Aprendizaje de adición y sustracción de números enteros a través de objetos físicos

Cesar Castillo Angulo

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería y Administración
Palmira, Colombia
2014

Aprendizaje de adición y sustracción de números enteros a través de objetos físicos

Cesar Castillo Angulo

Trabajo Final presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:
PhD., Oscar Chaparro Anaya

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería y Administración
Palmira, Colombia
2014

DEDICATORIA

- ❖ Inicialmente a DIOS por la vida y su acompañamiento en cada una de las acciones

- ❖ A mi madre por privilegiar la formación desde temprana edad

- ❖ A mi Familia por la comprensión tenida en todo este tiempo de cualificación docente

.

"Es muy común recordar que alguien nos debe agradecimiento, pero es más común no pensar en quienes le debemos nuestra propia gratitud"

Johann Wolfgang Goethe

Agradecimientos

.

- A la Universidad Nacional de Colombia (Palmira), por el espíritu de brindar conocimientos con miras a mejorar la práctica pedagógica, incorporando procesos de investigación.

- A mi mentor Oscar Chaparro por su tiempo y dedicación.

- A toda la comunidad educativa de la Institución Educativa Alfonso López Pumarejo por su disposición

- A los compañeros de la Maestría por su sapiencia y aportes

Resumen

Este ejercicio de investigación surgió de la necesidad de implementar clases alternativas de matemática en la educación básica, dado que el Autor durante la experiencia observó las dificultades en las operaciones elementales que presentan los estudiantes en el trabajo con los números enteros. Por esta razón la enseñanza de la adición y sustracción (estructuras aditivas), de números enteros a través de objetos físicos en estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Alfonso López Pumarejo(IEALP) de la Ciudad de Palmira. Se implementaron dos objetos físicos a través de una secuencia didáctica. Como proceso metodológico la investigación-acción e ingeniería didáctica. A partir del diseño metodológico se desarrollaron tres fases: diagnostica, diseño-aplicación y evaluación. Se percibió el agrado de los estudiantes por el cambio en el ambiente de aprendizaje, la posibilidad de un trabajo colaborativo, la mediación de los objetos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, los cambios en diversos registros de representación y el avance en el trabajo con los números enteros.

Palabras clave: números enteros, adición, sustracción, dificultades, objeto físico, ingeniería didáctica, secuencia didáctica

Abstract

This research arises from the need to implement alternative math classes in basic education after observing the basic operation difficulties in base level students when working with integers. For this reason, teaching integers addition and subtraction (additive structures) through physical objects in seventh grader students in Alfonso Lopez School Palmira city. Two physical objects are implemented through a teaching sequence; the elements from Action researching Method were taken as methodological process furthermore Didactic Engineering. This process was developed a long three phase: Diagnosis, design, application and evaluation. Students show to be liking because of the changes in the learning environment, the possibility for the collaborative work. Teaching-learning process using objects favors the meaningful changes for some representation registers beside upgrade the progress in working with integers

Keywords: Whole numbers, addition, subtraction, difficulties, physical object, didactic engineering, teaching sequence

Contenido

Lista de figuras

Pág.

Lista de tablas

Introducción

> “*Maravillosa la neutralidad de estas cosas matemáticas, y extraña también su participación entre cosas sobrenaturales, inmortales, intelectuales, simples e indivisibles y cosas naturales, mortales, perceptibles, compuestas y divisibles.”*
>
> *DEE (1600)*

A lo largo del proceso de enseñanza, las matemáticas se han constituido como una ciencia “difícil”, para los educandos y el tema adición y sustracción de enteros no es ajeno a ello. El estudio de estas operaciones en forma adecuada cobra importancia ya que nos permite desenvolvernos en la matemática escolar, universitaria e incluso áreas como las ciencias naturales en problemas de: física y química.

Por lo tanto el problema que plantea está investigación. Cómo el uso de los objetos físicos privilegia la enseñanza de la adición y sustracción de números enteros, dichos objetos o artefactos (Del lat. Arte factum “hecho con arte” Real Academia). Deben hacer parte de:

> *La instrumentalización, la cual es la expresión de la actividad específica de un sujeto: sobre lo que el usuario piensa en relación para que fue construido el artefacto y cómo debe ser utilizado: la elaboración de un instrumento ocurre en su uso. La instrumentalización conduce así al enriquecimiento de un artefacto, o a su empobrecimiento [1] (Trouche, 2005).*

Acerca de la metodología utilizada: cualitativa, la cual trata de identificar la naturaleza de las realidades, su estructura dinámica, aquella que da razón plena de su comportamiento y manifestaciones. De aquí, que lo cualitativo (que es el todo integrado) no se opone a lo cuantitativo (que es solo un aspecto), sino que lo implica e integra, especialmente donde sea importante [2] (Martínez, 2006). El método cualitativo aplicado (investigación-acción).

Este documento consta de seis capítulos bajo la siguiente información

El **primer capítulo** obedece al problema de investigación con los argumentos del mismo encaminados bajo unos objetivos.

Para el **segundo capítulo,** se presenta el marco referencial el cual articula componentes: históricos, epistemológicos, concepto de número y estructuras aditivas de enteros, registros de representación semiótica, situaciones didácticas, la investigación acción, estado del arte y diseño e implementación de objetos físicos.

En el **tercer capítulo,** Se da cuenta de los materiales y métodos esbozando las diversas etapas en desarrollo enmarcadas con el asocio de una ingeniería didáctica y la investigación acción. El tratamiento de la información tiene componentes cualitativos y cuantitativos.

Para el **capítulo cuarto** se presentan los resultados y análisis de las diversas fases involucradas en el proyecto, con el proceso de diseño de los objetos físicos.

Por su parte el **capítulo quinto** da cuenta de la discusión general donde se realiza una correlación de los resultados obtenidos a través de las fases metodológicas del proyecto de investigación; además se evidencia el logro en cada uno de los objetivos trazados.

Las conclusiones y recomendaciones que arrojaron el diseño y aplicación de los artefactos u objetos físicos implementados a través de una secuencia didáctica se enmarcan en el **capítulo sexto**.

A manera de **anexos** se presentan en su orden la evaluación diagnostica o inicial, la secuencia didáctica y la evaluación final.

Para finalizar el uso de objetos físicos como mediadores, impacto de forma positiva al grupo donde se logró cautivar la atención, el desarrollo de un trabajo colaborativo, el cambio en el ambiente de aprendizaje y la posibilidad de realizar cambios en diversos tipos de representación; es decir simbólico, verbal, manipulativo y gráfico.

1. El problema de Investigación

1.1 Descripción de la problemática

“Los que nos dedicamos a la enseñanza, en particular a la enseñanza de las matemáticas. En este caso, señalar que para entender las operaciones de suma y resta por parte de los estudiantes en términos de adición y sustracción de cantidades, la historia de la matemática se ha visto abocada a bloqueos en los mecanismos de cómputo” [3] (Gallardo y Hernández, 2007).

Es muy común la dificultad de los estudiantes para establecer representaciones mentales significativas del concepto del número cero, así como para la aprehensión de los números negativos, ésta situación es un limitante para la aplicación de las estructuras aditivas en problemas.

Varios autores han realizado aportes en el estudio de las dificultades presentadas en la representación simbólica de los problemas aditivos Bruno [4] (2009) cita a:

> *“Los trabajos de Vergnaud (1976,1982), los cuales dieron pautas en las investigaciones posteriores sobre el tema. Las siguientes investigaciones han usado desde diferentes perspectivas la resolución de problemas aditivos como base para indagar en el conocimiento de los estudiantes sobre los números negativos: Bruno y Martinòn (1997b), Conne (1985), Gallardo (2002), González (1995), Marthe (1997b), entre otros”.*

Una investigación que se realizó en relación con las dificultades en el tratamiento de la resta, para números enteros Bruno [5] (2001), cita a Kûchemann (1981). En un estudio realizado en Inglaterra sobre el conocimiento de los estudiantes de secundaria de grado 7 encontró que menos de la mitad de los estudiantes dieron una respuesta correcta a operaciones como -2-(-5) ó -6-(+3). También observó que obtienen mejores resultados en la multiplicación y división de los negativos que en la resta, quizás porque la regla operativa del producto es más sencilla. Ésta situación es similar a la presentada en los estudiantes del sistema educativo colombiano donde persisten las mismas dificultades.

Las investigaciones sobre los problemas asociados a la enseñanza y el aprendizaje de los números negativos. Se pueden clasificar en tres grandes grupos como: propuestas de enseñanza, por dificultades de aprendizaje y errores de los estudiantes, y por la implicaciones didácticas de la epistemología del número negativo [6] (Cid, 2003).

La implementación de secuencias didácticas basada en el uso de objetos físicos es una alternativa viable para ofrecer a los estudiantes oportunidades para mejorar su proceso de enseñanza y aprendizaje en aspectos asociados a la adición y sustracción de números enteros, los objetos son mediadores como señala: RABARDEL [7] (1995), en relación del sujeto y la mediación con el artefacto:

> "*El descubrimiento progresivo que realizan los sujetos de las propiedades (intrínsecas) del artefacto se acompaña de la acomodación de sus esquemas, pero también, de cambios de significado del instrumento que resultan de la asociación del artefacto con nuevos esquemas.*"

La propuesta de trabajo se planteó desde el punto de vista antropocéntrico[1] donde la función de los artefactos es básicamente la mediación, con los actores principales maestro y estudiantes.

[1] El punto de vista antropocéntrico en la investigación cualitativa, le da gran relevancia a los seres humanos, para el caso los estudiantes.

1.1.1 Formulación del problema de investigación

En consecuencia de lo anterior, el problema se formuló así:

¿Cómo el uso de los objetos físicos privilegia la enseñanza de la adición y sustracción de números enteros en estudiantes de 7° grado de la Institución Educativa Alfonso López Pumarejo de la ciudad de Palmira?

1.2 Justificación

En el ámbito internacional cada tres años la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) hace público los resultados de las pruebas Pisa, con la finalidad de comparar el desempeño académico de los estudiantes de 15 años a nivel internacional.

“Las pruebas Pisa evalúa las áreas de: matemáticas, lenguaje y ciencia. Según los resultados de la prueba 2012.Publicados en el 2013 y 2014, los cuales hacen énfasis en matemáticas, Colombia ocupa el puesto 62 de 65 países.

El estudio tiene gran atención a las matemáticas por considerar que se trata de una materia que ayuda a predecir el futuro éxito de los estudiantes después de la educación secundaria. En esta área Colombia obtuvo un puntaje de 376 estando por debajo del promedio que fue de 494”[2].

[2] Centro virtual de Noticias de la Educación (2013). Pisa 2012: retos y avances para Colombia. La Calidad continúa siendo la principal prioridad.

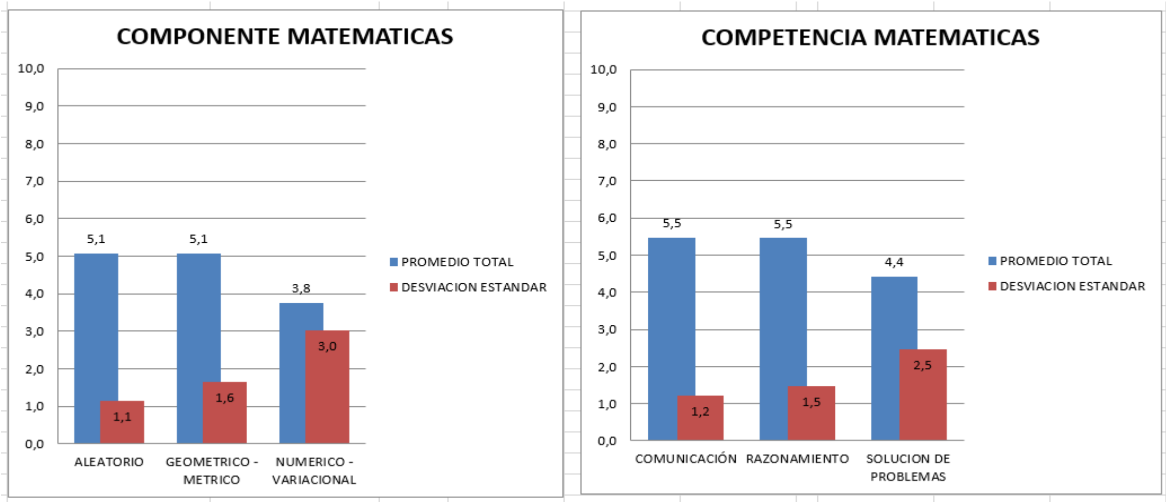
Tabla 1. Resultados prueba Pisa 2012.

Tabla 1						
CAMBIOS ANUALES						
Países	Matemáticas		Lectura		Ciencias	
	Promedio 2012	Cambio anual	Promedio 2012	Cambio anual	Promedio 2012	Cambio anual
Shanghái	613	**4,2**	570	**4,6**	580	1,8
Singapur	573	**3,8**	542	**5,4**	551	**3,3**
Hong Kong	561	**1,3**	545	**2,3**	555	**2,1**
Taipéi	560	1,7	523	**4,5**	523	-1,5
Corea	554	1,1	536	**0,9**	538	**2,6**
Finlandia	519	**-2,8**	524	**-1,7**	545	**-3,0**
Canadá	518	**-1,4**	523	**-0,9**	525	**-1,5**
Polonia	518	**2,6**	518	**2,8**	526	**4,6**
España	484	0,1	488	-0,3	496	1,3
Estados Unidos	481	0,3	498	-0,3	497	1,4
Chile	423	**1,9**	441	**3,1**	445	1,1
México	413	**3,1**	424	**1,1**	415	0,9
Uruguay	409	**-1,4**	411	**-1,8**	416	**-2,1**
Costa Rica	407	-1,2	441	-1,0	429	-0,6
Brasil	391	**4,1**	410	**1,2**	405	**2,3**
Argentina	388	1,2	396	-1,6	406	2,4
Colombia	376	1,1	403	**3,0**	399	1,8
Perú	368	1,0	384	**5,2**	373	1,3
Promedio OCDE	494	**-0,3**	496	**0,3**	501	**0,5**

Fuente: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/w3-article-336001.html Consultado octubre 2014

En el ámbito Nacional se cuenta con las pruebas saber, para la prueba saber 11 del 2012 IEALP. Los resultados más bajos se registran en el componente numérico-variacional y la competencia solución de problemas. Información tomada del ICFES.

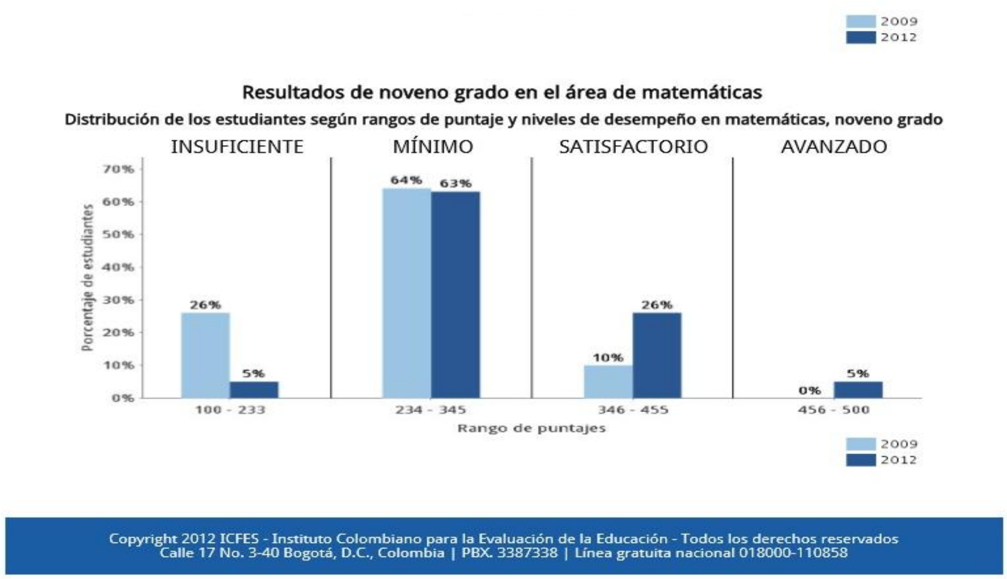
Figura 1: Resultados por componente y competencias de la asignatura de matemáticas de las pruebas SABER - IEALP



Fuente: Elaboración propia con base en los resultados de la prueba saber ICFES

En relación con las pruebas SABER 9 en matemáticas comparando los resultados; si bien es cierto que hubo mejoras en la prueba del 2012 en relación con las del 2009, no son los resultados esperados.

Figura 2: Resultados prueba saber grado noveno en el área de matemáticas IEALP



Fuente: ICFES interactivo (2012)

Los resultados en matemáticas de diversas pruebas así como los desempeños internos en la institución,[3] sirvieron como referente para una propuesta alternativa de enseñanza de las estructuras aditivas en los enteros a través de objetos físicos: con el fin de lograr mediar en la aprehensión de conocimientos en la relación enseñanza y aprendizaje, además poder privilegiar aprendizajes significativos.

La temática abordada en la investigación sirve para temas posteriores, asignaturas como: algebra, análisis e incluso en áreas diferentes a matemáticas. Es común en las reuniones de áreas y consejos Académicos de la IEALP. Por parte de los educadores la preocupación por el manejo de las operaciones básicas en los estudiantes.

Para lo cual se hace necesario comprender como ha sido la evolución y aceptación en la enseñanza de los números enteros, donde el componente epistemológico puede ir en relación con las dificultades que presentan los educandos.

Los números enteros señala: [8] MEN (2006) aunque los chinos e hindúes empezaron a explorar números negativos hace más de mil años, en los países europeos éstos no se aceptaron como números hasta bien entrado el siglo XVII. Los hindúes afirma [9] Kline (1992) tenían una condición de estar endeudados, para lo cual se les ocurrió que sería útil disponer de números que representaran el monto de las deudas. En consecuencia, inventaron lo que se conoce como números negativos.

Dando paso a la enseñanza de la aritmética escolar se redujo en la práctica al manejo de las operaciones básicas para los naturales y de su extensión para los racionales positivos (o “fraccionarios”). Pero durante el siglo XX hubo una proliferación muy grande de otros contenidos matemáticos entre estos los números enteros [10] (MEN, 2006).

Este paso de los números naturales a los números enteros no sólo amplia el concepto de número, sino que también obliga a cambios conceptuales en las operaciones y las relaciones entre ellos.

[3] Los resultados internos aparecen en la página de la IEALP a la cual los docentes pueden ingresar con un usuario y contraseña.

Haciendo énfasis en los obstáculos epistemológicos Brousseau (1998), citado por [11] Barrantes (2006): al hablar de obstáculo epistemológico.

> *Brousseau conceptualiza obstáculo epistemológico acercándose a las causas que conducen a errores: "El error no es solamente el efecto de ignorancia, incertidumbre, sino que es el efecto de un conocimiento anterior, que a pesar de su interés o éxito, ahora se revela falso o simplemente inadecuado". De este modo, al mencionar obstáculo epistemológico, este autor no se refiere necesariamente a conocimientos erróneos; sino a tipos de conocimiento que están obstaculizando la adquisición (construcción) de uno nuevo.*

Podemos citar como ejemplo la operación de suma y resta en los naturales y el paso posterior a los números enteros. Dentro de la génesis e investigación de los obstáculos epistemológicos Brousseau propone una serie de orígenes según el desarrollo del sujeto y la incursión en modelos culturales específicos; entre ellos tenemos:

> ***Los epistemológicos*** *son los obstáculos que ciertos conceptos tienen para ser aprendidos, es propio del concepto. Por ejemplo la dificultad del concepto de conceptuar el cero, los números relativos, etc. Todos estos han sido problemas históricos en cuanto a su desarrollo conceptual; son obstáculos que también se pueden presentar en la enseñanza de la matemática.*

Con base en las dificultades u obstáculos se hace necesario llevar a cabo procesos alternativos, para lo cual él [12] MEN (2006), recomienda *Aprovechar la variedad y eficacia de los recursos didácticos.* Señala además.

> *Los recursos se hacen mediadores eficaces en la apropiación de conceptos y procedimientos básicos de las matemáticas y en el avance hacia niveles de competencia cada vez más altos.*
> *Los recursos didácticos pueden ser materiales estructurados con fines educativos (regletas, fichas, cartas, juegos, modelos en cartón, madera o plástico, etc.); o tomados de otras disciplinas y contextos para ser adaptados a los fines que requiere la tarea.*

Es necesario recalcar que para comprender mejor la importancia de los objetos didácticos, se usan diversas clasificaciones de los mismos. Una de ellas la presentan [13] Batanero, Godino & Font (2004) al referirse a los materiales manipulativos que sirven de apoyo y potencian el razonamiento matemático: objetos físicos tomados del entorno o preparados, así como gráficos, palabras específicas, sistemas de signos etc. Que cumplen una función de servir como medios de expresión, exploración y cálculo en el trabajo matemático.

> *Así pues “manipulativos tangibles” que ponen en juego la percepción táctil: regletas, ábacos, piedrecillas u objetos, balanzas, compas, instrumentos de medida, etc.*

Para finalizar a la hora de llevar materiales al aula se debe tener en cuenta el aprendizaje significativo Ausubel citado en [14] López (2012), la interacción entre la información existente en la estructura cognitiva del estudiante y la nueva información debe ser de manera no arbitraria y no literal, en este punto el maestro cumple una función mediadora entre los contenidos científicos y el estudiante y es quien debe elegir de manera cuidadosa los materiales de aprendizaje para que se dé realmente el aprendizaje significativo.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Diseñar e implementar objetos físicos para la enseñanza-aprendizaje de la adición y sustracción de números enteros en estudiantes de 7° grado de la Institución Educativa Alfonso López Pumarejo de la ciudad de Palmira.

1.3.2 Objetivos específicos

- Identificar las dificultades en la apropiación de los números enteros, en especial, con las operaciones de: adición y sustracción, a través de una evaluación diagnostica.

- Diseñar y aplicar objetos físicos, para la enseñanza de la adición y sustracción de enteros en estudiantes de 7° grado.

- Evaluar los efectos de los objetos físicos aplicados, mediante la comparación de los resultados de una evaluación diagnostica vs evaluación final.

2. Marco referencial

2.1 Recorrido histórico de los números enteros

Los números negativos se diferencian de los números naturales tanto por la forma en que aparecieron como por su fecha de aparición. Los números naturales surgen muy tempranamente con la necesidad que tenía el hombre de contar, en cambio los números negativos aparecen como resultado de la práctica matemática y en particular de la manipulación algebraica para resolver ecuaciones como: $x+1=0$.

Por otra parte, "la aparición histórica de los números negativos fue tardía en comparación con los números naturales. El periodo que va desde su surgimiento, su aceptación y legitimación fue de aproximadamente 1000 años, periodo en el cual se evidencia desde un rotundo rechazo a su aceptación sólo como artificios de cálculo, pero nunca como número" [15] (Arias B & Arias C, 199).

Los números negativos no aparecen en la civilización griega debidos fundamentalmente a que los matemáticos de la Grecia clásica habían tomado la geometría como soporte del álgebra y de ahí la falta de necesidad de plantear un nuevo tipo de números.

Los matemáticos hindúes gracias a la creación de un sistema de numeración posicional de base diez, adquiriendo gran habilidad en el cálculo aritmético y algebraico, lo que unido a su superficialidad lógica les permitió representar la ausencia o cantidades ficticias con símbolos a los que les llamaron posteriormente negativos. Los matemáticos hindúes encontraron que los números negativos eran útiles para representar deudas en cálculos financieros; deber a alguien una suma de dinero era peor, desde el punto de vista financiero que no tener dinero, de modo que una deuda debería ser claramente "menos que cero" [16] (Stewart, 2007).

Las reglas que rigen las operaciones matemáticas con los números negativos se presentan por primera vez por lo menos de forma explícita en la obra del matemático hindú [17] (Brahmagupta, hacia el año 628 D.C). En él se explica cómo realizar sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y potenciaciones con los "bienes" (los números ´positivos), las deudas (los números negativos) y la nada (el cero).

Los logros alcanzados por los hindúes en cuanto al tratamiento con los números negativos cayeron en el vacío, pues fueron invadidos por los árabes, y los matemáticos de esta cultura no recogieron aportes importantes como la consideración de las raíces negativas, seguramente ello provenga de la estrecha relación que hacían entre número y magnitud. Los árabes debido a su mentalidad práctica ignoraron a esos "monstruos" sin soporte real, que al parecer sólo surgen de la imaginación de los hindúes [18] (Stewart, 2007).

Tampoco los matemáticos europeos en la edad media recogieron el avance de los matemáticos hindúes al introducir los números negativos pues los consideraban sólo como restas indicadas y en cierto momento plantean que no se deben considerar.

"Pasando al renacimiento, los números negativos llegaron a ser aceptados pero no como números pues no podían interpretarse como cantidades concretas y por lo tanto se les dio el carácter de artificios de cálculos. De ahí el calificativo de números ficticios, absurdos, raíces falsas o valores negados.

La notación muy difundida para los números positivos y negativos fue gracias a Stifel. La difusión de los símbolos germánicos (+) y (-), se popularizó con el matemático alemán. Antes se utilizaba (p) positivos y (m) negativos. El símbolo (Z) para denotar a los enteros proviene del alemán ZAHLEN que significa números" [19] Perero (1994).

En el siglo XVIII con el desarrollo de la geometría analítica fue posible encontrar una interpretación concreta a los números negativos como abscisas en la recta numérica, además con el desarrollo de la física y en especial la mecánica se empiezan a considerar o representar movimientos en donde las cantidades negativas sólo indican el cambio de sentido del mismo o donde lo negativo indica retroceso y lo positivo avance.

Leonardo Euler es el primero en darles estatuto legal, en su [20] Anteitung Zur Algebra (1770) trata de “demostrar” que (-1). (-1)=+1, argumentaba que el producto tiene que ser +1 ó -1 y que sabiendo que se cumple (1) (-1)= -1 tendrá que ser: (-1). (-1)=+1.

En el siglo XIX los números negativos son aceptados como números pero no porque representen cantidad sino porque se incorporan como una extensión de los números naturales, en donde se continúan cumpliendo leyes de la aritmética. Surge entonces la necesidad de estudiar los fundamentos de los diferentes sistemas numéricos y entre ellos los números negativos, es decir, de alguna manera se trata de dotar de contenido matemático a los números negativos. Es por ello que la regla de los signos se pasa a considerar como un acuerdo para que se conserve el principio de permanencia aritmética [21] MEN; Estándares Básicos de Competencias (2006).

Durante esta época además de aparecer una multiplicidad de teorías surgen también diversas definiciones para los números enteros y en últimas, gracias a la noción de estructura se logran unificar y de dicha unificación aparece la teoría matemática de los números enteros que hoy conocemos.

2.2 Concepto de número y estructuras aditivas de enteros

[22] Kline (1992) afirma: entre las civilizaciones del pasado, fueron los griegos los que mejor apreciaron el prodigio y las virtudes del concepto de número. Hubo otros pueblos bien dotados de penetración intelectual, pero acaso porque no consideraron los números de manera abstracta, tampoco pudieron ver con lucidez su naturaleza verdadera.

