UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

DISEÑO Y APLICACIÓN DE UNA ESTRATEGIA LÚDICA PARA LA ENSEÑANZA - APRENDIZAJE DE LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Faizal Sánchez González

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Manizales, Colombia
2015

DISEÑO Y APLICACIÓN DE UNA ESTRATEGIA LÚDICA PARA LA ENSEÑANZA - APRENDIZAJE DE LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Faizal Sánchez González

Trabajo de profundización presentado como requisito para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:
Ing. Mg. Rubén Darío Galvis Mejía

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Manizales, Colombia
2015

A mis hijos Isabella y Martín…

Porque son la motivación principal de mi vida,

todo cuanto hago es por y para ustedes.

¡Los amo con todo mi corazón!

Agradecimientos

A Dios, porque él es mi luz, fortaleza y esperanza, especialmente en los momentos difíciles, y porque sé que de su mano se alcanzan las metas propuestas y se ven realizados los sueños cada mañana.

A mi familia, especialmente a mi esposa por su amor, comprensión e incondicional respaldo, a mi madre por su generosidad y sus muchos cuidados y a mis hermanos por su apoyo en las decisiones importantes de mi vida.

A la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, en especial al Señor Decano Fabián Fernando Serrano Suarez por su ayuda y confianza otorgadas para realizar mis estudios. Al Señor Vicedecano John Jairo Salazar Buitrago, por cada palabra de aliento y de motivación para culminar con éxito este trabajo.

Resumen

Este trabajo realizado a manera de estudio de caso, utilizando metodología cualitativa, nace como una necesidad de mejorar aspectos de tipo conceptual y procedimental en las matemáticas, específicamente en factorización de polinomios, para ello se realizó el diseño y aplicación de una estrategia lúdica de enseñanza-aprendizaje, que permitió mejorar el conocimiento en estudiantes del grado undécimo del colegio José Antonio Galán, ubicado en la ciudad de Manizales.

Inicialmente se planteó el desarrollo de guías, en las cuales se procuró utilizar un lenguaje cotidiano, lo que despertó mayor interés y disposición hacia temas relacionados con la factorización de polinomios; en segundo lugar, se realizó el diseño de un juego de mesa tipo “Baraja” por ser éste un juego muy utilizado por los estudiantes, el cual generó un mejor acercamiento y buena actitud para resolver los ejercicios propuestos, y a través de la diversión, la motivación y la sana competencia propias del juego, mejoraron sus capacidades y competencias matemáticas.

Palabras claves:

Álgebra, Factorización, Lúdica, Polinomios, Raíces, Teorema de factor y residuo.

Abstract

DESIGN AND APPLICATION OF A GAME OF STRATEGY FOR TEACHING - LEARNING FACTORING POLYNOMIALS

This dissertation,which was undertaken as a case study, using qualitative methodology, Arose from the necessity to improve conceptual and procedural aspects in mathematics, specifically in the factoring of polynomials, to do so, the design and application of a teaching learning game strategy was used, which allowed the improvement in knowledge of the student in eleventh grade of the Jose Antonio Galan senior school in Manizales.

Initially, the use of manuals was suggested in which an effort was made to use everyday language, which stimulated greater interest and disposition towards the subjects related to factoring of polynomials. Secondly, they designed a card game, a game that is often used by the students, which created a close relationship and good attitude to resolve the exercises proposed and, through amusement, the motivation and healthy competition in game, improved capacities and mathematical competence.

Key words:

Algebra, Factoring, Game, Polynomials, Roots, Factor and Residue Theorem.

Contenido

Lista Figura de figuras

Pag.

Lista de tablas

Pág.

Introducción

Son muchas las teorías y formas que como docentes encontramos y tenemos disponibles al momento de enseñar las matemáticas; por un lado, debemos partir de la solución de problemas desde temprana edad, con el fin de que el estudiante se interese y aumente su capacidad de razonamiento y comprensión del medio que lo rodea; tener en cuenta las capacidades individuales de los estudiantes. En Colombia, según la ley 1618 de 2013 “ARTICULO 11: Derecho a la educación de las personas con necesidades educativas especiales”; la utilización de herramientas didácticas e interactivas facilitará la asimilación y comprensión de los temas en gran parte; todo esto sin olvidar el contexto y la relación con los contenidos, ajustar extensos planes de área y de aula continuamente y hacer uso de las tecnologías de la información y comunicación TIC´s, entre otras.

En cuanto al aprendizaje de las matemáticas, especialmente del álgebra, se logran identificar algunas dificultades y retos que se presentan al docente y a los estudiantes en su etapa escolar. Para los docentes, no solo basta con el conocimiento de su disciplina y orientar su materia; sino que se nos vende la idea de que no estamos preparados para atender una población con diferentes intereses, contextos de vida y formas de aprender, ya que un buen docente imparte los conocimientos al tiempo que motiva a sus estudiantes, como primera etapa del proceso, y que además utiliza herramientas innovadoras en el aula y utiliza sus ejemplos del modo más cercano posible a la cotidianidad de sus estudiantes, comprometiéndole con actividades; por otro lado, cómo actuar para que lo enseñado permanezca intacto en el conocimiento (comprensión teórica y práctica) del estudiante, comprobable a través de la verbalización, es decir, que lo que se enseñe al estudiante, éste no lo olvide jamás y que sea capaz de aplicarlo en un momento dado. Etapa mental del conocimiento.

Entre otras dificultades están las de tipo cognitivo, pues aunque algunos estudiantes demuestren mayores habilidades que otros, el dominio previo de la aritmética ayuda a mejorar la comprensión de los temas algebraicos que en su mayoría confunden al estudiante por el uso de variables, incógnitas y la generalización en sus procedimientos, sin olvidar frecuentes errores arraigados tradicional y culturalmente, por falta de sucesión y orden en los conocimientos, porque han sido enseñados y aprendidos muy superficialmente; con frecuencia la parte actitudinal también juega un papel importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje (PEA).

Los estudiantes en general consideran el álgebra como una asignatura difícil, con un lenguaje poco asequible y con la presunción de ser poco útil en su contexto de vida diaria, con lo cual se dedican a preparar algunos temas memorizando conceptos, fórmulas y expresiones para casos puntuales o peor aún, para usarlos solo en un momento de presentar la evaluación. De allí la importancia en la presentación y motivación del tema a los estudiantes, atendiendo a la secuenciación de actividades de programación dl profesor; desde la orientación y motivación inicial , así como el recorrido y la consolidación en el estudiante de las etapas de aprendizaje; como también la forma, los recursos técnicos, tecnológicos, innovadores, lúdicos y el aprovechamiento de sus ideas previas o esquemas mentales, para enseñar los conceptos que normalmente se consideran difíciles por parte de los estudiantes.

Lo que se plantea a continuación, es el diseño de una propuesta pedagógica tipo “Juego de Mesa” con una estrategia didáctica y lúdica de acercamiento a la factorización de polinomios dirigida a estudiantes del grado undécimo; la cual se plantea tratando de aprovechar las costumbres, y elementos de relacionamiento familiar y comunitario, específicamente para de los estudiantes del colegio José Antonio Galán de la vereda Alto Bonito de Manizales. La propuesta nace con el afán de mostrarles a los estudiantes nuevas formas de aproximación al aprendizaje. Inicialmente se les indagó sobre la preferencia en la posible aplicación de aspectos lúdicos; la mayoría de estudiantes optaron por juegos de mesa, sobre los cuales manifestaron eran de uso frecuente en sus contextos.

En un momento en el que a través del ajedrez, se quería renovar el interés, mejorar o disminuir algunos errores preconcebidos hacia las matemáticas y la lógica, de ir acercando de a poco a los estudiantes a los conceptos propios de la asignatura, nace la idea de aprovechar su familiaridad con ciertos juegos de mesa; para ser adaptados a los contenidos propios del área en el momento, que son la base fundamental para el desarrollo de los contenidos futuros.

En el primer capítulo se hace un repaso por la historia y epistemología del álgebra, en especial de la factorización de polinomios, para presentar algunos elementos fundamentales, conocer los obstáculos y ver algunas estrategias usadas para resolver los ejercicios. Dichas estrategias se socializarán luego con los estudiantes, de manera que estos utilicen eficientemente la información, trabajen en clase y fortalezcan las bases propias del cálculo.

En el capítulo 2 se trata la teoría del álgebra, teoremas y procedimientos propios de la factorización de polinomios, y sus justificaciones en caso de no ser factorizables.

En el capítulo 3 se propone y sustenta la metodología utilizada para llevar a cabo las actividades, guías de trabajo en clase, utilizando un lenguaje contextual pero al mismo tiempo habitual, con el fin de familiarizarlos con él a medida que se avanza en el tema. Para por último concluir que, con las condiciones para jugar adecuadamente; al cumplir las reglas del juego, se está fundiendo un conocimiento en la conciencia del estudiante.

El problema didáctico

En la vida escolar son múltiples los intereses de los estudiantes, de los docentes, del sistema educativo, además de otras particularidades a tener en cuenta, las diversas formas de aprendizaje, las metodologías de enseñanza utilizadas por los profesores, etcétera. Es especialmente en el estudio de las matemáticas a una edad temprana que se necesita de un buen y adecuado acompañamiento al niño, para que cuando necesite aplicar todas las herramientas aritméticas en una etapa posterior, de álgebra, lo haga de manera apropiada; que no cause inconvenientes el uso del lenguaje cotidiano, el manejo de símbolos, de procedimientos en la solución de ecuaciones, y en las gráficas de funciones polinomiales.

En cuanto al PEA (Proceso de Enseñanza Aprendizaje) la enseñanza ofrecida en el colegio José Antonio Galán de la ciudad de Manizales, se han evidenciado en los últimos años resultados académicos bajos en el área de las matemáticas; después de tener sus bases aritméticas hasta octavo grado, los estudiantes presentan dificultades con la solución de ecuaciones algebraicas, con el manejo de polinomios, con gráficas de funciones y con todo lo que la factorización requiere. Utilizar la geometría para visualizar algunas expresiones, el uso de software adecuado, la relación de un lenguaje común con el lenguaje simbólico y gráfico en el álgebra, más la representación cartesiana de ese lenguaje, son entre muchos otros los recursos que un docente puede utilizar para potenciar la enseñanza y mejorar las falencias mencionadas en cuanto a la factorización.

Dada la ubicación particular de la institución educativa, sus estudiantes caracterizados en el SIMAT “Sistema de Matriculas” como población vulnerable, de bajos recursos y algunos desplazados, provienen de alrededor de una decena de lugares diferentes de la ciudad, entre ellos veredas y barrios de Manizales, la mayoría de sus familias viven como aparceras de la misma finca o cerca a sus casas; no les queda cerca el telecentro comunitario (Espacio destinado por la alcaldía de Manizales, para brindar servicio a la comunidad en capacitación, acceso a la información y conectividad a internet en forma gratuita en lugares apartados de la ciudad); los estudiantes no tienen libros ni computador para apoyar sus actividades extra clase; y como se mencionó antes, en sus ratos libres participan en juegos de mesa al compartir con sus familias los fines de semana. A partir de estas consideraciones, se diseñó un juego de mesa para estudiantes del grado undécimo en el que se aprovecha su costumbre, su contexto, su estructura y forma de razonar, y con el que se pretende fortalecer el aprendizaje de la factorización de polinomios, como base fundamental de los temas que serán tratados en el área posteriormente.

Objetivo General

Diseñar e implementar una estrategia de enseñanza-aprendizaje que facilite la comprensión, asimilación y futura aplicación de la factorización de polinomios para los estudiantes del grado undécimo de la Institución Educativa Rural José Antonio Galán de la ciudad de Manizales.

Objetivos específicos

Elaborar guías de clase que permitan acercar el estudiante al concepto teórico, utilizando un lenguaje cotidiano y menos abstracto, con el fin que se familiarice primero con los procedimientos, para luego categorizarlo, y llevarlo a la teoría, y simbología propia del tema.

Diseñar un juego de mesa (baraja) que facilite la comprensión, asimilación y utilización de los teoremas y conceptos básicos de la factorización algebraica en los estudiantes del grado undécimo.

Evaluar la oportunidad que el juego ofrece a los estudiantes en conocimientos, habilidades y valores útiles para desenvolverse mejor y aplicarlas en sus estudios superiores, y en su vida posterior.

1. Encuadre histórico - epistemológico

1.1 La factorización de polinomios

Una de las quejas o problemas que comúnmente escuchamos en educación y últimamente más frecuente está dirigida a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, cualquiera que sea el nivel en que se encuentren (docente y estudiante); a nivel de secundaria y quizás en los primeros semestres de un pregrado es común escuchar lamentos de ambas partes.

Por el lado de la enseñanza, los docentes, frente a diversas tareas administrativas dando cumplimiento con las programaciones no académicas del año, estructurar y dar orientación de extensos planes de área, para motivar o para hacer que los estudiantes se apropien de algunos conocimientos, que sabemos les serán importantes para el desarrollo y mejoramiento de su habilidad intelectual, para sus vidas, bien sea académica o laboral; por el lado del aprendizaje podemos percibir una mezcla compleja entre políticas educativas, falta de motivación del estudiante, una predisposición negativa, el nivel de escolaridad familiar y social, los ingresos económicos de las familias, la idoneidad del docente, los diferentes contextos y entornos socio-culturales de los educandos, entre muchos otros factores que pueden de alguna manera, afectar el proceso de enseñanza-aprendizaje (PEA), el cual es programado por el docente, pero su concreción es considerada en la interacción entre grupos dada entre estudiantes; o entre ambos actores profesor y estudiante, que son sujetos del PEA; y que encuentran en el conocimiento, el desarrollo de habilidades y capacidades, además de la formación en valores y su realización concreta el motivo de su contacto académico. Así que el proceso es ante todo social.

Entre los temas y subtemas que se orientan en la secundaria, quizás el más espinoso, que más dificultades de comprensión trae para los estudiantes es “La factorización de polinomios”; por la creencia del poco uso en las actividades futuras de las personas; también es allí donde se aplican todos los conceptos aritméticos adquiridos en años anteriores, y se realizan con ellos operaciones más complejas; por ejemplo la transformación y abstracción de un problema de la vida diaria en lenguaje algebraico, la solución de ecuaciones e inecuaciones y la representación de un polinomio con sus características gráficas, todas estas opciones implican directamente el alcance y uso de la factorización.

1.2 Marco histórico

Los Babilonios (2500 a.C.), con una sociedad bastante organizada para la época, dividida en tres clases sociales, la clase superior a la que pertenecían los gobernantes y sacerdotes, la clase inferior compuesta por las personas libres y una tercera clase conformada por los esclavos. El desarrollo del conocimiento científico como tal estaba en manos de los sacerdotes y muy ligado a la religión y a lo mítico, solo algunos gobernantes se dedicaban al estudio a manera de pasatiempo, aunque es muy probable que sus clases altas también utilizaran los conocimientos científicos de la época, como los astronómicos y matemáticos con fines arquitectónicos, administrativos, militares o mercantiles.

Los Babilonios habían dejado unas tablillas de arcilla en donde se relacionaban los cuadrados, cubos y recíprocos de algunos números a las que no se les habían dado suficiente utilidad para ser consideradas; sin embargo se sabe que ellos aportaron con estas tablas a la solución de problemas cotidianos a través de ecuaciones simples y cuadráticas, utilizando la dialéctica, desarrollaron el método para “*completar cuadrados*” (Torres, J, sf, p.177) y que hoy se conoce también como “*trinomio cuadrado perfecto*” (Jiménez, M. 2013)

Aunque no estaba presente aún el uso del álgebra como se conoce hoy, como un procedimiento o método a seguir, se evidencia en algunos escritos el uso de la palabra (la retórica) para referirse a un problema determinado.

