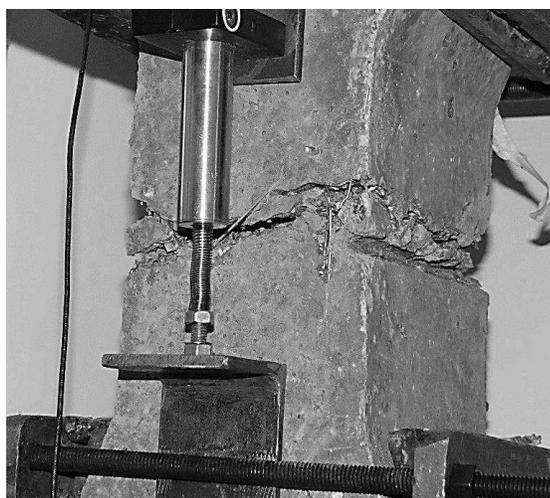
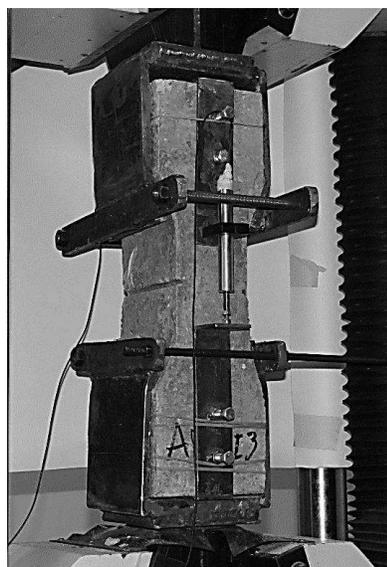
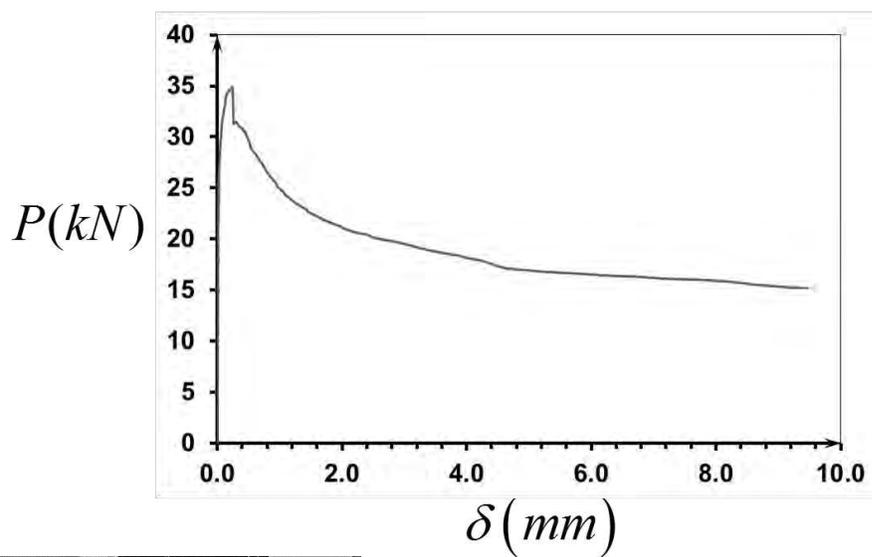
**Curva carga - desplazamiento**

**Ensayo de tracción directa en SFRC**

<b>Probeta</b>	<b>A - <math>\alpha</math> - III - 3</b>
<b>Fibra tipo A</b>	<b>Dramix ® RL 45/50 BN</b>
<b>Cuantía volumetrica</b>	1.0%
<i>a (mm)</i>	152.32
<i>H (mm)</i>	117.83
<i>H2 (mm)</i>	139.17
<i>H3 (mm)</i>	68.97
<i>b (mm)</i>	152.73
<i>b2 (mm)</i>	103.8
<i>e (mm)</i>	7.72