[23] El M.E.N (1998) en la comprensión del concepto de número y de la numeración presenta 7 tipos.

> *La comprensión de conceptos numéricos apropiados se puede iniciar con la construcción por parte de los alumnos de los significados de los números, a partir de sus experiencias en la vida cotidiana, y con la construcción de nuestro sistema de numeración teniendo como base actividades de contar, agrupar y el uso del valor posicional.*
> *Significados de los números: Los números tienen distintos significados para los niños de acuerdo con el contexto en el que se emplean. En la vida real se utilizan de distintas maneras, entre las cuales están las siguientes (Rico, 1987):*
>
> ***Como secuencia verbal** los números se utilizan en su orden habitual (uno, dos, tres, etc.), sin hacer referencia a ningún objeto externo, a veces con el propósito de recitar la secuencia o de cronometrar la duración de un juego o una carrera (por ejemplo diciendo los números de 1 a 10), etc. Los niños aprenden rápidamente a contar números por repetición de pautas verbales.*
>
> *Cuando los números se usan para **contar**, cada uno se asocia a un elemento de un conjunto de objetos discretos. Este contexto conlleva el correcto empleo de la correspondencia biunívoca que a cada número asocia un objeto.*
>
> *Cuando un número natural describe la cantidad de elementos de un conjunto bien definido de objetos discretos, se está usando el número **como cardinal.***
>
> *Los números se utilizan **para medir** cuando describen la cantidad de unidades de alguna magnitud continua (como longitud, superficie, volumen, capacidad, peso, etc.), que se supone dividida en múltiplos de la unidad correspondiente y que nos permite contestar a la pregunta ¿cuántas unidades hay?*
>
> *En un contexto **ordinal** el número describe la posición relativa de un elemento en un conjunto discreto y totalmente ordenado, en el que se ha tomado uno de los elementos como inicial. Muchas de las actividades y juegos de los niños requieren colocar “puestos” o colocar orden.*

*En los contextos de **código**, los números se utilizan para distinguir clases de elementos. Son etiquetas que identifican cada una de las clases. El ejemplo más familiar para los niños lo constituyen los números que llevan los jugadores de un equipo de fútbol. Los números del 1 al 11 representan las posiciones teóricas en las que juegan: portero, defensa lateral izquierdo, central, extremo izquierdo, etc. Otros ejemplos son los números telefónicos, los indicativos para llamadas a larga distancia, las categorías socio-profesionales, etcétera.*

*Actualmente, con el uso de las calculadoras y los computadores, el número se emplea **como una tecla**, en el que está asociado con un resorte diferenciado, que hay que accionar físicamente para su utilización. Solamente están representados los números del 0 al 9, y con ellos se pueden representar los demás, hasta un límite entre 8 y 12 dígitos dependiendo del aparato.*

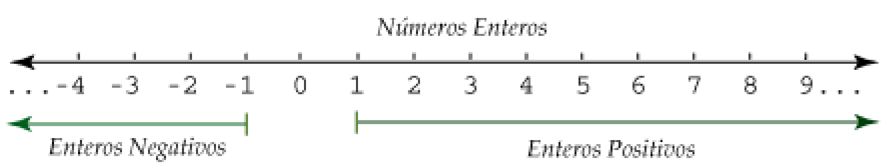
Para que los niños logren entender el significado de los números, además del uso cotidiano, hay que darles la oportunidad de realizar experiencias en las que utilicen materiales físicos y permitirles que expresen sus reflexiones sobre sus acciones y vayan construyendo sus propios significados.
Es de anotar que la construcción misma del concepto de número requiere de un largo proceso en el que uno de sus indicadores se ubica en el momento en que los niños logran integrar los aspectos ordinal y cardinal del número.

El concepto de número se puede agrupar en tres dimensiones, una primera idea. La abstracta a través de propiedades, símbolos, reglas operativas; pasando a una segunda idea las representaciones graficas dadas en la recta y la última el contexto es decir; situaciones reales que se modelan mediante números y operaciones con ellos. Cuando se realiza una extensión numérica hay aspectos que permanecen comunes en cada una de estas dimensiones. Por ejemplo, en la dimensión abstracta, al realizar una extensión aparecen reglas operativas que conservan las mismas propiedades (Conmutativa, asociativa, distributiva,…) que las del sistema inicial. Al pasar a la gráfica, la recta es la representación común a todos los sistemas numéricos y sirve de hilo conductor entre ellos. En el plano contextual es pertinente anotar que cualquier número natural puede ser usado para expresar un cardinal y una temperatura, pero hay números reales que no son adecuados para expresar un cardinal, aunque si una temperatura como es el caso de los enteros negativos; así pues, al ampliar un conjunto numérico se reduce la clase de situaciones en las que se aplican todos los números del nuevo sistema [24] (Bruno, 2001).

“Los aspectos del mundo físico que se pueden describir usando los números naturales, hay otros que demandan nuestra atención. Muchas de las situaciones cotidianas envuelven la idea de magnitud con sentido; es decir de magnitudes que dependiendo si se toman a la derecha ó a la izquierda de un punto de referencia dado, se les asigna un valor positivo ó negativo. Considerando el número cero como punto de referencia, al igual que existen temperaturas superiores a los cero grados centígrados también las hay inferiores, considerando que a nivel del mar se tiene altitud cero; así como hay alturas sobre el nivel del mar, también las hay bajo el nivel del mar” [25] Acevedo y Ospina (1992).

Estas situaciones se manejan introduciendo unos números opuestos a los números naturales, tomando cero como punto de referencia, que se llamara números enteros.

Figura 3. Recta numérica de números enteros



Fuente:http://w w w .tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/cursos-linea/MATEGENERAL/t1-reales-expresionesalgebraicas/T1-1-numeros-reales-julioetall/node12.html/ Consultado Septiembre de 2014

En la etapa de las “matemáticas modernas” los números negativos se introducían utilizando pares ordenados de números naturales y considerando la relación de equivalencia.

$$(a,b) \approx (c,d) \leftrightarrow a+d=b+c$$

De esta forma, el conjunto de los enteros Z se define como el cociente NxN /≈.Para citar como ejemplo las particiones en clases de equivalencia, las cuales pueden ser asociadas a un número entero en este caso -3. [(4,7)] = [(2,5)] = [(5,8)] = [(1,4)] = -3 [26] Bruno (2001)

La construcción formal por pares ordenados, cada clase de equivalencia de pares es el grafo de una relación asimétrica. La clase 0, por el contrario, no es engendrada por ninguna relación asimétrica, sino simétrica (la relación de “coincidencia” que en este caso se presenta bajo la forma de “igualdad)). Ambos tipos de relaciones (coincidencia y precedencia; simétrica y asimétrica) son los elementos básicos para establecer, conjuntamente, un “sistema comparativo” en un dominio determinado. [27] (Stegmüller, 1979).

En la actualidad se presentan lo números enteros a través de la siguiente extensión.

$$z = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots\}$$

2.3 Registros de representación Semiótica

[28] Propone Duval (2004) que antes de estudiar los fenómenos relativos al conocimiento se debe recurrir a la noción de representación la cual ha sido el centro de toda reflexión, que indague por las cuestiones que tienen que ver con la posibilidad y la constitución de un conocimiento cierto. Señala además que la noción de representación se ha presentado en tres ocasiones distintas, cada una con una determinación totalmente diferente del fenómeno designado.

.

> *La especificidad de las representaciones semióticas consiste en que son relativas a un sistema particular de signos: el lenguaje, la escritura algebraica o los gráficos cartesianos, y en que pueden ser convertidas en representaciones “equivalentes” en otro sistema semiótico, pero pudiendo tomar significaciones diferentes para el sujeto que las utiliza. La noción de representación semiótica presupone, pues, la consideración de sistemas semióticos diferentes y una operación cognitiva de conversión de las representaciones de un sistema semiótico a otro [29] (Duval, 2004).*

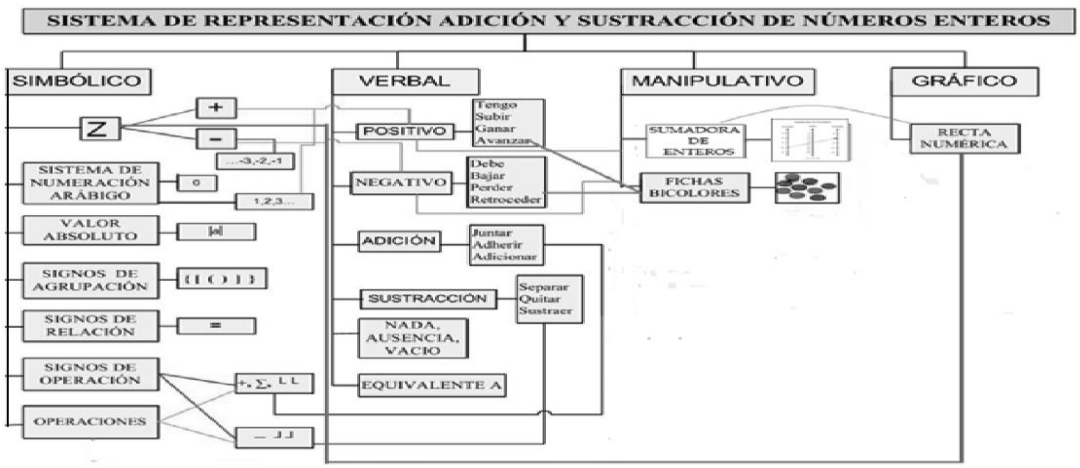
En la representación de los conceptos matemáticos existen diversos procesos mentales en los estudiantes, los cuales les permite la compresión de un tema. Las ideas de esquema y representaciones dadas de una forma externa e interna se relacionan con los sistemas semióticos de representaciones y sus implicaciones en la estructuración entre funciones internas.

[30] Duval (2000) afirma: que “no hay conocimiento sin representación”. Pero las Matemáticas a diferencia de otras disciplinas no tiene referentes “palpables” como si ocurre en la botánica, geografía donde los objetos de estudio están a la vista, en Matemáticas nunca ocurre que vemos a un dos “andando por allí” el conocimiento Matemático en su mayoría ésta dado con un alto grado de abstracción, donde el papel del educador es extraer los “códigos ocultos” de la disciplina, para que sea enseñada.

Con base en lo anterior se hace necesario el uso de diferentes representaciones semióticas de un objeto Matemático con el fin de obtener una mejor compresión del área. Pero los registros semióticos no tienen una mera función de exteriorización o comunicación, su papel va más allá y es poder contar con actividades de conversión en por lo menos dos tipos de registros de representaciones, Para lograr una mejor compresión del concepto.

A continuación el sistema de representación, para la adición y sustracción de enteros agrupados en: simbólico, verbal, manipulativo y gráfico.

Figura 4: Sistema de representación adición y sustracción de enteros



Fuente: http://funes.uniandes.edu.co/1890/ Consultado Enero de 2013

Con respecto al papel de los errores en la teoría de representaciones [31] Bachelard (193 8) aporta con la noción de obstáculo epistemológico; donde el principio fundamental de esta teoría es que el conocimiento científico no se construye como un proceso continuo, sino que resulta a partir del rechazo de formas previas de conocimiento. El concepto de obstáculos epistemológicos no hace referencia a las dificultades derivadas de la ausencia de conocimiento, sino a las dificultades directamente vinculadas con las formas de considerar el conocimiento o con los conocimientos mismos. En el tema de los números enteros los estudiantes generalizan espontáneamente la ley de los signos, utilizada principalmente en la multiplicación y división, para referirse a la adición y sustracción de enteros y les cuesta mucho trabajo desarraigarse de eso.

Con base en lo anterior se puede presentar una clasificación [32] Selden y Selden (2001)

Tabla 2. Clasificación de los objetos Selden y Selden

Epistemológicos	Surgen a partir de la naturaleza de aspectos particulares del conocimiento matemático.
Cognitivos	Surgen de la concepción de un individuo sobre un tópico matemático concreto
Didácticos	Surgen a partir de características particulares de la enseñanza de las matemáticas

Fuente: Tesis Doctoral de González (2005)

Glaeser (1981) citado por [33] Cid (2003). El autor considera que en la evolución histórica de la noción de número negativo desde sus primeras emergencias hasta el concepto actual, se pueden constatar los siguientes obstáculos:

- *Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas. Indica con esto el hecho, observable en la obra de Diofanto, de que la necesidad de efectuar cálculos algebraicos con diferencias y, en particular, la necesidad de multiplicar dos diferencias, le lleva a enunciar la regla de los signos y, sin embargo, no acepta la existencia de números negativos aislados.*

- *Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas. En la obra de algunos matemáticos (Stevin, D'Alembert, Carnot y, posiblemente, Descartes) se constata que conciben la existencia de soluciones negativas de las ecuaciones, las "ven" y las tienen en cuenta, pero no pueden aceptarlas como cantidades reales y las justifican diciendo, por ejemplo, que son cantidades ficticias que expresan un defecto en el enunciado del problema*.

- *Dificultad para unificar la recta real. En el intento de sobrepasar el obstáculo anterior interpretando las cantidades negativas como cantidades reales, se observa que algunos matemáticos [34] (McLaurin, D'Alembert, Carnot y Cauchy) (1990) concebían los negativos y los positivos en términos antinómicos: "lo negativo" neutralizaba, se oponía a "lo positivo", pero era de naturaleza distinta. Es decir, la cantidad negativa era tan real como la positiva, pero estaba tomada en un sentido opuesto. Esta heterogeneidad que se establecía entre negativos y positivos no facilitaba su unificación en una única recta numérica y, en cambio, favorecía el modelo de dos semirrectas opuestas funcionando separadamente.*

- *La ambigüedad de los dos ceros. [35] Glaeser (1981) se refiere con esto a las dificultades que hubo entre los matemáticos (Stevin, McLaurin, D'Alembert, Carnot, Cauchy y, quizá´, Euler y Laplace) para pasar de un cero absoluto, un cero que significaba la ausencia de cantidad de magnitud, a un cero origen elegido arbitrariamente. Uno de los razonamientos más extendidos entre los matemáticos que se oponían a la consideración de las cantidades negativas como*

> *cantidades reales y no como meros artificios del cálculo, era que no se podía admitir la existencia de cantidades que fueran "menos que nada" .*

Señala [36] Duval (1993), muchas de las dificultades encontradas por los estudiantes en diferentes niveles de su currículo pueden ser descritas y explicadas como una falta de coordinación de registros de representación.
"Ante las dificultades se debe dar un tratamiento, el cual se define como la transformación de una representación (inicial) en otra representación (terminal), respecto a una cuestión, o a un problema o a una necesidad, que proporciona el criterio de interrupción en la serie de las transformaciones efectuadas" [37] (Duval,2004).

Pasando al obstáculo cognitivo este se manifiesta cuando un sujeto, al enfrentarse a un problema, realiza representaciones contradictorias del concepto en cuestión, en consecuencia de ideas intuitivas erróneas, en la mayoría de los casos incluso necesarias, para construir el proceso de formación de conceptos.

El obstáculo cognitivo desde el sentido amplio resulta de elecciones didácticas hechas, para establecer la situación de enseñanza.

En cuanto a la importancia del uso de ejemplos y contraejemplos Duval, Hitt (2000) citado por [38] González (2005), considera que no sólo son importantes las tareas de transformación dentro de un registro de representación y los de conversión entre registros, sino que también aparece como importante la confrontación entre ejemplos y contraejemplos.

Para finalizar [39] Duval (2004) con base en las condiciones de un aprendizaje fundado en la coordinación de los registros.

> *La coordinación de los diferentes registros de representaciones ligados a la objetivación o al tratamiento de los conocimientos, no se da espontáneamente, incluso en el transcurso de una enseñanza que moviliza esta diversidad de registros. Esto puede verificarse fácilmente en los diferentes niveles de enseñanza de las matemáticas. Cuando la adquisición de conocimientos ha estado ligada a la formación y al tratamiento de representaciones efectuadas en*

un solo registro, o ha privilegiado un registro particular (la escritura “algebraica”, los gráficos, las figuras geométricas, las tablas, el discurso en lengua natural), esta adquisición queda limitada a ese único registro, entiéndase por tratamiento la transformación de una representación(inicial) en otra representación (terminal),respecto a una cuestión, a un problema o a una necesidad, que proporcionan el criterio de interrupción en la serie de las transformaciones efectuadas.

2.4 Situaciones didácticas

La teoría de las situaciones didácticas se desarrolló con base en las ingenierías didácticas; las cuales se apoyan en la teoría de situaciones. Es pertinente señalar que solo fue una parte de la metodología; es decir no se siguió un proceso “riguroso”. Estas inician con Brousseau y la evolución a [40] Chevallard (1998) citado por González en este se muestra que normalmente analizamos en los educandos un aprendizaje forzado por la institución.

[41] Artigue (1999) describe de la siguiente forma, las bases de esta teoría:

En la teoría de las situaciones didácticas, el aprendizaje, de hecho, se ve como un proceso de adaptación, pero se reconoce que los procesos de adaptación utilizados por el estudiante en una situación de enseñanza dada no son todos de naturaleza matemática. El estudiante se adapta apoyándose en conocimiento matemático, pero también se adapta apoyándose en conocimientos sobre el sistema educativo, sus normas y costumbres, y adivina las expectativas del profesor – lo que Brousseau aisló y definió como el “contrato didáctico”. Un buen número de estudiantes bien adaptados escolásticamente aprueban, incluso en la universidad, más a través del aprendizaje de cómo decodificar los términos del contrato didáctico y cumpliéndolo que a través de un verdadero aprendizaje matemático. Debido a los fuertes efectos del contrato didáctico, no es fácil construir situaciones de aprendizaje donde se pueda asegurar que el éxito del estudiante implica un verdadero compromiso matemático. La evaluación en estas circunstancias es incluso más difícil, como han mostrado varios trabajos. La teoría de las situaciones didácticas ha desarrollado un conjunto de herramientas conceptuales y de técnicas para analizar las situaciones de enseñanza desde este punto de vista y para guiar su construcción y optimizar las relaciones entre la actividad matemática del profesor y las actividades que pueden ser de la responsabilidad del estudiante.

A continuación la tipología de situaciones. La teoría distingue tres tipos de situaciones didácticas las cuales son: las situaciones de acción, de formulación y de validación:

-Situaciones de acción: el alumno debe actuar sobre un medio (material o Simbólico); la situación requiere solamente la puesta en acto de Conocimiento implícitos.

-Situaciones de formulación: un alumno (o grupo de alumnos) emisor debe formular explícitamente un mensaje destinado a otro alumno (o grupo de alumnos) receptor que debe comprender el mensaje y actuar (sobre un medio, material o simbólico) en base al conocimiento contenido en el mensaje.

-Situaciones de validación: dos alumnos (o grupos de alumnos) deben enunciar aserciones y ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de las mismas. Las afirmaciones propuestas por cada grupo son sometidas a la Consideración del otro grupo, que debe tener la capacidad de "sancionarlas", es decir ser capaz de aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas, o poner otras aserciones.

En consecuencia de las situaciones didácticas, el quehacer del profesor tiene dos finalidades, permitir en los estudiantes una adaptación deseada a través de una elección concienzuda de los problemas que propone y la segunda acción permitir en los estudiantes la incorporación de un saber cuyo sentido y funcionamiento sean significativos.

2.5 Estado del Arte

Desde la antigüedad los chinos utilizaban para enseñar la adición y sustracción el principio del ying y yang en la cual utilizaban palillos de madera, los cuales representan números opuestos, el color negro para números negativos y el color rojo para números positivos. La dinámica consiste en que estos palillos se van aniquilando mutuamente, cada "combatiente" rojo se aniquila con uno negro y el número de los supervivientes arroja el desenlace de la batalla, el cual es el resultado de la operación.

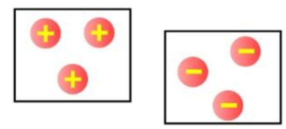
Figura 5: Figura de palos chinos

Fuente: http://4.bp.blogspot.com/-0NMAdJyJGk4/T3yDVFbJFgI/AAAAAAAAEN0/uuWFHMkiN3E/s1600/DSC04789.JPG Consultado enero de 2013

Pasando a uno de los grandes pedagogos [42] Pestalozzi (1800) el cual a través de su escuela, para la enseñanza de los números (relaciones métricas y numéricas) Utilizó las tablillas con letras, las cuales acumulaba de 1 en 1 para que el niño conociera la relación de la forma (observar, medir, dibujar y escribir); enriquecer la memoria de los niños con explicaciones sencillas de objetos y materiales enseñar a describir y a darse cuenta de sus percepciones, enseñar al niño, por medio del dibujo, a medir todos los objetos que se presentan a su vista y adquirir habilidades para reproducir Pestalozzi pensó que por medio del dibujo se ejercitaba al niño en su escritura; es decir este autor busca la enseñanza a través de la mayor implementación de los sentidos algo que se buscó privilegiar desde la realización del proyecto.

A continuación algunos métodos en el ámbito internacional, para la enseñanza de adición y sustracción de números enteros.

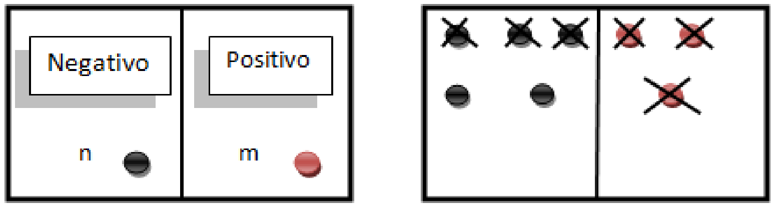
Tabla 3. Métodos en la enseñanza de los números enteros a nivel internacional

Método	Descripción	Imagen
Cubos fríos y calientes [43] Jencks y Peck (1977)	Un modelo que se apoya en la mezcla de unidades o cubos “fríos” y “calientes” que añadidos o retirados de un caldero modifica la temperatura de la mezcla.	 
Cargas positivas y negativas[44] Battista (1983)	Utilizó el modelo de partículas cargadas, se trata de relacionar las operaciones con números dirigidos con alguna interpretación física.	
Globo [45] Janvier (1985)	Modelo basado en un globo de aire caliente al que se le atan sacos de arena y/o globos de helio que le hacen bajar o subir. Se combinan las subidas y bajadas (desplazamiento en recta) con las acciones de añadir o quitar elementos para configurar un sistema intuitivo.	

Fuente: Elaboración propia

En el ámbito Nacional la investigación en el aprendizaje de los números enteros una “experiencia significativa” en estudiantes de séptimo grado de la Escuela Nacional de Música. Realizado por [46] Borjas (2009) en la cual, ésta implementa una propuesta hecha por Francisco Rivero Mendoza del Departamento de Matemáticas, de la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes, en dicha propuesta se plantean unas fichas de colores en las cuales en el lado izquierdo van las cantidades negativas y en el lado derecho las positivas. Para citar como ejemplo la operación -5+3 en el lado izquierdo ubican 5 bolitas negras y en el lado derecho 3 rojas y se procede a cancelar una a una; es decir una del lado derecho otra del lado izquierdo al final el resultado es la cantidad de bolitas que quedan sin cancelar conservando el signo al lado correspondiente .

Figura 6: Representación de la dinámica para realizar las operaciones



Fuente: información adaptada a partir del trabajo de maestría aprendizaje de los números enteros una "experiencia significativa" en estudiantes de séptimo grado de la Escuela Nacional de Música. Realizado por Borjas

En el anterior ejemplo la respuesta es -2 la cantidad de bolitas que están sin tachar.

Las principales conclusiones en el modelo anterior, es un método de enseñanza constructivista, ya que el estudiante va construyendo el conocimiento matemático, a partir de ese modelo concreto, le permite descubrir las reglas de operación que rigen a los números enteros, trasladando sus experiencias del modelo "real" al mundo de los símbolos escritos de la matemática.

Otra propuesta desarrollada en Bogotá desde la Universidad de los Andes, la cual consistió en la elaboración y aplicación de una unidad didáctica en Matemáticas relacionada con la adición y sustracción de números enteros por [47] Becerra, Buitrago, Calderón, Cañadas, Gómez y Gómez (2012).Dentro de las principales conclusiones se resalta el uso de recursos y materiales(sumadora de enteros, fichas bicolores y la recta numérica) de acuerdo con los aportes realizados por los estudiantes, favoreció el logro de las expectativas de aprendizaje propuestas en términos de competencias, objetivos y capacidades, por tratarse de elementos que permitieron manipular las cantidades representadas, dando sentido así a las situaciones. Los materiales y recursos, además de favorecer la comprensión de las situaciones expuestas, contribuyeron a la resolución de las tareas y tuvieron un alto grado de aceptación.
En el ámbito local la investigación en la implementación de objetos físicos, [48] García (2012)[4]. La cual diseñó material de apoyo didáctico: rompe cabezas, el planeta

[4] García, N (2012). Proyecto Afromatematiquin, la ciencia de la alegría: una experiencia de la inclusión de actividades lúdicas en la enseñanza de las Matemáticas. Tesis de Maestría Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Ingeniería y Administración-Sede Palmira.

AfroMatematiquín, bingo algebraico entre otros, dentro de las principales conclusiones que planteó la autora:

Se diseñaron, aplicaron y evaluaron juegos didácticos, lo que permitió que

- *Los estudiantes indagaran estrategias para el aprendizaje de las Matemáticas.*
- *60% de incremento en el aprendizaje de las matemáticas.*
- *Se evidenciara el liderazgo de algunos estudiantes hasta el momento desconocido.*

- *Los juegos didácticos, se convierten en una motivación para el Aprendizaje en las matemáticas. Los estudiantes participaran Activamente (participación del 98%) en los juegos implementados en el aula de clase, en el caso de "El planeta AfroMatematiquín".*

2.6 Diseño e implementación de objetos físicos, para la educación

La universidad Nacional de Colombia (2013) sede Palmira, ofrece una asignatura denominada: Diseño y desarrollo de objetos físicos, uno de los objetos que se aplicó en el desarrollo del proyecto fue elaborado a partir de ésta asignatura. A continuación la descripción de la asignatura.

La asignatura diseño y desarrollo de objetos físicos para la enseñanza crea un espacio sinérgico de análisis, discusión y desarrollo de propuestas objetuales desde la perspectiva de la didáctica apoyadas en los conceptos del diseño y desarrollo de productos para apoyar la enseñanza de temas de las ciencias exactas y naturales y suplir las necesidades del desarrollo de material didáctico apropiado a las condiciones, de nuestras instituciones regionales de educación básica y media para fortalecer las capacidades de enseñanza de los profesores utilizando estrategias de aprendizaje activo basado en la experimentación. las reflexiones sobre didáctica que se realizan en la maestría, combinadas con los potenciales del desarrollo de productos que tiene diseño industrial, generan el ambiente adecuado para crear espacios institucionales que son necesarios canalizar por medio de diferentes estrategias, articulando docencia (pregrado y *posgrado), investigación (reflexión crítica de la didáctica aplicada en objetos físicos) y extensión (prestación de servicios de enseñanza para la maestría, ciencias básicas y biológicas y para colegios).*

A la pregunta ¿qué es material didáctico? May (s.f), Kepler (s.f) y Castañeda. Citados por [49] González & Roldan (2013).