Por ejemplo: Retóricamente se plantea una situación así:

"*He restado el lado del cuadrado a partir de su área, y es 14,30."*(Jiménez, M. 2013) Teniendo en cuenta que el sistema numérico de los babilonios era sexagesimal (Base 60); y trasladando su lenguaje a nuestro sistema álgebraico actual, este mismo problema propuesto en aquella época, quedaría representado hoy en día de la siguiente manera:

$$x^2 - x = 870$$

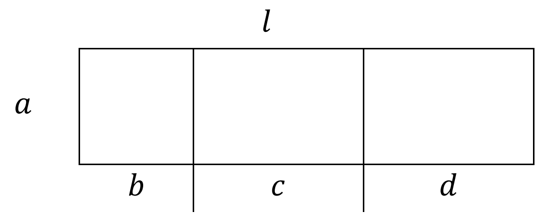
El mismo problema pudo repetirse varias veces pero con datos diferentes, con el fin de obtener un algoritmo o base general de solución a dichos ejercicios, lo que los llevó a encontrar soluciones de ecuaciones de la forma:

$$x^2 + Px = Q$$

Más adelante en la historia y gracias al aporte de los griegos, quienes basaron algunos de sus estudios de los babilonios y egipcios agregándole una matemática más abstracta, basada en definiciones, axiomas y demostraciones, aprovechando el gran florecimiento de esta civilización en el deporte, la filosofía, la organización del estado y su visión expansionista, el cual se da desde el siglo VIII hasta el siglo III antes de Cristo. Gracias a su expansión, su economía, su poder militar, su accesibilidad al mar y su organización política, se dió lugar al conocimiento científico basados fundamentalmente en la reflexión, la búsqueda de la perfección y el equilibrio entre lo material y lo espiritual. Para este periodo, los filósofos y matemáticos más destacados son Thales de Mileto, Pitágoras, Demócrito, Hipócrates, Eratóstenes y Eudoxo, finalmente con Euclides S III a.C. "se establece por primera vez un método riguroso de demostración basado en la geometría" (Baldor, A. 2006, p.97).

Se utilizó entonces la geometría como método para resolver algunos problemas; los números y las operaciones aritméticas fueron reemplazados por el uso de rectas, cuadrados y cubos; especialmente con el estudio de las áreas fue con el que se solucionaron ecuaciones cuadráticas. Mediante el método de "*completar cuadrados",* por ejemplo; una de las proposiciones más mencionada y utilizada para exponer el uso de las áreas y compararla con el método álgebraico, se dice que se encuentra en el libro II de los *Elementos de Euclides*, y esboza lo siguiente:

“Si hay dos rectas a y l, y una de ellas l se corta en un número cualquiera de segmentos, el rectángulo comprendido por las dos rectas es igual a los rectángulos comprendidos por la recta no cortada y cada uno de los segmentos” (Torres, J, sf, p.178)
Esta proposición seria representada por medio de áreas así:



Lo que hoy día, se considera su área como:

$$al = a(b + c + d) = ab + ac + ad,$$

El cual obedece a la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma, o también es visto en las escuelas como el caso de factorización *“factor común a un polinomio”.*

Lo más probable es que otros casos de factorización fueron representados y explicados con el uso de las áreas con el fin de resolver un problema, es el caso de las ecuaciones cuadráticas usando el método de completar cuadrados, trinomio cuadrado perfecto, suma y diferencia de dos cantidades elevadas al cuadrado y diferencia de cuadrados, sin embargo no gozó del prestigio suficiente para ser considerada como método o forma general de solucionar dichas ecuaciones.

Ya en el siglo III de nuestra era, el matemático griego Diofanto, considerado el padre del álgebra, escribió el libro “Aritmética”, en el que mostró y resolvió una cantidad de problemas sin necesidad de buscar una forma retórica de presentarlos (verbalmente), de no tener un procedimiento definido para resolverlos (leyes y normas) y tampoco utilizó la geometría (áreas de figuras) para encontrar su solución. Lo más destacado de Diofanto en el álgebra, fue la utilización de símbolos con los que representaba las incógnitas, estos símbolos los llamó “Arithmo” (Ortega, J. sf, p.7). Se comenzó entonces con Diofanto, la representación de los problemas de una forma más abstracta; donde fue necesario la utilización de símbolos para representar cantidades incógnitas y las elevadas a una potencia.

Por ejemplo:

"Sea la suma de los números igual a 10 unidades y su producto a 24 unidades"

Para solucionar este problema se presenta la siguiente ecuación:
$(5 + \varsigma) * (5 - \varsigma) = 24$,, siendo el ς "arithmo" (la incógnita)

Con lo cual, 25 menos el arithmo al cuadrado es igual a 24, quedando como solución ς^2 =1, por lo tanto el valor del arithmo será, ς = 1.

Quedando la respuesta como: $(5 + 1) * (5 - 1) = 24$

Pasaría un buen tiempo para llegar al siglo VIII d.C. para que los árabes que por encargo del califa *al-Ma'mûn* hizo que *Muhammad Ibn Musa Al-Khwarizmi* tradujera y escribiera el libro *al-jabr y al-muqâbala*, en el que se utilizaron diferentes formas de nombrar las cantidades desconocidas, las cuales fueron nombradas de una manera más contextualizadas con la época, "tesoros" para el equivalente de x^2, "raíces" para dos números multiplicados entre sí, es decir "bx" y a los simples números los llamo "dírhams" que era la unidad monetaria de la época, utilizó pues conceptos puramente comerciales, de herencias o mercantiles. (Puig, L. 2006, p. 13).

Por ejemplo:

"cuatro novenos de tesoro y nueve dírhams menos cuatro raíces, igual a una raíz",

Lo que hoy en día, esta expresión se representaría de la siguiente manera:

$$\frac{4}{9}x^2 + 9 - 4x = x$$

Durante casi 13 siglos (desde el siglo III y hasta el siglo XVI) los matemáticos habían intentado encontrar una fórmula o procedimiento que sirviera para determinar las soluciones de cualquier ecuación cúbica, ya que se habían encontrado las soluciones a ecuaciones cuadráticas; como se puede apreciar, fue poco y muy demorado el avance en este tema de las matemáticas.

Un poco después de la caída de Constantinopla y su imperio Bizantino, aproximadamente en el año 1450, se dice que muchas personas que huyeron de allí, se refugiaron en Italia y trajeron consigo manuscritos griegos, lo que proporcionó ciertos acontecimientos convenientes y que con ayuda de la imprenta se masificaron rápidamente sus conocimientos y estos a su vez dieron lugar a la recuperación de la Europa occidental, iniciándose así un nuevo periodo de la historia, el cual “se hace heredero y continuador de la ciencia y la literatura antiguas; por doquier se estudian y se traducen los clásicos griegos y latinos; algunos serán reivindicados mientras que otros se rechazaran” (García, C. 1997, p. 133), este periodo es llamado “El Renacimiento”, que apoyado en una filosofía humanista, permite un gran movimiento artístico, cultural y científico. En este periodo es en donde surgen personajes a los que se les atribuyen entre otros, descubrimientos matemáticos, como la solución de ecuaciones de grado tres. El primero en llevarse los créditos es el italiano Scipione del Ferro, y más adelante a Nicoló Tartaglia quien la obtuvo por su cuenta, sin conocer el trabajo de Scipione del Ferro.

Sin embargo, la fórmula es conocida con el nombre de "fórmula de Cardano", porque otro matemático llamado Girolamo Cardano, quien estudió cuidadosamente las soluciones de Tartaglia y del Ferro, luego fue quien publicó la fórmula por primera vez en un gran tratado sobre resolución de ecuaciones titulado "Ars Magna".

Después del descubrimiento de América y toda Europa con una nueva visión de las ciencias, ya en el siglo XVI, el francés Francoise Viéte (1540 -1603) se sabe que fue el primero en utilizar una vocal para referirse una cantidad no conocida (incógnita) y una consonante para representar una magnitud conocida (parámetro), esto llevo a un cambio en el lenguaje el cual se tornaría más abstracto, además le permitió dar la solución de una ecuación, sin tener que recurrir a varios ejemplos para mostrar que funcionaba su método.

Lo anterior dio lugar a la factorización como la conocemos hoy en día, también facilitó el desarrollo de la geometría analítica, al trabajo con funciones y se dieron los fundamentos del cálculo infinitesimal.

Descartes (1596 – 1650), basado en el álgebra de Viète, modifica su modelo, en este usa las últimas letras del abecedario (x, y, z) para las incógnitas y las primeras (a, b, c) para los coeficientes como se usa actualmente. En su libro "*La Geometrie" (1637)* presenta el tratamiento de las ecuaciones y plantea que una ecuación puede tener tantas raíces como dimensiones tiene el grado de la ecuación. Esta es una primera formulación del Teorema Fundamental del Álgebra. (Jiménez, M. 2013, p.1494).

Después de Descartes, se mencionan muchos otros matemáticos y sus contribuciones, varios de ellos y sus métodos han generado polémica en la comunidad matemática ya que hicieron poco uso de los números negativos como raíces de un polinomio, también en lo que tiene que ver con los coeficientes del polinomio a factorizar, inicialmente debían ser coeficientes enteros y muy raras veces racionales.

Finalizando este recorrido histórico llegamos al inicio del siglo XIX, donde los matemáticos: Niels Abel (1802 – 1829) y Évariste Galois (1811 – 1832), trabajaron de manera independiente en la soluciones de ecuaciones de grado 5 o superior. El primero demostró que "no hay solución a ecuaciones de grado 5 o superior por medio de radicales", mientras el segundo publico las condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación pueda resolverse por medio de radicales.

Hoy en día, en nuestras aulas de clase, cualquiera que sea la causa, podemos decir en términos generales, que la enseñanza del álgebra y de la factorización presentados en forma rápida, a lo mejor, por la cantidad de temas en cada materia, el tiempo para orientarlos y a su vez poco relacionadas la forma verbal, geométrica y simbólica de un problema y su contexto. Y esta es tal vez la manera más didáctica y efectiva para que los estudiantes y docentes encuentren ese punto de "convergencia" y con el estudio continuo del profesor, se puedan disolver, aunque sea poco a poco, los problemas en educación que mencionaba al comienzo de este trabajo.

Es importante reconocer los aportes que hicieron todos estos célebres matemáticos, desde sus inicios con los babilonios, con su forma verbal (retorica) de enunciar los diferentes problemas y además poder solucionarlos con su sistema numérico sexagesimal, cabe destacar la gran capacidad para representar geométricamente un problema como lo hicieron desde Euclides hasta Al-Khwarizmi, la evolución de conceptos y la representación simbólica de Diofanto con su símbolo el “Arithmo”; sin embargo, sigue sorprendiendo la manera lenta y el poco en el avance en el conocimiento científico; tanto que en ocasiones más que un avance, pareciera más un estancamiento en el desarrollo de la ciencia.

Era de esperarse entonces que todos estos conocimientos adquiridos por más de 4000 años (desde los babilonios hasta la edad media), llegando al encuentro de los conceptos y formas de expresarlos, de las necesidades y contextos en los que se dieron, permitieran el uso y avance, así como su evolución o mejor dicho su “revolución”: aporte y sustento científico a la humanidad.

Hoy como docentes; es importante enfatizar a los estudiantes, especialmente a los de secundaria, la importancia de la aritmética, del álgebra y de la factorización en nuestra vida diaria; de cómo el mundo en que vivimos y la comunidad científica, se han apoyado en ellas para poder explicar y resolver problemas que años atrás no se tenía claridad. También es importante que durante el trabajo con estos temas en clase, se haga la anotación, que no todas las ecuaciones presentadas tienen solución, o que quizás la tienen utilizando otros procedimientos más complejos; ya que los ejemplos que podemos llegar a utilizar en secundaria son los realizables y fáciles de resolver; pero en sí mismos limitados.

2. Marco teórico

2.1 Matemáticas y Pedagogía

Son varias las herramientas que los docentes tenemos a disposición para compartir y ayudar a que nuestros estudiantes exploren sus habilidades matemáticas, reflexionen sobre sus actitudes (positivas o negativas) frente a su propio proceso de formación integral y con ello desarrollen sus competencias educativas básicas.

Dentro de estas herramientas, en este trabajo se ha considerado en primer lugar alejarse del método tradicional, y buscar una estrategias contextualizadas (según la cotidianidad de los estudiantes); y que permita al mismo tiempo que el aprendizaje de los contenidos sea más práctico, es decir, que el aprendizaje se dé más por la motivación y experiencia del juego, con el fin de poder encaminarlo positivamente hacia los contenidos propios y necesarios del tema. El diseño y la aplicación de un juego de mesa (Baraja) constituye una tal herramienta. vista como una vía para fortalecer el interés por las matemáticas en los estudiantes de grado undécimo, poder ayudarles a mejorar la confianza en sí mismos, y que puedan comprender el procedimiento y los conceptos propios de la factorización de polinomios.

Según Piaget, quien se basó en el juego para establecer etapas de desarrollo cognitivo en los niños, y dependiendo de la etapa en que se encuentre, éste irá alcanzando su madurez y capacidad para razonar de forma creativa e ingeniosa a la hora de formular y/o probar hipótesis abstractas. De esta manera el individuo inicia una asimilación de su propia realidad; enfrentará una vida adulta preparado adecuadamente, siendo su formación (Universitaria y/o laboral) coherente, real y significativa en su contexto.

Que es el juego?

Según el diccionario de la Real Academia de la Lengua, se define el juego como un: “Ejercicio recreativo sometido a reglas, y en el cual se gana o se pierde” RAE (2014, n. 2). Para hacer un poco más atractivo este juego de mesa para los estudiantes es que solo existe un integrante “ganador” quien termine primero, pero no habrá participantes perdedores en él, siempre y cuando cumplan las demás reglas establecidas para este.

Una segunda definición nos dice que el juego es “Aquel en que por diversión o pasatiempo se trata de resolver una cuestión propuesta en términos sujetos a ciertas reglas”, esta es una definición más acorde con los objetivos planteados (resolver una cuestión) en este caso factorizar un polinomio, utilizar de manera adecuada sus reglas (teoremas, procedimiento aritmético y algebraico), todo con un ingrediente fundamental en un juego de mesa como es la suerte o azar.

Según Piaget (1985), “los juegos ayudan a construir una serie de dispositivos que permiten al niño la asimilación total de la realidad, incorporándola para revivirla, dominarla, comprenderla y compensarla. De manera que el juego es esencialmente asimilación de la realidad por el yo”[1].

De acuerdo con Piaget, el juego no solo debe desarrollarse en la etapa de la infancia, sino también en edades superiores, es por eso que lo planteado para los estudiantes del grado undécimo debe considerarse igual de importante, ya que en su paso por los diferentes niveles académicos, se les presentó el tema de manera muy abstracta y magistral, con poca participación y construcción del conocimiento de su parte. Teniendo en cuenta que en su entorno familiar son comunes las prácticas de juegos de mesa, y en muchos casos estas prácticas son realizadas como actividades recreativas de fin de semana, lo que permite que haya una buena motivación y fácil asimilación del juego.

(MEN, 2003) “*Diseñar procesos de aprendizaje mediados por escenarios culturales y sociales”.* El aprendizaje de los estudiantes está ligado a su realidad inmediata (su cotidianidad); las relaciones que el alumno establezca con sus compañeros y con sus docentes, para permitirle una mayor participación y competencia en el proceso de

[1] Como citó (Salvador, A. sf. p. 8)

aprendizaje (exponer, discutir, justificar, ser receptivo y cooperativo con los demás) son cualidades importantes que motivan el agrado por las matemáticas.