**Curva carga - desplazamiento**

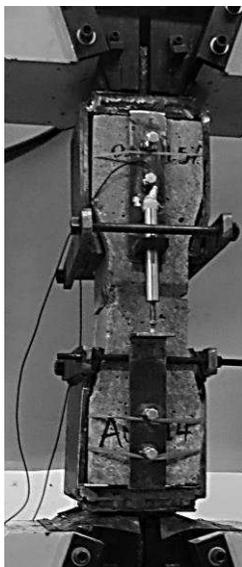
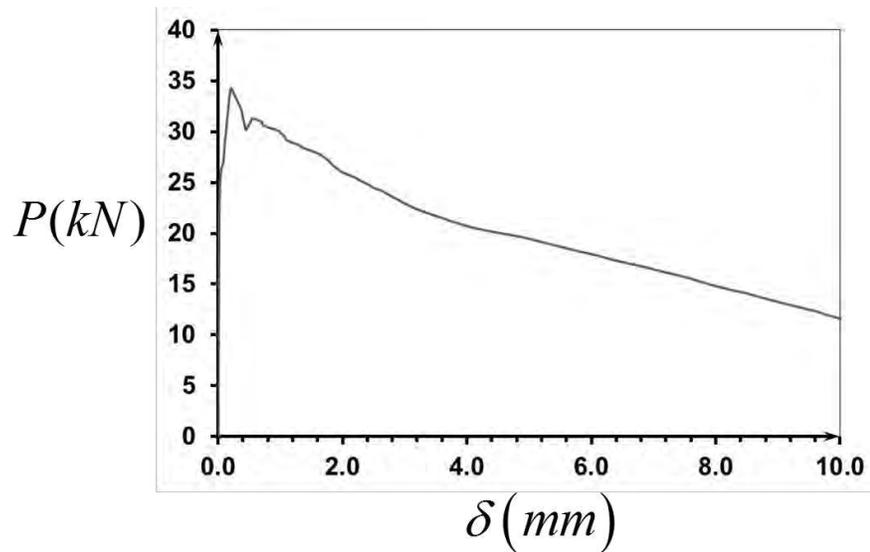


*Ensayo de tracción directa en SFRC*

<b>Probeta</b>	<b>A - <math>\alpha</math> - III - 4</b>
<b>Fibra tipo A</b>	<b>Dramix® RL 45/50 BN</b>

<b>Cuántia volumétrica</b>	<b>1.0%</b>
----------------------------	-------------

<i>a (mm)</i>	151.34
<i>H (mm)</i>	116.9
<i>H2 (mm)</i>	138.40
<i>H3 (mm)</i>	69.14
<i>b (mm)</i>	141.82
<i>b2 (mm)</i>	104.9
<i>e (mm)</i>	7.82

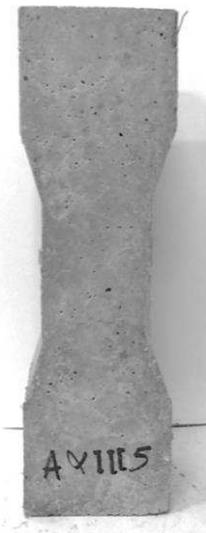
**Curva carga - desplazamiento**

**Ensayo de tracción directa en SFRC**

<b>Probeta</b>	<b>A - <math>\alpha</math> - III - 5</b>
<b>Fibra tipo A</b>	<b>Dramix ® RL 45/50 BN</b>

<b>Cuantía volumetrica</b>	1.5%
----------------------------	------

<i>a (mm)</i>	150.17
<i>H (mm)</i>	117.72
<i>H2 (mm)</i>	140.18
<i>H3 (mm)</i>	67.18
<i>b (mm)</i>	150.14
<i>b2 (mm)</i>	103.98
<i>e (mm)</i>	6.92



**Curva carga - desplazamiento**