***Renato May**: cualquier instrumento u objeto que sirva como canal, para transmitir entre un interactuante y otros.*

***Robert E. Kepler**: todas aquellas experiencias y elementos que se utilizan en la enseñanza y que hacen uso de la visión y/o el oído.*

***Margarita Castañeda**: es un objeto, un recurso instruccional que proporciona al alumno una experiencia indirecta de la realidad y que implica tanto la organización didáctica del mensaje que se decía comunicar, como el equipo técnico necesario.*[5]

En cuanto al material didáctico en el aula González & Roldan (2013), con relación a su uso al seleccionar, adaptar o elaborar materiales, para la educación se debe tener en cuenta la forma de trabajo que se aplique y las diversa situaciones que se dan en el aula o por fuera de ella. Algunos tipos de materiales se presentan más que otros, para que cada alumno trabaje con ellos en forma individual, o para el trabajo con pequeños grupos, y así no solo aprender sobre el tema de trabajo, sino afianzar competencias comportamentales.

Figura 7: niños manipulando Material didáctico

Fuente: Diapositivas presentadas por González & Roldan. Los materiales didácticos como mediadores del proceso educativo (2013)

[5] Definiciones tomadas del Material del curso Diseño e implementación de objetos físicos en la Universidad Nacional-Sede Palmira

2.6.1 Material didáctico y currículo

Desde el punto de vista de la Programación Curricular los materiales deben servir de apoyo en el desarrollo de las unidades de aprendizaje por experiencia programada. Es decir, presentan los contenidos previstos y contribuyen al logro de los objetivos; además está de acuerdo con la metodología de enseñanza-aprendizaje que elegirá el docente.

Figura 8: Estructura conceptual de material didáctico y currículo

Fuente: Diapositivas presentadas por González & Roldan. Los materiales didácticos como mediadores del proceso educativo (2013)

2.6.2 Material didáctico y cultura

Desde el punto de vista cultural Los materiales educativos que utilizarán los alumnos deben estar de acuerdo con la cultura e intereses de la comunidad a nivel de los contenidos, del lenguaje, de las ilustraciones, el tipo material.

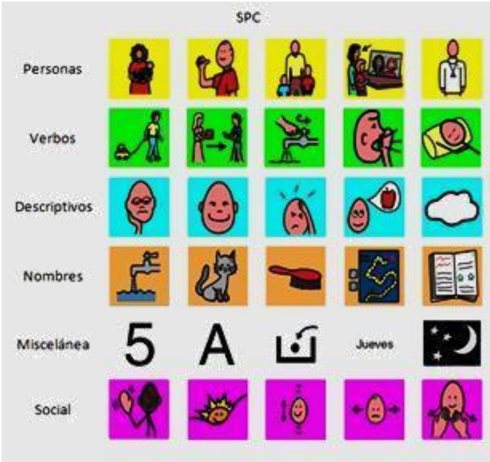
Figura 9: Representaciones de material acorde con la cultura

Fuente: Diapositivas presentadas por González & Roldan. Los materiales didácticos como mediadores del proceso educativo (2013)

2.6.3 Material didáctico y comunicación

Desde el punto de la comunicación, los materiales didácticos son un medio de comunicación en el proceso de enseñanza-. Para facilitar el proceso de comunicación deben ser entonces materiales MOTIVADORES: interesantes, atractivos, sencillos y comprensibles. Estos materiales no sólo deben presentar contenidos sino que propicien la actividad creadora de los niños y el intercambio de experiencias con sus compañeros y con el docente

Figura 10: Representación de la comunicación de los materiales



Fuente: Diapositivas presentadas por González & Roldan. Los materiales didácticos como mediadores del proceso educativo (2013)

Las situaciones metodológicas diseñadas para incorporar en el aula [50] Parra (1994) afirma. "El trabajo didáctico a partir de los sujetos que aprenden, considerar la relación didáctica que se establece entre profesor, estudiante y conocimiento, se origina en un contrato social, en el que se negociaran significados"

Figura11: Esquema de relacion del objeto didáctico

Fuente: Diapositivas presentadas por González & Roldan. Los materiales didácticos como mediadores del proceso educativo (2013)

A continuación Ausubel citado en [51] López (2012) presenta de forma breve las condiciones, para que se presente un aprendizaje significativo a través de los materiales.

1. El material de aprendizaje debe ser potencialmente significativo.
Estos materiales se caracterizan por tener un significado lógico y un significado psicológico. El significado lógico del material de aprendizaje está relacionado con la disciplina y se convierte en psicológico cuando pasa a ser parte de la estructura cognitiva del estudiante como producto de todo el proceso de aprendizaje.

2. La estructura cognitiva previa del estudiante debe poseer ideas relevantes que puedan relacionarse con el nuevo material.

En la estructura cognitiva previa del estudiante deben existir preconceptos o ideas pertinentes que permitan el anclaje de la nueva información, pero al mismo tiempo debe seguir una restructuración activa de las percepciones, ideas, conceptos y esquemas que el aprendiz ya posee.

3. Disposición del estudiante para relacionarse el nuevo material.

Debe existir una actitud favorable que permita que el estudiante relacione de manera sustancial y no arbitrariamente los materiales potencialmente significativos con la estructura cognitiva preexistente.

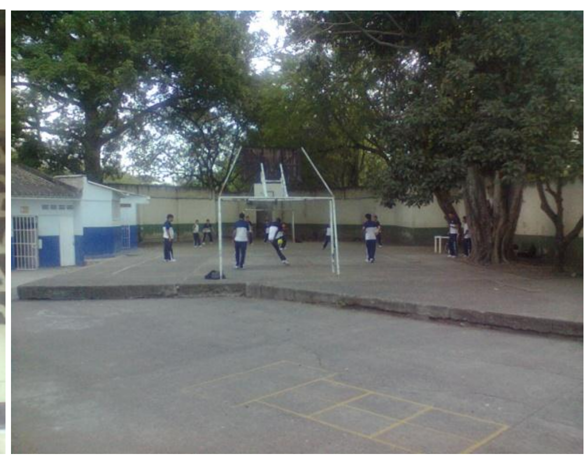
3. Materiales y métodos

La Institución Educativa Alfonzo López Pumarejo ubicada en el barrio Colombina, comuna 6 carrera 16 N 32-02 de la ciudad de Palmira, Valle del Cauca, es una institución de carácter Pública, calendario “A”; fundada en el año 1959 (sede central) con el objetivo de “Aprender a pensar para ser libre responsablemente, amar, dar sentido a la vida, trascender y buscar permanentemente la excelencia.

La institución (Sede central) cuenta con:

- 14 aulas de clase
- 1 sala de sistemas
- 1 patio recreativo
- 1 cafetería
- 2 bloques de baños, para hombres y mujeres
- 2 oficinas, para secretaria y para rectoría

Figura 12: Imágenes de la institución Alfonso López Pumarejo (sede central)



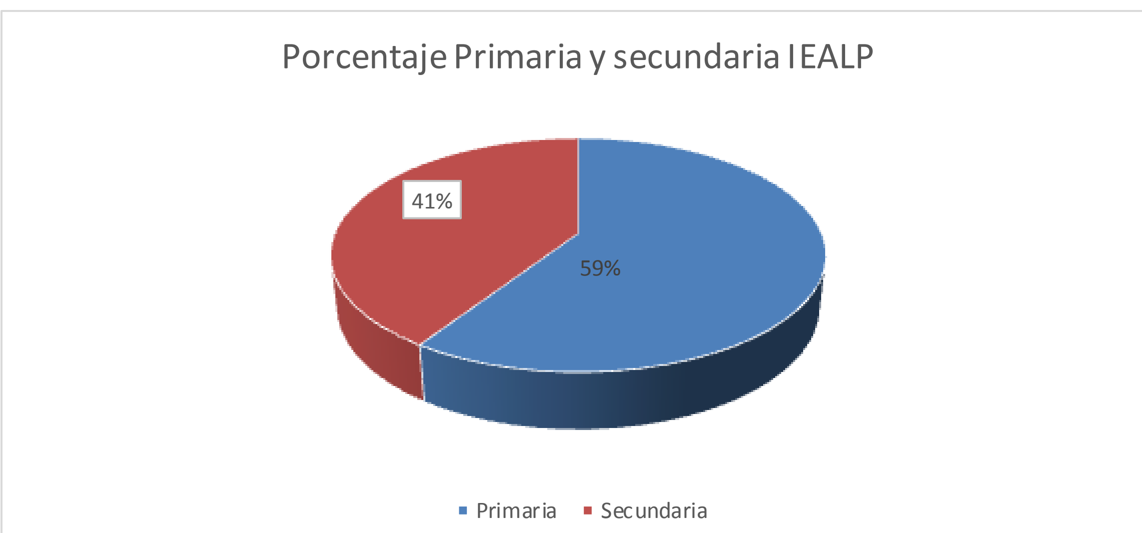
Fuente: elaboración propia

Figura 13. Ubicación a través de Google Earth de la IEALP

Fuente: Google Earth (2013)

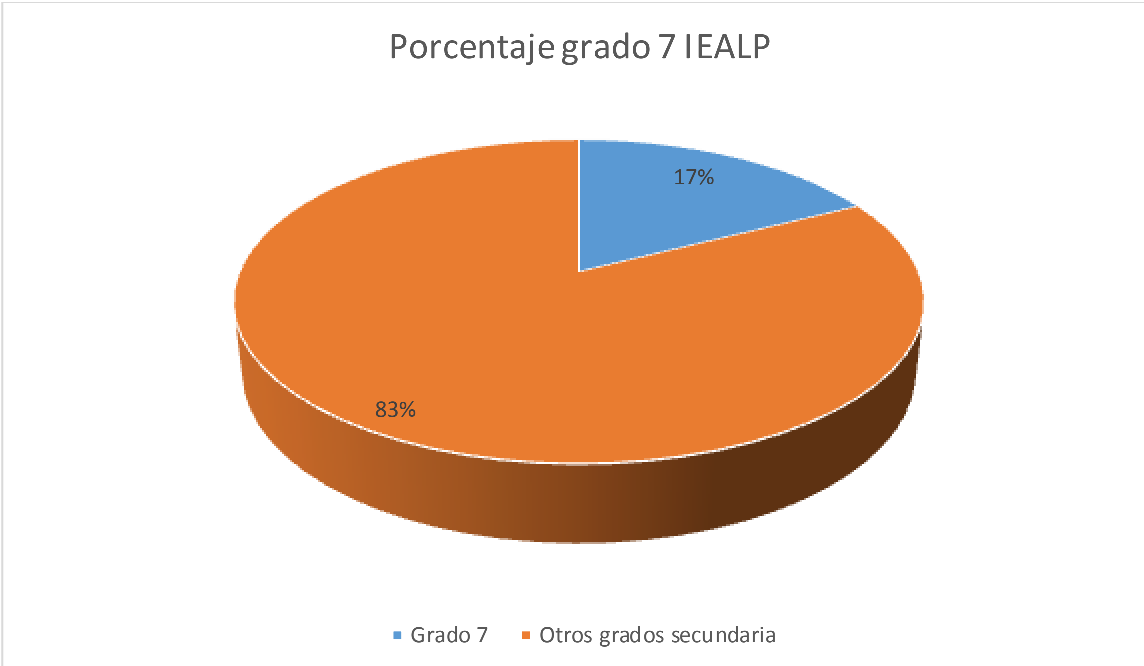
Las figuras 14 y 15 presentan la información porcentual con base en los niveles de básica primaria y secundaria; además el porcentaje de grado séptimo en relación con Secundaria de los grupos a cargo por el investigador 7-2 y 7-3.

Figura 14. Distribución por nivel (Primaria y Secundaria) IEALP



Fuente: Elaboración propia con base en la información de la página institucional ALP (2013)

Figura 15. Distribución porcentual grado 7 con base en Secundaria IEALP



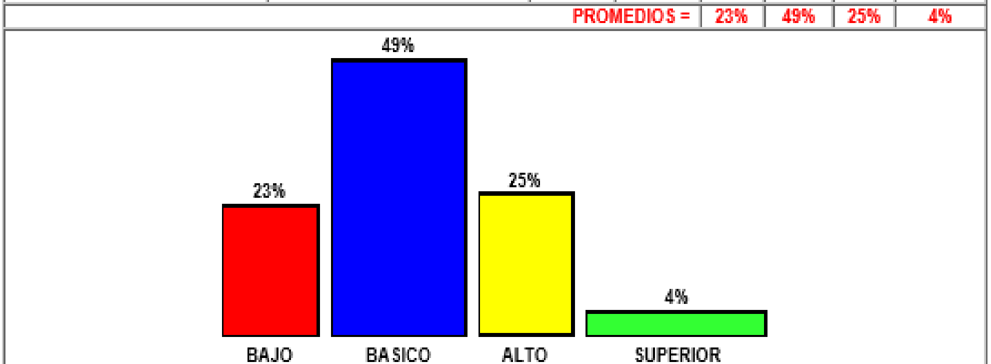
Fuente: Elaboración propia con base en la información de la página institucional ALP (2013)

Las figuras 16 y 17 presentan los resultados del primer periodo de los grupos 7-2 y 7-3 de todas las asignaturas. Información obtenida desde la página institucional, en ésta se observa que el grado 7-2 tiene más bajos desempeños en términos generales, comparado con el grado 7-3. Razón por la cual se escoge 7-2 como grupo, para aplicar la estrategia de Investigación. Señalar que la investigación no desarrolló trabajo en comparación de grupo control y experimental.

Figura 16. Resultado de las asignaturas del grado 7-2 primer periodo en la IEALP

INST. EDU. ALFONSO LOPEZ PUMAREJO
GRADO: 7 - 2
AÑO LECTIVO: 2013
PERIODO: 1

CARGA ACADÉMICA				BAJO	BASICO	ALTO	SUPERIOR
AREA	ASIGNATURA	GRADO	GRUPO				
CIENCIAS NATURALES - BIOLOGIA	BIOLOGIA	7	2	27%	61%	11%	0%
CIENCIAS NATURALES - EDU. AMBIENTAL	EDUCACION AMBIENTAL	7	2	11%	41%	48%	0%
CIENCIAS NATURALES - FISICA	FISICA	7	2	45%	48%	7%	0%
CIENCIAS NATURALES - QUIMICA	QUIMICA	7	2	25%	55%	20%	0%
CIENCIAS SOCIALES - CONSTITUCION	CONSTITUCION POLITICA - DEMOCRACIA	7	2	7%	34%	59%	0%
CIENCIAS SOCIALES - GEOGRAFIA	GEOGRAFIA	7	2	9%	66%	25%	0%
CIENCIAS SOCIALES - HISTORIA	HISTORIA	7	2	9%	57%	34%	0%
EDUCACION ARTISTICA	ARTISTICA	7	2	32%	48%	20%	0%
EDUCACION ETICA Y VALORES	ETICA Y VALORES	7	2	23%	41%	25%	11%
EDUCACION FISICA	EDUCACION FISICA	7	2	14%	61%	25%	0%
EDUCACION RELIGIOSA	EDUCACION RELIGIOSA	7	2	16%	30%	25%	30%
HUMANIDADES IDIOMA EXTRANJERO	INGLES	7	2	30%	64%	7%	0%
HUMANIDADES LENGUA CASTELLANA	LENGUA CASTELLANA	7	2	18%	73%	9%	0%
MATEMATICAS - ARITMETICA	ARITMETICA	7	2	43%	48%	9%	0%
MATEMATICAS - ESTADISTICA	ESTADISTICA	7	2	16%	14%	55%	16%
MATEMATICAS - GEOMETRIA	GEOMETRIA	7	2	27%	61%	11%	0%
TECNOLOGIA E INFORMATICA	TECNOLOGIA E INFORMATICA	7	2	34%	32%	30%	5%
			PROMEDIOS =	23%	49%	25%	4%

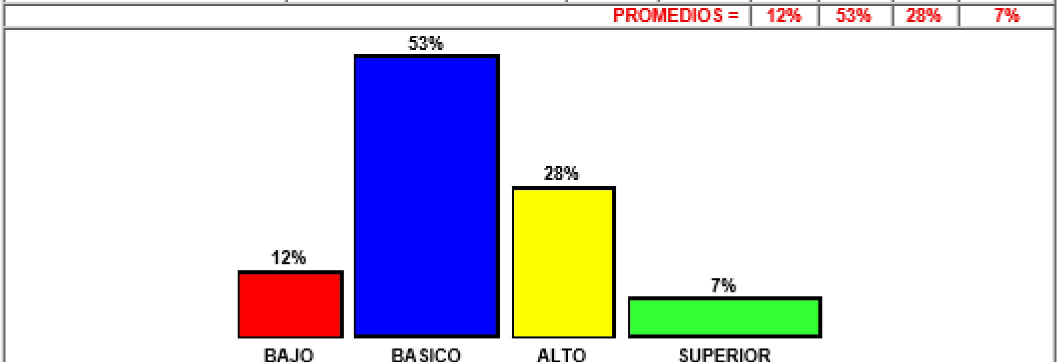


Fuente: Pagina de la IEALP (2013)

Figura 17. Resultado de las asignaturas del grado 7-3 primer periodo en la IEALP

INST. EDU. ALFONSO LOPEZ PUMAREJO
GRADO: 7 - 3
AÑO LECTIVO: 2013
PERIODO: 1

CARGA ACADÉMICA				BAJO	BASICO	ALTO	SUPERIOR
AREA	ASIGNATURA	GRADO	GRUPO				
CIENCIAS NATURALES - BIOLOGIA	BIOLOGIA	7	3	7%	84%	9%	0%
CIENCIAS NATURALES - EDU. AMBIENTAL	EDUCACION AMBIENTAL	7	3	2%	19%	65%	14%
CIENCIAS NATURALES - FISICA	FISICA	7	3	53%	42%	2%	2%
CIENCIAS NATURALES - QUIMICA	QUIMICA	7	3	2%	81%	16%	0%
CIENCIAS SOCIALES - CONSTITUCION	CONSTITUCION POLITICA - DEMOCRACIA	7	3	0%	2%	98%	0%
CIENCIAS SOCIALES - GEOGRAFIA	GEOGRAFIA	7	3	2%	86%	12%	0%
CIENCIAS SOCIALES - HISTORIA	HISTORIA	7	3	5%	86%	9%	0%
EDUCACION ARTISTICA	ARTISTICA	7	3	14%	67%	16%	2%
EDUCACION ETICA Y VALORES	ETICA Y VALORES	7	3	7%	42%	16%	35%
EDUCACION FISICA	EDUCACION FISICA	7	3	2%	70%	28%	0%
EDUCACION RELIGIOSA	EDUCACION RELIGIOSA	7	3	9%	19%	40%	33%
HUMANIDADES IDIOMA EXTRANJERO	INGLES	7	3	21%	58%	16%	5%
HUMANIDADES LENGUA CASTELLANA	LENGUA CASTELLANA	7	3	9%	77%	9%	5%
MATEMATICAS - ARITMETICA	ARITMETICA	7	3	35%	49%	16%	0%
MATEMATICAS - ESTADISTICA	ESTADISTICA	7	3	0%	23%	65%	12%
MATEMATICAS - GEOMETRIA	GEOMETRIA	7	3	28%	40%	30%	2%
TECNOLOGIA E INFORMATICA	TECNOLOGIA E INFORMATICA	7	3	7%	60%	28%	5%
			PROMEDIOS =	12%	53%	28%	7%



Fuente: Pagina de la IEALP (2013)

La investigación-acción, en relación con la muestra señala [52] Martínez (2006) "la elección de la muestra dependerá de lo que pensamos hacer con ella y de lo creemos que se puede hacer con ella".

En la segmentación del grupo experimental se llevó a cabo una encuesta que arrojo la siguiente caracterización.

Tabla 4. Caracterización grupo experimental

Tamaño	41 Estudiantes
Mujeres	29
Hombres	12
Estrato	1-3
Edades	Entre 12 y 15 años
Discapacidad	Ninguna

Fuente: Elaboración propia

Figura 18: Imagen de los estudiantes del grado 7-2

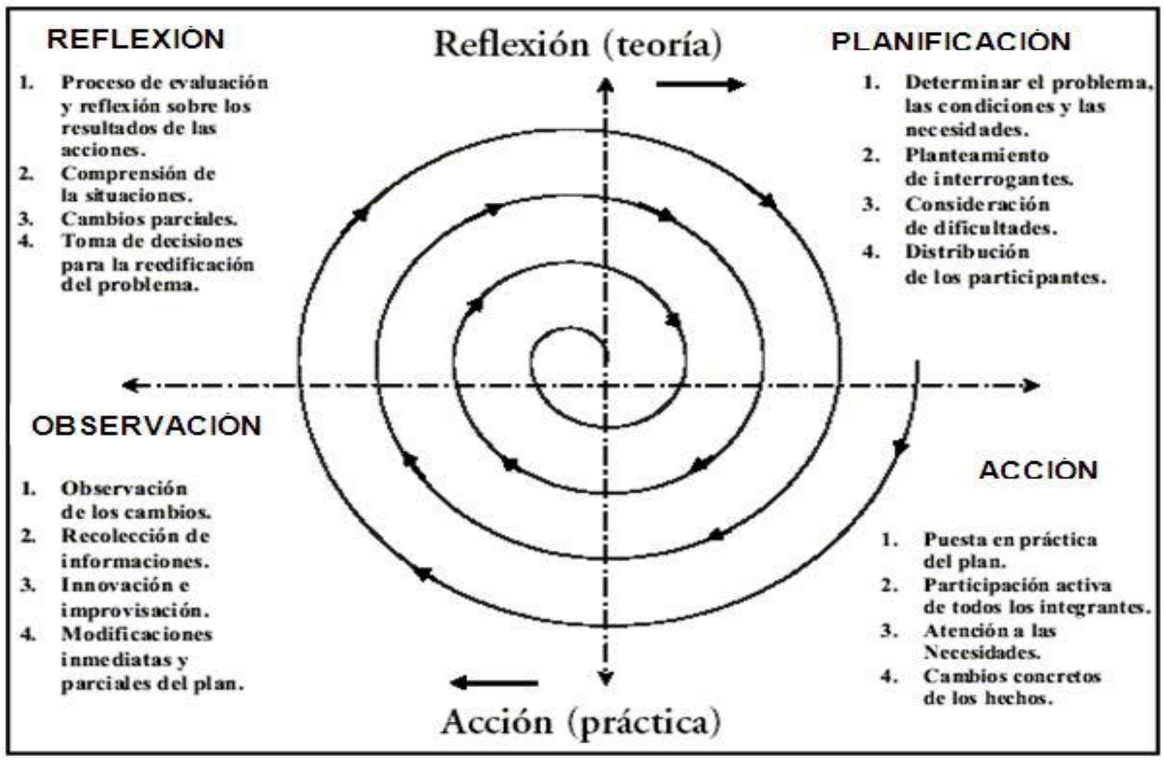
Fuente: Elaboración propia

El tipo de investigación toma elementos de la investigación-acción. "Es el indicado cuando el investigador no sólo quiere conocer una determinada realidad o un problema específico de un grupo; sino que desea también resolverlo" [53] Martínez (2008).

[54] Corey (1953) concibe la investigación-acción como "el proceso por el cual los prácticos intentan estudiar sus problemas científicamente con el fin de guiar, corregir y evaluar sistemáticamente sus decisiones y acciones".

El proceso de investigación-acción, según fue concebido por Lewin, y luego enriquecido por Kolb, Carr, Kemmis y otros, es un proceso en espiral de ciclos de investigación-acción que asume las siguientes etapas: planificación, acción, observación y reflexión.

Figura 19: Imagen espiral invetigación-acciòn



Fuente:http://www.monografias.com/trabajos82/desarrollo-programa-mejora-rendimiento/desarrollo-programa-mejora-rendimiento3.shtml (2014)

La investigación-acción se percibe como espiral en desarrollo que se amplía y profundiza a medida que se avanza en el proceso de construcción de la actividad y la reflexión investigativa. Así, se identifica en general cuatro grandes etapas:

1º Se planifica tomando de manera consciente y crítica la información que se conoce, previo diagnóstico de la situación problemática, y la formulación de los objetivos deseables de alcanzar; se programa con cierta flexibilidad y adaptabilidad.

2º Se ejecuta las acciones del plan con sentido deliberado y controlado.

3º Se asume la observación de la acción con el fin de recoger evidencias que ayuden luego a evaluarla. Debe observarse y registrarse los efectos de la acción.

4º Se pasa a la reflexión sobre la acción registrada durante el momento de la observación y desarrollada por la discusión con los participantes y otros agentes educativos. Esto conduce a generar una nueva situación cuya consecuencia es posiblemente la necesidad de planificar una nueva etapa para el proceso de mejora continua. Corresponde al proceso de reflexión crítica y de reconocimiento de las lecciones aprendidas.

Figura 20: Imagen del triángulo de Lewin para la Investigación-acción

Fuente: http://apoyoenred.wordpress.com/2012/12/09/investigacion-accion/ (2014)

El proceso de Investigación buscó sustentar la hipótesis: el diseño e implementación de objetos físicos para la enseñanza de la adición y sustracción de números enteros en estudiantes de 7 grado de la Institución Educativa Alfonso López Pumarejo de la Ciudad de Palmira permite una adecuada abstracción en la solución de problemas.

Teniendo presente los elementos de la investigación-acción se definieron tres fases, para la metodología: diagnostico, diseño-aplicación y evaluación.

Figura 21: Imágenes que relacionan las partes del diseño metodológico de la propuesta de investigación

Fuente: Elaboración propia

3.1 Fase diagnostica

En esta fase se llevó a cabo una evaluación con el objetivo de diagnosticar las dificultades en el tratamiento de situaciones a través de los siguientes indicadores.

- ❖ Escribe los símbolos >,< o = entre números enteros
- ❖ Ubica números enteros en la recta numérica y en el plano cartesiano
- ❖ Halla el valor absoluto de un número entero
- ❖ Realiza adiciones con Z
- ❖ Realiza sustracciones con Z
- ❖ Resuelve operaciones de adición y sustracción Z
- ❖ Resuelve situaciones de adición y sustracción provenientes del lenguaje verbal (tengo, bajar, a.c, grados bajo cero, etc.)

Dentro de la escala de valoración nacional [55] MEN (2009) señala: cada establecimiento educativo definirá y adoptará su escala de valoración de los desempeños de los estudiantes en su sistema de evaluación.

- Desempeño Superior
- Desempeño Alto
- Desempeño Básico
- Desempeño Bajo

La prueba presentó la solución de 10 puntos, para lo cual la tabla 5 indica la valoración con base en el número de situaciones correctas.

Tabla 5. Nivel de Valoración en relación con el número de situaciones correctas.

	Valoraciones			
	Superior	Alto	Básico	Bajo
Razón	$\frac{10}{10}$	$\frac{8 \text{ ó } 9}{10}$	$\frac{6 \text{ ó } 7}{10}$	$\frac{\ll 5}{10}$

Fuente: Elaboración propia

Dada la autonomía establecida por el MEN la institución ALP estableció la escala de valoración que se observa en: la figura 22.