Suponiendo entonces que el juego de baraja en los estudiantes del grado undécimo del colegio José Antonio Galán es un pasatiempo importante en su cotidianidad, se optó por brindarles la oportunidad para que "aprendan jugando", procurando recoger y reforzar mediante guías de trabajo de aula los conocimientos necesarios utilizados a manera de reglas del juego y así obtener una mayor probabilidad de desempeñarse bien en dicho juego y en el desarrollo del tema propio de la materia.

Hasta ahora he mencionado el uso del juego como un instrumento que ayuda a la realización y maduración cognitiva del individuo, aumenta las potencialidades y actitudes frente a la materia y mejora la comprensión de la realidad y sobre todo de su entorno.

(Villabrille, http://www.soarem.org.ar, sf) Menciona algunas razones por las cuales se deben considerar los juegos en la enseñanza de las matemáticas, algunas de carácter individual y otras de carácter grupal o social; las cuales sustentan una vez más la importancia del juego en la enseñanza, estas razones son:

- Motivar al alumno con situaciones atractivas y recreativas.
- Desarrollar habilidades y destrezas.
- Invitar e inspirar al alumno en la búsqueda de nuevos caminos.
- Romper con la rutina de los ejercicios mecánicos.
- Crear en el alumno una actitud positiva frente al rigor que requieran los nuevos contenidos a enseñar.
- Replantear algunos procedimientos matemáticos y disponer de ellos en otras situaciones.
- Incluir en el proceso de enseñanza aprendizaje a alumnos con capacidades diferentes.
- Desarrollar hábitos y actitudes positivas frente al trabajo escolar.
- Estimular las cualidades individuales como autoestima, autovaloración, confianza, el reconocimiento de los éxitos de los compañeros dado que, en algunos casos, la situación de juego ofrece la oportunidad de ganar y perder.

De todas las bondades y cualidades que el juego aporta (según Piaget) a cada individuo, es necesario mencionar también la posición y teoría de Lev Semiónovich Vygotsky, quien en sus trabajos alude a "el juego" como una necesidad social, en la que se establecen relaciones humanas basadas en la confianza, ayuda mutua y el cooperativismo, con el fin de cumplir con un objetivo importante de toda especie como es su preservación y reproducción, lo cual genera y organiza un aspecto social y cultural propio de un grupo.

A nivel social, "el juego", además de estructurar cognitivamente al individuo, también le brinda aspectos importantes que lo complementan, lo hacen parte y lo caracterizan como miembro de un grupo social y cultural definido. (Guzmán, M. 1984, Actas de JAEM p 49-85)

2.2 Teoría básica de factorización

2.2.1 Teorema del residuo

Sea $\boldsymbol{R}$ el residuo de dividir el polinomio $\boldsymbol{P(x)}$ entre $(\boldsymbol{x-a})$, entonces $\boldsymbol{R = P(a)}$[2]**.**

$$\boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{P(x)}}{\boldsymbol{(x-a)}} = \boldsymbol{P(a)}$$

Esto quiere decir que si deseamos saber cuál es el residuo de la división, basta con calcular el valor numérico del polinomio cuando $\boldsymbol{x}$ toma el valor $\boldsymbol{a}$**.**

Demostración.

Como $\boldsymbol{P(x) = (x-a)Q(x) + R}$ por el algoritmo de la división, se tiene que sí $(\boldsymbol{x = a})$, entonces $\boldsymbol{P(a) = (a-a)Q(x) + R}$.

Es decir que, $\boldsymbol{P(a) = R}$

Ejemplo

Hallar el residuo de dividir el polinomio $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ entre $(x + 3)$.

Solución

$(x + 3)$ se puede escribir como $(x - (-3))$, por tanto $a = -3$.

$P(-3) = 2(-3)^3 - 3(-3)^2 - 11(-3) + 6.$ Resolviendo tenemos:

$P(-3) = -42.$ Es decir, que el residuo $\boldsymbol{R = -42}$.

---

[2] (Ballén, O. 2012. p.22)

2.2.2 Teorema del factor

Si $\boldsymbol{a}$ es un cero del polinomio $\boldsymbol{P(x)}$, entonces $(\boldsymbol{x-a})$ es un factor de $\boldsymbol{P(x)}$[3]

Demostración

Si $\boldsymbol{a}$ es un cero de $\boldsymbol{P(x)}$, entonces es porque $\boldsymbol{P(a)=0}$.

Pero según el algoritmo de la división $\boldsymbol{P(x)=(x-a)Q(x)+R}$.

Como $\boldsymbol{P(a)=0}$,

Tenemos: $\boldsymbol{P(a)=(a-a)Q(x)+R=0}$

Entonces: $\boldsymbol{P(a)=(0)Q(x)+R=0}$

Por tanto: $\boldsymbol{R=0}$

Quedando $\boldsymbol{P(x)=(x-a)Q(x)}$

Ejemplo

Use el teorema del factor para probar que $(x-2)$ es un factor de

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$$

Solución

Como el factor es $(x-2)$, entonces el valor de $(x=2)$

Reemplazando $(x=2)$ en el polinomio dado,

Tenemos $P(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 3(2) + 2$

Calculando $P(2) = 16 - 12 - 6 + 2 = 0$

Luego $P(2) = 0$,

Así $(x-2)$ es un factor del polinomio

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$$

[3] (Ibíd. p.23)

2.2.3 Teorema de las raíces racionales

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ es una función polinómica con coeficientes enteros, donde a_n es diferente de cero y a_0 es diferente de cero y $\frac{b}{c}$ es un cero racional de $P(x)$, entonces b es un factor del término constante a_0 y c es un factor del coeficiente principal de a_n[4]

Ejemplo

Si $P(x) = 3x^3 + x^2 - 12x - 4$,

Los divisores de 4 son: $b = \{\ \pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 4\}$

Los divisores de 3 son: $c = \{\pm 1 \quad \pm 3\}$

Los posibles ceros o raíces racionales del polinomio $P(x)$ estarán en la siguiente lista:

$$\pm\frac{1}{1}, \quad \pm\frac{1}{3}, \quad \pm\frac{2}{1}, \quad \pm\frac{2}{3}, \quad \pm\frac{4}{1} \quad \pm\frac{4}{3}$$

[4] Tomado de: http://facultad.bayamon.inter.edu/ntoro/raicesw.htm

2.2.4 Teorema fundamental del álgebra

Cada polinomio $P(x)$ de grado $n > 0,$ tiene al menos un cero o raíz.

Definición

Si un factor $(x - a)$ ocurre k veces en la factorización total de un polinomio $P(x)$, entonces a es una raíz de $P(x) = 0$ con **multiplicidad** k.[5]

Ejemplo

1. El polinomio $P(x) = x^2 - 8x + 16$ es un polinomio con raíz 4 de multiplicidad 2.

   Se observa que, $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)(x - 4) = (x - 4)^2$

2. Hallar un polinomio $P(x)$ de menor grado posible, con coeficiente principal 1 que tiene las siguientes raíces:

   -3 de multiplicidad 5
   6 de multiplicidad 4

   Este polinomio quedara expresado en los respectivos factores como:

$$P(x) = (x + 3)^5 (x + 6)^4$$

3. Hallar la raíz o cero del siguiente polinomio mencionando en cada caso la multiplicidad $P(x) = (x - 3)^2 (x + 4)^5 (x - 7)^3$.

   Las raíces son:

3	con multiplicidad 2
- 4	con multiplicidad 5
7	con multiplicidad 3

[5] Tomado de: http://facultad.bayamon.inter.edu/ntoro/raicesw.htm

2.2.5 Regla de los signos de Descartes

La regla de los signos de Descartes nos ayuda a identificar el número posible de raíces reales de un polinomio $P(x)$ sin graficar o resolverlas realmente. Sin embargo, con esta regla no se obtiene el número exacto de ceros o raíces del polinomio ni ayuda a encontrar las raíces del polinomio.

La regla establece que el número posible de las raíces positivas de un polinomio es igual al número de cambios de signo en los coeficientes de los términos o menor que los cambios de signo por un múltiplo de 2.

Por ejemplo, si hay 3 cambios de signo en los coeficientes de los términos del polinomio, entonces el número posible de raíces positivas del polinomio es 3 o 1[6].

Ejemplo

Encontrar el número de las raíces positivas del siguiente polinomio.

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - x - x^4 - 2$$

En primer lugar, disponer los términos del polinomio y ordenados en forma descendente según los exponentes:

$$P(x) = -x^4 + x^3 + 3x^2 - x - 2$$

Se va a entender que, en un polinomio con coeficientes reales ordenado en forma decreciente, ocurre una variación en el signo si dos términos sucesivos tienen signos opuestos. Los términos no existentes, o sea los términos con coeficientes cero, se ignoran.

En este caso hay 2 cambios de signo en el polinomio, así que el número posible de raíces positivas del polinomio es 2 o 0.

[6] (Cantoral, R., & Ferrari, M. sf. p.11)

3. Metodología

Son muchas las maneras, en las que el ser humano a lo largo de la historia se ha sumergido, con el fin de registrar, recopilar, descubrir y comprender el mundo que lo rodea, en sus comienzos con un carácter totalmente religioso y místico, pasando por conceptos tanto filosóficos, expansionistas, administrativos y económicos, o simplemente por emprender la búsqueda de respuestas a sus propias inquietudes, quizás querer explicar ciertas creencias dependiendo del momento histórico que vivía.

Uno de esos momentos históricos que determinaron la búsqueda de nuevas explicaciones y conocimientos, fue el descubrimiento de América, ya que replanteó y generó un cambio total de los conceptos que el ser humano traía sobre el mundo, modificando la visión y mejorando el discernimiento en todos los campos. En sus primeros intentos de cambio, se da origen al renacimiento, el cual da prioridad al arte y a la filosofía humanista, estos, con el supuesto de ser el eje principal de la ciencia.

Para el siglo XVII se inicia una nueva etapa en la adquisición del conocimiento, en su primera mitad con Rene Descartes, considerado como el padre del racionalismo, el cual en su método promueve que "la legitimidad de un conocimiento es verdadera, solo si está avalado por la razón". Para la segunda mitad del siglo XVII e influenciado por Descartes, aparece Gottfried Wilhelm Leibniz, que como gran matemático, pretendió compilar todos los conocimientos físicos y filosóficos en una explicación matemática y a su vez estas se convertirían en indiscutibles "verdades de razón", este método lo hizo ser reconocido como el descubridor del lenguaje universal utilizado en el cálculo infinitesimal, inclusive hasta nuestros días.

Ya en el siglo XVIII y XIX con Augusto Comte se inicia el positivismo, el cual está basado en "los hechos como la única realidad científica", rechazando de plano toda situación proveniente de la metafísica. La colección de conocimientos científicos y aun sociales aceptados bajo esta filosofía, se basan en el método científico utilizado en las ciencias (la experiencia, la medida y la catalogación), es decir, todos los conocimientos solamente pueden ser resultados propios de la ciencia.

Al final el siglo XIX e inicio del siglo XX, nace un grupo compuesto de filósofos y científicos llamado "Circulo de Viena", el cual establece una nueva filosofía del conocimiento, en la que se reúnen y se dan por verdaderos, no solo los conocimientos científicos, sino también los conocimientos empíricos, ya que las dos estaban basados en la experiencia. Esta nueva forma de concebir el conocimiento es conocida como "Positivismo Lógico", "Neopositivismo" o "Empirismo Lógico".

Actualmente, en las escuelas de educación básica, se puede decir que los métodos científicos, son poco utilizados como herramientas de enseñanza y aprendizaje, en ocasiones se procura llevar a cabo prácticas de laboratorios sistemáticas, las cuales permiten explicar y conocer algunos fenómenos desde la experimentación misma, con el uso de las matemáticas, de la propia experiencia de vida y la utilización de software o simulaciones virtuales, mejorando la posibilidad de mayor asimilación por parte del estudiante, permitiendo que se apropie de conocimientos, y mejor aún más, que pueda derivar sus propias conclusiones e inferencias sobre una actividad determinada.

Para el desarrollo de este trabajo se emplea el método inductivo cualitativo el cual inicia con la observación directa de la clase y teniendo en cuenta algunas características individuales de la población, y los conceptos básicos que los estudiantes traen de su propio proceso. Inicialmente se apoyó esta labor en guías de trabajo en clase con el fin de introducir y encaminar poco a poco a los estudiantes, no solo hacia el conocimiento matemático sino que a mejorar la autoconfianza en el manejo de conceptos en esta área, lo cual se espera que traiga una mayor descripción, comprensión y análisis de los temas y de su propio contexto.

El proyecto se comenzó a desarrollar en el primer semestre del año, como parte de la primera etapa, con las guías introductorias a los temas, las cuales se presentaron al estudiante en un lenguaje cotidiano y fácil de entender, llevándolos poco a poco a los teoremas propios de la factorización los cuales eran muy importantes como requisito fundamental para desempeñarse exitosamente en la etapa final que lo hacía participe del juego propuesto, para afianzar sus conocimientos en la factorización de polinomios.

Durante el desarrollo de cada una de las guías se pretendía obtener resultados de manera secuencial, que mostraran el afianzamiento de sus conocimientos previos, con el aumento de su nivel de comprensión; y que permitiera un acercamiento, una mayor confianza de los estudiantes hacia la factorización de polinomios, e hicieren posible un mayor manejo operacional; al mismo tiempo adquirir y manejar conceptos técnicos y abstractos, con el fin de dar por terminada la primera etapa; fundamental para el desarrollo del juego.

Antes de iniciar con la primera guía de trabajo se les aplicó una evaluación para establecer cuáles eran sus conocimientos sobre el tema; luego se motivó a los estudiantes para que desarrollaran las guías de trabajo como requisito para participar en el juego de mesa que se les tenía preparado, la importancia que esto traería en su desempeño académico, no solo en la asignatura sino también en su futuro inmediato (pruebas saber, preparación para su pregrado).

Durante el desarrollo del proceso se observan algunos de los estudiantes motivados, ansiosos, participativos y cada vez más confiados en que los temas, ejemplos y ejercicios propuestos para desarrollar en clase o en sus casas, están al alcance de sus conocimientos. Aunque otra parte de los estudiantes que por sus pocas habilidades en las operaciones básicas presentan dificultad y por ende apatía hacia el trabajo propuesto. Lo que fue disminuyendo con el tiempo, ya que se veía reflejado el apoyo de sus compañeros monitores; durante el tiempo dedicado a trabajar en grupos de cuatro estudiantes en algunas clases.

En la etapa de aproximación teórica, se desarrollaron cuatro guías de trabajo, desarrolladas en forma secuencial y buscando un objetivo específico el cual consistía en ir abordando gradualmente y de manera teórico-práctica la temática; suficiente para su buen desempeño en la factorización de un polinomio álgebraico.

Las guías que fueron aplicadas en forma secuencial y sus resultados respectivos se pueden observar en la siguiente tabla:

Tabla 3-1 Guías y resultados

GUIA	OBJETIVO	FORTALEZAS	DEBILIDADES
1	HALLAR EL VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO	• Se inicia de manera directa con un ejemplo y este es explicado paso a paso. • Solo unos pocos de los estudiantes inician de manera inmediata la lectura de la guía y el tratar de entender el ejemplo plasmado allí. • En poco tiempo ya varios de los estudiantes entendían lo que había que hacer en cada ejercicio los cuales se encargaron de explicarle a sus compañeros.	• La mayoría de estudiantes se muestran reacios y con poca confianza de sacar el tema adelante. • No hay manejo por parte de algunos estudiantes con las operaciones de los exponentes. • El tiempo dedicado al desarrollo de las actividades ha sido mucho mayor que el tiempo programado para esta primera guía.
2	CERO DE UN POLINOMIO	• Suponiendo que tienen resuelto el taller de la guía pasada, donde en varios polinomios el resultado era cero, deben identificar para cual posible raíz el resultado era cero y de cual polinomio. • A esta instancia los estudiantes realizan un listado de los polinomios, su número raíz o cero y su posible factor. • Se forman los grupos de trabajo con su respectivo líder del proceso	• Algunos estudiantes no presentan las tareas, otros la tienen incompleta o realizaron mal sus operaciones respectivas. • A los estudiantes aunque son pocos. aún les causa dificultad la utilización del lenguaje y los símbolos. • Persiste bajo manejo de los exponentes. • No aplican correctamente la ley de signos en los factores.
3	TEOREMA DEL FACTOR Y CEROS DE UN POLINOMIO	• Se inicia la guía mencionando la actividad anterior como el teorema del residuo y un ejemplo. • Se propone una estrategia para hallar todos los ceros de un polinomio cuando el	• Le cuesta trabajo continuar las labores de la guía a aquellos estudiantes que no poseen deseo o iniciativa por los nuevos conceptos,

		coeficiente principal es 1, a lo que los estudiantes responden de manera inmediata. • De la participación y formas de aprendizaje de algunos, nace la necesidad de compartir, comunicarse y hasta solidarizarse según su experiencia.	lenguaje y procedimientos, esperan a que el docente o sus compañeros se lo expliquen procedimentalmente.
		• Se propone hallar todos los ceros y factores de un polinomio cuando el coeficiente principal es diferente de uno. • De la lista de posibles ceros, utilizar la teoría vista en la guía uno (valor numérico de un polinomio) para saber cuáles son exactamente los ceros y los factores del polinomio y así poder dejar factorizado un polinomio cualquiera.	• El trabajo se les hace largo y dispendioso, sobre todo en aquellos ejercicios que tienen una lista considerable de posibles ceros y de los cuales solo sirven unos pocos.
4	DIVISION SINTETICA	• Como alternativa a los cálculos de valor numérico, se propone en esta guía la utilización de la división sintética, esta como una alternativa más apropiada para llevar a cabo el encontrar los ceros y respectivos factores de un polinomio y agilizar su factorización.	• En esta instancia la gran mayoría de los estudiantes deberían estar en la capacidad de factorizar cualquier polinomio álgebraico, sin embargo un porcentaje considerable aún le cuesta trabajo comprender el procedimiento.

3.1 De las variables de conocimiento

En el desarrollo de este trabajo se proponen como variables a analizar de acuerdo con los estándares del Ministerio de Educación Nacional los conocimientos de un estudiante se dividen en dos, *los conocimientos conceptuales y los conocimientos procedimentales,* entre los conocimientos conceptuales o teóricos los cuales ayudan al estudiantes a sustentar en determinado momento el Saber qué? y Saber por qué? Así la primera variable seria: **Sustenta en forma correcta**. Por otra parte, las variables asociadas a los conocimientos procedimentales que son aquellas en los que se percibe si el estudiante es capaz de Saber hacer? y Saber cómo? Estas variables serian: **Resuelve ejercicios propuestos, representa o modela la realidad, comunica con lenguaje propio, razona coherentemente y calcula en forma segura y rápida.**

Sustenta en forma correcta:

Como base del desarrollo del pensamiento lógico-matemático, el estudiante debe estar en capacidad de sustentar los procedimientos y algoritmos necesarios para la solución de un problema (factorizar un polinomio), además debe estar acompañado de una clara explicación de la estrategia utilizada para solucionar, modificar o crear determinado ejercicio.

Resuelve ejercicios propuestos:

El estudiante demuestra su compromiso personal e interés cuando realiza individual o colectivamente los ejercicios propuestos para la clase o la casa, con el fin de afianzar sus conocimientos ya adquiridos.

Representa o modela la realidad:

La representación o modelado de una situación cotidiana a través de un ejercicio puede verse reflejado en la solución misma de una ecuación, en la representación cartesiana de un polinomio cualquiera y con sus características más representativas (ceros, factores, signos positivo o negativo, máximos y mínimos, entre otras) o la extracción polinomial a partir de una gráfica dada.

Comunica con lenguaje propio:

Utilizar el lenguaje propio del tema, permite al estudiante concientizarse y demostrar su compromiso con la asignatura, la apropiación y su grado de comprensión.

Razona coherentemente:

El razonamiento lógico otorga al estudiante la capacidad para dar explicaciones y argumentos frente a los temas sin importar el orden en que esta deba ser sustentada, además permite la comprensión rápida de otras teorías, temas, axiomas y con la capacidad de refutarlas o aceptarlas.

Calcula en forma segura y rápida:

Realizar todos los algoritmos necesarios, bien sea de procedimiento mecánico (gracias a la práctica repetida) o analíticos (siguiendo la lógica útil en la toma de decisiones) manteniendo velocidad y precisión al momento de resolver, presentar y sustentar las actividades propuestas.

3.2 De las variables en valores

Durante el trabajo y desarrollo de las guías introductorias al tema, se ha podido evidenciar en los estudiantes un comportamiento de sana competencia, de deseo de superar en cada clase los trabajos y temas propuestos, a medida que se fue avanzando, mejoraron los procesos de comunicación, socialización y colaboración entre los mismos estudiantes así como entre estudiantes y el docente.

Ya en la etapa final donde el estudiante participa y aplica de manera individual sus conocimientos adquiridos en el desarrollo del juego de mesa, se evidencia una asimilación, conciencia e importancia de los conocimientos adquiridos en todo el proceso.

De los valores evidenciados durante las actividades de clase (claro está que los valores se adquieren desde edad temprana, de la familia, de la escuela y se refuerzan poco a poco a medida que avanzamos en edad), podemos decir que los siguientes son los valores principales ya que están correlacionados y a su vez son el punto de partida de otros valores también importantes como individuos y como comunidad. Estos valores iniciales son:

- Autoevaluación
- La responsabilidad y la perseverancia
- La tolerancia y el respeto
- La solidaridad y la cooperación

Autoevaluación:

El estudiante después de una etapa de comparación y reflexión, inicia un proceso en el que se debe reconocer a sí mismo, reconocer que posee unas necesidades, habilidades y debilidades, que le será necesario fortalecer para el desarrollo adecuado de las actividades y tareas propias de la matemática.

Los estudiantes que poseen potencialidades y aptitudes en el área, aunque inicialmente pocos, llevan a los demás integrantes del grupo a observar sus acciones, como actúan, por qué actúan y qué se siente, es decir, crean la necesidad en los demás de priorizar y mejorar sus actividades académicas.

La responsabilidad y la perseverancia:

Después que el estudiante hace su autoevaluación, inicia un proceso enmarcado en el valor de la responsabilidad y crea la necesidad de evaluar su propio proceso de formación, el cual lo lleva a tomar acciones de tipo ético (Elaborar preguntas, desarrollar el trabajo en clase y en la casa, socializa y sustenta sus actividades) para disminuir paulatinamente sus debilidades de una manera más positiva y consciente posible.

Esa responsabilidad de su propio proceso de formación integral, debe ir ligada directamente a la perseverancia, que no es más que la decisión de ser constante y firme, de no dejarse vencer en la búsqueda de sus objetivos trazados desde el inicio del proceso.

La tolerancia y el respeto:

La tolerancia social en el salón de clase, sobre todo de los estudiantes que han tomado ventaja en los conocimientos matemáticos con respecto a sus demás compañeros, permite que exista en el aula un ambiente de deseo de superación grupal, una mayor aceptación en cuanto a los ritmos y tiempos de aprendizaje individual, lo que se manifiesta en una sana convivencia y un buen clima para el aprendizaje.

La solidaridad y la cooperación:

La solidaridad en el aula de clase se evidenció luego de que pasado el tiempo estimado para la asimilación de los temas, aún permanecían estudiantes con dificultades para realizar las actividades pero que mantenían su deseo de superar dichas dificultades, es allí donde se realiza un trabajo en equipo basado en la solidaridad (hacia el individuo) y la cooperación (como el deseo de destacarse como grupo) de todos los estudiantes para poder llevar a cabo las actividades en pro de los objetivos planteados desde el inicio.

3.3 Escala cualitativa de las variables

Para llevar a cabo la evaluación cualitativa de cada una de las variables descritas anteriormente se tiene la siguiente escala de valoración según el sistema de evaluación de la institución educativa.

Tabla 3-2 Escala de valoración

VARIABLE	ESCALA		DESCRIPCION
Sustenta en forma correcta	SUPERIOR	S	Explica correctamente el procedimiento realizado apoyado en la teoría propia.
	ALTO	A	En algunas ocasiones hace referencia a la teoría para explicar sus procesos
	BASICO	Bs	Realiza las actividades propuestas sin hacer uso de un sustento teórico adecuado.
	BAJO	Bj	Cuando el estudiante no realiza las actividades y no hace referencia de la teoría.
Resuelve ejercicios propuestos	SUPERIOR	S	Demuestra y desarrolla correctamente las actividades para la clase y la casa.
	ALTO	A	Realiza gran parte de las actividades propuestas para la clase y la casa.
	BASICO	Bs	Realiza las actividades propuestas para la clase y la casa con algunas falencias.
	BAJO	Bj	No presenta las actividades propuestas para la clase o la casa.
Representa o modela la realidad	SUPERIOR	S	Compara y deduce comportamientos físicos y los representa en un gráfico.
	ALTO	A	Establece las posibles relaciones entre un comportamiento físico y su gráfico.
	BASICO	Bs	Menciona alguna relación entre un comportamiento físico y su gráfico.
	BAJO	Bj	Se le dificulta obtener una relación entre un comportamiento físico y su gráfico.
Comunica con lenguaje propio	SUPERIOR	S	Argumenta con el lenguaje correcto cada uno de los procedimientos realizados.
	ALTO	A	Describe con el lenguaje adecuado cada uno de los procedimientos realizados.
	BASICO	Bs	Relata con el lenguaje cotidiano cada uno de los procedimientos realizados.
	BAJO	Bj	Se le dificulta utilizar un lenguaje para describir los procedimientos realizados.
Razona coherentemente	SUPERIOR	S	Realiza con facilidad la factorización de un polinomio y halla el polinomio según su grafico
	ALTO	A	Realiza la factorización de un polinomio y describe un polinomio a partir de un grafico
	BASICO	Bs	A partir de la factorización de un polinomio describe y realiza su respectivo grafico
	BAJO	Bj	Se le dificulta factorizar correctamente.

Calcula en forma segura y rápida	SUPERIOR	S	Resuelve, presenta y sustenta las actividades en forma rápida y precisa.
	ALTO	A	Tarda en resolver, presentar y sustentar las actividades propuestas.
	BASICO	Bs	Debe mejorar el tiempo en resolver, presentar y sustentar las actividades propuestas.
	BAJO	Bj	Presenta poca habilidad y confiabilidad al momento de presentar sus actividades.
Autoevaluación	SUPERIOR	S	Reconoce sus habilidades para desarrollar las actividades y procura en mejorarlas.
	ALTO	A	Reconoce sus habilidades y sus debilidades, procura por mejorar las falencias rápidamente
	BASICO	Bs	Está comprometido en mejorar las debilidades presentadas y lo demuestra día a día.
	BAJO	Bj	Se nota poco comprometido en mejorar las debilidades presentadas en la clase.
Responsabilidad y perseverancia	SUPERIOR	S	Realiza todas las actividades en forma interesada, cumplida y participativa.
	ALTO	A	Está comprometido con su propio proceso y procura mejorar algunos aspectos.
	BASICO	Bs	Reconoce falencias en su propio proceso y procura mejorar sus debilidades.
	BAJO	Bj	Se nota poco comprometido en mejorar las debilidades presentadas con el tema.
La tolerancia y el respeto	SUPERIOR	S	Fomenta el respeto y consideración con sus pares que presentan ciertas debilidades.
	ALTO	A	Atiende el llamado al respeto y consideración con sus pares que tienen debilidades.
	BASICO	Bs	Se le hacen llamados al respeto y consideración con sus pares.
	BAJO	Bj	Evita el llamado al respeto y consideración con sus pares.
Solidaridad y cooperación	SUPERIOR	S	Lidera las actividades, apoya a sus pares y trabaja en pro del grupo.
	ALTO	A	Realiza las actividades y trabaja bien en equipo
	BASICO	Bs	Apoya las actividades y ayuda explicando a algunos de sus compañeros
	BAJO	Bj	Falta apoyo y ayuda en las actividades con sus compañeros, prefiere el trabajo individual.

3.4 Progreso de los estudiantes según la variable

En los siguientes cuadros podemos encontrar la escala cualificativa por cada variable otorgada a los estudiantes del grado undécimo de acuerdo con cada guía aplicada, su desempeño y progreso durante las clases.

Tabla 3-3 Escala de progreso en cada variable. Guía de trabajo No 1.

	APELLIDOS Y NOMBRES	Sustenta en forma correcta	Resuelve ejercicios propuestos	Representa o modela la realidad	Comunica con lenguaje propio	Razona coherentemente	Calcula en forma segura y rápida	Autoevaluación	responsabilidad y perseverancia	La tolerancia y el respeto	solidaridad y cooperación
1	AGUÍRRE R. MARÍA ALEJANDRA	Bj	Bj	Bj	Bs	Bj	Bj	A	A	A	A
2	BUITRAGO LONDOÑO DANIEL	Bs	Bj	Bj	Bj	Bj	Bj	A	Bs	A	A
3	CASTAÑEDA BEDOYA JIMENA	Bj	Bs	Bj	Bj	Bj	Bj	Bs	Bs	Bs	Bs
4	CASTAÑEDA BEDOYA MARCELA	Bj	Bj	Bj	Bj	Bj	Bj	Bs	Bs	Bs	Bs
5	CASTAÑEDA BEDOYA VALENTINA	Bj	Bj	Bj	Bj	Bj	Bj	A	Bs	Bs	A
6	CIFUENTES R. DANIEL RICARDO	Bj	Bj	Bj	Bj	Bj	Bj	A	Bs	Bs	Bs
7	CORREA Q. JUAN DIEGO	A	A	Bs	Bs	Bs	Bs	A	A	A	S
8	FAJARDO A. YULY ANDREA	Bj	Bj	Bj	Bs	Bj	Bj	Bs	Bs	A	A
9	GALLEGO G. LADY JULIETH	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs	A
10	GONZÁLES FLORÉZ MATEO	Bs	A	Bs	Bs	A	A	A	Bs	Bs	A
11	GUTIERREZ VALENCIA MATEO	S	A	Bs	Bs	Bs	A	A	Bs	Bs	S
12	LEON TABRES GERALDINE	Bj	Bs	Bj	Bs	Bj	Bj	Bs	Bs	A	Bs
13	LONDOÑO H. ANGIE PAOLA	Bs	Bj	Bj	Bs	Bj	Bs	Bs	Bs	Bs	A
14	LÓPEZ B. LAURA CAMILA	Bj	Bj	Bj	Bj	Bj	Bs	A	A	Bs	A
15	LÓPEZ VILLEGAS JACKELINE	Bs	Bs	Bj	Bj	Bj	Bs	A	A	A	A
16	MARTÍNEZ P. KELLY JOHANA	Bj	A	Bj	Bs	Bj	Bs	Bs	Bs	A	Bs
17	MUÑOZ G. DIANA MARCELA	Bj	Bs	Bj	Bs	Bj	Bs	A	Bs	Bs	Bs
18	MURIEL VILLADA JUAN DAVID	Bj	Bj	Bj	Bs	Bj	Bs	A	Bs	A	A
19	PALACIO O. LINA MARCELA	Bj	Bj	Bj	Bs	Bj	Bj	Bs	Bs	A	Bs
20	PEREZ S. LEYDY VALENTINA	Bj	Bj	Bj	Bs	Bj	Bj	Bs	Bs	Bs	A
21	QUINTERO O. CARLOS ANDRÉS	Bs	Bs	Bj	Bs	Bs	Bs	Bs	A	A	A
22	RAMOS ARIAS ALBA JOHANNA	Bj	Bj	Bj	Bj	Bj	Bj	A	Bs	Bs	Bs
23	VILLA RÍOS EISEN MARCELO	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs	S	A	A	A
24	VILLADA ZULUAGA JENNIFER	Bs	Bj	Bj	Bs	Bj	Bj	Bs	Bs	Bs	Bs

Observaciones en el desarrollo de la Guía de trabajo No 1.