Figura 22. Escala de valoración IEALP

De conformidad con el Decreto 1290 del 16 de abril de 2009 en su Art. 5, la Institución Educativa Alfonso López Pumarejo aplica la siguiente escala de valoración institucional de carácter cuantitativo equivalente con la escala nacional y unos criterios de evaluación definidos para cada uno de los desempeños y que se tendrán en cuenta en las valoraciones finales de cada una de las áreas:

De 1.0 a 2.9	**Desempeño Bajo**
De 3.0 a 3.9	**Desempeño Básico**
De 4.0 a 4.5	**Desempeño Alto**
De 4.6 a 5.0	**Desempeño Superior**

Fuente:https://docs.google.com/file/d/0B3o6kstkTSFgMGRiYjMwMDYtZGNiYi00YjgzLTg4NGEtYWM3MDVjMTUyMzY5/edit?hl=es&pli=1 (2013).

La prueba inicial se calificó atendiendo la escala anterior inicialmente se presentan los resultados de todo el grupo a través de un diagrama circular; además se realizó una segmentación por género y una tabla que presenta los porcentajes de respuestas correctas vs incorrectas de cada indicador evaluado.

3.2. Fase de diseño y aplicación

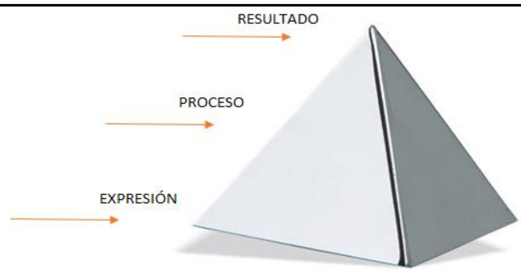
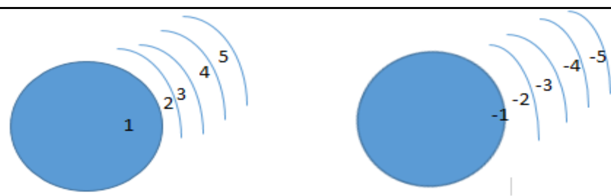
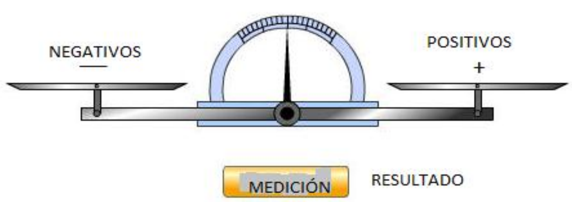
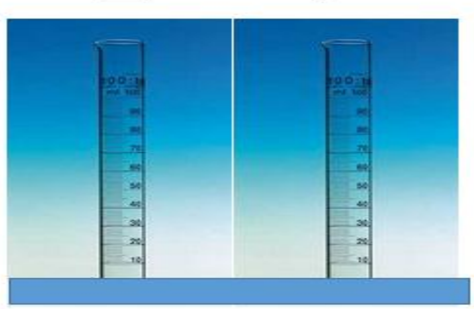
Las dificultades presentadas por los estudiantes en el manejo de las estructuras aditivas de números enteros. Permitieron el diseño y aplicación de dos objetos físicos.

El primer OFA[6] se realizó desde la asignatura diseño de objetos físicos[7]. El cual para su fase de diseño contó con el apoyo de la estudiante de diseño industrial Yessica Rivera. La tabla 6 presenta las diversas propuestas antes de concretar la idea final.

[6] Objeto Físico de Aprendizaje

[7] Este curso hace parte del programa interdisciplinar impartido por la maestría Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia-sede Palmira. El curso contó con la participación de los estudiantes de maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales y los estudiantes de pregrado de diseño industrial se llevó a cabo en el primer semestre del año 2013.

Tabla 6. Propuestas abordadas de Objetos físicos para la enseñanza de la adición y sustracción de números enteros.

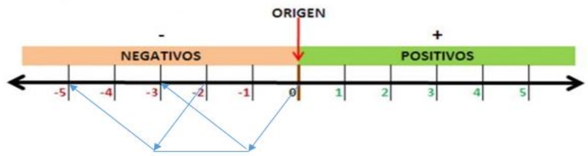
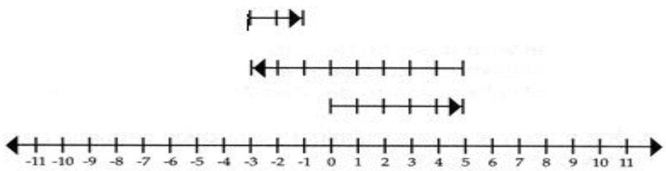
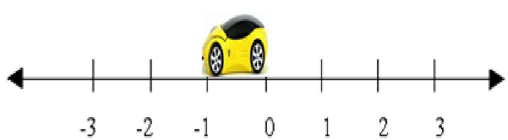
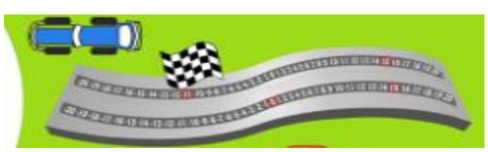
	Se analizó la propuesta implementada con anterioridad en la Institución, para la cual se utilizaban dados con enteros negativos y positivos los cuales eran lazados y se daba el resultado. Esta propuesta tiene el limitante que los estudiantes terminaban después de un tiempo memorizando los resultados.
	La propuesta un pirámide en la cual sobre sus caras una expresión -3-2+2-10+4, el proceso -15+6 y el resultado -9 en la parte superior. El limitante de la propuesta pocas expresiones a desarrollar.
	El modelo basado en adicionar o quitar fichas por peso para las operaciones, la dificultad sólo servía con pocas fichas.
	El objeto propuesto una balanza en la cual se ubicaban bloques con base en el número entero. La respuesta se daba en un recuadro de medición. Se descartó porque funcionaba como una calculadora.
— + 	El planteamiento tubos graduados: uno con enteros positivos y otro con enteros negativos, una primera opción depositar líquido con base en el entero y hacer al final la comparación de ambos tubos o utilizar bloques para poner y quitar. La respuesta se daba al comparar ambos. La dificultad por el líquido o para el caso de los bloques no podían ser muchos.

Fuente: Elaboración propia

Después de analizar las propuestas anteriores se dio origen en el planteamiento del primer OFA a través del principio de la recta. Véase en la tabla 7, para lo cual.

> *[56] Bruno (1996) en su artículo* ***“procedimiento de Resolución de problemas aditivo con Números Negativos”*** *pone de manifiesto que los estudiantes usan dos estrategias básicas para resolver problemas, la recta y las operaciones, pero no se emplean siempre de la misma forma.*
>
> *Hay mayor facilidad y seguridad para resolver los problemas utilizando la recta que con operaciones.*

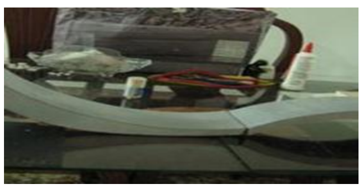
Tabla 7. Proceso inicial OFA 1

	Se inició utilizando el principio de la recta a través de paralelogramos. Ubicando cola y cabeza dependiendo de los números enteros en el ejemplo de la figura -2-3= -5. La posible dificultad al operar más de dos enteros.
	El modelo con base en vectores en el ejemplo de la imagen 5-8+2. Un primer vector de 5 unidades la cola en el cero en sentido positivo, el segundo vector de 8 unidades la cola en 5 sentido negativo y el último vector de 2 unidades sentido positivo la cola -3 y la respuesta se da en la cabeza de éste que es -1.
	La evolución en relación con incorporar un desplazador sobre la recta en el cual el planteamiento de las operaciones muy análogo al anterior sólo que éste se contaban las unidades. Se presentaba como aspecto de análisis que no quedaba registro de las operaciones a través de los recorridos.
	Para este punto del objeto, después de un proceso de debate se acordó una forma curva (enteros positivos ascenso y negativos descenso) formado por varias pistas con el fin de observa el proceso de la operación. Las pistas eran ocupadas por carros de carrera a lo cual los docentes de diseño sugirieron no plantearlo como una competencia.

Fuente: Elaboración propia

Una vez la concreción de la primera parte de la propuesta del OFA, se procede a realizar las mejoras del caso. Tales como: en lugar de autos de carrera, utilizar trenes haciendo relación con los medios de trasporte del mundo “moderno” además una semejanza del MIO[8], otro elemento una lámina imantada, para registrar las operaciones. El nombre asignado al OFA 1 “el tren de los enteros”.

Tabla 8. Modelo "el tren de los enteros" para ser validado.

	Materiales (cartón paja, contac transparente y negro plateado, colbon, lamina imantada, lija, imanes de 2cm de diámetro y aerosoles)
	Al desplegar las dos partes se observa la forma curva y la obtención en el mecanismo de unión.
 	Laminas imantadas, para los 5 carriles sobre los cuales se pudiesen ubicar trenes y estaciones
	Números y signos hechos en cartón paja y en la parte inferior lamina imantada con el fin que se pudiesen fijar las operaciones en el tablero de la lámina imantada.

Fuente: Elaboración propia

[8] MIO(Medio masivo de transporte de la Ciudad de Cali-Colombia)

Una vez se construyó la maqueta del objeto físico, se procedió a realizar un proceso de explicación del mismo en la Asignatura objetos físicos, la cual permitió realizar ajustes al objeto.

Figura 23.Imagenes del proceso de explicación del funcionamiento del objeto físico

Fuente: Elaboración propia

Después de la presentación del OFA en la Asignatura, se procedió a realizar las validaciones correspondientes a estudiantes de 7 grado de la Institución Educativa Alfonso López Pumarejo. Llevándose a cabo en: dos grupos de 4 estudiantes cada uno.

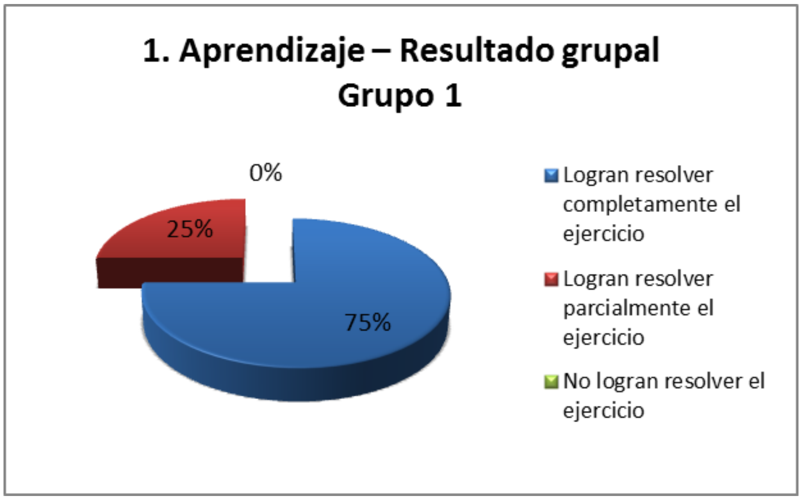
El criterio de escogencia de los grupos es: uno con estudiantes de buen desempeño académico y el otro con estudiantes de bajo rendimiento académico. La finalidad de la validación, que los grupos interactuarán con el objeto a través de situaciones (estructuras aditivas); además realizaran sugerencias de: tamaño, color, componente pedagógico, etc.

- **Validación grupo 1**

Figura 24: Imágenes del proceso de validación I.E.A.L.P**. Grupo 1**

Fuente: Elaboración Yesica Rivera y Cesar Castillo

Figura 25: Diagrama circular resultado validación grupo 1



Fuente: Elaboración Yesica Rivera y Cesar Castillo

Tabla 9: Resultado operaciones grupo de validación 1

Ejercicio	Respuestas predeterminadas	Respuestas correctas	Logran resolver completamente el ejercicio	Logran resolver parcialmente el ejercicio	No logran resolver el ejercicio
1. -10+2-3+6	-15	-5	x		
2. 5+(-4)+(-8)	-17	-7		x	
3. 8-(-3)	24	-5	x		
4. 3-(-5)-7-(8)-4	57	-11	x		

Fuente: Elaboración Yesica Rivera y Cesar Castillo

- De 4 ejercicios planteados, 3 se resolvieron correctamente, que corresponde al 75%.
- De 4 ejercicios planteados, 1 se resolvieron parcialmente, que corresponde al 25%.
- De 4 ejercicios planteados, 0 no se resolvieron, que corresponde al 0%.
- De 4 ejercicios planteados, 4 obtuvieron una respuesta predeterminada incorrecta.

Tabla 10: Resultados interacción objeto grupo 1

Usuario	Identifica las funciones de 1 o 2 elementos	Identifica las funciones de 3 o más elementos	No identifica ninguna función
1		x	
2		x	
3		x	
4		x	

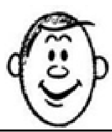
Fuente: Elaboración Yesica Rivera y Cesar Castillo

- De 4 usuarios que realizaron la prueba, 4 identifican las funciones de 3 o más elementos, que corresponde al 100%.

- De 4 usuarios que realizaron la prueba, 0 identifican las funciones de 1 o 2 elementos, que corresponde al 0%.
- De 4 usuarios que realizaron la prueba, 0 no identifican ninguna función, que corresponde al 0%.

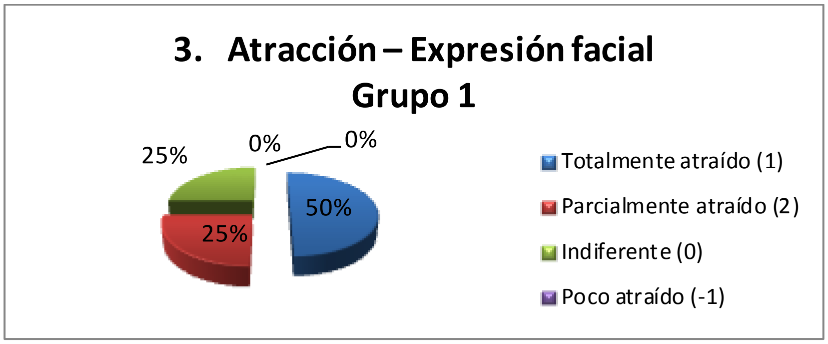
En la tabla 11 se describe la atracción a través del rostro medido con el lenguaje corporal (Quinésica). Elemento que fue tenido en cuenta en el proceso de validación del OFA 1.

Tabla 11. Descripción simbología de atracción

Problemática	Codificador	Descripción	Calificación
	5.Totalmente atraído 	Observa el objeto y muestra una sonrisa amplia.	2
	4.Parcialmente atraído 	Observa el objeto y muestra una sonrisa superior.	1
Atracción	3. Indiferente 	Observa el objeto y se muestra aburrido.	0
	2. Poco atraído 	Observa el objeto y muestra una sonrisa sencilla de alta intensidad.	-1
	1. Nada atraído 	Observa el objeto y muestra una sonrisa sencilla.	-2

Fuente: Elaboración Yessica Rivera

Figura 26: Diagrama circular expresión facial grupo 1



Fuente: Elaboración Yesica Rivera y Cesar Castillo

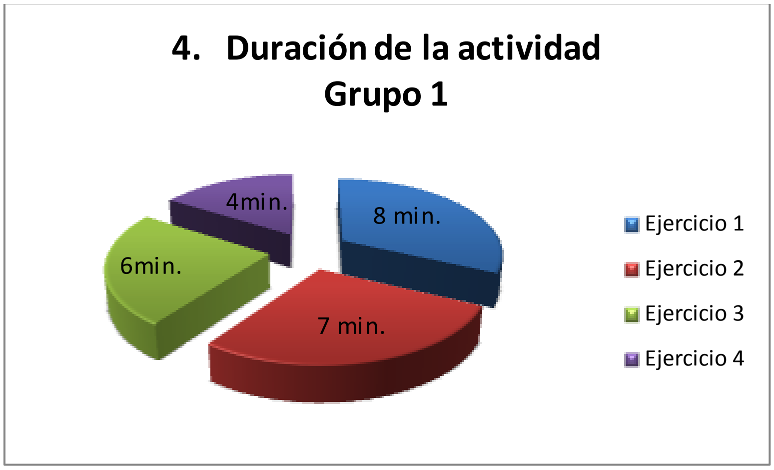
Tabla 12: Resultados de expresión facial grupo 1

Usuario					
1	x				
2	x				
3			x		
4		x			

Fuente: Elaboración Yesica Rivera y Cesar Castillo

- De 4 usuarios que realizaron la prueba, 2 se sintieron totalmente atraídos al ver el objeto, que corresponde al 50%.
- De 4 usuarios que realizaron la prueba, 1 se sintieron parcialmente atraído al ver el objeto, que corresponde al 25%.
- De 4 usuarios que realizaron la prueba, 1 se sintieron indiferente al ver el objeto, que corresponde al 25%.
- De 4 usuarios que realizaron la prueba, 0 se sintieron poco atraído al ver el objeto, que corresponde al 0%.
- De 4 usuarios que realizaron la prueba, 0 se sintieron nada atraído al ver el objeto, que corresponde al 0%.

Figura 27: Tiemplo empleado en la realización de la prueba grupo 1



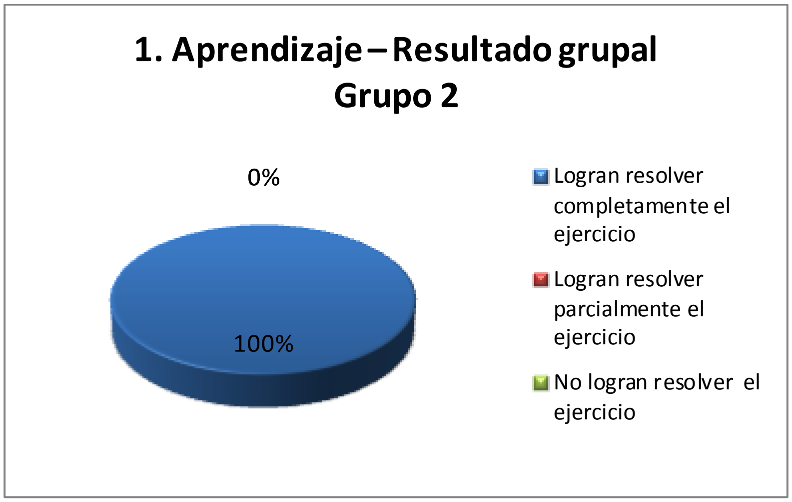
Fuente: Elaboración Yesica Rivera y Cesar Castillo

- **Validación grupo 2**

Figura 28: Imágenes del proceso de validación I.E.A.L.P. Grupo 1

Fuente: Elaboración Yesica Rivera y Cesar Castillo

Figura 29: Diagrama circular resultado validación grupo 2



Fuente: Elaboración Yesica Rivera y Cesar Castillo

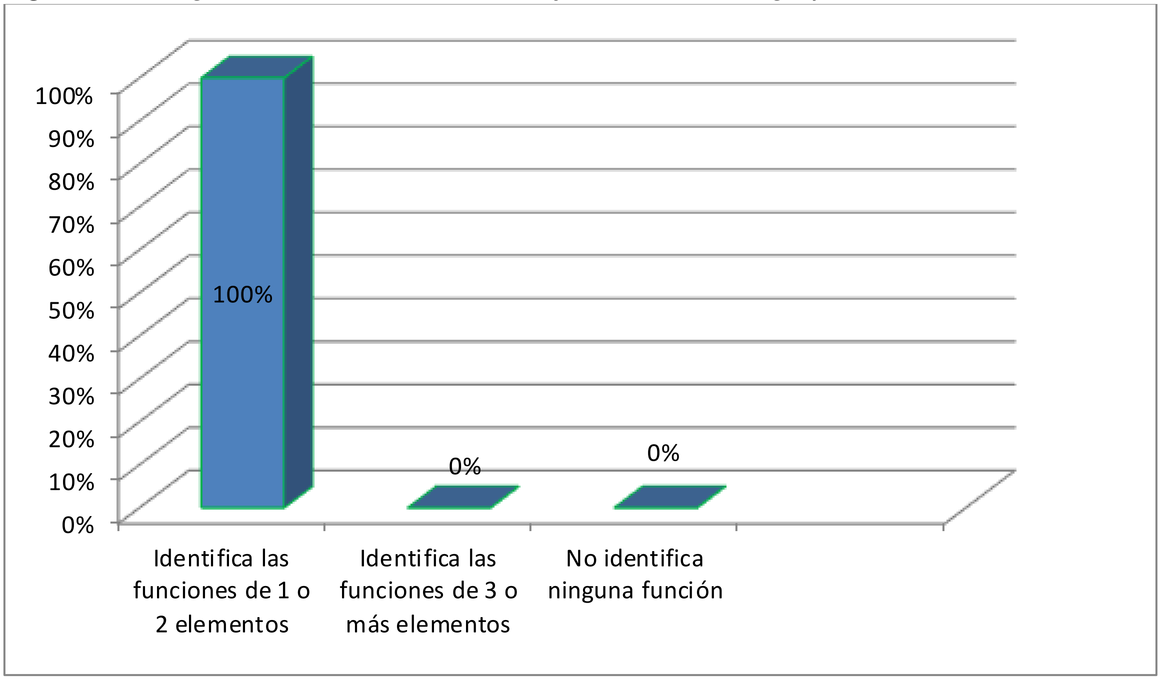
Tabla 13: Resultado operaciones grupo de validación 2

Ejercicio	Respuestas predeterminadas	Respuestas correctas	Logran resolver completamente el ejercicio	Logran resolver parcialmente el ejercicio	No logran resolver el ejercicio
1. -10+2-3+6	-15	-5	x		
2. 5+(-4)+(-8)	-7	-7	x		
3. 8-(-3)	-11	-5	x		
4. 3-(-5)-7-(8)-4	-27	-11	x		

Fuente: Elaboración Yesica Rivera y Cesar Castillo

- De 4 ejercicios planteados, 4 se resolvieron correctamente, que corresponde al 100%.
- De 4 ejercicios planteados, 0 se resolvieron parcialmente, que corresponde al 0%.
- De 4 ejercicios planteados, 0 no se resolvieron, que corresponde al 0%.
- De 4 ejercicios planteados, 3 obtuvieron una respuesta predeterminada incorrecta

Figura 30: Diagrama barras interacción objeto estudiantes grupo 2



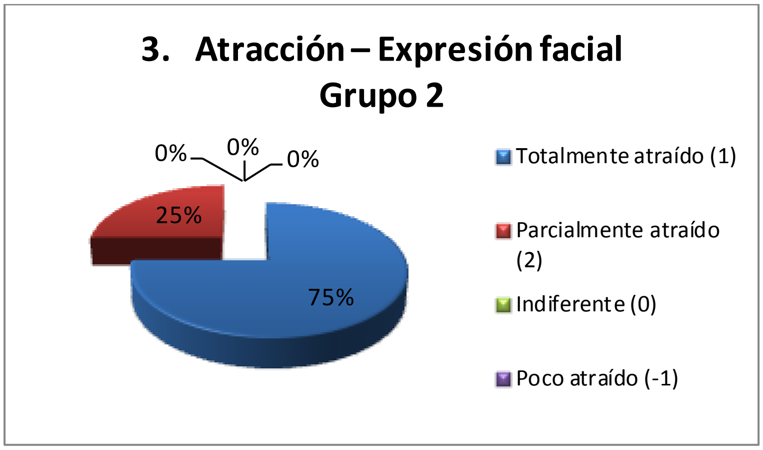
Fuente: Elaboración Yesica Rivera y Cesar Castillo

Tabla 14: Resultados interacción objeto grupo 2

Usuario	Identifica las funciones de 1 o 2 elementos	Identifica las funciones de 3 o más elementos	No identifica ninguna función
1		x	
2		x	
3		x	
4		x	

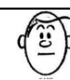
- De 4 usuarios que realizaron la prueba, 4 identifican las funciones de 3 o más elementos, que corresponde al 100%.
- De 4 usuarios que realizaron la prueba, 0 identifican las funciones de 1 o 2 elementos, que corresponde al 0%.
- De 4 usuarios que realizaron la prueba, 0 no identifican ninguna función, que corresponde al 0%.

Figura 31: Diagrama circular expresión facial grupo 2



Fuente: Elaboración Yesica Rivera y Cesar Castillo

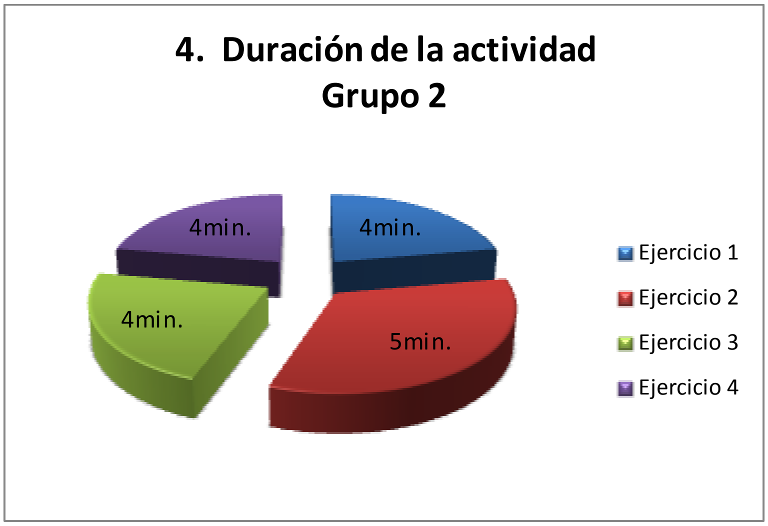
Tabla 15: Resultados de expresión facial grupo 2

Usuario					
1	x				
2		x			
3	x				
4	x				

Fuente: Elaboración Yesica Rivera y Cesar Castillo

- De 4 usuarios que realizaron la prueba, 3 se sintieron totalmente atraídos al ver el objeto, que corresponde al 75%.
- De 4 usuarios que realizaron la prueba, 1 se sintieron parcialmente atraído al ver el objeto, que corresponde al 25%.
- De 4 usuarios que realizaron la prueba, 0 se sintieron indiferente al ver el objeto, que corresponde al 0%.
- De 4 usuarios que realizaron la prueba, 0 se sintieron poco atraído al ver el objeto, que corresponde al 0%.
- De 4 usuarios que realizaron la prueba, 0 se sintieron nada atraído al ver el objeto, que corresponde al 0%.