Durante el desarrollo de la primera guía, pese a que se le había insistido a los estudiantes en la necesidad de desarrollar unas actividades y guías previas al juego, ya que conocimiento necesario en los temas era mínimo; inicialmente se notó en la mayoría de los estudiantes un nivel de incertidumbre, desconcierto y falta de ánimo, lo que generó al interior del grupo un ambiente de negación y desconfianza frente a los ejercicios que debían resolver, solo unos pocos leyeron cuidadosamente la guía y trataron de entender la mecánica en cada ejercicio propuesto.

Por observación directa del grupo, se apreció también en gran parte de los estudiantes, falta de claridad en los conceptos aritméticos y álgebraicos, como lo son, el manejo de las leyes de los exponentes y las leyes de signos.

El tiempo planeado para el desarrollo de esta guía fue muy inferior al tiempo empleado por los estudiantes que finalizaron las actividades y ejercicios primero que los demás compañeros, una condición normal, conocidas las falencias y vacíos académicos, mencionados anteriormente.

Un apoyo importante para el grupo lo brindaron los estudiantes que de cierta manera poseen mejores habilidades para las matemáticas, los cuales desde un comienzo se mostraron interesados y motivados por realizar las actividades propuestas en la guía; estos estudiantes compartieron su experiencia, trabajaron en grupo con los compañeros y ayudaron a aumentar la confianza frente al manejo de la temática.

Para el desarrollo de la segunda guía de aprendizaje, se menciona de manera corta, *el teorema del factor*, pero su objetivo era listar los posibles ceros del polinomio, cuando el coeficiente principal del polinomio es igual a 1 y calcular el valor numérico del polinomio, especialmente cuando este sea igual a cero.

Tabla 3-4: Escala de progreso en cada variable. Guía de trabajo No 2.

	APELLIDOS Y NOMBRES	Sustenta en forma correcta	Resuelve ejercicios propuestos	Representa o modela la realidad	Comunica con lenguaje propio	Razona coherentemente	Calcula en forma segura y rápida	Autoevaluación	responsabilidad y perseverancia	La tolerancia y el respeto	solidaridad y cooperación
1	AGUÍRRE R. MARÍA ALEJANDRA	Bs	Bs	Bj	Bs	Bs	Bj	A	A	A	A
2	BUITRAGO LONDOÑO DANIEL	Bs	Bs	Bj	Bs	Bs	Bj	A	Bs	A	A
3	CASTAÑEDA BEDOYA JIMENA	Bj	Bj	Bj	Bj	Bj	Bj	Bs	Bs	Bs	Bs
4	CASTAÑEDA BEDOYA MARCELA	Bj	Bj	Bj	Bj	Bj	Bj	Bs	Bs	Bs	Bs
5	CASTAÑEDA BEDOYA VALENTINA	Bj	Bs	Bj	Bs	Bj	Bj	A	Bs	Bs	A
6	CIFUENTES R. DANIEL RICARDO	Bj	Bs	Bj	Bj	Bs	Bj	A	Bs	Bs	Bs
7	CORREA Q. JUAN DIEGO	A	A	Bs	A	A	Bs	A	A	A	S
8	FAJARDO A. YULY ANDREA	Bj	Bs	Bj	Bs	Bs	Bj	A	Bs	A	A
9	GALLEGO G. LADY JULIETH	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs	A	Bs	Bs	A
10	GONZÁLES FLORÉZ MATEO	A	A	Bs	A	A	A	A	Bs	Bs	Bs
11	GUTIERREZ VALENCIA MATEO	S	A	Bs	A	A	A	A	Bs	Bs	S
12	LEON TABRES GERALDINE	Bj	Bj	Bj	Bs	Bs	Bj	A	Bs	A	Bs
13	LONDOÑO H. ANGIE PAOLA	Bs	Bs	Bj	A	Bj	Bs	A	Bs	Bs	A
14	LÓPEZ B. LAURA CAMILA	Bs	Bs	Bj	Bj	Bs	Bs	A	A	Bs	A
15	LÓPEZ VILLEGAS JACKELINE	Bs	Bs	Bj	Bs	Bs	Bs	A	A	A	A
16	MARTÍNEZ P. KELLY JOHANA	Bs	A	Bj	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs	A	Bs
17	MUÑOZ G. DIANA MARCELA	Bj	Bj	Bj	Bs	Bj	Bs	A	Bs	Bs	Bs
18	MURIEL VILLADA JUAN DAVID	Bj	Bj	Bj	Bs	Bj	Bs	A	Bs	A	A
19	PALACIO O. LINA MARCELA	Bj	Bj	Bj	Bj	Bj	Bj	Bs	Bs	A	Bs
20	PEREZ S. LEYDY VALENTINA	Bj	Bs	Bj	Bj	Bj	Bj	Bs	Bs	Bs	A
21	QUINTERO O. CARLOS ANDRÉS	A	Bs	Bj	Bs	A	Bs	Bs	A	A	A
22	RAMOS ARIAS ALBA JOHANNA	Bj	Bj	Bj	Bj	Bj	Bj	A	Bs	Bs	Bs
23	VILLA RÍOS EISEN MARCELO	A	Bs	Bs	Bs	A	Bs	S	A	A	A
24	VILLADA ZULUAGA JENNIFER	Bj	Bj	Bj	Bj	Bj	Bj	A	Bs	Bs	Bs

Observaciones en el desarrollo de la Guía de trabajo No 2.

En el desarrollo de la segunda guía de trabajo, se observan estudiantes más dispuestos a realizar los ejercicios propuestos en ella, podemos decir también que gracias a la colaboración de los estudiantes monitores, quienes son encargados de socializar la guía, apoyar con su explicación a los estudiantes que tienen menor habilidad en la asignatura y consecuentemente aumentar la confianza en las matemáticas; aspecto importante al momento de familiarizarnos con cualquier área del conocimiento.

Al igual que en la primera guía, se siguen presentando dificultades para que algunos estudiantes inicien sus actividades, sobre todo en lo que tiene que ver con el manejo del lenguaje apropiado, desarrollo de las operaciones aritméticas y la utilización de las leyes de signos; aspectos importantes y fundamentales en la factorización de polinomios; esto hace que se mantengan apáticos y atrasados con respecto a los demás compañeros.

Aun no se espera que los estudiantes relacionen las actividades propuestas con la modelación o representación con la vida cotidiana, sin embargo, unos pocos se notan interesados y se atreven a indagar por su cuenta o a consultar con el docente algunas situaciones.

Para el desarrollo de la guía número tres, se hace énfasis al teorema del factor, como tema central de guía, se realiza la explicación de los ceros de un polinomio cuando el coeficiente principal es diferente de uno.

Tabla 3-5: Escala de progreso en cada variable. Guía de trabajo No 3.

	APELLIDOS Y NOMBRES	Sustenta en forma correcta	Resuelve ejercicios propuestos	Representa o modela la realidad	Comunica con lenguaje propio	Razona coherentemente	Calcula en forma segura y rápida	Autoevaluación	responsabilidad y perseverancia	La tolerancia y el respeto	solidaridad y cooperación
1	AGUÍRRE R. MARÍA ALEJANDRA	Bs	A	Bj	Bs	Bs	A	A	A	S	S
2	BUITRAGO LONDOÑO DANIEL	Bs	A	Bs	Bs	A	Bs	A	A	S	S
3	CASTAÑEDA BEDOYA JIMENA	Bj	Bj	Bj	Bs	Bs	Bj	Bs	Bs	Bs	Bj
4	CASTAÑEDA BEDOYA MARCELA	Bs	Bj	Bj	Bs	Bs	Bj	Bs	Bs	A	Bs
5	CASTAÑEDA BEDOYA VALENTINA	Bs	Bj	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs	A	A
6	CIFUENTES R. DANIEL RICARDO	Bs	Bj	Bj	Bs	Bs	Bs	A	A	A	A
7	CORREA Q. JUAN DIEGO	S	S	A	S	S	S	S	A	S	S
8	FAJARDO A. YULY ANDREA	Bs	A	Bs	Bs	A	S	Bs	A	S	Bs
9	GALLEGO G. LADY JULIETH	Bs	A	Bs	Bs	A	S	S	S	S	A
10	GONZÁLES FLORÉZ MATEO	S	A	S	S	S	S	S	S	S	A
11	GUTIERREZ VALENCIA MATEO	S	A	S	S	S	S	S	S	A	A
12	LEON TABRES GERALDINE	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs	A	Bs	A	Bs
13	LONDOÑO H. ANGIE PAOLA	Bs	Bs	Bs	Bs	A	A	A	A	A	A
14	LÓPEZ B. LAURA CAMILA	Bs	Bs	Bj	Bs	Bj	A	Bs	A	Bs	Bs
15	LÓPEZ VILLEGAS JACKELINE	Bs	A	Bs	Bs	Bs	A	A	S	S	S
16	MARTÍNEZ P. KELLY JOHANA	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs	A	A	A
17	MUÑOZ G. DIANA MARCELA	A	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs	A	Bs	Bs
18	MURIEL VILLADA JUAN DAVID	Bs	Bj	Bj	Bs	Bs	Bs	Bs	A	A	Bs
19	PALACIO O. LINA MARCELA	Bj	Bs	Bs	Bs	Bj	A	Bs	Bs	A	Bs
20	PEREZ S. LEYDY VALENTINA	Bj	Bs	Bs	Bs	Bj	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs
21	QUINTERO O. CARLOS ANDRÉS	A	Bs	Bs	A	Bs	A	A	Bs	Bs	Bs
22	RAMOS ARIAS ALBA JOHANNA	Bj	Bj	Bj	Bs	Bj	Bs	A	A	S	Bs
23	VILLA RÍOS EISEN MARCELO	A	A	A	S	S	S	A	A	S	S
24	VILLADA ZULUAGA JENNIFER	Bs	Bs	Bj	Bs	Bj	Bs	Bs	Bs	A	Bs

Observaciones en el desarrollo de la Guía de trabajo No 3.

Inicialmente se desarrolla la guía referenciando el teorema del factor como actividad de la guía anterior, así mismo se menciona la manera como sacar la lista de los posibles ceros de un polinomio, cuando este tiene como coeficiente principal un número diferente de uno, es decir, se realiza la aproximación inicial al “Teorema de los ceros o raíces racionales”.

Con muy buena actitud continúan gran parte de los estudiantes, se notan interesados y decididos ante un procedimiento similar, inclusive algunos mencionan que es el mismo que el de la guía anterior; sin embargo el reemplazo, potencias y operaciones con números racionales les resultan más dificultosos. Esta situación es pasajera, solo hasta cuando recuerdan como se hacen dichas operaciones.

En un siguiente momento del trabajo con la guía, es muy importante destacar el trabajo de los estudiantes monitores, su colaboración y cooperación con los compañeros son notables, gran parte de los estudiantes acuden a ellos para solicitarles nuevas explicaciones.

En esta guía número cuatro, se dedica especialmente a la división sintética, ésta como alternativa rápida y segura, ya que recoge los teoremas del residuo y del factor utilizados para la factorización de un polinomio.

Tabla 3-6: Escala de progreso en cada variable. Guía de trabajo No 4.

	APELLIDOS Y NOMBRES	Sustenta en forma correcta	Resuelve ejercicios propuestos	Representa o modela la realidad	Comunica con lenguaje propio	Razona coherentemente	Calcula en forma segura y rápida	Autoevaluación	responsabilidad y perseverancia	La tolerancia y el respeto	solidaridad y cooperación
1	AGUÍRRE R. MARÍA ALEJANDRA	A	A	Bs	Bs	Bs	A	S	S	S	S
2	BUITRAGO LONDOÑO DANIEL	Bs	S	A	Bs	A	Bs	S	A	S	S
3	CASTAÑEDA BEDOYA JIMENA	Bj	Bj	Bj	Bs	Bs	Bj	A	Bs	A	Bs
4	CASTAÑEDA BEDOYA MARCELA	Bj	Bj	Bs	Bs	Bs	Bj	A	Bs	A	Bs
5	CASTAÑEDA BEDOYA VALENTINA	Bs	Bs	Bs	Bs	A	Bs	A	Bs	A	A
6	CIFUENTES R. DANIEL RICARDO	Bj	Bs	Bj	Bs	Bs	Bs	A	A	A	A
7	CORREA Q. JUAN DIEGO	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
8	FAJARDO A. YULY ANDREA	Bs	Bs	Bs	Bs	A	A	S	A	S	A
9	GALLEGO G. LADY JULIETH	A	A	Bs	Bs	A	A	A	S	S	A
10	GONZÁLES FLORÉZ MATEO	S	A	A	S	S	S	S	A	A	A
11	GUTIERREZ VALENCIA MATEO	S	A	S	A	S	S	A	S	A	A
12	LEON TABRES GERALDINE	Bs	A	Bs	S	Bs	Bs	S	A	A	A
13	LONDOÑO H. ANGIE PAOLA	Bs	Bs	Bs	S	Bs	Bs	S	A	A	A
14	LÓPEZ B. LAURA CAMILA	A	Bs	Bs	Bs	Bs	A	Bs	A	Bs	Bs
15	LÓPEZ VILLEGAS JACKELINE	A	A	Bs	A	Bs	Bs	A	S	S	S
16	MARTÍNEZ P. KELLY JOHANA	A	Bs	Bs	A	A	Bs	Bs	A	A	A
17	MUÑOZ G. DIANA MARCELA	A	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs	A	A	A
18	MURIEL VILLADA JUAN DAVID	Bs	Bs	Bj	A	Bs	Bs	Bs	A	A	A
19	PALACIO O. LINA MARCELA	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs	A	Bs	Bs	A	A
20	PEREZ S. LEYDY VALENTINA	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs
21	QUINTERO O. CARLOS ANDRÉS	A	Bs	Bs	A	A	A	A	A	A	A
22	RAMOS ARIAS ALBA JOHANNA	Bs	Bj	Bj	Bs	Bj	Bs	A	A	S	S
23	VILLA RÍOS EISEN MARCELO	A	A	Bs	S	A	S	A	S	A	A
24	VILLADA ZULUAGA JENNIFER	Bs	Bj	Bj	Bs	Bj	Bs	Bs	Bs	A	Bs

Observaciones en el desarrollo de la Guía de trabajo No 4.

Esta guía nace como la necesidad de presentarles a los estudiantes una forma diferente de realizar los procedimientos, donde se evitan muchos de los cálculos numéricos y se agiliza el encontrar los factores de un polinomio; teniendo en cuenta que lo hecho hasta el momento, es de gran importancia para aumentar la comprensión y mejorar la capacidad del estudiante en la factorización de cualquier polinomio.

Según la tabla, se nota un cambio importante en las aptitudes y actitudes de los estudiantes, sin embargo, permanece un número de estudiantes que desde el inicio del proceso les causa mucha dificultad la asimilación y comprensión de los procedimientos necesarios para la factorización de un polinomio.

En cuanto a los valores que se percibieron del grupo se evidenció un buen desempeño, gracias al trabajo en equipo que los estudiantes monitores asumieron desde un inicio, también al deseo de superar ciertos vacíos, a la constancia y a la responsabilidad que la gran mayoría de estudiantes mostraron en el transcurso de las actividades.

Después del trabajo realizado con las guías introductorias, en la siguiente tabla se relaciona la escala cualitativa final en cada una de las variables.

Tabla 3-7: Escala de progreso en cada variable. CUALIFICACIÓN FINAL

	APELLIDOS Y NOMBRES	Sustenta en forma correcta	Resuelve ejercicios propuestos	Representa o modela la realidad	Comunica con lenguaje propio	Razona coherentemente	Calcula en forma segura y rápida	Autoevaluación	responsabilidad y perseverancia	La tolerancia y el respeto	solidaridad y cooperación
1	AGUÍRRE R. MARÍA ALEJANDRA	Bs	A	Bj	Bs	Bs	A	A	A	S	S
2	BUITRAGO LONDOÑO DANIEL	Bs	A	A	Bs	A	Bs	A	A	S	S
3	CASTAÑEDA BEDOYA JIMENA	Bs	Bs	Bj	Bs	Bs	Bj	A	Bs	Bs	Bj
4	CASTAÑEDA BEDOYA MARCELA	Bj	Bj	Bj	Bs	Bs	Bj	Bs	Bs	Bs	Bs
5	CASTAÑEDA BEDOYA VALENTINA	Bs	Bj	Bs	Bs	Bs	Bs	A	Bs	A	A
6	CIFUENTES R. DANIEL RICARDO	Bj	Bs	Bj	Bs	Bs	Bs	A	A	A	A
7	CORREA Q. JUAN DIEGO	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
8	FAJARDO A. YULY ANDREA	Bs	A	A	S	A	A	S	A	S	A
9	GALLEGO G. LADY JULIETH	Bs	A	Bs	Bs	A	S	S	S	S	A
10	GONZÁLES FLORÉZ MATEO	S	A	S	S	S	S	S	S	S	A
11	GUTIERREZ VALENCIA MATEO	S	A	S	S	S	S	S	S	A	A
12	LEON TABRES GERALDINE	Bs	Bs	Bs	S	Bs	Bs	A	Bs	A	A
13	LONDOÑO H. ANGIE PAOLA	Bs	Bs	Bs	S	A	A	A	A	A	A
14	LÓPEZ B. LAURA CAMILA	Bs	Bs	Bj	Bs	Bj	A	Bs	A	Bs	Bs
15	LÓPEZ VILLEGAS JACKELINE	Bs	A	Bs	A	Bs	A	A	S	S	S
16	MARTÍNEZ P. KELLY JOHANA	Bs	Bs	Bs	A	Bs	Bs	Bs	A	A	A
17	MUÑOZ G. DIANA MARCELA	A	Bs	Bs	A	Bs	Bs	A	A	A	A
18	MURIEL VILLADA JUAN DAVID	Bs	Bs	Bj	A	Bs	Bs	Bs	A	A	A
19	PALACIO O. LINA MARCELA	Bs	Bs	Bs	Bs	Bj	A	Bs	Bs	A	A
20	PEREZ S. LEYDY VALENTINA	Bj	Bs	Bs	Bs	Bj	Bs	Bs	Bs	Bs	Bs
21	QUINTERO O. CARLOS ANDRÉS	A	Bs	Bs	A	A	A	A	A	A	A
22	RAMOS ARIAS ALBA JOHANNA	Bj	Bs	Bj	Bs	Bs	Bs	A	A	S	S
23	VILLA RÍOS EISEN MARCELO	A	A	A	S	S	S	S	S	S	S
24	VILLADA ZULUAGA JENNIFER	Bs	A	Bj	Bs	Bj	Bs	Bs	Bs	A	Bs

En general los estudiantes del grado undécimo del colegio José Antonio Galán del municipio de Manizales se mostraron abiertos, receptivos y motivados en cada una de las etapas y en cada una de las actividades llevadas a cabo en ellas.

Gran parte de esta motivación la demostraron desde el comienzo de las actividades, en donde al momento de darles una charla a manera de introducción se les informó del porqué de la idea de realizar un juego basado en su cotidianidad; las ventajas que este traería tanto a nivel de conocimientos como la facilidad para su comprensión, también haciendo uso del compromiso de ellos con su propio proceso de formación e invitándolos a mantener una buena disposición ya que este tema en específico “la factorización de polinomios” es la base fundamental del cálculo, de la solución de ecuaciones e inecuaciones y el mismo análisis de funciones, entre otras.

Durante la primera etapa que consistía en realizar una evaluación de conocimientos previos sobre la factorización, se decidió no tener en cuenta estos resultados ya que los estudiantes manifestaron tener muy escaso conocimiento y manejo del tema, que no se tuvieran en cuenta e iniciar el trabajo con apoyo de las guías.

Como se ha mencionado en este trabajo, las guías (Ver anexos) se presentaron al estudiante tratándolas de forma secuencial, con el fin de ir entregando poco a poco los procedimientos, los temas y teoremas necesarios para factorizar un polinomio.

Durante la clase, se hicieron notar de manera rápida unos pocos estudiantes interesados en comprender los procedimientos, sacar adelante los ejercicios y actividades propuestas, a su vez lo hicieron de forma participativa y dispuestos a socializar su manera de entender y resolver cada uno de los ejercicios propuestos allí. Por otra parte, la mayoría de los estudiantes esperaban en forma paciente pero intranquila la explicación en forma personal por parte del docente o sus compañeros que ya tenían claridad sobre lo planteado para en la guía 1.

Después de haber desarrollado la primera guía, se inicia la segunda guía con el título “TEOREMA DEL FACTOR” y se les explicó que no era otra cosa más que lo practicado en la guía número uno, pero que a partir de ese momento lo llamaríamos por su nombre, se retoma como ejemplo el último de la guía uno y se proponen siete ejercicios para hallar sus respectivos ceros utilizando de nuevo el valor numérico del polinomio y mencionando la siguiente estrategia:

“**NOTA**: Los ceros o raíces enteras de un polinomio son los divisores positivos o negativos del término independiente del polinomio”.

En la guía tres se inicia recordando conceptos y proponiendo como trabajo para la clase: hallar los ceros de un polinomio cuando el coeficiente principal es diferente de uno. En ese momento se notó en la gran mayoría de los estudiantes mayor receptividad y compromiso para realizar dichas actividades, ya no se escuchaban palabras de desánimo, por el contrario se formó un ambiente de trabajo en equipo con sentido colaborativo y responsable.

En la guía cuatro se utilizó en el desarrollo, un tema distinto con el fin de optimizar los tiempos de respuesta a un ejercicio propuesto, ya que se dejaría de utilizar “*el valor numérico del polinomio*” el cual sería reemplazado por “*la división sintética*”, permitiendo mayor motivación en los estudiantes por su seguridad y rapidez al momento de realizar un ejercicio.

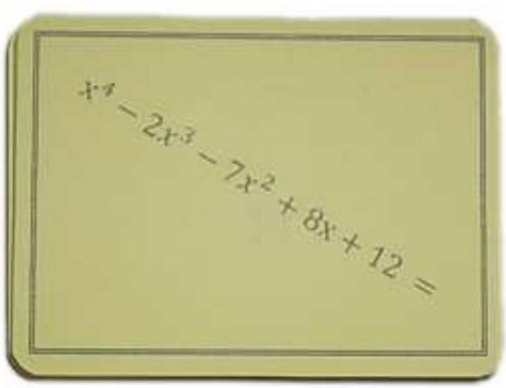
Los estudiantes en este momento ya tenían las bases y la práctica para poder hacerse partícipes del juego, el cual estaba propuesto para reforzar los conocimientos adquiridos con las guías y fortalecer las habilidades de una manera lúdica en un ambiente propicio de sana convivencia.

3.5 El juego de mesa y su desarrollo

Para participar en esta actividad de afianzamiento de conocimientos y habilidades en la “factorización de polinomios” el estudiante previamente interiorizó los procedimientos, los llamó por su nombre teórico y realizó todas las actividades propuestas en cada una de las guías, las cuales brindaron los fundamentos para la búsqueda de los ceros y factores de un polinomio.

Figura 3.1: Juego de mesa “Baraja”

JUEGO DE MESA – “BARAJA”



MAZO DE POLINOMIOS

MAZO DE FACTORES

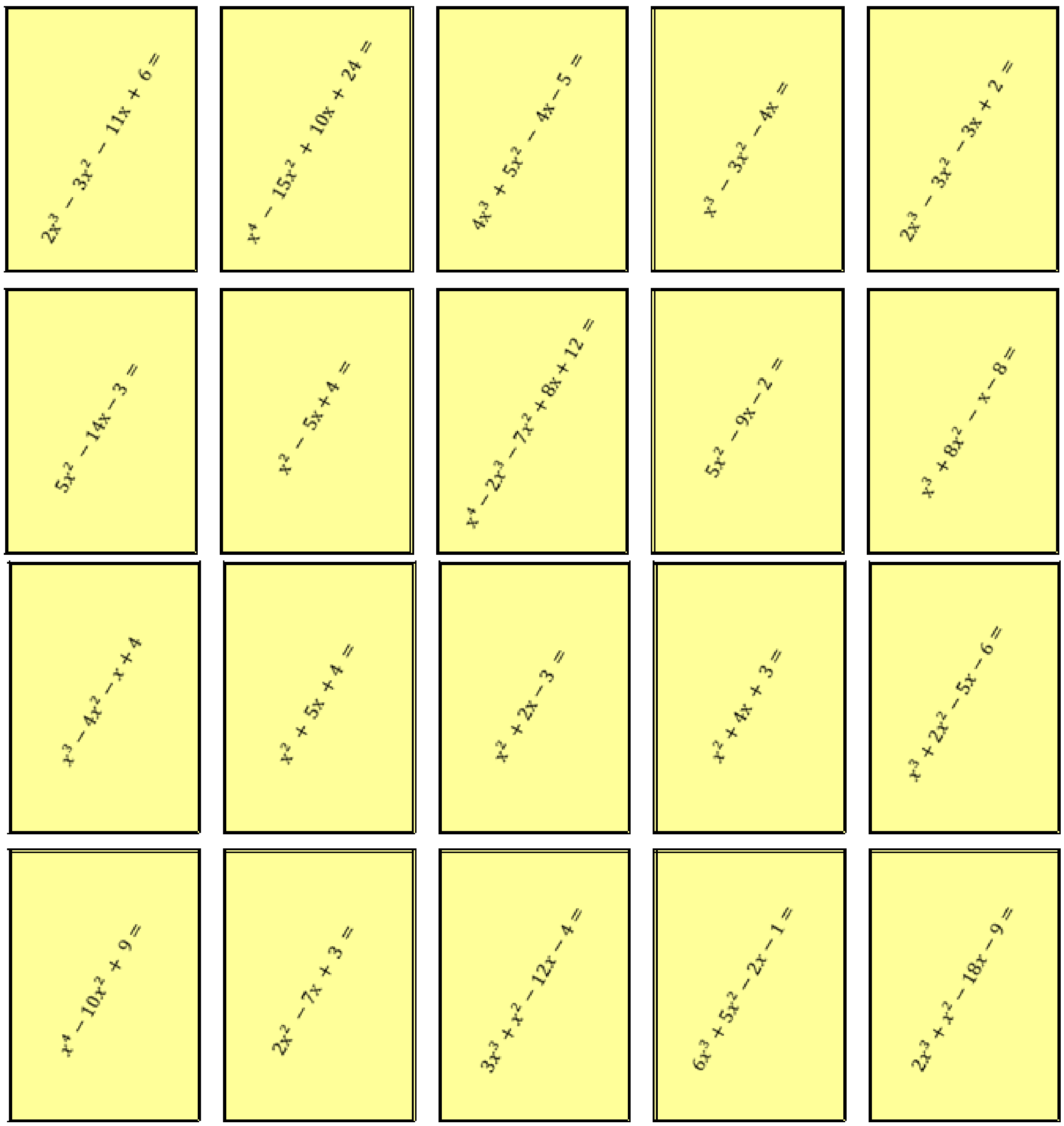
En la siguiente lista se muestran los polinomios que hacen parte de la baraja utilizada en este juego con sus respectivos factores; es de anotar que algunos factores se repiten, lo que ayuda a aumentar la posibilidad de factorizar el polinomio de manera más rápida.

LISTA DE POLINOMIOS FACTORIZADOS

1. $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = (x + 2)(x - 3)(2x - 1)$
2. $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = (x + 1)(x - 2)(x - 3)(x + 4)$
3. $4x^3 + 5x^2 - 4x - 5 = (4x + 5)(x - 1)(x + 1)$
4. $x^3 - 3x^2 - 4x = (x - 4)(x - 0)(x - 1)$
5. $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (2x - 1)(x - 2)(x + 1)$
6. $5x^2 - 14x - 3 = (5x + 1)(x - 3)$
7. $x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1)$
8. $5x^2 - 9x - 2 = (5x + 1)(x - 2)$
9. $x^3 + 8x^2 - x - 8 = (x + 8)(x + 1)(x - 1)$
10. $x^3 - 4x^2 - x + 4 = (x - 4)(x + 1)(x - 1)$
11. $x^2 + 5x + 4 = (x + 4)(x + 1)$
12. $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$
13. $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$
14. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$
15. $x^4 - 10x^2 + 9 = (x + 1)(x + 3)(x - 1)(x - 3)$
16. $2x^2 - 7x + 3 = (2x - 1)(x - 3)$
17. $3x^3 + x^2 - 12x - 4 = (x - 2)(3x + 1)(x + 2)$
18. $6x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = (3x + 1)(x + 1)(2x - 1)$
19. $2x^3 + x^2 - 18x - 9 = (x - 3)(2x + 1)(x + 3)$
20. $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = (x + 2)(x - 2)(x + 1)(x - 3)$

La siguiente figura hace parte de la baraja utilizada para este juego, ésta obedece al mazo de los polinomios, en la que se utilizó el color amarillo para diferenciarla del mazo de los factores y ceros.

Figura 3-2: Mazo de polinomios



A continuación se muestra el mazo de cartas base, correspondiente a los factores y ceros de los polinomios mostrados anteriormente; en este se muestran 15 cartas que son las necesarias para factorizar cualquier polinomio del juego.

Figura 3-3: Mazo de factores

FACTOR: $(X + 0)$ CERO: 0	FACTOR: $(X + 4)$ CERO: -4	FACTOR: $(X + 2)$ CERO: -2
FACTOR: $(X + 8)$ CERO: -8	FACTOR: $(4X + 5)$ CERO: $-5/4$	FACTOR: $(X - 3)$ CERO: $+3$
FACTOR: $(3X + 1)$ CERO: $-1/3$	FACTOR: $(X - 1)$ CERO: $+1$	FACTOR: $(2X - 1)$ CERO: $+1/2$
FACTOR: $(X + 3)$ CERO: -3	FACTOR: $(5X + 1)$ CERO: $-1/5$	FACTOR: $(X + 1)$ CERO: -1
FACTOR: $(2X + 1)$ CERO: $-1/2$	FACTOR: $(X - 4)$ CERO: $+ 4$	FACTOR: $(X - 2)$ CERO: $+2$

REGLAS DEL JUEGO:

1. El juego de mesa diseñado para máximo cuatro jugadores, consiste en una baraja compuesta de 50 cartas divididas a la vez en 2 mazos diferentes, El primero de ellos posee 20 cartas en las que están impresos los polinomios a factorizar y las otras 30 cartas son los posibles factores correspondientes al mazo de los polinomios, los mazos se distinguen fácilmente por tener colores diferentes.