Figura 32: Tiemplo empleado en la realización de la prueba grupo 2

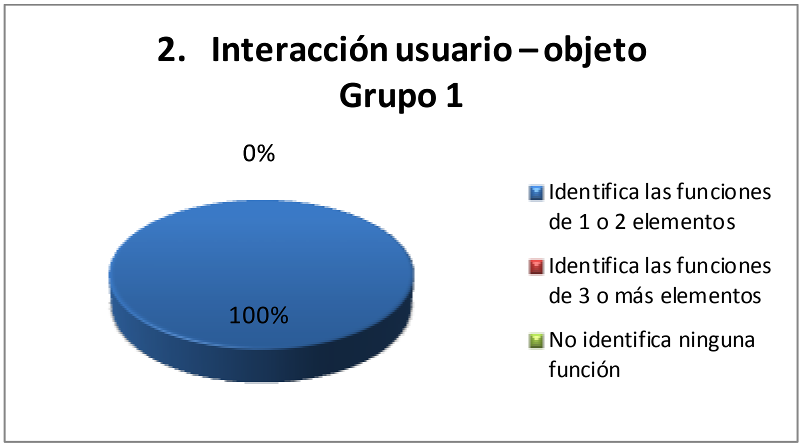


Fuente: Elaboración Yesica Rivera y Cesar Castillo

5. Observaciones

- Se confunden al poner las fichas en los carriles al inicio de la actividad.
- Existe una diferencia notable entre el tiempo que tardan en realizar las operaciones
- con el objeto y sin el objeto (en papel).
- Tienen dificultad al doblar el tablero.
- Al realizar el conteo, los demás integrantes del grupo ratifican la operación. (visualmente).
- Se les dificulta diferenciar los trenes de las estaciones porque son del mismo color.
- No diferencian entre el signo – y el signo =, en las fichas del tablero.
- Utilizan el signo = en cada fila de la operación, en el tablero

Figura 33: Diagrama circular interacción objeto estudiantes grupo 1

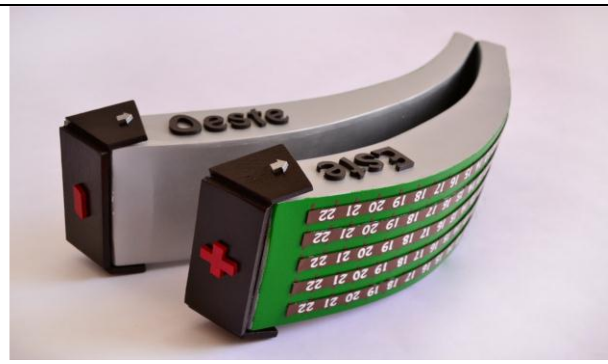
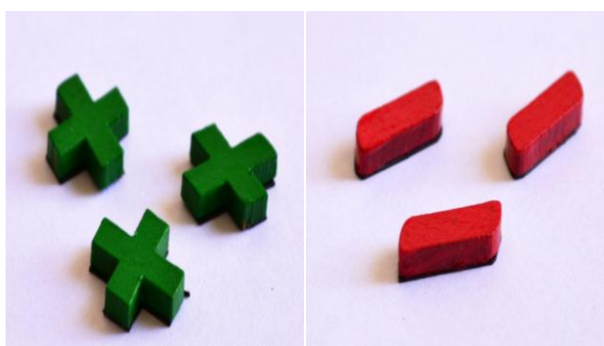


Fuente: Elaboración Yesica Rivera y Cesar Castillo

Una vez desarrollado el proceso de validación el producto final, se observa en la tabla 16.

Tabla 16.Diseño final OFA 1.

Los materiales del objeto son: madera para el cuerpo del objeto y las fichas, vinilo para los carriles y como recubrimiento del tablero, lona para la unión del objeto y de las tapas (que funciona como bisagra), lamina imantada para los carriles, el tablero y la parte inferior de las fichas, e imanes para el cierre de las tapas. Las medidas del objeto son de 80cm de largo, 11cm de ancho y 12cm de altura. Las fichas (trenes y estaciones) miden 2cm x 2cm, y la medida máxima de los signos y los números es de 2cm. El tablero mide 30cm x 30cm y la profundidad de los compartimientos para guardar las fichas es de 7cm.	
El objeto físico tiene dos compartimientos, uno en cada costado, los cuales son contenedores del tablero (lamina para realizar las operaciones) y las fichas (signo más, signo menos, signo igual, paréntesis trenes y estaciones).	

En la parte superior del objeto se encuentran cinco carriles que contienen cada uno, veintidós números positivos y veintidós números negativos, para un total de cuarenta y cuatro números. La utilización del objeto se hace desde una situación didáctica que involucra lo verbal, abstracto, manipulativo y gráfico, es decir, se privilegia lo que señala *Duval (2004)* entre más registros de representación de un objeto, más significativo es el aprendizaje.	
En la situación didáctica se le presenta a los estudiantes recorridos de un mensajero a través de diversos trenes, los movimientos negativos hacia el OE (Oeste) y positivos hacia el E (Este).	
El estudiante debe escribir los recorridos en el tablero y proceder de la siguiente manera: en un primer carril coloca una estación en el número cero (0), luego se desplaza en el tren hasta la dirección designada (primer valor absoluto), se baja del tren y pasa a otra estación ubicada en el carril contiguo paralelamente a él, se desplaza en otro tren hasta la otra dirección designada (segundo valor absoluto), y así sucesivamente, el resultado será el punto final del recorrido. Dentro de la actividad, la cual se desarrolla en grupos de máximo 4 estudiantes.	
En el momento de realizar los ejercicios, existe la dificultad de la eliminación de signos de agrupación, para este caso el estudiante dispondrá de una situación con signos de agrupación con la siguiente característica: cuando el antecesor sea un signo más (+) esta ficha es de color verde lo que indica que puede avanzar y el número que se encuentre dentro no cambia, simulando el semáforo del tren, y si el signo de agrupación lo precede el signo menos (-) ésta ficha es de color rojo, lo cual indica que debe parar y cambiar de signo el número que se encuentre dentro del paréntesis.	

Fuente: Elaboración propia

El objeto fue expuesto ante la comunidad educativa de la Universidad Nacional de Colombia, como actividad de cierre propuesta por los docentes de la asignatura diseño y desarrollo de objetos físicos, éste objeto causó buena impresión.

Figura 34: Imágenes de la exposición ante la comunidad del OFA

Fuente: Imágenes suministradas por los docentes Gonzáles y Roldan. Asignatura diseño y desarrollo de objetos físicos (2013)

El segundo OFA construido por los estudiantes participantes en la investigación se utilizó el principio de instrumentos de cálculos o sistemas de medida.

> "Los utensilios para facilitar las cuentas numéricas y el conteo han sido utilizados a través de miles de años, por ejemplo contar con los dedos estableciendo una correspondencia uno-a-uno con los dedos de la mano. El primer objeto para contar fue probablemente un «palo de conteo». Registros posteriores, a lo largo del Creciente Fértil incluyen cálculos (esferas de barro, conos, etc.) que representan cuentas de objetos, posiblemente granos. La numeración con varillas es otro ejemplo"[9].

[9] Consultado en http://es.wikipedia.org/wiki/Aritm%C3%A9tica octubre de 2014

La tabla 17 presenta algunos instrumentos o sistemas numéricos asociados al conteo.

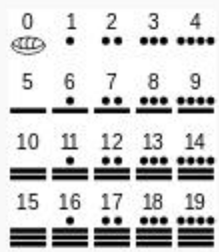
Tabla 17. Instrumentos de cálculo.

Cálculo mental

Contar con los dedos

Palos de conteo

Numeración china con varillas



Numeración maya

Tablilla babilónica

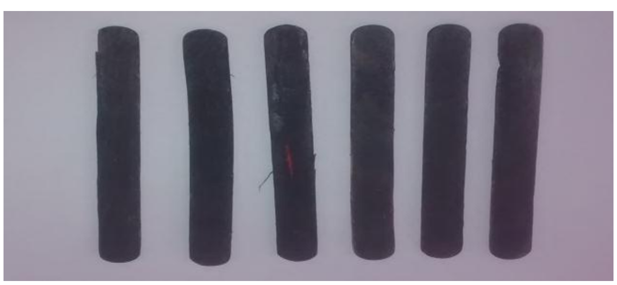
Ábaco inca

Regla de cálculo

Fuente: http://es.wikipedia.org/wiki/Aritm%C3%A9tica octubre de 2014

El OFA 2 buscando que éste fuese estructurado por parte de los educandos, el cual cumpliera las condiciones de: bajo costo, fácil adquisición y la vinculación del tacto tanto para el diseño como en las actividades de conteo. La tabla 18 registra la descripción y el proceso.

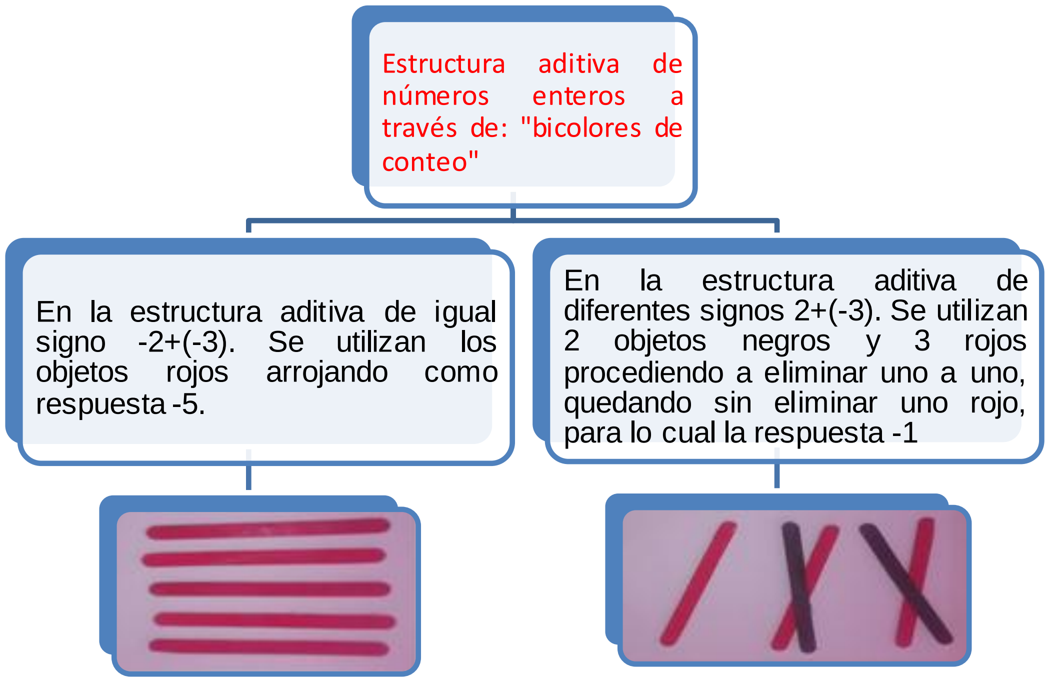
Tabla 18. Diseño OFA 2.

	Los objetos de madera cada paquete puede tener cien elementos, las dimensiones de cada uno 11cm x 0.8cm aproximadamente.
	Los estudiantes del grado 7-2 pertenecientes a la investigación utilizando temperas de color rojo y negro procedieron a pintar la mitad de objetos de color rojo y la otra mitad de color negro. El espacio utilizado para ello la tarima de la Institución.
	A los objetos negros se les asigno la condición de enteros positivos, para las estructuras aditivas.
	A los objetos rojos se les asigno la condición de enteros negativos, dentro de las estructuras aditivas.

Fuente: Elaboración propia

El nombre asignado al OFA 2 “bicolores de conteo”. El proceso didáctico asociado a la estructura aditiva de los números enteros se registra en la figura 35.

Figura 35. Estructura aditiva de números enteros a través "bicolores de conteo"

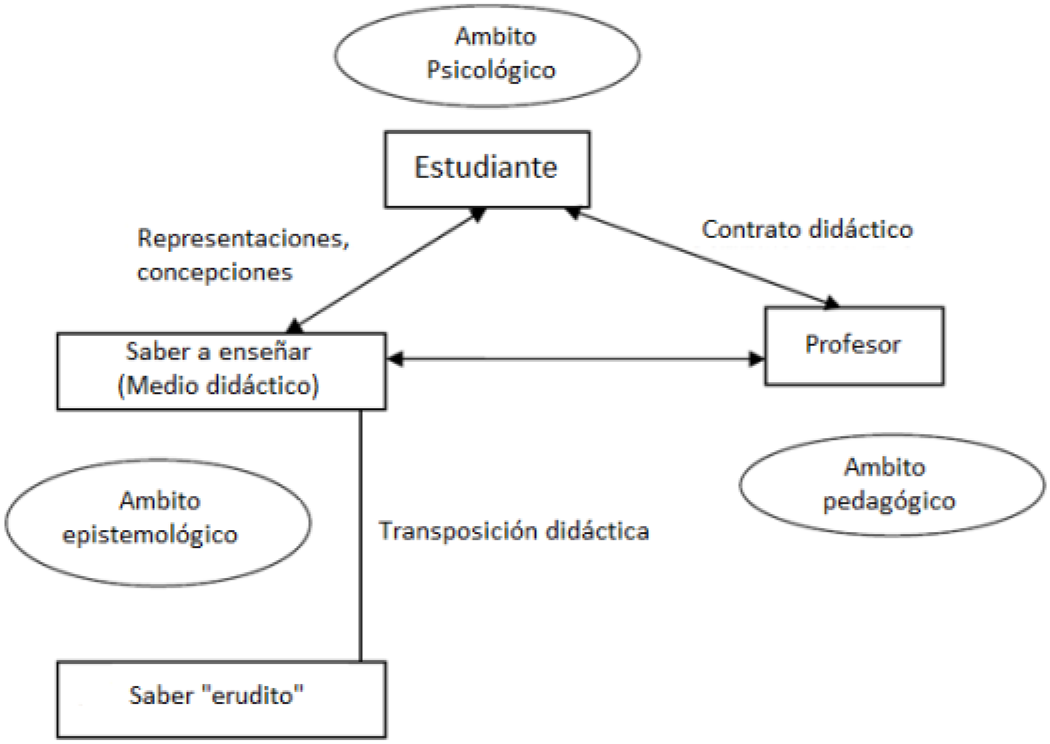


Fuente: Elaboración propia

La aplicación de los dos OFA se llevó a través de una secuencia didáctica concebida desde la ingeniería didáctica. La cual surgió a principio de los ochenta en la didáctica de las matemáticas, el término es “una forma de trabajo equiparable con el trabajo del ingeniero” [57] (Artigue, 1995).

Una situación didáctica hace referencia al conjunto de interrelaciones entre tres Sujetos: Profesor-Estudiante-Medio didáctico figura 36

Figura 36. Interrelación en una situación didáctica



Fuente: http://www.bdigital.unal.edu.co/10740/1/7811025.2013.pdf (2014)

La tabla 19 presenta los elementos de la secuencia didáctica y la descripción

Tabla 19. Estructura de la secuencia didáctica

INTRODUCCIÓN	Se hace el abordaje del tema a través de situaciones de aplicación.
PROPOSITO	El favorecimiento de actividades lúdicas en la resolución de problemas en distintos contextos mediados por los OFA.
COMPLEJIDAD CONCEPTUAL	La posibilidad de resolver situaciones que no eran posibles desde los números naturales.
METODOLOGIA	La presentación de diferentes momentos unos individuales y otros grupales con la interrelación de los OFA.
ACTIVIDADES	Se privilegió el trabajo con los OFA.

Fuente: Elaboración propia.

3.3. Fase de Evaluación

En esta fase se aplicó un cuestionario denominado evaluación final, el cual constaba de 10 preguntas abiertas, donde los educandos aportaron respuestas por escrito. Los conceptos evaluados.

- Escribe los símbolos >,< o = entre números enteros
- Ubica números enteros en la recta numérica y en el plano cartesiano
- Halla el valor absoluto de un número entero
- Realiza adiciones con Z
- Realiza sustracciones con Z
- Resuelve operaciones de adición y sustracción Z
- Resuelve situaciones de adición y sustracción provenientes del lenguaje verbal (tengo, bajar, a.c, grados bajo cero, etc.)

Además del proceso en la calificación de la prueba diagnóstica, para ésta fase se incluyó la comparación de la evaluación diagnostica vs evaluación final y el resumen final de los estudiantes del grado 7-2. Presentados a través de la página de la Institución.

4. Resultados y análisis

4.1 Diagnostico

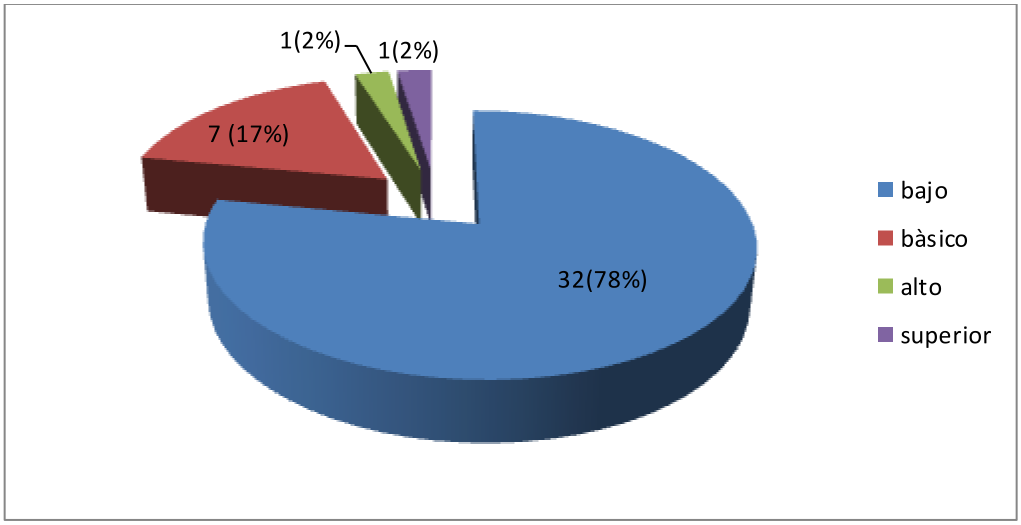
La información brindada en ésta etapa de la investigación provino de la realización de una evaluación (anexo A) aplicada a los estudiantes (Figura 37), en ella se logró organizar la información en relación a los niveles MEN y al género tal como se ilustra en las figuras 38,39 y 40; además el análisis de los indicadores en el trabajo con números enteros a través de la tabla 20.

Figura 37: Imagen de la presentación prueba diagnóstica de los estudiantes participantes en la Investigación

Fuente: Elaboración propia

En los resultados de la prueba diagnóstica se observó que de los 41 estudiantes evaluados, el 78% de estos arrojó un nivel de desempeño bajo

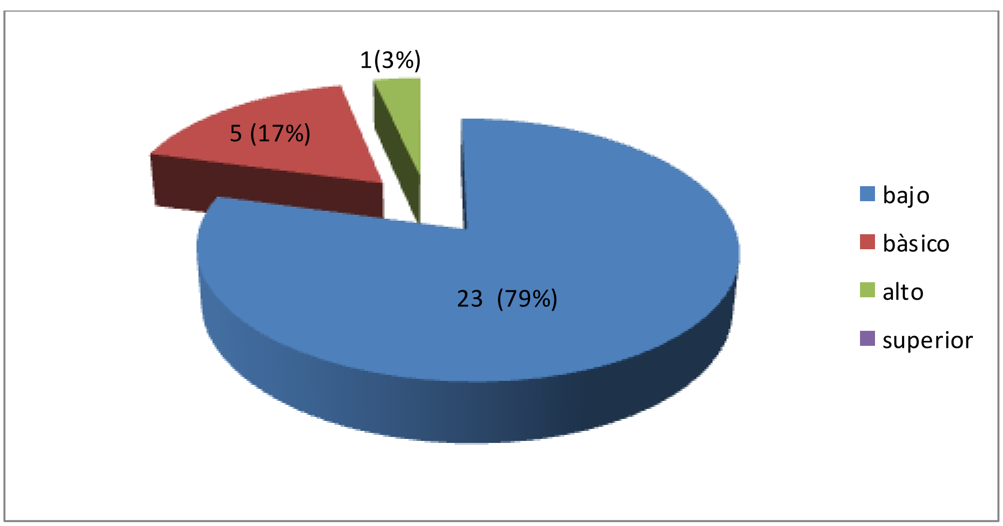
Figura 38: Diagrama circular prueba diagnóstica estudiantes del grado 7-2 I.E.A.L.P



Fuente: Elaboración propia

Cuando se organizó la información de la evaluación diagnostica a través de la caracterización del género femenino de las 29 estudiantes evaluadas. El 79% de estas obtuvo un desempeño bajo, se observa en la figura 23.

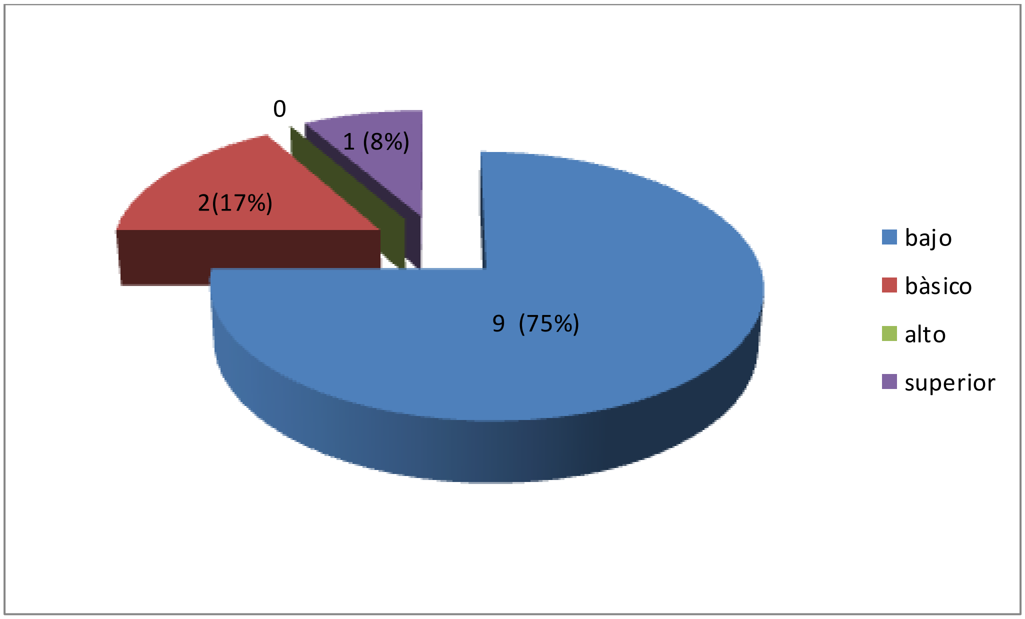
Figura 39: Diagrama circular prueba diagnóstica estudiantes del grado 7-2 I.E.A.L.P. Género Femenino



Fuente: Elaboración propia

En el género masculino de los 12 estudiantes evaluados el 75% se ubicó en el nivel de desempeño bajo y ningún estudiante en nivel alto.

Figura 40: Diagrama circular prueba diagnóstica estudiantes del grado 7-2 I.E.A.L.P. Género Masculino



Fuente: Elaboración propia

La tabla 20 presenta el análisis de siete indicadores dentro de los indicadores con mayor porcentaje de respuestas incorrectas se encontró la determinación en el valor absoluto de un número entero y la solución de operaciones de adición y sustracción. Un poco más de la mitad de los estudiantes ubicaron números enteros en la recta numérica y parejas de números en el plano cartesiano.

Tabla 20: Resultados prueba diagnóstica en porcentaje de cada indicador

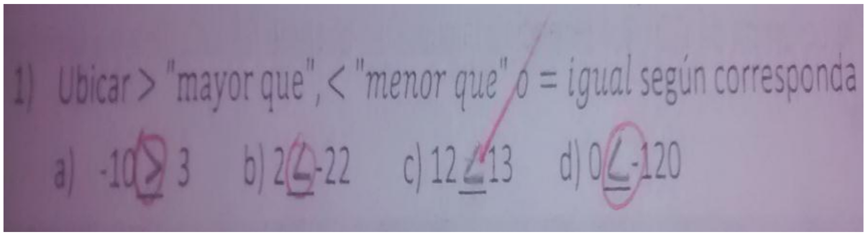
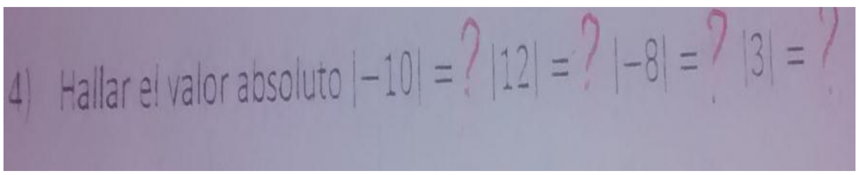
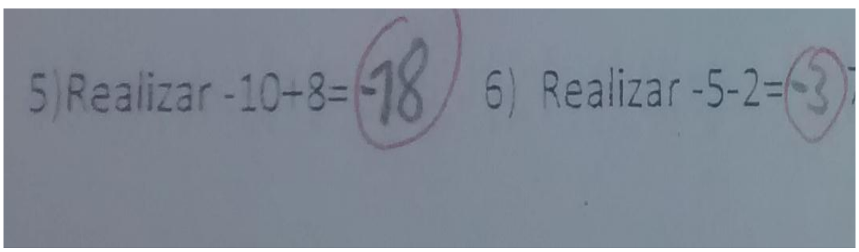
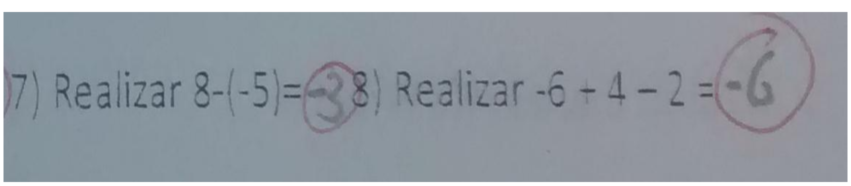
INDICADORES	PORCENTAJE DE ESTUDIANTES CON RESPUESTAS CORRECTAS	PORCENTAJE DE ESTUDIANTES CON RESPUESTAS INCORRECTAS
Escribe los símbolos >, < o = entre números enteros	**27%**	**73%**
Ubica números enteros en la recta numérica y en el plano cartesiano	**49%**	**51%**
Halla el valor absoluto de un número entero	**12%**	**88%**
Realiza adiciones con Z	**32%**	**68%**
Realiza sustracciones con Z	**22%**	**78%**
Resuelve operaciones de adición y sustracción Z	**19%**	**81%**
Resuelve situaciones de adición y sustracción provenientes del lenguaje verbal (tengo, bajar, a.c, grados bajo cero, etc.)	**23%**	**77%**

Fuente: Elaboración propia

Dentro de las dificultades presentadas por los estudiantes en la prueba diagnóstica. A continuación una descripción a través de las tablas 21,22 y 23. La tipología de las dificultades asociadas a las representaciones de: Simbólico, verbal y gráfico.

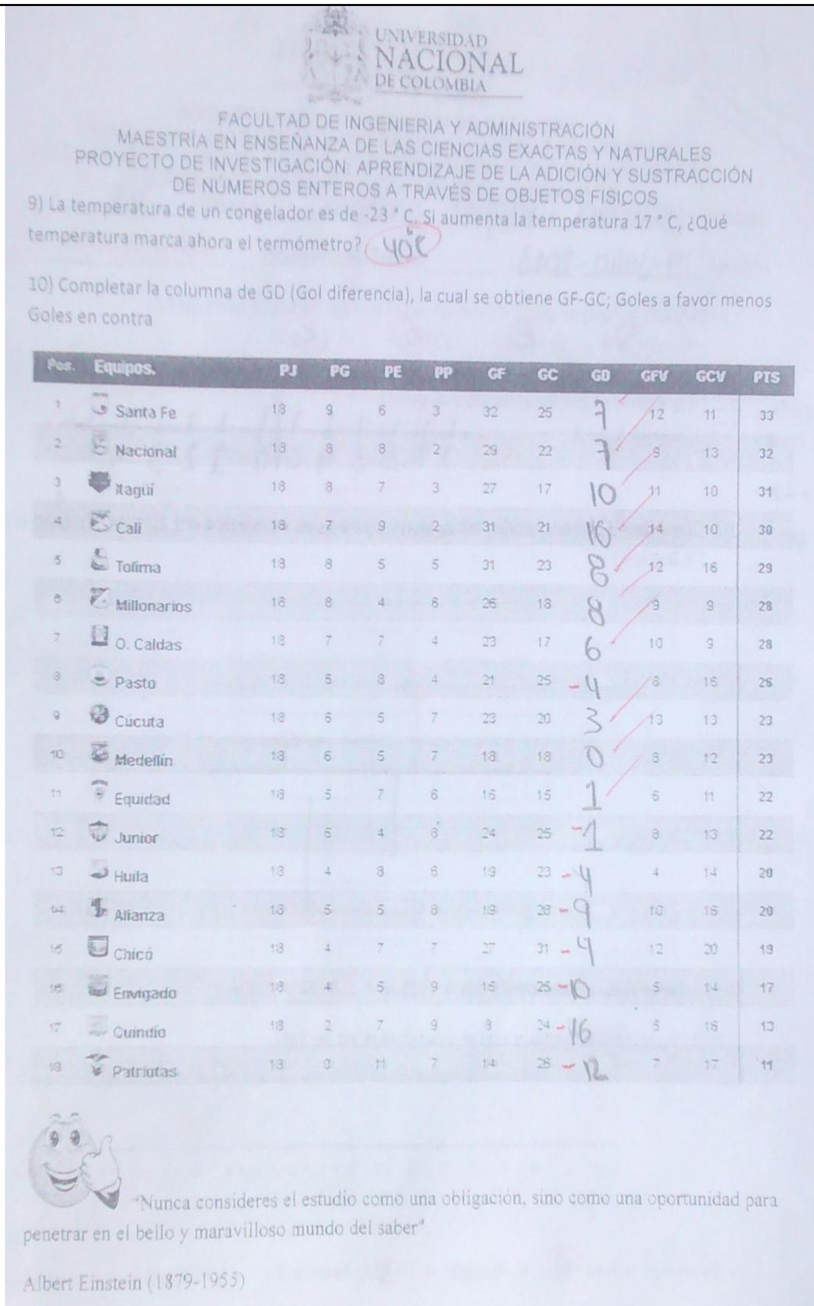
- Simbólico: más (+), menos (-), valor absoluto, signos de relación y operaciones.
- Verbal: asociado con tengo, debo, bajar, separar, quitar, equivalencia, goles a favor, grados bajo cero, etc.
- Gráfico: recta numérica y plano cartesiano.

Tabla 21. Dificultades asociadas a la representación desde lo simbólico prueba diagnóstica.

	A la hora de ubicar el símbolo > ó < entre números enteros; es decir identificar si un número entero es mayor o menor que otro no tienen presente si el número es negativo. Dicho de otra manera desconocen el signo y actúan como lo hacían con los naturales.
	A la hora de hallar los valores absolutos 28 de los estudiantes, no respondieron al ítem de encontrar el valor absoluto de un conjunto de números enteros.
	Para realizar estructuras aditivas de números enteros los estudiantes no tienen presente el signo del primer entero y en los casos que éste sea negativo afecta la operación.
	En la solución de estructuras aditivas cuando se tiene la doble negación desconocen uno de los signos.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 22. Dificultades asociadas a la representación provenientes desde lo verbal.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE INGENIERIA Y ADMINISTRACIÓN
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROYECTO DE INVESTIGACIÓN: APRENDIZAJE DE LA ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS ENTEROS A TRAVÉS DE OBJETOS FISICOS

9) La temperatura de un congelador es de -23 ° C. Si aumenta la temperatura 17 ° C, ¿Qué temperatura marca ahora el termómetro? 40C

10) Completar la columna de GD (Gol diferencia), la cual se obtiene GF-GC; Goles a favor menos Goles en contra

Pos.	Equipos.	PJ	PG	PE	PP	GF	GC	GD	GFV	GCV	PTS
1	Santa Fe	18	9	6	3	32	25	7	12	11	33
2	Nacional	18	8	8	2	29	22	7	9	13	32
3	Itagüí	18	8	7	3	27	17	10	11	10	31
4	Cali	18	7	9	2	31	21	16	14	10	30
5	Tolima	18	8	5	5	31	23	8	12	16	29
6	Millonarios	18	8	4	6	26	18	8	9	9	28
7	O. Caldas	18	7	7	4	23	17	6	10	9	28
8	Pasto	18	6	8	4	21	25	-4	8	16	26
9	Cucuta	18	6	5	7	23	20	3	13	13	23
10	Medellín	18	6	5	7	18	18	0	8	12	23
11	Equidad	18	5	7	6	16	15	1	6	11	22
12	Junior	18	6	4	8	24	25	-1	8	13	22
13	Huila	18	4	8	6	19	23	-4	4	14	20
14	Alianza	18	5	5	8	19	28	-9	10	16	20
15	Chicó	18	4	7	7	27	31	-4	12	20	19
16	Envigado	18	4	5	9	15	25	-10	5	14	17
17	Quindío	18	2	7	9	8	24	-16	5	16	13
18	Patriotas	18	0	11	7	14	26	-12	7	17	11

"Nunca consideres el estudio como una obligación, sino como una oportunidad para penetrar en el bello y maravilloso mundo del saber"

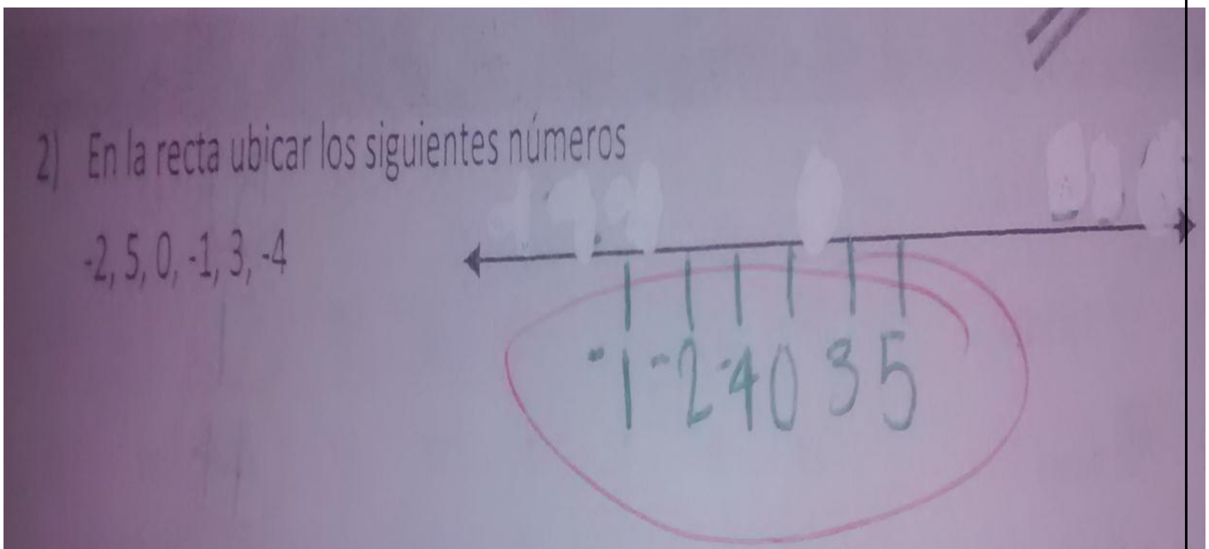
Albert Einstein (1879-1955)

En el punto 9 de la prueba los estudiantes no tienen en cuenta el signo (-) de la temperatura inicial en la operación -23+17 la respuesta que dieron 40.

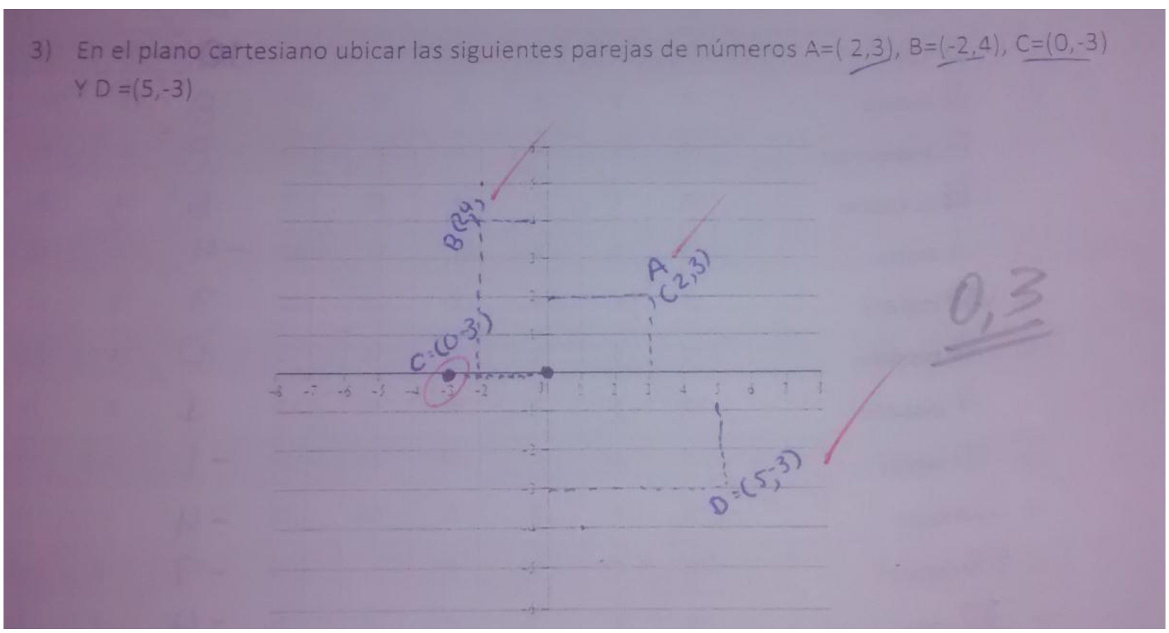
El punto 10 consistía en completar la columna de gol diferencia (GD), la cual se obtenía de operar goles a favor (GF) menos goles en contra (GC). Las mayores dificultades se registraron cuando los goles a favor eran menores que los goles en contra.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 23. Dificultades asociadas a la representación desde lo grafico prueba diagnóstica.



Al ordenar números enteros los estudiantes extrapolan el orden de los números naturales a los enteros negativos.



En la ubicación de pares ordenados de números enteros en el plano cartesiano, las mayores dificultades estuvieron asociadas cuando uno de los números de la pareja ordenada es cero.

Fuente: Elaboración propia

4.2 Aplicación

La aplicación de los objetos se llevó a cabo a través de la secuencia ver anexo B

- **Ambiente de aprendizaje**

Figura 41: Imagen locación del proyecto de Investigación.

Fuente: Elaboración propia

En la dimensión física se contó con un salón de clases el cual tiene un área de $48{,}72m^2$, iluminación artificial y natural, tablero de formica borrable, sillas unipersonales para los educandos en madera. El docente dispone de una silla y mesa rimax; además el acompañamiento de los dos objetos físicos: el tren de los enteros y los palos de colores.

Para la dimensión funcional se llevaron a cabo cinco momentos un primer momento la explicación de algunos conceptos por parte del maestro, el segundo momento la realización de la situación 1 por parte de los educandos en forma individual en el piso y con la interacción del objeto físico “el tren de los enteros”. El tercer momento la realización de la situación 2 a través de la realización de la secuencia didáctica denominada “acerquémonos al concepto de número entero” se organizaron los estudiantes: 9 grupos de 4 y 1 de 5 estudiantes.

En el cuarto momento se aplicó la situación 3 la realización de una secuencia orientada de forma grupal con el objeto físico “el tren de los enteros” y el quinto momento la utilización de los palos de colores a través de una secuencia que se desarrolló en grupo.

La **dimensión temporal** dentro de la asignación académica se disponía de bloques de dos horas en la mañana los días martes y viernes. En la siguiente tabla el tiempo para cada momento. Con base en los resultados, para aplicaciones futuras se debe ampliar el tiempo de práctica de los estudiantes con los OFA los cuales sirvieron de mediadores en el proceso.

Tabla 24: Relación momento vs tiempo

Momento	Tiempo
Introducción por el docente y conceptos previos	4 horas
Situación 1: Valor absoluto y orden en los números enteros	2 horas
Situación 2:Acerquemonos al concepto de numero entero	4 horas
Situación 3:Estructura aditiva de enteros, desde “el tren de los enteros”	4 horas
Situación 4: Estructura aditiva de enteros, desde “los palos de colores”	2 horas

Fuente: Elaboración propia

La **dimensión relacional**

Tabla 25: Dimensión relacional

Momento	Agrupamiento	Control y Participación
Introducción por el docente y conceptos previos	Organización de forma individual y en columnas los estudiantes	El mayor tiempo instrucción por parte del educador y aclaración de dudas en el momento que el estudiante lo requirió
Situación 1: Valor absoluto y orden en los números enteros	Trabajo Individual a través del educando	Cada estudiante afrontó la actividad con el acompañamiento del objeto físico en el piso
Situación 2:Acerquemonos al	Actividad 1 la lectura individual y	En la actividad 1 los estudiantes de

concepto de numero entero	luego el trabajo en grupos de 4 Actividad 2 se cambiaron los grupos y se trabajó en parejas Actividad 3 Individual	forma individual realizaron una lectura de datos curiosos de los primeros inventos, luego formaron grupos de 4 estudiantes donde tenían que llenar unos espacios y recortar unas fechas y organizarlas. Para la actividad 2 se disolvieron los grupos y trabajaron en parejas. En la actividad 3 de forma individual los estudiantes completaron unas secuencias de números enteros y por último se discutieron los resultados con el educador
Situación 3:Estructura aditiva de enteros, desde “el tren de los enteros”	Actividad 1 y 2 grupos de 4 estudiantes	En la actividad 1 solución de problemas con el acompañamiento del objeto físico en grupo. En la actividad 2 Solución de otra serie de problemas y con una posterior discusión con otros compañeros y el docente
Situación 4: Estructura aditiva de enteros, desde “los palos de colores”	Grupos de 4 estudiantes	De formas grupales y ayudados de los palos de colores completaron una tabla de estructuras aditivas, luego se discutió los resultados con los compañeros y el docente. Finalmente cada grupo propuso una tabla para ser llenada por otro grupo

Fuente: Elaboración propia

La actividad de la situación 1 que se observa en la figura 42 giró entorno a la determinación del valor absoluto de un número entero, el orden de los números y la solución de un problema. El objeto físico les ayudo a la comprensión de los conceptos .El contenido de ésta, se observa en la secuencia didáctica (anexo B)

Figura 42: Imágenes de la Situación **1**

Fuente: Elaboración propia

En la situación 2. Fue importante el trabajo colaborativo en él, relacionaron hechos históricos con las fechas y diseñaron una línea del tiempo de los mismos.

Figura 43: Imágenes de la Situación 2

Fuente: Elaboración propia

Desde un trabajo colaborativo se resolvieron situaciones de adición y sustracción, la cual les permitió una mejor comprensión de estas situaciones a través del objeto físico el “tren de los enteros” con una posterior socialización por parte del docente

Figura 44: Imagen de la Situación 3

Fuente: Elaboración propia

Desarrollaron situaciones de adición y sustracción en las cuales el contar con “bicolores de conteo” les facilito la tarea.

Figura 45: Imágenes Situación 4

Fuente: Elaboración propia

4.3 Fase de evaluación

La etapa de evaluación se realizó inicialmente teniendo en cuenta los resultados de la prueba final (anexo C) está al igual que la evaluación diagnostica se calificó atendiendo a los niveles de desempeño del MEN, organizando la información de forma general y luego por la caracterización de genero figuras 47,48 y 50. Así como el análisis de los seis indicadores establecidos, la comparación de estos a través de ambas pruebas y algunas medidas descriptivas tales como: media, desviación estándar y coeficiente de variación, tablas 26 y 27.

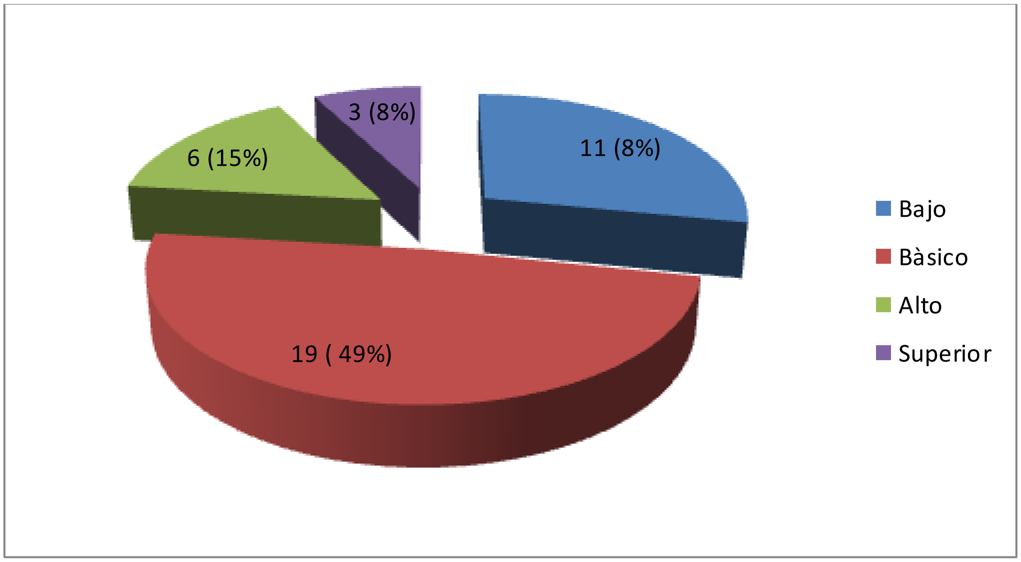
Figura 46: Imágenes de la presentación de la evaluación final

.

Fuente: Elaboración propia

La evaluación final fue presentada por 39 estudiantes dos menos que la evaluación inicial o diagnostica por motivos de deserción.En esta se logró observar que el 49% de los estudiantes se ubico en el nivel medio a diferencia de la prueba inicial donde en un alto porcentaje se encontraban en nivel bajo. Para la realización de la evaluación final los estudiantes no disponian de los OFA estos sólo fueron medios de práctica.

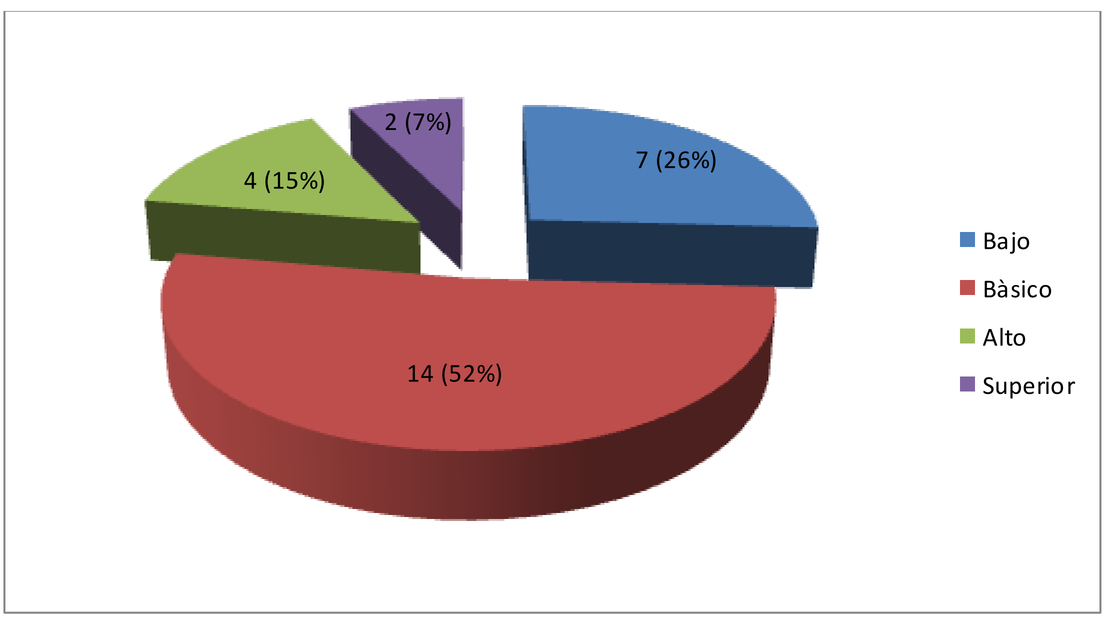
Figura 47: Diagrama circular prueba final estudiantes del grado 7-2 I.E.A.L.P



Fuente: Elaboración propia

La figura 48 presenta la información a través de la caracterización del género femenino de la prueba presentada por 27 estudiantes concentrándose el 52% de las estudiantes en el nivel básico

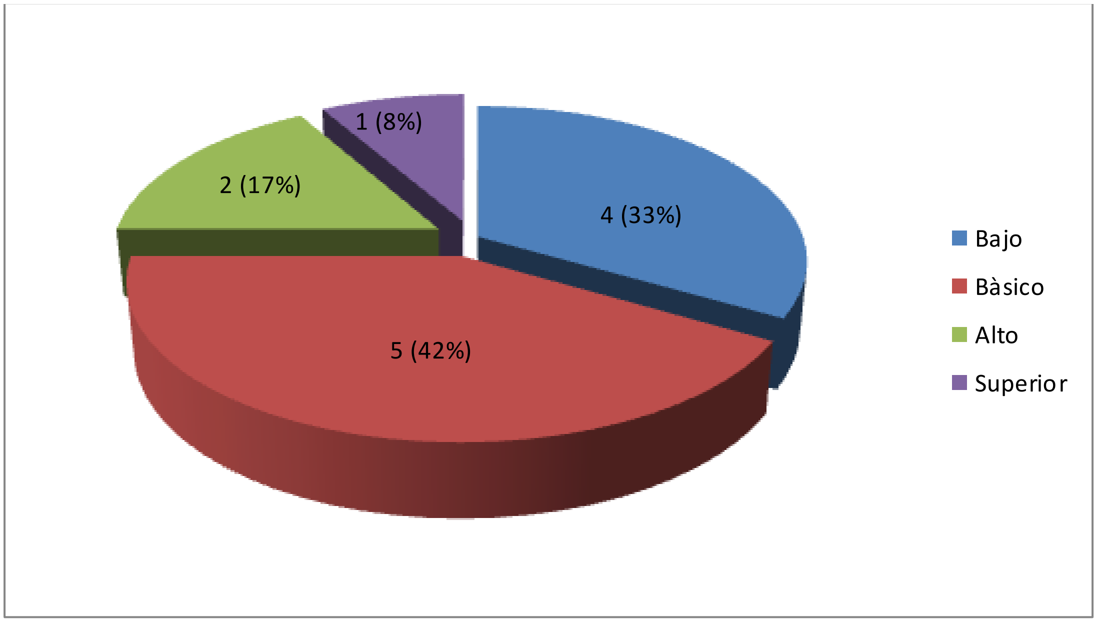
Figura 48: Diagrama circular prueba final estudiantes del grado 7-2 I.E.A.L.P. Género Femenino



Fuente: Elaboración propia

Los resultados del género masculino en la prueba final reflejan que el 42% de estos se encuentran en el nivel básico

Figura 49: Diagrama circular prueba final estudiantes del grado 7-2 I.E.A.L.P. Género Masculino



Fuente: Elaboración propia

La tabla 26 presenta los resultados de los siete indicadores analizados a partir de los porcentajes de estudiantes en la obtención de respuestas correctas vs respuestas incorrectas en esta seis de los siete indicadores registró un mayor porcentaje en las respuestas correctas. Hubo un concepto con grandes mejoras el cual fue la determinación del valor absoluto de un número entero. Dentro de la prueba, las estructuras aditivas de números enteros fueron los indicadores de mayor dificultad se puede atribuir a dos elementos: obstáculos epistemológicos y a los tiempos de práctica con los objetos.

Tabla 26: Resultados prueba final en porcentaje de cada indicador

INDICADORES	PORCENTAJE DE ESTUDIANTES CON RESPUESTAS CORRECTAS	PORCENTAJE DE ESTUDIANTES CON RESPUESTAS INCORRECTAS
Escribe los símbolos >,≤ o = entre números enteros	68%	32%
Ubica números enteros en la recta numérica y en el plano cartesiano	62%	38%
Halla el valor absoluto de un número entero	82%	18%
Realiza adiciones con Z	66%	34%
Realiza sustracciones con Z	51%	49%
Resuelve operaciones de adición y sustracción Z	48%	52%
Resuelve situaciones de adición y sustracción provenientes del lenguaje verbal (tengo, bajar, a.c, grados bajo cero, etc..)	54%	46%

Fuente: Elaboración propia

Comparando los resultados de la prueba diagnóstica y la final. Hubo una reducción del nivel bajo se pasó del 78% al 28%, en el nivel básico del 18% al 49%, para el nivel alto del 2% al 15% y el superior del 2% al 8%.
Con base en los indicadores.

- Escribe los símbolos >, < = entre números enteros se pasó 27% a 68% de respuestas correctas y 73% a 32% de respuestas incorrectas.
- Ubica números enteros en la recta numérica y en el plano cartesiano se pasó
- de un 49% a 62% de respuestas correctas y 51% a 38% de respuestas incorrectas
- Halla el valor absoluto de un número entero del 12% al 82% de respuestas correctas y 88% al 18% de respuestas incorrectas
- Realiza adiciones con Z del 32% al 66% de respuestas correctas y 68% al 34% repuesta incorrecta.
- Realiza sustracciones con Z del 22% al 51% respuestas correctas y 78% al 49% respuestas incorrectas.
- Resuelve operaciones de adición y sustracción del 23% al 48% respuestas correctas y 77% al 52% repuesta incorrecta.
- Resuelve situaciones de adición y sustracción provenientes del lenguaje verbal (tengo, bajar, a.c, grados bajo cero, etc.) del 23% al 54% de respuestas correctas y 77% al 46% de respuestas incorrectas.

Observando la tabla 27 que aglutina varias medidas descriptivas en relación con la evaluación inicial y la final. Las evaluaciones se calificaron con una escala de 1 a 5 hubo una caracterización por género. Comparando los resultados, en todos los casos de la evaluación final se presentaron mejoras; además los resultados de la segunda prueba registraron menos variabilidad.

Con miras a superar los obstáculos epistemológicos en la compresión de los números enteros y para el caso particular de las estructuras aditivas, se debe propender por realizar más objetos físicos con el fin que el tiempo de practica de los educandos sea mayor ya que solo se contó con un sólo (tren de enteros). El OFA 2 por ser de bajo costo si contó con múltiples ejemplares.