2. Se barajan o mezclan los mazos de polinomios y de los factores por separado.

3. Se toma un polinomio al azar para ser factorizado, se expone en el centro de la mesa para que los jugadores lo tengan a la vista.

4. Del mazo de los factores, se reparten cuatro cartas a cada jugador.

5. Los jugadores en forma rápida deben realizar los cálculos necesarios para saber si sus factores son o no pertenecientes al polinomio a factorizar. (Aplicar los teoremas y cálculos como los desarrollados en las guías).

6. El jugador de turno que encuentre uno de los factores del polinomio puede ir colocando su “carta de factor” al lado del polinomio a factorizar (lo que en la jerga es llamado el descarte).

7. Si el jugador de turno entre sus cartas no tiene factores que le sirvan para ayudar a factorizar el polinomio, tiene derecho a cambiar 2 de sus cartas, y esperar de nuevo su turno mientras realiza de nuevo los cálculos.

8. El polinomio quedaría factorizado cuando uno o varios de los jugadores aportaron los factores necesarios para dar por terminada la partida.

9. El jugador ganador es aquel que más factores aportó en la factorización del polinomio.

10. Los demás jugadores deberán construir un polinomio con los factores que quedaron en su poder así:
    - Si tiene las cuatro cartas de factores, entonces construye un polinomio de grado 4 o dos polinomios de grado 2.
    - Si tiene tres cartas de factores, entonces construye un polinomio de grado 3.

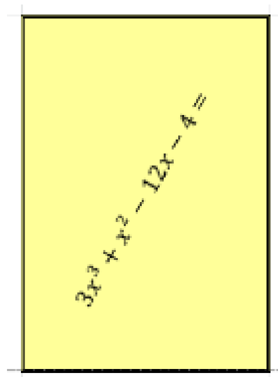
- Si tiene dos cartas de factores, entonces construye un polinomio de grado 2.

11. Si los jugadores realizan las acciones del numeral anterior, no serán considerados perdedores en el juego, por el contrario recibirán puntos de bonificación extra.

EJEMPLO DEL JUEGO:

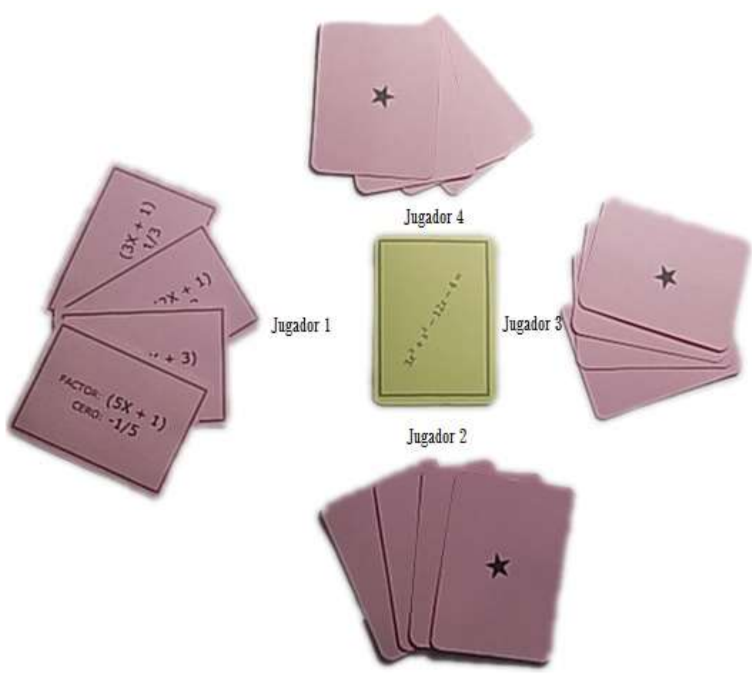
PASO 1: Suponiendo que ya se han barajado por separado cada uno de los mazos de cartas,

PASO 2: Se toma un polinomio al azar y se expone en el centro de la mesa para que los jugadores lo tengan a la vista.



PASO 3: De los factores, se reparten cuatro cartas a cada jugador.

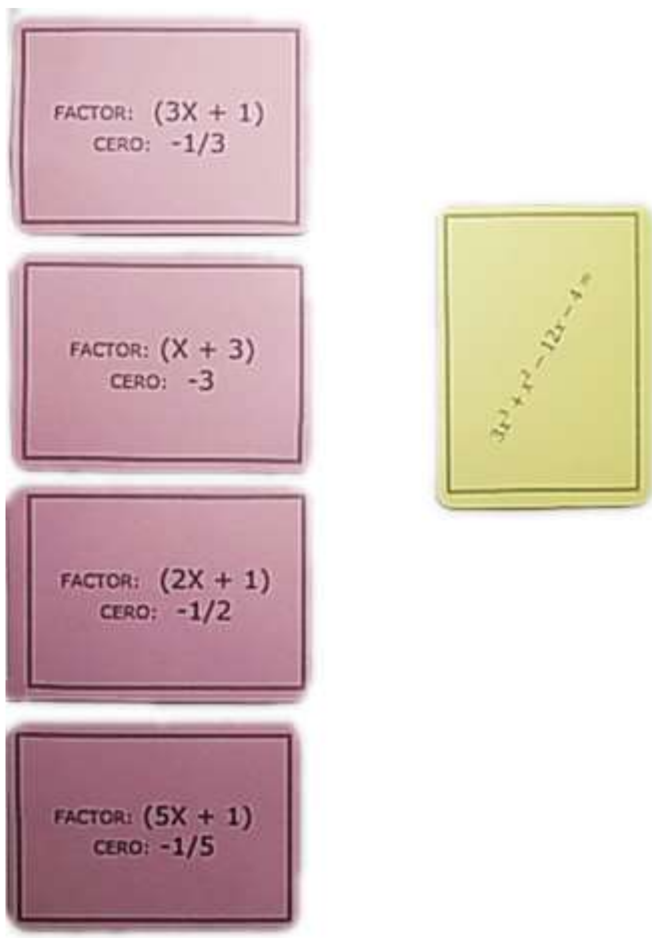
Figura 3-4: Repartición de las cartas



PASO 4: Los jugadores realizan los cálculos necesarios para averiguar si entre sus cartas existe un factor del polinomio destapado, con las técnicas preferidas vistas en clase y si todos los otros jugadores lo permiten, con el apoyo de una calculadora.

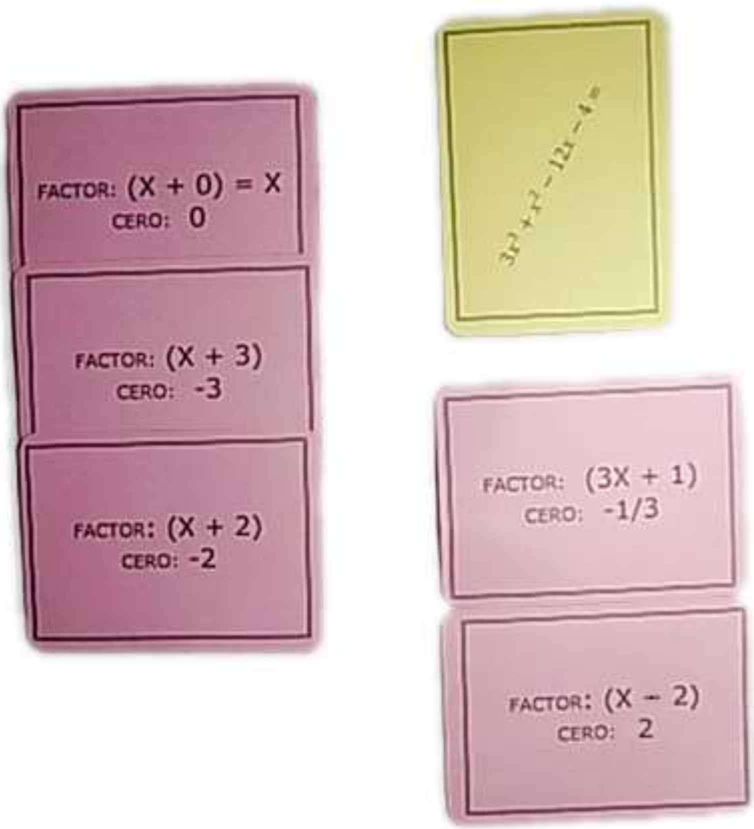
PASO 5: El jugador de turno (que posee la prelación sobre los demás) que encuentre uno de los factores del polinomio, podrá ir colocando éste al lado del polinomio (lo que en la jerga de la baraja es el llamado descarte).

Figura 3-5: Descarte



En este caso, el “Jugador 1” posee entre sus cartas un factor del polinomio, el factor $(3x + 1)$ y lo ubica al lado o debajo de la carta polinomio; de igual manera, suponiendo que otro jugador en la mesa también encontró un factor, realiza su descarte, como lo muestra la siguiente figura.

Figura 3-6: Descarte segunda ronda



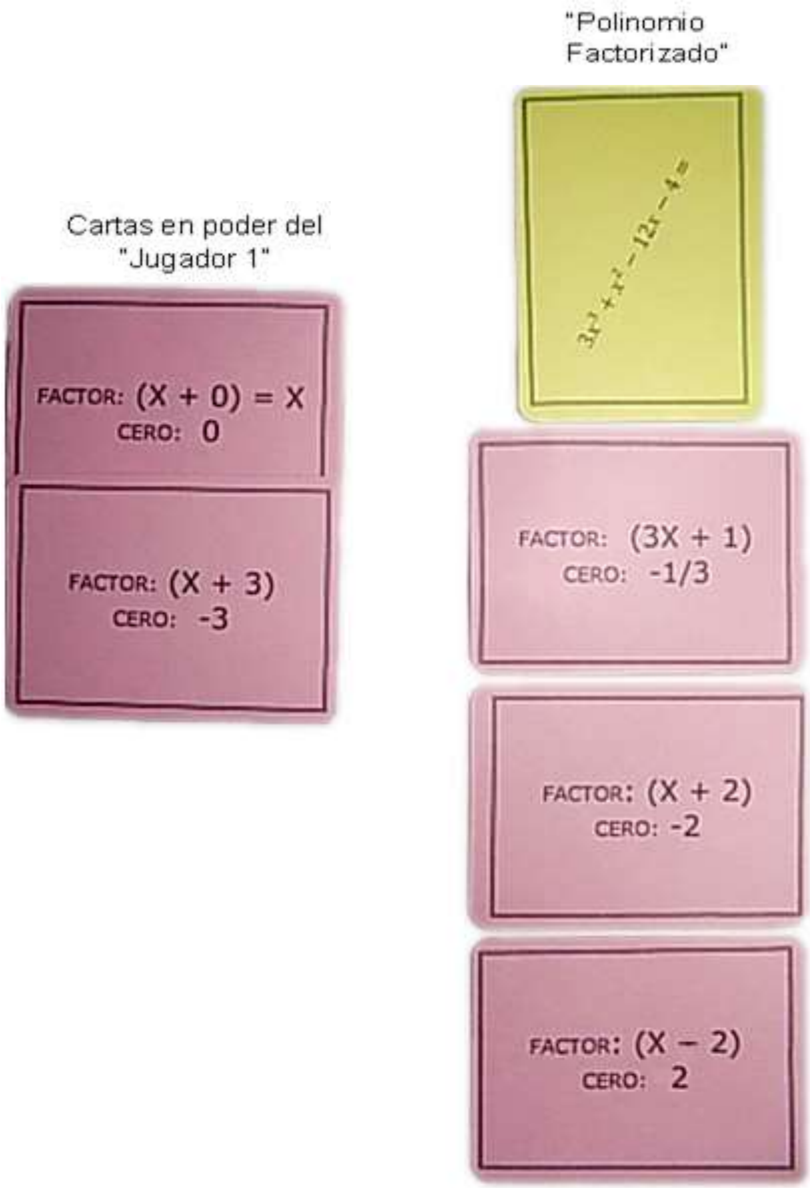
PASO 6: Suponiendo una nueva ronda, el “Jugador 1”, entre sus cartas no tiene más factores, tiene derecho a cambiar 2 de sus cartas, iniciar de nuevo el cálculo y esperar de nuevo su turno. Así para cada uno de los integrantes de la mesa.

PASO 7: El polinomio quedaría factorizado cuando uno o varios de los jugadores aportaron los factores necesarios.

PASO 8: El jugador ganador es aquel que más factores aportó en la factorización del polinomio.

En este caso, el polinomio ya está factorizado, podemos observar que el "Jugador 1" es el ganador ya que aporto dos de los factores, quedando este con el menor número de cartas en su poder que los demás jugadores.

Figura 3-7: Resultado final



PASO 9: Los demás jugadores deben construir un polinomio con los factores que quedaron en su poder, así:

- Si tiene las cuatro cartas de factores, entonces construye un polinomio de grado 4 o dos polinomios de grado 2.
- Si tiene tres cartas de factores, entonces construye un polinomio de grado 3.
- Si tiene dos cartas de factores, entonces construye un polinomio de grado 2.

PASO 10: Si los jugadores realizan las acciones del numeral anterior, no serán considerados perdedores en el juego, por el contrario recibirán puntos de bonificación.

4. Conclusiones y recomendaciones

4.1 Conclusiones

Gran parte de la labor docente es la de motivar y encaminar al estudiante para que su conocimiento (teórico y práctico) pueda convertirse en la habilidad de comprender el mundo que lo rodea.

El juego en las matemáticas permite que exista menor prevención hacia los temas, que el estudiante compita y comparta sanamente con sus pares, que se divierta y al mismo tiempo que adquiere y comprende los conocimientos necesarios para que cumplan los objetivos programados con este o se desarrollen otras actividades que dependan de este.

En el desarrollo del proceso se observó en los estudiantes el deseo de superar cada obstáculo de manera rápida, tanto en el análisis de la teoría y ejemplos, como en la solución de los ejercicios propuestos, involucrándose rápidamente en su propio proceso de enseñanza y aprendizaje y generando igualmente la capacidad de sustentar cada uno de los procedimientos propios en la solución ejercicio.

Para la gran mayoría de estudiantes es complicado realizar una lectura de una situación cotidiana, representarla en su forma algebraica, darle solución e interpretar esta en términos del problema inicial; mucho menos extraer información a partir de los gráficos. Sin embargo con la ejecución del juego se logró mejorar el porcentaje de ninguno, es decir, 0% a 25% de los estudiantes que demostraron un desempeño entre alto (A) y superior (S) en cuanto al modelado y representación de situaciones cotidianas, bien sea a través de una ecuación, un polinomio algebraico o un gráfico.

El iniciar las actividades utilizando un lenguaje cotidiano, provocó en los estudiantes una situación de familiaridad, de acercamiento hacia los temas, dispuestos y abiertos al aprendizaje, con el tiempo se llamaron con su nombre dichos procedimientos, situación que no altero su dedicación y deseo de superarse.

A medida que se aumenta el nivel de dificultad o se cambian algunas condiciones, como la de invitar a los estudiantes no solo a resolver los ejercicios en una sola dirección (polinomio, ceros, división sintética, factores y gráfico), es decir, de manera mecánica, sino que debían realizar ejercicios en forma inversa de tal forma que a partir del grafico tomaran toda la información necesaria para construir el polinomio correspondiente y sobre todo en el menor tiempo posible. Esto genera de nuevo un momento de incertidumbre y de resistencia por parte de algunos estudiantes, que permite definir claramente cuales estudiantes se han apropiado de los conocimientos (prácticos y teóricos) y que de buena manera los han transformado en una habilidad para la vida o mejoramiento de la capacidad cognitiva.