Tabla 27: Medidas descriptivas prueba inicial vs prueba final

Medidas descriptivas	Prueba inicial	Prueba final	Prueba inicial (femenino)	Prueba final (femenino)	Prueba inicial (masculino)	Prueba final (masculino)
Media	2,175	3,064	2,127	3,066	2,257	3,058
Desviación estándar	0,876	0,899	0,780	1,053	1,114	1,022
Coeficiente de variación	40,27%	29,34%	36,67%	34,34%	49,35%	33,42%

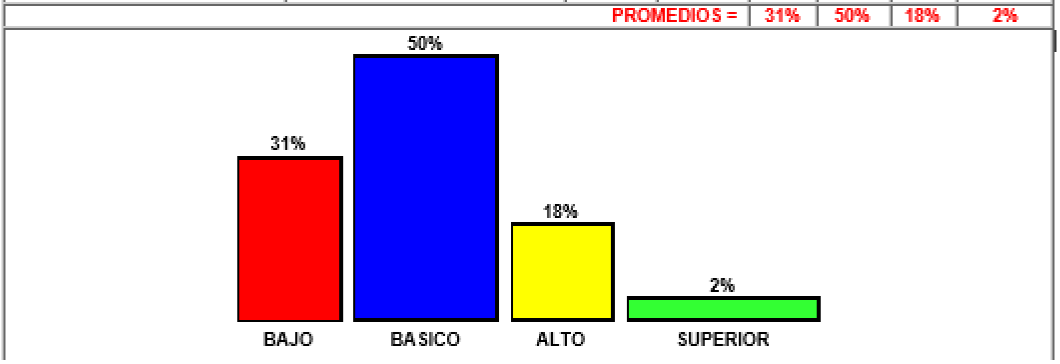
Fuente: Elaboración propia

La figura 50. Representa el resultado final (promedio de los periodos) del grupo 7-2. Cabe señalar que esta se encuentra “afectada” por los bajos desempeños de los estudiantes en el primer periodo, no obstante se observan mejoras en la asignatura de aritmética inmersa en el área de matemáticas. La investigación desarrollada no se hizo con grupo control se llevó a cabo sólo con el grado 7-2 estudiantes que no tienen los mejores desempeños académicos en termino general.

Figura 50. Resultado final de las asignaturas para el grado 7-2 IEALP

INST. EDU. ALFONSO LOPEZ PUMAREJO
GRADO: 7 - 2
AÑO LECTIVO: 2013
PERIODO: FINAL

CARGA ACADÉMICA				BAJO	BASICO	ALTO	SUPERIOR
AREA	ASIGNATURA	GRADO	GRUPO				
CIENCIAS NATURALES - BIOLOGIA	BIOLOGIA	7	2	42%	56%	2%	0%
CIENCIAS NATURALES - EDU. AMBIENTAL	EDUCACION AMBIENTAL	7	2	19%	33%	49%	0%
CIENCIAS NATURALES - FISICA	FISICA	7	2	49%	47%	5%	0%
CIENCIAS NATURALES - QUIMICA	QUIMICA	7	2	35%	53%	12%	0%
CIENCIAS SOCIALES - CONSTITUCION	CONSTITUCION POLITICA - DEMOCRACIA	7	2	21%	44%	35%	0%
CIENCIAS SOCIALES - GEOGRAFIA	GEOGRAFIA	7	2	23%	63%	14%	0%
CIENCIAS SOCIALES - HISTORIA	HISTORIA	7	2	26%	53%	21%	0%
EDUCACION ARTISTICA	ARTISTICA	7	2	26%	70%	5%	0%
EDUCACION ETICA Y VALORES	ETICA Y VALORES	7	2	30%	26%	28%	16%
EDUCACION FISICA	EDUCACION FISICA	7	2	28%	63%	9%	0%
EDUCACION RELIGIOSA	EDUCACION RELIGIOSA	7	2	44%	21%	30%	5%
HUMANIDADES IDIOMA EXTRANJERO	INGLES	7	2	37%	56%	5%	2%
HUMANIDADES LENGUA CASTELLANA	LENGUA CASTELLANA	7	2	33%	63%	5%	0%
MATEMATICAS - ARITMETICA	ARITMETICA	7	2	21%	58%	16%	5%
MATEMATICAS - ESTADISTICA	ESTADISTICA	7	2	19%	37%	30%	9%
MATEMATICAS - GEOMETRIA	GEOMETRIA	7	2	42%	51%	7%	0%
TECNOLOGIA E INFORMATICA	TECNOLOGIA E INFORMATICA	7	2	21%	44%	35%	0%
			PROMEDIOS =	31%	50%	18%	2%



Fuente: Pagina de la IEALP

5. Discusión general

La educación Colombiana se encuentra cuestionada debido a los resultados de las pruebas externas. En el campo de las matemáticas se registran resultados por debajo del promedio, es por ello la necesidad de plantear alternativas de enseñanza. En el área de matemáticas por el alto grado de abstracción que posee.

Para el estudio realizado se plantearon tres fases: una primera fase que consistió en la prueba diagnóstica, en la segunda fase diseño y aplicación de los objetos físicos y para la última. La evaluación de los efectos en la implementación de los objetos físicos a través de la comparación de la evaluación inicial vs final.

Dentro de las dificultades que presentan los educandos en la realización de estructuras aditivas de números enteros. [58] Gonzáles (1999.p.6) sostiene "El principal inconveniente para la compresión, aceptación y legitimación de los números enteros, ha sido históricamente (y lo es, aun hoy día, didácticamente), la creencia de que el número representa una cantidad en sentido "absoluto" ". Lo que no permite en muchas ocasiones el tratamiento adecuado de estructuras aditivas.

En la primera fase se evaluaron 41 estudiantes donde se registraron los siguientes resultados: 32 (78%) en nivel bajo, 7(17%) básico, 1(2%) alto y 1(2%) en nivel superior el promedio de la prueba fue de 2,175. En un rango de 1 a 5. Las principales dificultades con base en los indicadores evaluados fueron: resolver operaciones de estructuras aditivas de números enteros, determinación del valor absoluto de números enteros y la comparación de números enteros.

Con base en los bajos desempeños se desarrolló un proyecto a través de la mediación de los artefactos en el proceso de enseñanza y aprendizaje para lo cual [59] Alsina y otros (1996) señalan. "*En el trabajo de las matemáticas en la etapa 12-16 hay que* *presentar al alumnado el mundo de la matemática a través de la vivencia activa de descubrimiento y reflexiones, realizando actividades y viviendo el aprendizaje como una experiencia progresiva, divertida y formativa”*

Desde el MEN se recomienda aprovechar la variedad y eficacia de los recursos didácticos.

Así pues se diseñaron dos objetos físicos uno denominado “el tren de los enteros” el cual simulaba el recorrido de un pasajero a través de diversas estaciones, para lo cual se hacían diversas operaciones. En este artefacto se contó con el apoyo del curso diseño de objetos físicos impartido por la Universidad Nacional de Colombia sede Palmira, el proceso se realizó con todos los requerimientos de diseño siendo un trabajo enriquecedor.

El segundo OFA “bicolores de conteo” fue construido por los estudiantes participantes en la investigación se utilizó el principio de instrumentos de cálculo, implementado desde la antigüedad. El OFA 2 cumple las condiciones de: bajo costo, fácil adquisición y la vinculación primordial del sentido del tacto en la parte de diseño y práctica. La estructura didáctica en éste se cuenta con objetos de color rojo que representan (enteros negativos) y objetos de color negro (enteros positivos), para el caso de la estructura aditiva con enteros de igual signo se suman los objetos de un mismo color y con enteros de diferente signo se procede a eliminar uno a uno los elementos de diferente color siendo la respuesta la cantidad sin eliminar si es el caso con su respectivo signo.

La puesta en marcha de los artefactos se hizo desde la implementación de una secuencia didáctica, la cual permitió la planificación del trabajo. Para organizar las situaciones de enseñanza y favorecer los procesos de aprendizaje.

Después del proceso de diseño-aplicación vino la fase de evaluación final la cual arrojó los siguientes resultados: 11(8%) nivel bajo, 19(49%) básico, 6(15%) alto y 3(8%) superior. La escala al igual que la prueba inicial se calificó de 1 a 5. En la cual participaron 39 estudiantes dos menos que la prueba inicial por problemas de deserción con un promedio de 3,066.

Las actividades desarrolladas a través de los OFA permitieron la movilidad entre varios registros de representación tales como: Simbólico, verbal, manipulativo y gráfico

.

La investigación desarrollada brinda la posibilidad de estudiar en el tiempo el alcance de los objetos físicos. Utilizándolos en diversos grados de la institución y analizar los desempeños de los educandos en relación con pruebas internas y externas donde se aplique el componente numérico de estructura aditivas.

6. Conclusiones y recomendaciones

6.1 Conclusiones

- La identificación de las dificultades presentadas en las estructuras aditivas de los números enteros por parte de los estudiantes de 7 grado de la Institución Educativa Alfonso López Pumarejo de la ciudad de Palmira. Permitió servir como el punto de partida para el diseño de los artefactos u objetos físicos, los cuales cumplieron la función de ser mediadores en el proceso. Las dificultades requieren de la transformación de los estudiantes desde un estado inicial diseñando el proceso, para llevarlos al estado final.

- La enseñanza de las estructuras aditivas de los números enteros a través de objetos físicos. Lograron mediar en la aprehensión de conocimientos en la relación enseñanza y aprendizaje, además el privilegio de aprendizajes significativos.

- Mediante un proceso de entrevista se pudo dar cuenta que, el uso de los artefactos brindaron la posibilidad en los estudiantes de la I.E ALP de 7 grado generar asocios entre el tema y los objetos, los cuales coadyuvaron para una fácil recordación. Resaltando las estaciones y los trenes del primer OFA 1 a través de las situaciones de los números enteros, al igual que la asignación de colores y su comportamiento en el OFA 2.

- El diseño y utilización de artefactos, les permitió a los estudiantes interactuar con los conceptos y situaciones aditivas de números enteros. Propiciando el dialogo, análisis y discusión entre los estudiantes y entre estudiantes y docentes.

- Los cambios en el ambiente de aprendizaje lograron en el educando una mejor disposición durante el proceso de investigación. Los componentes didácticos que se destacan la mediación en el proceso enseñanza-aprendizaje a través de los objetos físicos, lo cual poco se presenta en el modelo tradicional así como interrelación de varios registros de representación.

❖ El proyecto impactó a los estudiantes teniendo la posibilidad con los objetos físicos de pasar de un registro de representación a otro, además la opción de un trabajo colaborativo.

❖ Los obstáculos epistemológicos de los números enteros así como el hecho de no poder contar con varios “trenes de los enteros”, para que los educandos pudiesen practicar por más tiempo. No permitió obtener mejores resultados.

6.2 Recomendaciones

❖ Se procure por un rastreo epistemológico en forma progresiva de los diversos temas matemáticos, con el fin de cualificar el proceso de enseñanza y aprendizaje.

❖ Organizar un espacio en la Institución, con el fin de ir nutriéndolo con los diversos objetos físicos diseñados. Para ser utilizados a futuro.

❖ Realizar cambios continuos en el ambiente de aprendizaje, con el fin de cautivar a los educandos.

❖ Analizar en detalle las diversas evaluaciones, permitiendo con esto mejorar el proceso.

❖ Diseñar más objetos de aprendizaje.

❖ Llevar a cabo proyectos de implementación de OA privilegiando la transversalidad de las áreas.

A. Anexo: Evaluación diagnostica

FACULTAD DE INGENIERIA Y ADMINISTRACIÓN

MAESTRIA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN: APRENDIZAJE DE LA ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS ENTEROS A TRAVÉS DE OBJETOS FISICOS

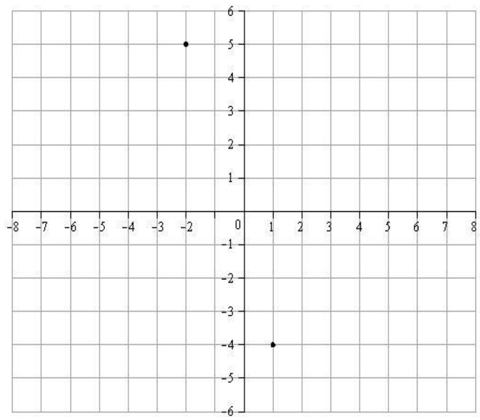
Estudiante		**Grado**	
Institución		**Fecha**	

Prueba diagnostica

1) Ubicar los simbolos, $>$ "mayor que", $<$ "$menor\ que$" $o = igual$ según corresponda
   a) -10__ 3 b) 2__-22 c) 12__13 d) 0__-120

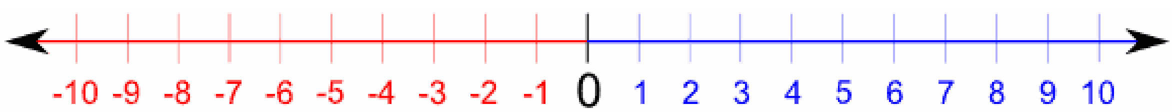
2) En la recta real ubicar los siguientes números
   -2, 5, 0, -1, 3, -4

3)En el plano cartesiano ubicar las siguientes parejas de números A=(2,3), B=(2,4), C=(0,-3) Y D =(5,-3)



4) Hallar los siguientes valores absolutos
a) |-10|=
b) |12 |=
c) | -8 |=
d) | 3 |=

Para los puntos 5, 6, 7 y 8. Ayúdese con la siguiente recta real y realice las sumas de enteros



5) Realizar -10+8= 6) Realizar -5-2=

7) Realizar 8-(-5)= 8) Realizar -6 + 4 – 2 =

9) La temperatura de un congelador es de -23 ° C. Si aumenta la temperatura 17 ° C, ¿Qué temperatura marca ahora el termómetro?

10) En la tabla de posiciones del futbol profesional colombiano que se presenta, las siglas:

GD (Gol diferencia), GF (Goles a favor) y GC (Goles en contra).

Para obtener el GD se realiza la operación GF-GC.

Con base en lo anterior completar la columna GD (Gol diferencia). En la tabla de posiciones del futbol profesional Colombiano que se presenta a continuación:

Tabla de posiciones del futbol profesional Colombiano

Pos.	Equipos.	PJ	PG	PE	PP	GF	GC	GD	GFV	GCV	PTS
1	Santa Fe	18	9	6	3	32	25		12	11	**33**
2	Nacional	18	8	8	2	29	22		9	13	**32**
3	Itagüí	18	8	7	3	27	17		11	10	**31**
4	Cali	18	7	9	2	31	21		14	10	**30**
5	Tolima	18	8	5	5	31	23		12	16	**29**
6	Millonarios	18	8	4	6	26	18		9	9	**28**
7	O. Caldas	18	7	7	4	23	17		10	9	**28**
8	Pasto	18	6	8	4	21	25		8	16	**26**
9	Cúcuta	18	6	5	7	23	20		13	13	**23**
10	Medellín	18	6	5	7	18	18		8	12	**23**
11	Equidad	18	5	7	6	16	15		6	11	**22**
12	Junior	18	6	4	8	24	25		8	13	**22**
13	Huila	18	4	8	6	19	23		4	14	**20**
14	Alianza	18	5	5	8	19	28		10	16	**20**
15	Chicó	18	4	7	7	27	31		12	20	**19**
16	Envigado	18	4	5	9	15	25		5	14	**17**
17	Quindío	18	2	7	9	8	24		5	16	**13**
18	Patriotas	18	0	11	7	14	26		7	17	**11**

"Nunca consideres el estudio como una obligación, sino como una oportunidad para penetrar en el bello y maravilloso mundo del saber".

Albert Einstein (1879-1955)

B. Anexo: Secuencia didáctica

SECUENCIA DIDÁCTICA

NOTA: La siguiente secuencia didáctica se realizó con base en unas adaptaciones a un diseño llevado a cabo por: OMAIRA CHAPARRO, DORILA PÓVEDA, RAFAEL A. FERNÁNDEZ

Asesora: Ligia Amparo Torres R.

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En este documento se presenta una secuencia didáctica para abordar el estudio del concepto de número entero, en estudiantes de 7 grado de la Institucion Educativa Alfonso López Pumarejo. Desde los enteros algunas de sus representaciones, operaciones y relaciones. Este trabajo hace uso de herramientas recreativas como mediación en tales acercamientos conceptuales y procedimentales. Se reconoce la complejidad que implica abordar de una manera significativa y funcional los números enteros y se trata de articular los lineamientos del Ministerio de Educación Nacional y la práctica de aula.

INTRODUCCION

En el diario vivir existen magnitudes susceptibles de variación en dos sentidos: uno positivo y otro negativo, las cuales podemos ubicar en la recta numérica desplazándonos a derecha o a izquierda de un punto de referencia. Estas relatividades se presentan en la temperatura, el balance de una contabilidad, la altura de un punto de la Tierra sobre el nivel del mar, la posición astronómica de un punto del globo terráqueo, el tiempo anterior o posterior al nacimiento de Cristo, entre otros.

En este documento se abordan algunas situaciones significativas de los números enteros: algunas conceptualizaciones de los números enteros, valor absoluto relaciones de orden y estructuras aditivas,

PROPOSITO

La secuencia de actividades de aula tiene como propósito fundamental favorecer un acercamiento a los números enteros con un referente construido desde actividades interesantes y lúdicas para una significación y resignificación de este objeto matemático y la posibilidad de su uso conceptual y operativo en la resolución de problemas en distintos contextos.

COMPLEJIDAD CONCEPTUAL

En el conjunto de los números enteros tenemos la oportunidad de ampliar la interpretación y solución de problemas que no tienen solución en el conjunto de los números naturales y aplicarlos en la resolución de situaciones de la vida diaria que se relacionan con variaciones de temperatura ambiental, desplazamientos en una ciudad en busca de una dirección, el manejo de una cuenta de ahorros o de tiempos cronológicos, haciendo corresponder a determinadas expresiones los signos + ó -.

De igual forma el manejo de los conceptos de positivo y negativo evitará que en la escuela se siga recurriendo a analogías o a convenciones de la geometría, la física, la economía, etc., que privilegian la memoria y pueden reforzar la creencia, por parte de los alumnos, de que la matemática no es divertida por el uso de reglas acomodadas y de poco significado.

No debe sorprendernos la dificultad que tienen los estudiantes al pasar de los naturales a los enteros, para aceptar y manejar adecuadamente los números negativos; esta dificultad tiene un antecedente histórico. Pasaron muchos años para que los números negativos dejaran de ser una simple especulación teórica y se los admitiera como parte integrante de la aritmética.

El significado concreto de un entero negativo como una deuda, o como medida de una temperatura por debajo de cero, abrió el camino para la aceptación inicial; pero quedaban por delante los problemas inherentes a las operaciones aritméticas con esta nueva clase de números; este proceso requirió más tiempo aún.

El estudio de los números enteros implica la interpretación y aplicación del concepto y su significado como número relativo en diferentes contextos (físicos, geográficos) de medida (absolutos) y su ubicación en la recta numérica; además se debe llegar a la representación simbólica que permita efectuar operaciones y establecer relaciones. Dentro de las operaciones se enfoca la estructura aditiva.

Así pues desde el comienzo se deben establecer conjeturas sobre las propiedades y relaciones de los enteros negativos y positivos mediante la visualización, el reconocimiento de regularidades y patrones a partir de razonamientos inductivos y deductivos y del desarrollo de procesos de validación o refutación de hipótesis, agregando el uso de la calculadora como actividad mediadora a la actividad del estudiante involucrando métodos y procesos de integración entre los sistemas de representación y el desarrollo de procedimientos algorítmicos rutinarios y más complejos.

Este trabajo se enmarca dentro del pensamiento numérico, que significa que el desarrollo de este pensamiento a través de los números enteros abarca el sentido numérico, el operacional, las habilidades y destrezas numéricas, las comparaciones, las estimaciones, los órdenes de magnitud, etc.

Debemos aplicar el sentido que le da Macintosh (1992) quien afirma. "el pensamiento numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones". Por ello debemos aprovechar los números enteros para usarlos como medio para comunicar, procesar, e interpretar información usándolos en contextos significativos que incluyan diferentes interpretaciones y representaciones, o la utilización de la descripción, el reconocimiento del valor absoluto y relativo de los enteros a la apreciación del efecto de las distintas operaciones y su utilización en la formulación y resolución de problemas y la comprensión de la relación entre el contexto del problema y el cálculo necesario.

Una parte fundamental es la comprensión del concepto de las operaciones fundamentales: adición, sustracción, para lo cual es necesario, reconocer el significado de las operaciones en situaciones concretas, de las cuales emergen; reconocer los modelos más usuales y prácticos de las operaciones; comprender las propiedades matemáticas de las operaciones y el efecto de cada operación y las relaciones entre éstas.

ESTÁNDARES Y MOVILIZACIÓN DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN EL AULA

ESTÁNDAR: Utilizar números enteros en sus diferentes representaciones y en diversos contextos para resolver problemas.

COHERENCIA VERTICAL

- DE CUARTO A QUINTO

-Resolver y formular problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.

-Justificar regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones utilizando calculadoras.

- DE SEXTO A SÉPTIMO

-Establecer conjeturas sobre propiedades y relaciones de los números, sin y utilizando calculadoras.

-Resolver y formular problemas utilizando las propiedades fundamentales de la teoría de números en contextos reales y matemáticos.

- DE OCTAVO A NOVENO

Utilizar números reales en sus diferentes representaciones en diversos contextos.

COHERENCIA HORIZONTAL

- PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS:

Identificar características de localización de objetos

(Números) en sistemas de representación cartesiana y geográfica.

- PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE DATOS:

Resolver y formular problemas que requieren técnicas de estimación.

- PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS:

Describir y representar situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales, generalidades y tablas).

METODOLOGIA

Las actividades tienen unos momentos individuales y otros grupales, otro momento donde los educandos comparten sus saberes a través de la actividad y por último el papel del maestro es determinante porque los cuestionamientos que realice y las reflexiones que dirija permiten la construcción colectiva y personal de los saberes puestos en juego en la secuencia.

LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Esta secuencia plantea una forma significativa y recreativa de enseñar los números enteros, sus representaciones y significaciones de una forma atractiva, a través del empleo de la lúdica en el desarrollo de cada una de las actividades y como una alternativa para lograr que el estudiante no quede con tantos vacíos sobre el manejo de los positivos y negativos durante su vida escolar.

PROPÓSITO: Favorecer el desarrollo de elementos del pensamiento numérico a través de estrategias que permitan expresar con números enteros información acerca de situaciones relativas y prácticas mediante la lúdica matemática y potenciar una formalización de estos objetos matemáticos que permita su manipulación operatoria.

SITUACIÓN 1 : Valor absoluto y orden en los números enteros

Con ayuda del objeto físico

ACTIVIDAD

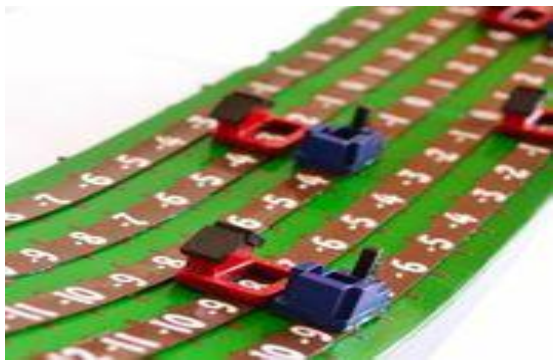


Imagen del objeto físico 1

Tenga en cuenta el valor absoluto se define como la distancia entre dos números reales en la recta numérica. Con el objeto de afianzar, es necesario ligarlo a su interpretación geométrica en la recta numérica.

1. Hallar los valores absolutos.
   a. I-5 I= b. I 5 I= c. I -16 I= d. I 103 I=
2. Ordenar de menor a mayor los siguientes números enteros:
   -3, 0, -1, 10, -8
3. Ordenar de mayor a menor los siguientes números enteros:

   -12, -5, 6, 3, 2, 1

4. conteste:

   a. ¿Cuál es el número que está 2 unidades a la derecha de -9?

   b. ¿Cuál es el número que está 8 unidades a la izquierda de -13?

   c. ¿Cuál es el número que está 7 unidades a la derecha de -7?

   d. ¿Cuál es el número que está 4 unidades a la izquierda de -9?

5. Ubicar > “mayor que” o < “menor que” según corresponda. Justifique cada

   Respuesta

a. -6 __ -3 b. 4__ -8 c. 20__ -21 d. 0 __ -15

6. Una moto se encuentra a 5 unidades a la izquierda del cero y un carro se encuentra a 11 unidades a la derecha de la moto. ¿En qué punto con relación al Inicial se encuentra el carro?

SITUACIÓN 2 : Acerquémonos al concepto de número entero

ACTIVIDAD 1: USANDO ENTEROS EN LA LINEA DEL TIEMPO Y LOS INVENTOS

1. Realiza en forma individual la siguiente lectura. Diseñada por el grupo de investigación que se encuentra al inicio de la secuencia.

"DATOS CURIOSOS DE LOS PRIMEROS INVENTOS".

Los primeros hombres median el tiempo en días. Sabían aproximadamente la duración del año observando las estaciones y podían medir el tiempo en meses, mirando la luna. Los primeros instrumentos para medir el tiempo fueron los relojes de sol y de agua, inventados hacia el año 1500 antes de Cristo. En Egipto, 3000 años antes, es decir en el 4500 antes de Cristo, el hombre empezó a pesar las cosas con el primer instrumento creado como fue la balanza, en Siria y sus proximidades se usa para pesar oro en polvo con pesas de piedra pulidas con gran precisión. Los molinos de viento se emplearon en Irán hacia el año 640 después de Cristo, su forma y construcción eran completamente distintas a las actuales.

Los chinos descubrieron como mezclar salitre, azufre y carbón de encina para hacer pólvora. La usaron por primera vez en el año 850 después de Cristo, la pólvora se empleaba sólo para cohetes y juegos de artificio sin ninguna intención bélica. Las gafas se usaron por primera vez en Italia hacia 1285, mejoraban la visión de las personas que no podían ver claramente los objetos cercanos. Por primera vez la gente pudo seguir leyendo o trabajando en labores delicadas, a pesar de perder la capacidad visual.

Se cree que el primer reloj mecánico se hizo en China en 1088 después de Cristo, medía unos 10 m de altura y estaba accionado por agua. También se inventó la brújula en China hacia el año 1000 después de Cristo y llegó a Europa 100 años después. La primera brújula fue una aguja de hierro sobre un trozo de corcho o caña que flotaba en un vaso de agua y los primeros libros se imprimieron en China y Corea, hacia el año 700 después de Cristo, los que conocemos son pergaminos impresos con moldes de madera. Pasó mucho tiempo antes de que la impresión llegara a España.

Además, el primer instrumento para ayudar a contar fue el ábaco, consistía en bolas perforadas que se desplazaban sobre alambres sujetos a un marco, con las que se conseguía operar para representar números. Se construyó en Babilonia hacia el 3000 antes de Cristo y la primera máquina calculadora se inventó en Francia en 1642.

El gas de ciudad fue producido por primera vez en: Inglaterra en 1727 después de Cristo. En 1760, George Dixon utilizó el gas por primera vez para iluminar una habitación de su casa, en Dírham, y el primer ascensor para llevar gente de un piso a otro se usó en 1743 después de Cristo. Se construyó para el rey Luís XV de Francia. El ascensor de seguridad que se detiene si el cable de tracción se rompe, lo inventó en 1853 el ingeniero Elisha Otis. Se reconoce también el lanzamiento del primer cohete en 1926. La primera fotografía fue tomada en Francia en 1826 después de Cristo. Es una vista de un patio y fue realizada por Joseph Niepce, después de ocho horas de exposición. No se trata de un sistema igual al de las fotografías actuales. En el año 3500 antes de Cristo se inventó la rueda en la ciudad de Ur Mesopotamia.

Otros inventos para tener presente, son: En el año 400 antes de Cristo la primera teoría atómica de Demóclito, que afirma que la materia es discontinua y estaba formada por partículas indivisibles llamadas átomos. En el año 450 antes de Cristo se inventó la polea en Grecia y en el año 100 antes de Cristo el descubrimiento de la cuchara de mineral magnética eran mágicas, se detenían siempre con el mango apuntando hacia la misma dirección.

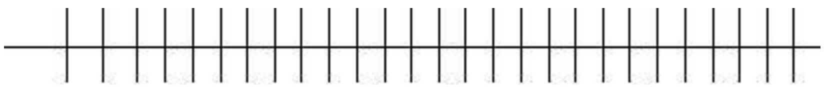
2. En grupos de cuatro compañeros, recorta los cuadros siguientes y establece correspondencia entre la fecha y el invento asociando las siguientes fichas.

3500 a.C.	3000 a.C.	1500 a.C.	640 d.C.	700 d.C.	4500 a.C.
450 a.C.	100 a.C.	400 a.C.	1000 d.C.	1088 d.C.	1285 d.C.
1926 d.C.	1642 d.C.	1727 d.C.	1743 d.C.	1826 d.C.	850 d.C.
		Primer	Empleo	Impresión de los	

Invento de la rueda	Construcción del ábaco	reloj de sol y agua	del primer molino de viento	primeros libros en china y Corea	Teoría atómica de Demóclito
Invento de la polea	Descubrimiento de la cuchara de metal magnética	Invento de la brújula	Creación del primer reloj mecánico	Uso por primera vez de las gafas	Construcción de la primer calculadora
Producción por primera vez del gas	Construcción del primer ascensor	Invento de la fotografía	Uso por primera vez de la Pólvora.	Se lanzó el primer cohete	Empezó el hombre a pesar cosas

3. Peguen las anteriores asociaciones en el revés de la hoja de la lectura y organicen las de antes de Cristo en forma descendente según la fecha y lo sucedido. Después de Cristo en forma ascendente.

4 .En la mitad de una tira cuadriculada tracen una línea horizontal y dividirla en escala de 100 en 100, a izquierda y derecha del centro al que llamaremos CERO (0), ubiquen las fichas junto con el evento o invento correspondiente.



.

-Expliquen la razón por la cual se `puede tomar la fecha del nacimiento de Cristo como Cero.

-Indiquen otra situación o evento que se puede tomar como cero para determinar cantidades antes y después de ese cero.

5. A los números correspondientes a las fechas de los inventos anteriores a nuestra era asígnales el signo menos y el más a los que están después del nacimiento de Cristo y úsenlos para completar la siguiente lista:

a. __________empleo del primer molino de viento en Irán

b .__________se inventó la rueda

c .__________construcción del ábaco

d .__________primer reloj de sol y agua

e .__________invento de la polea

f. __________primer teoría de Demóclito

g. __________descubrimiento de la cuchara de mineral magnético

h. __________producción del gas por primera vez en Inglaterra

i. ___________impresión de los primeros libros

j. ___________uso por primera vez de la pólvora

k. __________invento de la brújula

l. ___________creación del primer reloj mecánico

m. __________uso por primera vez de las gafas

n .__________construcción de la primera máquina calculadora

o. __________producción por primera vez del gas

p .__________se construyó el primer ascensor

q. __________invento de la fotografía

r. __________empezó el hombre a pesar las cosas

-Reflexionen sobre el hecho que a las fechas antes de Cristo se les asigne signo más y las después de Cristo signo menos. Escriban sus apreciaciones al respecto.

-Una misma cantidad colocada a derecha y a izquierda del cero ¿Qué características presentan?

-¿De qué depende que se escriba una cantidad a la derecha o izquierda del cero?

6. Listen 3 situaciones donde se puedan usar estas mismas convenciones (hechos o fenómenos) Escriban el signo (+) o (-) según corresponda.

-Indiquen la relación entre estas cantidades y el cero y entre las positivas y las negativas.

-Especifiquen el lugar dónde se escribe el cero, en un segmento de recta para ubicar respecto de él las otras cantidades. Concluyan al respecto.

ACTIVIDAD 2

Cambiando los grupos de compañeros y formando grupos de dos vamos a continuar jugando con los inventos y sus fechas para resolver las siguientes situaciones.

1. Establezcan la diferencia entre el año de creación del primer reloj mecánico y la construcción de la primera máquina calculadora.

2. ¿Cuántos años de diferencia hay entre la construcción del primer ascensor y el lanzamiento del primer cohete?

3. ¿Cuántos años transcurrieron entre la construcción del ábaco y el invento de la polea?

4.Escriban el o los proceso(s) que realizaron para calcular las respuestas anteriores..

5. Si el primer tinte artificial se consiguió en 1856 y 83 años después empezó una nueva era de velocidad con el primer vuelo en reactor. ¿En qué año voló el primer reactor?

6. Si el vidrio se empezó a fabricar hacia el año 3000 a.C. y 4767 años después se construyó la primera máquina de hilar. ¿En qué año se inventó la máquina de hilar? ¿Cómo obtuvieron la respuesta?

7. ¿Cuántos años transcurrieron entre el invento del primer reloj de sol y agua y el descubrimiento de la cuchara de mineral magnético?

8. ¿Cuántos años hay de diferencia entre el invento de la rueda y el uso por primera vez de las gafas?

9 .¿Cuál es la diferencia entre el año en que el hombre empezó a pesar cosas y la construcción de la primera máquina calculadora?

10. Describan, en forma general, las estrategias y formas que utilizaron para obtener las respuestas anteriores. ¿Cómo se opera con cantidades que representan situaciones relativas designadas con signos?

ACTIVIDAD 3: SECUENCIAS DE ENTEROS

1. Escribe el número que falta, para completar las siguientes secuencias:
   a) -6, __ , -4, -3, __ , __ , 0 , __ , 2 , __ , __ , 5
   b) __ , -10, __ , __ , __ , -2 , 0 , __ , 4 , 6 , __ , __ , __ , __ , __
   c) __, -20 , __ , __ , -8 , __ , 0, __ , __ , 12 , __ , __ , __
   d) __ , __ , __ , __ , __ , -9 , 0 , __ , 18 , 27 , __ , __
   e) __ , __ , __ , __ , __ , -14 , __ , 0 , 7 , __ , __ , __ , __ , __ , __

2 indiquen las razones que determinan la posición y el orden de los números de las secuencias. Luego se discuten los resultados con el profesor.

SITUACIÓN 3 : Estructura aditiva de enteros, desde “ el tren de los enteros ”

ACTIVIDAD 1

Se dispone del “tren de los enteros” el cual funciona de la siguiente manera

- Se ubica la operación en el tablero del objeto representado por una lámina imantada

Imagen del tablero del objeto físico 1

Nota: Tenga en cuenta si en la operación requerida se tiene una sustracción, se utiliza el signo de color rojo, como aparece en la imagen anterior. Lo que nos indica que debemos parar simulando el "semáforo" color rojo y después de parar debemos cambiar el signo del numero posterior a la sustracción. Para la imagen anterior se cambiaría el -2. Por +2 ya que le antecede el signo (--).

- Se indican los movimientos OESTE (negativo) y ESTE (positivo)

Imagen del objeto físico 1

El OFA tiene 5 carriles. Cada movimiento a través de un carril representa un número entero. Para citar como ejemplo la operación 6+ (-8)+ (-5). Con el objeto físico.

1) En el primer carril se ubica una estación en el cero, luego se cuenta 6 unidades hacia el Este y se ubica un tren sobre el 6.
2) Para el carril siguiente se ubica una estación paralela al tren del primer carril; es decir se instala en el 6. Sobre el mismo carril se cuentan 8 unidades hacia el Oeste. Ubicándose la estación en -2.
3) En el siguiente carril; es decir el tercero, se ubica una estación en -2; esto es donde termino el tren del carril anterior y luego se cuenta 5 unidades hacia el Oeste y se llega a -7. Que representa la respuesta

-

Estaciones y trenes del objeto físico 1

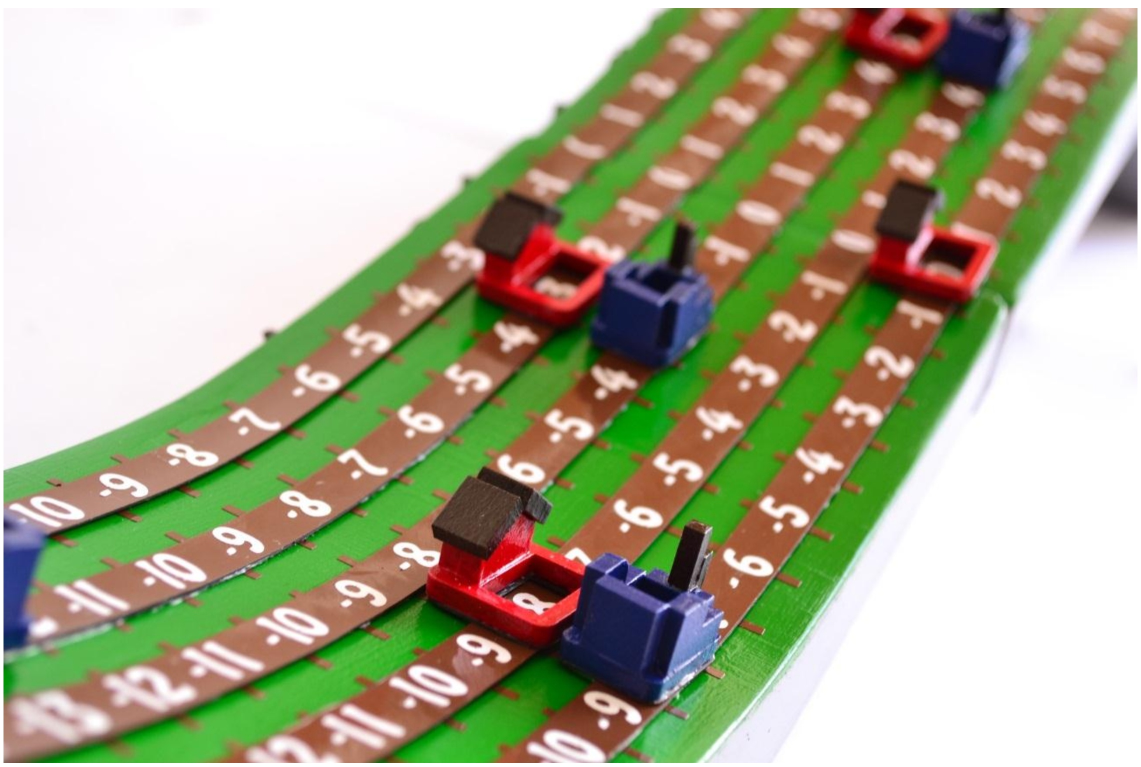


Imagen del objeto físico 1

1) Representa todos los movimientos del “mensajero”” a través de una operación. Teniendo en cuenta OESTE (negativo) y ESTE (positivo). Indica ¿a qué punto llega el mensajero en cada recorrido?

a) El mensajero realiza los siguientes recorridos: 5 unidades OE, 8 unidades E, 2 unidades E, 10 unidades OE Y 2 unidades OE

b) El mensajero realiza los siguientes recorridos: 2 unidades OE, 3 unidades OE, 4 unidades OE y 8 unidades OE
c) El mensajero realiza los siguientes recorridos: 12 unidades E, 3 unidades E , 4 unidades E, 1 unidad E Y 3 unidades E
d) El mensajero recorre 20 unidades OE Y 8 unidades E

2) ¿Qué puedes concluir cuando hay movimientos hacia el mismo sentido?
3) ¿Qué puedes concluir cuando hay movimientos en sentido contrario?
4) Expresa la siguiente situación con base en las características del “tren de los enteros” y resolver
   a) -5+12-8+1-7=
   b) 12-17-2-3+15=

ACTIVIDAD 2

Con ayuda del objeto físico “el tren de los enteros” resolver

1. Tenga en cuenta la siguiente situación:

Un minero está a 12 metros bajo tierra. El minero desciende 10 metros más y luego debe subir 20 metros a dejar materiales a un depósito ubicado en esta posición. ¿A Cuántos metros bajo tierra se encuentra el minero?

a. Realiza un gráfico donde se pueda visualizar los desplazamientos del minero.

b. ¿Cuál es el punto de referencia a partir del cual se hacen los desplazamientos? ¿Por qué?

c. ¿Qué desplazamientos debe hacer el minero desde su posición inicial, si el depósito está en la superficie de la tierra? ¿a 2 metros bajo tierra? ¿a 5 metros sobre la tierra?

2. persona, buscando una dirección efectúa los siguientes desplazamientos: 8 cuadras hacía el sur, se devuelve 5 cuadras, nuevamente 7 cuadras hacia el sur, se devuelve 2 cuadras y encuentra la dirección.

d. Realiza un gráfico donde se pueda visualizar los desplazamientos de la persona.

e. ¿Cuál es el punto de referencia a partir del cual se hacen los desplazamientos? ¿Por qué?

f. ¿Qué desplazamientos debe hacer la persona para llegar a la posición inicial? ¿Para quedar a 2 cuadras de donde partió? ¿Para retroceder 5 cuadras de la posición inicial?

3. Realice una discusión sobre las estrategias utilizadas para resolver los problemas con otros grupos y el maestro.

SITUACIÓN 4 : Estructura aditiva de enteros, desde “ los palos de colores ”

ACTIVIDAD 1

Se dispone de “bicolores de conteo” palos, para realizar las operaciones de las estructuras aditivas. Tenga en cuenta, los objetos rojos cantidades (negativas) y los negros cantidades (positivas), para el caso de la adición de enteros de igual signo los palos se suman y la respuesta toma el signo con base en el color utilizado y si tenemos enteros de diferentes se van anulando uno a uno los palos y los que queden si eliminar darán la pauta, para la respuesta en el caso de la sustracción se procede a sumar el minuendo con el opuesto del sustraendo y se procede como en el caso anterior.

Imágenes de palos chinos

a) En grupo de 4 estudiantes. Con ayuda de “bicolores de conteo” completar la siguiente tabla

a	b	c	a + b	b + a	a + c	a+(b+c)	(a+b)+c	a+c+b
-7	8	0						
-9	6	-1						
8	9	-3						
4	-2	1						
0	-3	2						
-9	-8	-5						
-3	7	-4						
-6	-3	-9						

b) Discutir los resultados con los compañeros, luego con el docente.
c) Proponga una tabla, para ser llenada por otro grupo.

C. Anexo: Evaluación final

FACULTAD DE INGENIERIA Y ADMINISTRACIÓN

MAESTRIA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN: APRENDIZAJE DE LA ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS ENTEROS A TRAVÉS DE OBJETOS FISICOS

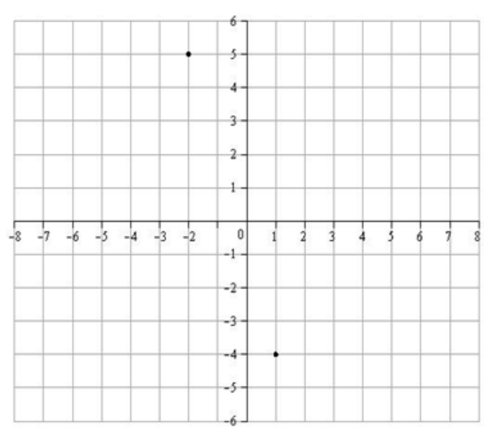
Estudiante		Grado	
Institución		Fecha	

Evaluación final

1) Ubicar los símbolos $>$ "mayor que",$<$ "$menor\ que$" $o = igual$ según corresponda
   b) 15__ - 31 b) - 2__-22 c) 0__-131 d) 1 0__120

2) En la recta ubicar los siguientes números
   -3, 8, 0, -11,- 3, 4

3) En el plano cartesiano ubicar las siguientes parejas de números A=(4,5), B=(-2,3), C=(0,-5) Y D =(-5,-2)



4) Hallar los valores absolutos:

a) $|-100| =$

b) $|1| =$

c) $|-18| =$

d) $|-3| =$

5) ¿Cuál es la distancia de 15 a -15? Representarlo en la recta numérica

6) En una ciudad el termómetro registra una temperatura de 8 °C y en las dos horas siguientes baja 14 °C. La temperatura final es:

7) Un submarino de la flota naval, desciende a 50 metros bajo el nivel del mar y luego asciende a 20 metros. Entonces queda a una profundidad de

8) Dado el siguiente cuadro de las temperaturas de algunas ciudades del mundo

Ciudad	Temperatura
Bogotá	17 °C
Santiago	15°C
Barcelona	17°C
Berlín	8°C
Londres	5°C
New York	-2°C
Paris	12°C
Roma	15°C
Moscú	-8 °C

a) ¿Cuál fue la diferencia de temperaturas entre Barcelona y Berlín?

b) ¿Cuántos grados más altos fue la temperatura en Santiago que en Moscú?

c) ¿Cuántos grados más bajo fue la temperatura en New York que en Londres?

d) ¿Cuántos grados más altos fue la temperatura en Bogotá que Moscú?

e) .¿En qué ciudades se registraron las mismas temperaturas

9) Resolver las siguientes operaciones

a) -12+6= b) -3+(-2)= c) -12+30 = d) -8+0=

10) Resolver las siguientes operaciones

a) -3-(-4)= b) 4-10= c) -12+(-12)+10=

Bibliografía

[1] Trouche, L (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculators environments

[2] Martínez (2006).La investigación cualitativa (síntesis conceptual). Revista IIPSI Facultad de Psicología ISSN 1560-909X Vol. 9 N° 1

[4] BRUNO, A. (2009).Estructuras aditivas en relación con la dificultad de los problemas aditivos con números negativos. En: Departamento de Matemáticas Educativa

[5] Bruno, A. (2001). La enseñanza de los números negativos: formalismo y significado. La Gaceta

[6] Cid, E (2003). La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión. Pre publicaciones del seminario matemático" García Galdeano". Universidad de Zaragoza

[7] Rabardel P. (1995). Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains. Paris, Armand Colin

[8] Ministerio de Educación Nacional, (2006). Estandares basicos de competencias en lenguaje,matematicaás,ciencias y ciudadanas.(págs. 59-60).Bogota: ministerio de educacion nacional

[9] Kline, M (1992). Matemáticas para los estudiantes de Humanidades. Fondo de cultura económica. Impreso en México

[10] Ministerio de Educación Nacional, (2006). Estandares basicos de competencias en lenguaje,matematicaás,ciencias y ciudadanas.(págs. 59-60).Bogota: ministerio de educacion nacional

[11] Barrantes, L. (2006) Los obstáculos epistemológicos, cuadernos de investigación y formación en educación matemática. Centro de investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas, UCR

[12] Ministerio de Educación Nacional, (2006). Estandares basicos de competencias en lenguaje,matematicaás,ciencias y ciudadanas.(págs. 74-75).Bogota: ministerio de educacion nacional

[13] Batanero, C.; Godino, J y Font, V. (2004). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en: Didáctica de las Matemáticas para maestros.

Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada 18071 Granada. Impresión: GAMI, S. L. Fotocopias Avda. de la Constitución, 24. Granada

[14] López, S (2012). La modelización computacional con diagrama AVM y su contribución para el aprendizaje significativo de conceptos físicos y el desarrollo de una visión crítica sobre la ciencia y la modelación científica. Tesis doctoral España Universidad Burgos

[15] Arias,B & Arias,C(1999). una alternativa para la enseñanza y el aprendizaje de la adición de números enteros.Trabajo de grado para optar el titulo de licenciado en Matemáticas,Instituto de educacion y pedagogia Universidad del Valle.cali (págs. 14-16)

[16] Stewart, I. (2007). Historia de las Matemáticas en los últimos 10.000 años. Barcelona

[18] Stewart, I. (2007). Historia de las Matemáticas en los últimos 10.000 años. Barcelona

[19] Perero, M. (1994). Historia e historias de matemáticas. Grupo Editorial Iberoamericana. México DF. México

[21] Ministerio de Educación Nacional, (2006). Estandares basicos de competencias en lenguaje,matematicaás,ciencias y ciudadanas.(págs. 74-75).Bogota: ministerio de educacion nacional

[22] Kline, M (1992). Matemáticas para los estudiantes de Humanidades. Fondo de cultura económica. Impreso en México

[23] Ministerio de Educación Nacional, (1998). Lineamientos curriculares en Matemáticas

[24] Bruno, A. (2001). La enseñanza de los números negativos: formalismo y significado. La Gaceta

[25] Acevedo, B y Ospina, O (1992). Números vectores funciones. Facultad de Ciencias y Administraccion. Universidad Nacional de Colombia

[26] Bruno, A. (2001). La enseñanza de los números negativos: formalismo y significado. La Gaceta

[27] Stegmüller, W. (1979). Teoría y experiencia, Editorial: Ariel ISBN 9788434480032

[28] Duval, R (2004).Semiosis y pensamiento humano. Universidad del Valle Instituto de Educación Y pedagogía. Grupo de Educación Matemática. Edición e impresión Merlín I.D. Cali-Colombia

[29] Duval, R (2004).Semiosis y pensamiento humano. Universidad del Valle Instituto de Educación Y pedagogía. Grupo de Educación Matemática. Edición e impresión Merlín I.D. Cali-Colombia

[30] Duval, R. (2000). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la Pensée, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5, IREM de Strasbourg

[31] Bachelard, G (1938). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. Actas del seminario interuniversitario de investigación en didáctica de las matemáticas, 14(1) .Cangas de Morrazo. Boletín del SI-IDM, 10

[32] Selden, A. y Selden, J. (2001). Terciary mathematics education research and its future, en The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study (Holton, D., ed.), Kluwer Academic Publishers, Netherlands

[33] Cid, E (2003). La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión. Pre publicaciones del seminario matemático" García Galdeano". Universidad de Zaragoza

[34] McLaurin, J. (1990), 'Please Sir, I Didn't Do Nothin', Mathematics in School,19(1), 45-47

[35] Glaeser, G. (1981), 'Epistémologie des nombres relatifs', Recherches en Didactique des Mathématiques, 2(3)

[36] Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5, IREM de Strasbourg

[37] Duval, R (2004).Semiosis y pensamiento humano. Universidad del Valle Instituto de Educación Y pedagogía. Grupo de Educación Matemática. Edición e impresión Merlín I.D. Cali-Colombia

[38] González, A (2005). La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje. Tesis Doctoral. Universidad de la Laguna España

[39] Duval, R (2004).Semiosis y pensamiento humano. Universidad del Valle Instituto de Educación Y pedagogía. Grupo de Educación Matemática. Edición e impresión Merlín I.D. Cali-Colombia

[40] Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique, en Actes de l'U. E. de la Rochelle: Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques

[41] Artigue, M(1999). The Teaching and learning of Mathematics at the University level crucial Questions for contemporary Research in Education, Notices of the AMS, vol 46(3)

[43] Jencks, S y Peck, D (1997). Hot and cold cubes Arithmetic Teacher V. 24(1)

[44] Battista, T (1983). A complete model for operations on integers. Arithemetic Teacher. V 30

[45] Janvier, C (1985). Comparison of models aimed at teaching signed integers. En: 9 Conference of the international group for the Psychology of Mathematics

[46] Borjas, D. (2009). Aprendizaje de los números enteros una experiencia significativa en estudiantes de septimo grado de la Escuela Nacional de Musica. Tesis de Maestria Universidad Nacional Francisco Morazan,tegucigalpa

[47] Becerra, Oscar José; Buitrago, Maritza Ruth; Calderón, Sonia Constanza; Gómez, Rodrigo Armando; Cañadas, María C.; Gómez, Pedro (2012). Adición y sustracción de números enteros. En Gómez, Pedro (Ed.), Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 1 (pp. 19-75). Bogotá: Universidad de los Andes

[48] García, N (2012).Proyecto Afromatematiquin, la Ciencia de la alegría: una experiencia de la inclusión de actividades lúdicas en la enseñanza de las matemáticas. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia-sede Palmira

[49] Díaz, R & González, M (2013). Material didáctico como mediadores del proceso educativo. Asignatura diseño e implementación de objetos físicos. Universidad Nacional de Colombia-sede Palmira

[50] Parra, C (1994). Didáctica De Matemáticas: Aportes Y Reflexiones. Buenos Aires: Paidós

[51] López, S (2012). La modelización computacional con diagrama AVM y su contribución para el aprendizaje significativo de conceptos físicos y el desarrollo de una visión crítica sobre la ciencia y la modelación científica. Tesis doctoral España Universidad Burgos

[52] Martínez (2006).La investigación cualitativa (síntesis conceptual). Revista IIPSI Facultad de Psicología ISSN 1560-909X Vol. 9 N° 1

[53] Martínez, M (2008).Epistemología y metodología cualitativa en las ciencias sociales. Editorial trillas México ISBN 978-968-24-8499-5

[54] Corey, S. (1953): Action Research to improve School FYactice. New York, Columbia University

[55] Ministerio de Educación Nacional (2009). Decreto 1290.p 2

[56] Bruno, A. (1996). Números negativos: una revisión de investigaciones. Revista de Didáctica de las Matemáticas

[57] Artigue, M(1995). Ingenieria didáctica en Educacion Matematica. México: grupo Editorial Iberoamericana

[58] González, J (1999). Didáctica de la relatividad aditiva aditivo-ordinal y de los números enteros. Málaga

[59] Alsina, C; Burgués, C; Fortuny, J; Giménez; & Torra, M (1996). Enseñar matemáticas. Barcelona, España: Editorial GRAO. Pág. 152

Webgrafia

[3] Gallardo, A. & Hernandeez, A(2007) *Emergencia de los numeros enteros*.Recuperado el 20 de mayo del 2013
http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig5/Agallardo.pdf
.

[17] Brahmagupta (628).Brāhmasphuṭasiddhānta (Doctrina de Brahma Correctamente Establecida).Consultado mayo 25 2013 http://www.cyclopaedia.es/wiki/Brahma-sphuta-siddhanta

[20] Surgimiento de los números enteros consultado el 20 de mayo del 2013 en http://www.aprende-matematicas.com/enteros/HISTORIA.html

[42] Pestalozi, J. (1800) Consultado en mayo de 2013 en
http://es.slideshare.net/lauranavaslopez/pestalozzi-6288233

.

.

.

.

.