Según Piaget, “el juego es esencialmente la asimilación de la realidad por el yo”[7] que inculcan en el ser humano valores individuales de motivación y competencia, mientras que con una teoría complementaria Vygotsky promueve el juego como una necesidad social, en la que se establecen relaciones humanas basadas en la confianza, ayuda mutua y el cooperativismo.

Partir del autoconocimiento del estudiante, de que sea él mismo quien se autoevalúe, es el quien debe confiar en sus propias capacidades y hasta donde puede y quiere llegar con ellas, es sin duda el pilar fundamental en los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula de clase. A partir del autoconocimiento aparecen de manera intrínseca los demás valores individuales, por ejemplo, si conozco mis debilidades, entonces la responsabilidad y perseverancia para mejorarlas dependen únicamente de mi reflexión interna, del autoconocimiento también aparecen los valores como el respeto, la tolerancia, la solidaridad por el compañero y finalmente la cooperación, como el deseo de aportar a mi grupo social del momento, en este caso al buen desempeño académico de todos los miembros del grado undécimo.

[7] Citado por (Huaiquián, I. sf. p.2)

Realmente es importante dedicar el tiempo necesario para la preparación y adecuación de algunos temas, que por su complejidad lingüística para los estudiantes, merecen atención especial; no importa cuál sea la estrategia a utilizar (preferiblemente de manera lúdica); mantener animado a los estudiantes, aprovechando sus conocimientos previos o de su cotidianidad ayuda a mejorar la confianza y la comprensión, aumentando sus capacidades y competencias.

4.2 Recomendaciones

La idea de desarrollar una estrategia lúdico-pedagógica para los estudiantes del grado undécimo del colegio José Antonio Galán estuvo basada en su cotidianidad y en sus costumbres. Se desea que siempre exista una mejora continua de esta estrategia lúdico-pedagógica; es por eso que se recomienda a futuros estudiantes del colegio que la sigan utilizando dados los buenos resultados obtenidos, al mismo tiempo que docentes interesados en mejorar, adecuar o aplicar las guías y el juego en otros contextos, lo puedan realizar en pro de la preparación que un estudiante requiere en su ingreso a las instituciones de educación superior.

Una segunda recomendación sería poder desarrollar esta idea como un juego de cartas virtual, la cual se pueda instalar en los computadores de los colegios como software educativo, también a manera de aplicación para dispositivos móviles ya que le sería muy útil fortalecer esta habilidad a los estudiantes universitarios que están cursando los primeros semestres en carreras técnicas o ingenierías.

A. Anexo: GUIA DE TRABAJO No. 1

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA RURAL JOSÉ ANTONIO GALÁN **TALLER EN CLASE No 1** **05/05/2014**	

VALOR NUMERICO DE UN POLINOMIO

1. Para hallar el valor numérico de un polinomio se debe reemplazar el valor de "x" deseado en el polinomio dado.

EJEMPLO 1: Reemplazar en el polinomio $p(x) = 7x^3 - 2x^2 - 5x - 4,$ si $x = 2$

Reemplazando el valor de "$x = 2$", tenemos: $p(2) = 7(2)^3 - 2(2)^2 - 5(2) - 4$

Resolvemos cada potencia: $p(2) = 7(8) - 2(4) - 5(2) - 4$

Resolviendo las multiplicaciones: $p(2) = 56 - 8 - 10 - 4$

Finalmente, el valor numérico del polinomio cuando "$x = 2$" es: $\boldsymbol{p(2) = 34}$

EJERCICIOS: Hallar el valor numérico de los polinomios cuando "x" toma el valor dado.

a) $p(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 4$ si $x = -3$
b) $p(x) = 7x^3 + 2x^2 + 12x + 1$ si $x = -1$
c) $p(x) = 10x^4 + 3x^3 - 4x - 5$ si $x = 1/2$
d) $p(x) = 12x^5 + 6x^3 - 2x - 8$ si $x = -2$
e) $p(x) = x^2 - 4x + 3$ si $x = 1$
f) $p(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$ si $x = 1$
g) $p(x) = 3x^2 - 12x + 9$ si $x = 3$

2. Si al calcular el valor numérico de un polinomio, lo llamamos "$p(a)$" cuando "$x = a$", ($\boldsymbol{a}$ es un número racional) y si su resultado es cero, se dice que:

"*el numero **a** es una raiz o cero del polinomio*".

EJEMPLO 2:

$p(x) = x^3 + 7x^2 + 8x + 2$ si $x = a = -1$ entonces

$p(-1) = (-1)^3 + 7(-1)^2 + 8(-1) + 2 = -1 + 7 - 8 + 2 = 9 - 9 = 0$

3. Si "$x = a$" es una raíz o cero de un polinomio, es decir, "$p(a) = 0$" entonces decimos que "$p(x)$" tiene un factor llamado "$(x - a)$".
EJEMPLO 3:

En el ejemplo 2, tenemos que: $x = a = -1$, es una raíz o cero del polinomio "$p(x)$", por que "$p(-1) = 0$" (Cuando en el polinomio reemplazo la x por el -1, su valor numérico es cero) entonces podemos estar seguros que el polinomio $p(x) = x^3 + 7x^2 + 8x + 2$, tiene un factor que se llama:

$(x - (a))$, es decir,

$(x - (-1)) = (x + 1)$ “Por ley de signos”

B. Anexo: GUIA DE TRABAJO No. 2

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA RURAL JOSÉ ANTONIO GALÁN **TALLER EN CLASE No 1** **12/05/2014**	

TEOREMA DEL FACTOR

El polinomio P(x) es divisible por un polinomio de la forma (x − a) si y sólo si P(a) = 0.

Al valor x = a se le llama raíz o cero de P(x).

EJEMPLO:

$p(x) = x^3 + 7x^2 + 8x + 2$ Si $x = a = -1$, Reemplazando,

$p(-1) = (-1)^3 + 7(-1)^2 + 8(-1) + 2 = -1 + 7 - 8 + 2 = 9 - 9 = 0$

Como $p(-1) = 0$ entonces decimos que el polinomio $p(x)$ es divisible exactamente por $(x - (-1)) = (x + 1)$, es decir $x = a = -1$ es una raíz del polinomio $p(x)$.

EJERCICIOS:
En cada caso, hallar los valores de "x" tales que hagan cero el valor del polinomio $p(x)$.

NOTA: Los ceros o raíces enteras de un polinomio son los divisores positivos o negativos del término independiente del polinomio.

1. $P(x) = x^2 - 5x + 6$
2. $P(x) = x^2 + 2x + 1$
3. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$
4. $P(x) = x^4 + 8x^3 - x^2 - 8x$
5. $P(x) = x^3 - 15x^2 + 20x - 12$
6. $P(x) = x^4 - 10x^2 + 9$
7. $P(x) = x^5 - 4x^3 - x^2 + 4$

C. Anexo: GUIA DE TRABAJO No. 3

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA RURAL JOSÉ ANTONIO GALÁN **TALLER EN CLASE No 1** **12/05/2014**	

RECORDEMOS QUE:

TEOREMA DEL FACTOR: **El** polinomio P(x) es divisible por un polinomio de la forma (x − a) si y sólo si P(a) = 0. Además a**l valor** $x = a$ **se le llama** raíz o cero **de P(x).**

Cuando el coeficiente principal es diferente de "1", entonces los ceros o raíces del polinomio se encuentran en la lista de dividir entre si los divisores del término **independiente** entre los divisores de dicho coeficiente:

EJEMPLO:

Si $p(x) = 3x^3 + x^2 - 12x\ \ 4$,	Los divisores de 4 son:	±1	±2	±4
	Los divisores de 3 son:	±1		±3

Las posibles raíces de p(x) estarán en la siguiente lista

$$\pm\frac{1}{1}, \quad \pm\frac{1}{3}, \quad \pm\frac{2}{1}, \quad \pm\frac{2}{3}, \quad \pm\frac{4}{1} \quad \pm\frac{4}{3}$$

Para saber cuáles son los ceros o raíces exactas del polinomio de estos 12 valores, se calcula el valor numérico del polinomio para cada uno de ellos, es decir, aplicamos los criterios y teoremas vistos en las guías pasadas. *(Realizarlo con sus compañeros en el cuaderno)*

NOTA: Los ceros o raíces racionales de un polinomio son los divisores del término independiente divididos entre los divisores del coeficiente principal.

EJERCICIOS:

En cada caso, hallar la lista de las posibles raíces del polinomio y Factorice los polinomios utilizando las técnicas vistas en clase.

1. $p(x) = 2x^4 - 3x^2 + x - 9$
2. $p(x) = 4x^3 - 5x^2 - 7x + 2$
3. $p(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2x - 4$
4. $p(x) = 6x^2 + x - 2$
5. $p(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$
6. $p(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 3$
7. $p(x) = 3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 12x - 12$
8. $p(x) = 6x^3 + 25x^2 + 2x - 8$

D. Anexo: GUIA DE TRABAJO No. 4

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA RURAL JOSÉ ANTONIO GALÁN **TALLER EN CLASE No 1** **12/05/2014**	

DIVISION SINTÉTICA:

La división sintética.se puede utilizar para dividir una función polinómica por un binomio de la forma $(x - a)$. Esto nos permite, por ejemplo hallar el cociente y el residuo que se obtiene al dividir el polinomio por $(x - a)$. Además, por el teorema del residuo al aplicar la división sintética se obtiene el valor numérico del polinomio. También permite encontrar los factores y ceros de un polinomio. Al encontrar los ceros de un polinomio, éste se puede factorizar completamente y expresar como el producto de sus factores lineales. En resumen, la división sintética juega un papel preponderante en la división de un polinomio por un factor lineal de la forma $(x - a)$.

RECORDEMOS:

Si un número $(x - a)$ es un factor del polinomio, entonces a es una raíz.

EJEMPLO:

Utilizando los criterios vistos en clase. Factorizar el siguiente polinomio $p(x)$:

$p(x) = 3x^3 + x^2 - 12x - 4$,	Los divisores de 4 son:	±1	±2	±4
	Los divisores de 3 son:	±1		±3

Las posibles raíces de p(x) estarán en la siguiente lista

$$\pm\frac{1}{1}, \quad \pm\frac{1}{3}, \quad \pm\frac{2}{1}, \quad \pm\frac{2}{3}, \quad \pm\frac{4}{1} \quad \pm\frac{4}{3}$$

En el salón de clase se realizó para valores de ± 1 y +1/3, su residuo fue diferente de cero, continuando:

					Raíz	→	Factor
Ubicar los coeficientes de *x en orden.*	3	1	-12	-4	-1/3	→	(x + 1/3)
		-1	0	4			
Bajo el 3 y opero hasta que el residuo sea cero	3	0	-12	**0**	2	→	(x – 2)
		6	12				
	3	6	**0**		-2	→	(x + 2)
		-6					
El coeficiente principal también es un factor	3	**0**					

Por lo tanto el polinomio factorizado será:

$$p(x) = 3x^3 + x^2 - 12x - 4 = 3\left(\mathrm{x} + \frac{1}{3}\right)(\mathrm{x}-2)(\mathrm{x}+2) = (3\mathrm{x}+1)(\mathrm{x}-2)(\mathrm{x}+2)$$

Bibliografía

Banda, E. M. (15 de 11 de 2008). *Monografias*. Recuperado el 29 de 10 de 2014, de http://www.monografias.com/trabajos65/uso-juego-estrategia-educativa/uso-juego-estrategia-educativa2.shtml

Banda, E. M. (s.f.). *Monografias*. Recuperado el 16 de 11 de 2014, de http://www.monografias.com/trabajos65/uso-juego-estrategia-educativa/uso-juego-estrategia-educativa2.shtml

Cárdenas, C. C. (2013). *Apertura al pensamiento lógico matemático en el nivel preescolar.* tesis, unversidad nacional de colombia, Manizales.

Garcia, C. (1997). *Evolucion Historica del Pensamiento Cientifico.* Manizales, Caldas: Universidad de Manizales.

Española, R. A. (s.f.). *www.rae.es*. Recuperado el 10 de 10 de 2014, de http://lema.rae.es/drae/?val=juego

Ferrari, R. C. (s.f.). *http://www.soarem.org.ar/.* Recuperado el 2015, de http://www.soarem.org.ar/Documentos/41%20Cantoral.pdf

Guzman, M. d. (1984). *El juego en la enseñanza de las matematicas.* Tenerife: IV JAEM.

http://es.wikipedia.org/wiki/Diofanto_de_Alejandr%C3%ADa. (s.f.). Recuperado el 15 de 05 de 2014, de http://es.wikipedia.org: http://es.wikipedia.org

http://facultad.bayamon.inter.edu/ntoro/raicesw.htm. (s.f.). Recuperado el 15 de 2 de 2015, de http://facultad.bayamon.inter.edu/ntoro/raicesw.htm

Johana Andrea Torres Dıaz, L. C. (s.f.). Factorización Álgebraica. *Memorias XIV Encuentro de Geometríıa y II de Aritmética* (págs. 177-185). Santafe de Bogota: Universidad Pedagogica Nacional.

Luis, P. (2006). La resolución de problemas en la historia de las matemáticas. *XIX Olimpiada Iberoamericana de Matemática* (pág. 13). Castellón: Publicaciones de la Universidad de Jaume I.

MEN, E. B. (2003). *Ministerio de Educacion Nacional.* Recuperado el 10 de 2014, de www.men.gov.co

Milena, J. A. (2013). La factorización de polinomios de segundo grado y los personajes involucrados en su historia. *Congreso de educacion matematicas de america central y del caribe.* Santo Domingo (Rep. Dominicada): Universidad Pedagogica Nacional de Colombia.

Neira, I. J. (s.f.). *www.cibem.org.* Recuperado el 15 de 01 de 2015, de www.cibem.org/.../145_1369330058_extenso_analizando_la_parabola.d

Orlando, B. N. (2012). *El álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado.* Recuperado el 15 de 05 de 2014, de www.bdigital.unal.edu.co/8063/1/javierorlandoballénnovoa.pdf.

Ortega ortega, j. a. (SD). *historia del álgebra.* Recuperado el 15 de 05 de 2014, de www.juntadeandalucia.es: www.juntadeandalucia.es/averroes/~29700989/...de.../histalg.pdf

Ospina, O. E. (2013). Matematicas. *Contenidos Cientificos I*, (págs. 1-53). Manizales.

Ospina, O. E. (s.f.). Contenidos Cientificos Matematicas.

PIAGET, J. (1985). *SEIS ESTUDIOS DE PSICOLOGÍA.* BARCELONA: PLANETA.

Problem.org, L. i. (03 de 04 de 2009). *Enciclopedia de Todas las Palabras de la Matemáticas*. Recuperado el 24 de 10 de 2014, de http://www.allmathwords.org/es/r/rationalrootstheorem.html.

Psicopedagogia. (s.f.). *Psicologos Online*. Recuperado el 8 de 11 de 2014, de http://www.psicopedagogia.com/definicion/teoria%20del%20aprendizaje%20de%20vigotsky

Real Academia Española. (2014). *rae*. Obtenido de http://lema.rae.es/drae/?val=juego

Salvador, A. (s.f.). *El juego como recurso didactico en el aula de matematicas.* Recuperado el 15 de 10 de 2014, de http://www2.caminos.upm.es: http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/grupomaic/conferencias/12.Juego.pdf

SALVADOR, A. (s.f.). *www.caminos.upm.es.* Obtenido de http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/grupomaic/conferencias/12.Juego.pdf

Villabrille, B. (s.f.). *Instituto Superior Pedro Poveda.* Recuperado el 2015, de http://www.soarem.org.ar: http://www.soarem.org.ar/Documentos/24%20Villabrille.pdf